



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Problemas de Valores Iniciales para Ecuaciones Diferenciales con Lados Derechos $q$ -Antimonogénicos en el Análisis de Clifford Generalizado.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Maria Clara Sapiain** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Antonio Di Teodoro.**

Caracas, Venezuela

Abril 2014

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Problemas de Valores Iniciales para Ecuaciones Diferenciales con Lados Derechos  $q$ -Antimonogénicos en el Análisis de Clifford Generalizado**”, presentado por el **Br. Maria Clara Sapiain**, titular de la Cédula de Identidad **19.023.757**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Antonio Di Teodoro**  
**Tutor**

---

**Cristina Balderrama**  
**Tutor**

---

**Manuel Maia**  
**Jurado**

---

**Adrian Infante  
Jurado**

A mi madre Clara y a mi padre Cesar, a quien les debo toda mi vida.

A mi abuelo Luis en el cielo.

## Agradecimiento

Primero y antes que nada, dar gracias a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente.

Un especial agradecimiento a Antonio Di Teodoro, por su tiempo, su talento y su apoyo.

Gracias a Cristina Balderrama por sus sugerencias y buenos consejos.

Y gracias a Goyo, mi consejero y apoyo incondicional.

## RESUMEN

En la siguiente investigación se estudian problemas elípticos en derivadas parciales con condiciones iniciales según la teoría de espacios asociados [8].

Sea  $D_q = \sum_{i=0}^n q_i e_i \frac{\partial}{\partial_i}$  el Operador de Cauchy-Riemann generalizado, donde los  $q_i$  pueden ser funciones real valuadas o constantes reales o complejas. Se considera la ecuación diferencial

$$(0.1) \quad D_q u = F(x, u),$$

en el Análisis de Clifford. Mediante matrices de transición se presentarán las condiciones suficientes para que lados derechos de la ecuación diferencial (0.1) sean q-antimonogénicos generalizados. Además se garantizan las condiciones bajo las cuales el operador que define al problema de valores iniciales sea asociado a ecuaciones diferenciales con lados derechos q-antimonogénicos en  $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$ ,  $n = 1, 2$ .

Los resultados obtenidos en esta investigación representan una generalización de los resultados de los trabajos [1],[4].

**Palabras Clave:** Operador de Cauchy-Riemann en dimensiones superiores, álgebras de Clifford clásicas, álgebras de Clifford dependiendo de parámetros, matrices de transición, espacio asociado.

## Índice general

RESUMEN	v
INTRODUCCIÓN	vii
Capítulo 1. PRELIMINARES	1
1. Números Complejos	1
2. El operador de Cauchy-Riemann en Dimensiones Superiores	3
3. Álgebras de Clifford Definidas por Clases de Equivalencias	4
4. Funciones Monogénicas	8
5. Operadores de Cauchy-Riemann Generalizados.	10
6. Álgebras de Clifford Dependiendo de Parámetros	11
7. Funciones Monogénicas Generalizadas con Lado Derecho $q$ -Antimonogénico	13
Capítulo 2. PROBLEMA DE VALORES INICIALES	15
1. Operador Integro-Diferencial.	15
2. Principio de Contracción de Banach	16
3. Estimados Interiores	20
4. Espacios Asociados	20
Capítulo 3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES INICIALES	22
1. Matrices de Transición	22
2. Espacio Asociado	26
Capítulo 4. CONCLUSIÓN	37
Apéndice	38
Bibliografía	49

## INTRODUCCIÓN

En 1878-1882, William K. Clifford creó y clasificó las álgebras que hoy se conocen con su nombre, **Álgebras de Clifford**. Ellas representan una extensión natural del sistema de números reales que incluye el concepto de dirección. Los números complejos y los cuaterniones de Hamilton son ejemplos de álgebras de Clifford de bajas dimensiones.

Considerando funciones con valores en un álgebra de Clifford se puede pensar en una extensión del análisis complejo a dimensiones mayores, es así como surge el análisis de Clifford. En los últimos años la teoría del análisis de Clifford se ha extendido a diversos campos de la matemática y la física teórica. Aplicaciones importantes de esta teoría se han llevado a cabo en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, el análisis armónico, el análisis de ondículas y la geometría diferencial, entre otros.

Las Álgebras de Clifford clásicas  $\mathcal{A}_n$  se pueden definir a través de clases de equivalencias [5], [9].

$$X_j^2 + 1 \sim 0 \quad \text{y} \quad X_j X_k + X_k X_j \sim 0.$$

Considerando relaciones de equivalencia más generales que las anteriores, se pueden obtener álgebras de Clifford más generales [2]. Su definición es como sigue:

Sobre el anillo de polinomios  $\mathfrak{R}[X_1, \dots, X_n]$ . Considere las relaciones:

$$(0.2) \quad X_j^{k_j} + \alpha_j(p) \sim 0 \quad \text{y} \quad X_j X_k + X_k X_j - 2\gamma_{ij}(p) \sim 0,$$

donde  $i, j = 1, \dots, n$  y  $i \neq j$ . Aquí  $\alpha_j(p)$  y  $\gamma_{ij}(p) = \gamma_{ji}(p)$  son funciones a valores reales dependiendo posiblemente de un parámetro  $p$ .

Usando estas relaciones de equivalencia, cada término de un polinomio en  $X_1, \dots, X_n$  puede ser escrito de la forma

$$cX_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n},$$

donde  $c$  es una constante real y los exponentes  $\nu_j$  no son más grandes que  $k_j - 1$ , es decir,  $0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$ .

El álgebra de Clifford generada por las relaciones de equivalencia (0.2) se denotará por

$$\begin{cases} \mathcal{A}_n(p|k_j, \alpha_j(p), \gamma_{ij}(p)) & \text{si } n \geq 2, \\ \mathcal{A}_1(p|k, \alpha(p)) & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, si consideramos el operador de Cauchy-Riemann generalizado, es decir,  $D = \sum_{j=0}^n e_j \partial_{x_j}$  donde los  $e_j$  son elementos de la base del álgebra de Clifford y se lo aplicamos a una cierta  $u \in \mathcal{A}_n$ , podemos introducir un nuevo conjunto de funciones a las que llamamos funciones monogénicas a la izquierda o a la derecha,  $Du = 0$  ó  $uD = 0$ , respectivamente.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la fórmula integral de Cauchy, el teorema de convergencia de Weierstrass y cálculos de las soluciones fundamentales con sus respectivas representaciones integrales son algunos de los resultados obtenidos con funciones monogénicas.

En vista de que las álgebras de Clifford dependiendo de parámetros son más generales que las álgebras de Clifford clásicas, se pueden generalizar muchos resultados del análisis de Clifford clásico a este contexto. En el trabajo de Tutschke y Vanegas [5], aparecen por primera vez las álgebras de Clifford parametrizadas y algunos fundamentos del análisis de Clifford correspondiente como por ejemplo a las representaciones integrales para funciones. En particular resultan de mayor generalidad los problemas de valores iniciales ya que por un lado se obtienen ecuaciones más generales y por otro lado al escoger apropiadamente los parámetros, obtenemos el caso particular del correspondiente problema de valores iniciales en el análisis de Clifford clásico.

Una manera de resolver el problema de valores iniciales:

$$(0.3) \quad \partial_t u(t, x) = \mathcal{F}(t, x, u, \partial_j u), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$(0.4) \quad u(0, x) = \varphi(x)$$

es determinando los puntos fijos de el operador integro-diferencial:

$$(0.5) \quad U(t, x) = \varphi + \int_0^t \mathcal{F}(\tau, x, u(\tau, x), \partial_j u(\tau, x)) d\tau$$

Para construir los puntos fijos de este operador, debemos estimar el operador integro-diferencial del lado derecho de (0.5). Esto no es tan sencillo ya que la integral contiene derivadas con respecto a la variable espacial  $x_j$ . Pero la estimación es posible en caso de que utilicemos el **método de espacios asociados**. Buscamos un espacio de funciones asociadas que cumplan con dos propiedades:

- (1) El operador mande el espacio en si mismo. Lo que significa que utiliza el concepto de **pares asociados** [3].
- (2) Para elementos del espacio asociado, tenemos **estimados interiores**, esto es que las normas de las derivadas con respecto a las variables espaciales de los elementos del espacio asociado, pueden ser estimados por las normas de los elementos [6], [7].

En el trabajo de Tutschke [8], se resuelve el problema de valores iniciales (0.3)-(0.4) para ecuaciones en derivadas parciales dadas por el operador de Cauchy-Riemann  $D$  mediante la construcción de espacios asociados, considerando funciones en un álgebra de Clifford clásica. En este trabajo de investigación, consideramos un operador más general que el operador de Cauchy-Riemann generalizado  $D$ , dado por  $D_q = q_0(x)e_0\partial_0 + \sum_{j=1}^n q_j(x)e_j\partial_j$ , donde los  $q_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  son constantes reales. Mediante el método de espacios asociados logramos construir el espacio asociado para el operador diferencial que define el problema de valores iniciales, utilizando el operador  $D_q$ , con funciones en el álgebra de Clifford con parámetros.

Para la exposición de los resultados, consideramos 3 capítulos que forman el cuerpo de este trabajo. En el primer capítulo se presentan los fundamentos de las álgebras de Clifford. En el capítulo 2 expondremos cómo se pueden resolver problemas de valores iniciales para ecuaciones en derivadas parciales dadas por el Operador de Cauchy-Riemann  $D$  a través del

método de espacios asociados [11].

Resultados de gran importancia presentados en este trabajo, se pueden observar en el capítulo 3. Utilizando el método de espacios asociados se abordó el problema de valores iniciales (0.3)-(0.4) pero en este caso para ecuaciones en derivadas parciales dadas por el operador  $D_q$  en el contexto de las álgebras de Clifford parametrizadas. Estos resultados abren las puertas a la resolución de otros problemas más generales de problemas de valores iniciales, para la ecuación  $D_q u(x) = F(x, u(x))$ , al reducir los problemas de valores iniciales a problemas de punto fijo que pueden ser resueltos por los teoremas de punto fijo usuales.

En concreto, podemos decir que en este trabajo de investigación, los resultados de [1] y [3] se generalizan usando el operador  $D_q$  para el caso que  $q_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  son constantes reales.

## PRELIMINARES

En este capítulo las Álgebras de Clifford serán definidas como clases de equivalencia de polinomios de  $n$  variables ( $n \geq 2$ ). Diversos resultados del análisis de Clifford hoy en día juegan un papel importante en diferentes áreas de la matemática y de la física como ecuaciones en derivadas parciales, mecánica cuántica, electromagnetismo y otras. Parte de la teoría que se presenta en este capítulo puede ser revisada en [5].

### 1. Números Complejos

**1.1. Definición usual de los números complejos.** Usualmente definimos los números complejos como pares  $(a, b)$  ordenados de números reales  $a, b$ . Su suma y producto se definen como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Los elementos neutros con respecto a la suma y multiplicación son  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ , respectivamente.

Observe que los números reales de la forma especial  $(a, 0)$  pueden ser identificados con los números reales de la forma  $a$  pues la suma y multiplicación de tales pares quedan en ese subconjunto:

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0).$$

Dichas operaciones coinciden con las correspondientes para números reales.

**1.2. Otra construcción de números complejos.** Es conocido que los números complejos pueden ser escritos en la forma

$$a + bi = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

donde el vector  $(1, 0)$  es identificado con el número real 1 y el vector  $(0, 1)$  con el símbolo  $i$ . Sin embargo, los números complejos también pueden ser interpretados como polinomios lineales

$$a + bX,$$

donde ahora el vector  $(0, 1) = i$  se identifica con la variable  $X$ . En este caso, la suma de dos números complejos  $a + bX$  y  $c + dX$  también puede ser obtenida como la suma de los correspondientes polinomios:

$$(a + bX) + (c + dX) = (a + c) + (b + d)X.$$

Tomando en consideración la relación

$$X^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1,$$

se puede aplicar el mismo argumento al producto:

$$\begin{aligned} (a + bX) \cdot (c + dX) &= ac + (ad + bc)X + bdX^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)X. \end{aligned}$$

Reemplazando  $X^2$  por  $-1$ , cada polinomio puede ser reducido a un polinomio lineal. Suponga que  $P(X)$  tiene la forma

$$P(X) = \dots + cX^k + \dots$$

con  $k \geq 2$ , entonces esta reducción lleva a

$$Q(X) = \dots - cX^{k-2} + \dots$$

y así sucesivamente. Note que

$$P(X) - Q(X) = M(X)(X^2 + 1),$$

donde  $M(X)$  es otro polinomio en  $X$  de grado menor que el grado de  $P(X)$ . En otras palabras, la diferencia de los polinomios correspondientes contiene el factor  $(X^2 + 1)$ .

Dos polinomios en  $X$  se dicen equivalentes si su diferencia es un polinomio que contiene al factor  $(X^2 + 1)$ . Entonces los números complejos pueden ser definidos como clases de equivalencia de polinomios en  $X$ .

Por ejemplo,

$$a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$$

significa el mismo número complejo que

$$a + bX + cX^2 + dX \cdot X^2 + eX^2 \cdot X^2 = (a - c + e) + (b - d)X$$

debido a que la diferencia de los polinomios del lado izquierdo y del derecho es

$$c(X^2 + 1) + dX(X^2 + 1) + e(X^4 - 1) = (X^2 + 1)[c + dX + e(X^2 - 1)].$$

Como cada polinomio puede ser reducido a uno lineal, la multiplicación de números complejos queda en el conjunto de los números complejos.

## 2. El operador de Cauchy-Riemann en Dimensiones Superiores

En vista de que existe un producto bien definido en los números complejos, se puede aplicar el operador complejo de Cauchy-Riemann en el plano a funciones de valores complejos:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}w &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v) + \frac{i}{2}(\partial_x v + \partial_y u), \end{aligned}$$

donde  $w = u + iv$ .

Ahora queremos generalizar el operador complejo de Cauchy-Riemann a dimensiones de orden mayor. Primero reemplacemos la base  $1, i$  del plano complejo por la base  $e_0 = 1, e_1, \dots, e_n$  del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Así usando esta base definimos el operador

$$(1.1) \quad D = \sum_{j=0}^n e_j \partial_j,$$

donde denotamos las variables de  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y  $\partial_j$  significa la diferenciación con respecto a las variables espaciales  $x_j$ . Llamaremos a este operador el operador de Cauchy-Riemann en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Con este operador consideramos la *ecuación de Cauchy-Riemann* en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es decir

$$Du = 0.$$

Aplicando este operador a funciones de valores reales y tomando en cuenta la independencia lineal de los vectores  $e_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , se sigue que las soluciones de esta ecuación  $Du = 0$  sólo pueden ser funciones constantes (observe que el mismo resultado es obtenido para la ecuación de Cauchy-Riemann en el plano, esto se puede ver en [5]). Es por esta razón que si deseamos obtener soluciones no triviales debemos considerar el operador  $D$  sobre funciones con valores vectoriales (en el caso del plano las funciones con valores vectoriales corresponden a las funciones con valores complejos). Sin embargo para realizar esta aplicación se necesita definir un producto entre vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Para este fin interpretaremos (igual que en el caso del plano) los vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$  como polinomios lineales en las variables  $X_1, \dots, X_n$ , (donde  $X_j$  se corresponde con el vector  $e_j$ ). Definimos el producto de dos vectores a través del producto de los polinomios asociados. Esta definición ya fue dada en el caso del plano (ver Sección 1). Sin embargo en ese caso se ha reducido el producto a un polinomio lineal a través de la regla  $X^2 = -1$ . Sin unas reglas similares en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  podríamos obtener una extensión de dimensión infinita de este espacio. Como en el caso del plano, consideraremos clases de equivalencia de polinomios.

### 3. Álgebras de Clifford Definidas por Clases de Equivalencias

Primero observemos que los puntos  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  también pueden ser considerados como vectores cuya suma está definida por

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) + (b_0, b_1, \dots, b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Para definir un producto entre vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , interpretaremos otra vez estos vectores como polinomios. Para este propósito identificamos a el vector unitario

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

con el número real 1, mientras que el vector unitario

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

donde el número 1 está en la  $(j + 1)$ -ésima posición, se denota por  $X_j$ . Usando esto, los vectores  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  pueden ser escritos como polinomios lineales

$$a_0 + \sum_{j=1}^n a_j X_j.$$

La suma de dos vectores corresponde a un polinomio el cual es la suma de los correspondientes polinomios. En otras palabras, la interpretación de vectores como polinomios lineales preserva la estructura aditiva de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Para definir un producto de vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , se pueden multiplicar los correspondientes polinomios. En el caso del plano, la relación  $X^2 = -1$  implica que el producto de dos polinomios lineales es siempre equivalente a un polinomio lineal, es decir, el producto de dos vectores en el plano es también un vector en el plano.

Para obtener una construcción análoga para dimensiones de orden mayor ( $n \geq 2$ ), debemos encontrar relaciones de equivalencias que lleven a un producto de vectores a tener propiedades similares al producto de números complejos. En cualquier caso, la siguiente propiedad del plano complejo debe ser preservada:

**Propiedad 1:** Los cuadrados de los vectores unitarios  $e_j = X_j$  deben ser  $-1$ , es decir,  $X_j^2 = -1$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Una segunda propiedad importante del producto de vectores, se sigue de la definición del operador de Cauchy-Riemann (1.1). En relación a este operador definimos su operador

conjugado por

$$\bar{D} = \partial_0 - \sum_{j=1}^n e_j \partial_j.$$

Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \bar{D}D &= (\partial_0 - \sum_{j=1}^n e_j \partial_j)(\partial_0 + \sum_{k=1}^n e_k \partial_k) \\ &= \partial_0^2 + \sum_{j=1}^n \partial_j^2 - \sum_{j \neq k} e_j e_k \partial_j \partial_k \\ (1.2) \quad &= \Delta_{n+1} - \sum_{j < k} (e_j e_k + e_k e_j) \partial_j \partial_k, \end{aligned}$$

donde  $\Delta_{n+1}$  es el operador de Laplace en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y donde hemos usado las relaciones  $e_j^2 = -1$  (Propiedad 1).

Observando la fórmula (1.2) podemos concluir que para obtener

$$(1.3) \quad \bar{D}D = \Delta_{n+1},$$

necesitamos la siguiente propiedad 2 para los vectores básicos:

**Propiedad 2:**  $e_j e_k + e_k e_j = 0$  para todo  $j \neq k$ .

Ahora vamos a mostrar como las propiedades 1 y 2 pueden obtenerse. Consideremos  $n$  variables  $X_1, \dots, X_n$ . Sea  $\mathcal{R}[1, \dots, X_n]$  el anillo de todos los polinomios con coeficientes reales en  $X_1, \dots, X_n$ , donde el producto de dos polinomios

$$X_{\mu_1} \cdots X_{\mu_m}$$

que difieren en el orden de los factores deben ser *diferentes*.

Decimos que dos polinomios  $P$  y  $Q$  son *equivalentes* si su diferencia puede ser reescrita como un polinomio para el cual cada sumando contiene al menos uno de los factores

$$X_j^2 + 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

o

$$X_j X_k + X_k X_j, \quad j \neq k.$$

Si los polinomios  $P$  y  $Q$  son equivalentes escribimos  $P \sim Q$ . El conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a la relación  $\sim$  se llama el *álgebra de Clifford* generada por  $X_1, \dots, X_n$  y se denota por  $\mathcal{A}_n$ .

Observemos que en particular es válido

$$X_j^2 + 1 \sim 0 \quad \text{y} \quad X_j X_k + X_k X_j \sim 0 \quad (j \neq k),$$

lo que significa en el lenguaje de las clases de equivalencia

$$(1.4) \quad X_j^2 + 1 = 0 \quad \text{y} \quad X_j X_k + X_k X_j = 0 \quad (j \neq k),$$

o lo que es lo mismo

$$X_j^2 = -1 \quad \text{y} \quad X_j X_k = -X_k X_j \quad (j \neq k).$$

Las relaciones (1.4) se llaman las *relaciones de estructura* del álgebra de Clifford.

OBSERVACIÓN 1. Las propiedades algebraicas (tales como la asociatividad y la ley distributiva) siguen de las propiedades correspondientes de los polinomios. Observe, sin embargo, que la multiplicación no es conmutativa porque  $X_j X_k = -X_k X_j$  para  $j \neq k$ .

La base canónica para el anillo  $\mathcal{A}_n$  es:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1, \\ e_1 &= X_1, \\ &\vdots \\ e_{12} &= e_1 e_2 = X_1 X_2, \\ &\vdots \\ e_{12\dots n} &= e_1 e_2 \dots e_n = X_1 X_2 \dots X_n. \end{aligned}$$

De esta forma, si  $\beta$  representa la base de  $\mathcal{A}_n$ , entonces:

$$(1.5) \quad \beta = \{e_A \mid A \in \Gamma\},$$

donde  $\Gamma$  representa la familia de subíndices:  $\Gamma = \{0, 1, 2, \dots, 12, 13, \dots, 1n, \dots, 12\dots n\}$ .

OBSERVACIÓN 2. Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Las funciones  $u$  definidas en  $\Omega$  con valores en el álgebra  $\mathcal{A}_n$  estarán definidas como:

$$u(x) = \sum_{A \in \Gamma} u_A(x) e_A, \quad x = (x_0, \dots, x_n).$$

donde cada  $u_A$  es una función de valor real.

#### 4. Funciones Monogénicas

Sean  $\Omega$  un dominio (abierto y conexo) en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  y  $u(x)$  una función definida y continuamente diferenciable en  $\Omega$ , con valores en el Álgebra de Clifford  $\mathcal{A}_n$ . Decimos que  $u(x)$  es una *función monogénica a izquierda* si satisface la ecuación  $Du = 0$ . Para el caso que  $u$  satisface la ecuación  $uD = 0$ , la llamaremos *función monogénica a la derecha*. En lo sucesivo monogénica significará monogénica a izquierda.

Como el álgebra  $\mathcal{A}_n$  tiene  $2^n$  elementos de la base, una función con valores en  $\mathcal{A}_n$  tiene  $2^n$  componentes con valores reales. Por la misma razón,  $Du$  tiene  $2^n$  componentes reales. Por esto la ecuación  $Du = 0$  la podemos descomponer en  $2^n$  ecuaciones reales. Estas ecuaciones forman un sistema de  $2^n$  ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para las  $2^n$  componentes reales de  $u$ .

EJEMPLO 3. Caso  $n = 2$ :

Sea  $u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12}$  una función monogénica con valores en  $\mathcal{A}_2$ . Entonces las componentes de valores reales  $u_0, u_1, u_2$  y  $u_{12}$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\partial_0 u_0 - \partial_1 u_1 - \partial_2 u_2 = 0,$$

$$\partial_0 u_1 + \partial_1 u_0 + \partial_2 u_{12} = 0,$$

$$\partial_0 u_2 - \partial_1 u_{12} + \partial_2 u_0 = 0,$$

$$\partial_0 u_{12} + \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0.$$

En efecto, los elementos de la base de  $\mathcal{A}_2$  son  $1, e_1, e_2$  y  $e_{12}$ . Realizando la multiplicación en la expresión del medio en

$$Du = (\partial_0 + e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2)(u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12}) = 0$$

y tomando en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} e_1 e_1 &= -1, \\ e_1 e_{12} &= e_1 (e_1 e_2) = -e_2, \\ e_2 e_1 &= -e_1 e_2, \\ e_2 e_2 &= -1, \\ e_2 e_{12} &= e_2 (-e_2 e_1) = e_1, \end{aligned}$$

obtenemos las ecuaciones escritas anteriormente como consecuencia de la independencia lineal de la base  $1, e_1, e_2, e_{12}$ .

Además si la función  $u(x) = \sum_A u_A(x) e_A$  es dos veces continuamente diferenciable y monogénica, entonces según la ecuación (1.3) tenemos:

$$(1.6) \quad \Delta_{n+1} u = 0,$$

lo que significa que cada componente  $u_A$  de  $u$  es una solución de la ecuación de Laplace.

Para un número de Clifford  $x = x_0 + \sum_{j=1}^n x_j e_j$  definimos su conjugado a través de

$$\bar{x} = x_0 - \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Como una consecuencia de esto tenemos

$$x \bar{x} = |x|^2.$$

LEMA 4.1. *La función*

$$E(x, \xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{|x - \xi|^{n+1}}$$

*definida para todo punto  $x \neq \xi$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , donde  $\xi$  es un punto fijo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\omega_{n+1}$  la medida de la superficie de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es una función monogénica a izquierda y a derecha. Esta función es llamada el kernel de Cauchy del análisis de Clifford y representa una generalización del kernel del análisis complejo clásico:  $E(x, \xi) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{z - \xi}$*

Ver prueba de este lema en [5].

### 5. Operadores de Cauchy-Riemann Generalizados.

En esta sección definiremos un operador de Cauchy-Riemann generalizado, el cual conduce a ecuaciones diferenciales más generales, incluso en el Álgebra de Clifford clásico.

Definamos el operador de Cauchy-Riemann generalizado por:

$$(1.7) \quad D_q = \sum_{j=0}^n q_j(x) e_j \partial_j,$$

donde los  $q_j(x)$  pueden ser funciones real valuadas, constantes reales o complejas. Llamaremos a este operador *Operador de Cauchy-Riemann q-Generalizado*.

**OBSERVACIÓN 5.1.** *El operador de Cauchy-Riemann clásico se puede obtener a partir del operador (1.7) considerando  $q_j(x) \equiv 1 \quad \forall j = 0, \dots, n$ .*

Usando este operador (1.7), funciones monogénicas son definidas nuevamente por el sistema de Cauchy-Riemann generalizado  $D_q u = 0$ , al cual llamaremos funciones q-monogénicas generalizadas.

**EJEMPLO 4.** El operador de Cauchy-Riemann generalizado  $D_q$  definido por (1.7) en  $\mathcal{A}_1$  con los  $q_j \in \mathbb{C}$  conduce al sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} q_{0,0} \partial_0 u_0 - q_{0,1} \partial_0 u_1 - q_{1,1} \partial_1 u_0 - q_{1,0} \partial_1 u_1 &= 0, \\ q_{0,1} \partial_0 u_0 + q_{0,0} \partial_0 u_1 + q_{1,1} \partial_1 u_0 - q_{1,0} \partial_1 u_1 &= 0, \end{aligned}$$

donde  $q_0 = q_{0,0} + i q_{0,1}$ ,  $q_1 = q_{1,0} + i q_{1,1}$  y  $u = e_0 u_0 + e_1 u_1$ .

El operador de Cauchy-Riemann clásico  $D$  en el álgebra de Clifford clásica  $\mathcal{A}_n$  conduce a la ecuación de Laplace para cada componente de una función monogénica, ya que  $\overline{D}D = \Delta$ , donde  $\overline{D}$  es el operador conjugado de  $D$ . Con motivo de deducir una ecuación diferencial de segundo orden para soluciones de  $D_q u = 0$ , introducimos el operador  $\overline{D}_q$  como:

$$(1.8) \quad \overline{D}_q = q_0(x) e_0 \partial_0 - \sum_{j=1}^n q_j(x) e_j \partial_j.$$

En caso de que los coeficientes  $q_j(x)$  dependan de  $x$  la ecuación  $\overline{D}_q D_q u = 0$  contiene las derivadas de primer orden de  $u$ . Esto no ocurre en el caso en que los coeficientes  $q_j(x)$

son constantes reales, adicionalmente en este caso tenemos que  $q_j q_i = q_i q_j$  y entonces, en el álgebra de Clifford clásica  $\mathcal{A}_n$ , funciones monogénicas  $u$  son soluciones de la ecuación de segundo orden:

$$\overline{D}_q D_q u = \sum_{j=0}^n q_j^2 \partial_j^2 u_j = 0$$

## 6. Álgebras de Clifford Dependiendo de Parámetros

Las álgebras de Clifford clásicas  $\mathcal{A}_n$  se pueden definir a través de clases de equivalencias

$$(1.9) \quad X_j^2 + 1 \sim 0 \quad y \quad X_j X_k + X_k X_j \sim 0 \quad (j \neq k),$$

sobre el anillo de polinomios  $R[X_1, \dots, X_n]$  (ver Sección 3). Considerando relaciones de equivalencias más generales que las anteriores (1.9), se pueden obtener álgebras de Clifford más generales. Considere las relaciones:

$$(1.10) \quad X_j^{k_j} + \alpha_j(p) \sim 0 \quad y \quad X_i X_j + X_j X_i - 2\gamma_{ij}(p) \sim 0,$$

donde  $i, j = 1, \dots, n$  y  $i \neq j$ . Aquí  $\alpha_j(p)$  y  $\gamma_{ij}(p) = \gamma_{ji}(p)$  son funciones de valores reales dependiendo posiblemente de un parámetro  $p$  y  $k_j$  es un número natural mayor o igual a 2. Usando estas relaciones de equivalencia, cada término de un polinomio en  $X_1, \dots, X_n$  puede ser escrito en la forma:

$$c X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n},$$

donde  $c$  es una constante real y los exponentes  $\nu_j$  no son más grandes que  $k_j - 1$ , es decir,  $0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$ .

El álgebra de Clifford generado por las relaciones de equivalencia (1.10) se denotará por

$$(1.11) \quad \mathcal{A}_n(p \mid k_j, \alpha_j(p), \gamma_{ij}(p)) \quad \text{si } n \geq 2 \text{ y } \mathcal{A}_1(p \mid k, \alpha(p)) \quad \text{si } n = 1.$$

En el caso que los coeficientes  $\alpha_j, \gamma_{ij}$  no dependan del parámetro  $p$ , escribiremos  $\mathcal{A}_n(k_j, \alpha_j, \gamma_{ij})$  y  $\mathcal{A}_1(k, \alpha)$  respectivamente.

Se denotará  $X_j$  por  $e_j$ ,  $e_1 e_2$  por  $e_{12}$  y así sucesivamente. Entonces  $\mathcal{A}_n(p \mid k_j, \alpha_j(p), \gamma_{ij}(p))$  tiene la base

$$e_1^{\nu_1} e_2^{\nu_2} \cdots e_n^{\nu_n}, \quad 0 \leq \nu_j \leq k_j - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

Por ejemplo, para el álgebra de Clifford  $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$  tenemos las siguientes relaciones:

$$e_i^2 = -\alpha_i, \quad e_i e_j + e_j e_i = 2\gamma_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Consideremos nuevamente el operador de Cauchy-Riemann usual:

$$D = \sum_{j=0}^n e_j \partial_j,$$

y su operador adjunto

$$\bar{D} = e_0 \partial_0 - \sum_{j=1}^n e_j \partial_j.$$

También ahora una solución de la ecuación  $Du = 0$  es llamada monogénica (a la izquierda).

Un cálculo análogo al que conduce a la ecuación (1.2) en la Sección 3, muestra para cada función monogénica (dos veces continuamente diferenciable) lo siguiente:

$$(1.12) \quad \bar{D}Du = \partial_0^2 u + \sum_{j=1}^n \alpha_j \partial_j^2 u - 2 \sum_{i < j} \gamma_{ij} \partial_i \partial_j u = 0.$$

EJEMPLO 5. En el álgebra de Clifford  $\mathcal{A}_2(2, \alpha_j, \gamma_{12})$  con  $\alpha_1 = +1$ ,  $\alpha_2 = -1$  y  $\gamma_{12} = 0$ , la ecuación (1.12) se convierte en la siguiente ecuación hiperbólica

$$\partial_0^2 u + \partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0.$$

Observe que una función monogénica en el sentido usual siempre satisface la ecuación de Laplace, (ver Sección 4). En contraposición, el Ejemplo 5 muestra que funciones monogénicas en álgebras de Clifford más generales satisfacen ecuaciones diferentes a la ecuación de Laplace.

EJEMPLO 6. Sea  $u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12}$  una función monogénica con valores en  $\mathcal{A}_2(x \mid 2, \alpha_j(x), \gamma_{ij}(x))$ . Entonces las componentes de valores reales  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_{12}$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones ( $Du = 0$ ):

$$\partial_0 u_0 - \alpha_1(x) \partial_1 u_1 + 2\gamma_{12}(x) \partial_2 u_1 - \alpha_2(x) \partial_2 u_2 = 0,$$

$$\partial_0 u_1 + \partial_1 u_0 + \alpha_2(x) \partial_2 u_{12} = 0,$$

$$\partial_0 u_2 - \alpha_1(x) \partial_1 u_{12} + \partial_2 u_0 + 2\gamma_{12}(x) \partial_2 u_{12} = 0,$$

$$\partial_0 u_{12} + \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0.$$

En efecto, los elementos de la base de  $\mathcal{A}_2(x \mid 2, \alpha_j(x), \gamma_{ij}(x))$  son  $e_0 = 1$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_{12}$ . Realizando la multiplicación en el lado izquierdo en

$$Du = (\partial_0 + e_1\partial_1 + e_2\partial_2)(u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_{12}) = 0,$$

y tomando en cuenta las relaciones

$$e_1e_1 = -\alpha_1(x),$$

$$e_1e_{12} = e_1(e_1e_2) = -\alpha_1(x)e_2,$$

$$e_2e_1 = 2\gamma_{12}(x) - e_1e_2,$$

$$e_2e_2 = -\alpha_2(x),$$

$$e_2e_{12} = e_2(2\gamma_{12}(x) - e_2e_1) = 2\gamma_{12}(x)e_2 + \alpha_2(x)e_1,$$

entonces obtenemos las ecuaciones escritas anteriormente como consecuencia de la independencia lineal de la base  $1, e_1, e_2, e_{12}$ .

## 7. Funciones Monogénicas Generalizadas con Lado Derecho q-Antimonogénico

Una función monogénica generalizada es una solución  $u = u(x)$  Clifford valuada, de una ecuación diferencial del tipo:

$$(1.13) \quad Du = F(x, u),$$

donde  $D$  es el operador de Cauchy-Riemann (1.1) del Análisis de Clifford y el lado derecho  $F(x, u)$  depende linealmente de la función deseada  $u$ . Esta ecuación diferencial generaliza la ecuación diferencial para funciones analíticas generalizadas:

$$(1.14) \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f(z, w),$$

en el plano donde,

$$f(z, w) = a(z)w + b(z)\bar{w}.$$

Diferenciando (1.14) respecto a  $z$ , se obtiene:

$$(1.15) \quad \frac{1}{4}\Delta w = \frac{\partial a}{\partial z}w + a\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}\bar{w} + b\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}.$$

Usando la ecuación diferencial (1.14), se puede eliminar la derivada  $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$  en el lado derecho. Entonces el lado derecho resulta ser una combinación lineal de  $w$  y  $\bar{w}$  si y sólo si

$\frac{\partial f}{\partial w} \equiv 0$ . En otras palabras, el lado derecho  $f(x, w)$  es una función anti-holomorfa de  $w$ .

Generalizando esta suposición al caso de una ecuación diferencial mas general (1.13), definimos:

**DEFINICIÓN 7.1.** *La ecuación diferencial (1.13) para funciones monogénicas generalizadas es llamada ecuación diferencial con lado derecho anti-monogénico si y sólo si  $\bar{D}Du$  es una combinación lineal de las componentes de  $u$  que no depende explícitamente de las derivadas de primer orden de  $u$ , donde  $\bar{D}$  denota el operador de Cauchy Riemann conjugado.*

Ahora bien, considerando el operador de Cauchy-Riemann generalizado (1.7), las ecuaciones diferenciales con lado derecho q-antimonogénico se definen:

**DEFINICIÓN 7.2.** *La ecuación diferencial  $D_q u = F(x, u)$  para funciones monogénicas generalizadas es llamada ecuación diferencial con lado derecho q-antimonogénico si y sólo si  $\bar{D}_q D_q u$  es una combinación lineal de las componentes de  $u$  que no depende explícitamente de las derivadas de primer orden de  $u$ , donde  $\bar{D}_q$  denota el operador de Cauchy Riemann generalizado conjugado (1.8).*

En el siguiente capítulo expondremos el método para resolver Problemas de Valores Iniciales para este tipo de ecuaciones.

## PROBLEMA DE VALORES INICIALES

En este capítulo estudiaremos el **método de espacios asociados**, para la solución de problemas de valores iniciales. Este método es construido por W. Tutschke en [11].

La solución deseada del Problema de Valores Iniciales se conseguirá a través de un punto fijo de un operador relacionado. Esta prueba generaliza una construcción que originalmente fue dada por W. Walter en [12] sobre la demostración del clásico Teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

### 1. Operador Integro-Diferencial.

Para introducir el **método de espacios asociados**, consideremos el Problema de Valor Inicial:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) = \mathcal{F}(t, x, u, \partial_{x_i} u), \\ u(0, x) = \varphi(x), \end{cases}$$

donde  $u$  es una función que depende del tiempo  $t$ , la variable espacial  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\varphi$  es una función o dato inicial y  $\mathcal{F}$  es un operador diferencial que depende de  $t$ ,  $x$ ,  $u$  y las derivadas de  $u$  con respecto a la variable espacial.

Integrando en  $[0, t]$ , con respecto al tiempo, tenemos:

$$(2.2) \quad \int_0^t \partial_\tau u(\tau, x) d\tau = \int_0^t \mathcal{F}(\tau, x, u, \partial_{x_i} u) d\tau,$$

usando el segundo Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), se puede escribir:

$$(2.3) \quad u(t, x) - u(0, x) = \int_0^t \mathcal{F}(\tau, x, u, \partial_{x_i} u) d\tau.$$

Usando la condición inicial tenemos, finalmente,

$$(2.4) \quad u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F}(\tau, x, u, \partial_{x_i} u) d\tau.$$

Esto indica que el Problema de Valor Inicial (2.1) es equivalente a la ecuación integro diferencial (2.4). Así para encontrar las soluciones de Problema de Valores Iniciales (2.1), se necesita determinar los puntos fijos del operador:

$$(2.5) \quad U(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F}(\tau, x, u, \partial_{x_i} u) d\tau.$$

Así pues, nos enfocamos en las condiciones sobre las cuales podemos garantizar la existencia de tales puntos fijos, a través del Principio de Contracción de Banach.

## 2. Principio de Contracción de Banach

Para establecer y demostrar el Principio de Contracción de Banach, introduciremos las definiciones necesarias para hacer de esta exposición lo más autocontenida posible. La teoría de esta sección puede ser encontrada en [13]

### 2.1. Espacios Normados y Espacios Métricos.

DEFINICIÓN 2.1. Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $d$  es una métrica o distancia sobre  $X$  si cumple con las siguientes condiciones:

- (a)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $\forall x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in X$ .
- (c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in X$ .

Al par  $(X, d)$  se le llama Espacio Métrico.

DEFINICIÓN 2.2. Sean  $X$  un espacio vectorial real y  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $\|\cdot\|$  es una norma sobre  $X$  si cumple con las siguientes condiciones:

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in X$  y  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  y  $x \in X$ .
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in X$ .

Al par  $(X, \|\cdot\|)$  se le llama espacio normado.

DEFINICIÓN 2.3. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Diremos que una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  en  $X$  es convergente a un elemento  $x_0 \in X$  si dado  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $d(x_n, x_0) < \epsilon$ .

DEFINICIÓN 2.4. La composición  $f \circ \phi$ , de una sucesión  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  con una sucesión estrictamente creciente  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  será llamada una subsucesión de  $f$ . Si denotamos a  $f$  por  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  entonces  $f \circ \phi$  es denotada por  $\{x_{\phi(n)}\}_{n \geq 1}$ . Lo usual es denotarla por  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  si  $\phi(k) = n_k$ .

DEFINICIÓN 2.5. Una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ , en  $(X, d)$ , es una sucesión de Cauchy si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que si  $n, m \geq N$  entonces  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ .

## 2.2. Contracciones y puntos fijos.

DEFINICIÓN 2.6. Sea  $T : X \rightarrow X$  una aplicación de un conjunto en si mismo. Se dice que  $x \in X$  es un **punto fijo** de la aplicación  $T$  si  $Tx = x$ .

DEFINICIÓN 2.7. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación arbitraria. Se dice que  $T$  es una **contracción de Banach** si existe  $M \in \mathbb{R}$ , con  $0 < M < 1$  tal que para todo  $x, y \in X$  se tiene que  $d(Tx, Ty) \leq Md(x, y)$

OBSERVACIÓN 2.1. Geométricamente esto quiere decir que cualquier par de puntos  $x$  e  $y$  tienen imágenes, a través de  $T$ , que están más cerca que los puntos  $x$  e  $y$ .

DEFINICIÓN 2.8. Sea  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión en un espacio métrico  $(X, d)$ . Decimos que  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  es una **sucesión contracción**, si para algún  $0 < \alpha < 1$ , se tiene que  $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$ , para cualquier índice natural  $n \geq 2$ .

PROPOSICIÓN 2.1. Si  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión contracción, se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) Comparando dos términos consecutivos con los dos primeros términos

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1), \quad \forall n \geq 2.$$

- (2) Dos términos cualesquiera con los dos primeros términos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1), \quad \text{para cada } m \geq n.$$

DEMOSTRACIÓN 1. (1) Esta demostración se realiza por inducción. Note que la relación es cierta para  $n = 2$ , es decir, se cumple,

$$d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1).$$

Supongamos que la relación es cierta para  $n > 2$ , es decir, tenemos como hipótesis inductiva lo siguiente:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1}d(x_2, x_1).$$

Por lo tanto, de la hipótesis contractiva y de la hipótesis inductiva para  $n$  se cumple:

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha(\alpha^{n-1}d(x_2, x_1)) = \alpha^n d(x_2, x_1).$$

(2) Para  $m > n$ , se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n),$$

luego, usando (1) se tiene,

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \cdots + \alpha^{n-1})d(x_2, x_1),$$

sacando factor común  $\alpha^{n-1}$  se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1})d(x_2, x_1),$$

$$\text{luego, } d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1} \left( \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) d(x_2, x_1).$$

Note que  $1 - \alpha^{m-n} < 1$ . En efecto,  $\alpha^n, \alpha^m > 0$  pues  $0 < \alpha < 1$ . Entonces,  $\alpha^n - \alpha^m < \alpha^n$  y por lo tanto,

$$\frac{\alpha^n - \alpha^m}{\alpha^n} < 1 \iff 1 - \frac{\alpha^m}{\alpha^n} < 1 \iff 1 - \alpha^{m-n} < 1.$$

Así,  $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1)$ , lo cual termina la demostración.

LEMA 2.1. Toda sucesión que es contráctil es una sucesión de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN 2. Si  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión contracción, entonces existe  $0 < \alpha < 1$  que cumple,  $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$ , para  $n \geq 2$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , debemos mostrar que existe  $N \in \mathbb{N}$  :  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  si  $n, m \geq N$ . De la proposición (2.1) tenemos:

$$d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1), \text{ para cada } m \geq n.$$

Como la sucesión  $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \rightarrow 0$ , existe un índice natural  $N$  que cumple,  $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \varepsilon$ , para cada  $n \geq N$ .

Así para cada par de índices  $p, q \geq N$ , si  $p < q$  se tiene  $d(x_q, x_p) < \frac{\alpha^{p-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \varepsilon$ , es decir, la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy.

Los teoremas de punto fijo garantizan, bajo ciertas condiciones, la existencia de algún punto fijo de una función que está definida en un espacio métrico. Existen distintos teoremas de punto fijo, entre los que destaca el Principio de Contracción de Banach. A continuación enunciamos y demostramos este principio.

### TEOREMA 7. Principio de Contracción de Banach

Consideremos un espacio métrico  $(X, d)$  completo, con  $X \neq \emptyset$ . Sea  $T : X \rightarrow X$  una contracción de  $X$  en  $X$ , entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

DEMOSTRACIÓN 3. Sea  $\alpha$  la constante de contracción de  $T$ . Escogamos  $x_0 \in X$  y definamos la sucesión  $x_1, x_2, \dots$  de la manera siguiente:

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

Se puede ver que  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión contráctil. Por lo que el Lema 2.1 implica que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy y por tanto existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x \in X$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Como,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x), \end{aligned}$$

se tiene que, al tomar límite cuando  $m \rightarrow \infty$ ,  $d(x, Tx) = 0$  y, por lo tanto,  $Tx = x$ . Esto es,  $x$  es un punto fijo de  $T$ .

Por otro lado, para mostrar la unicidad supongamos que  $T$  posee otro punto fijo  $y \neq x$ , es decir,  $Ty = y$ . Así

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y),$$

entonces  $\alpha \geq 1$ , lo que contradice el hecho de que  $T$  sea una contracción. Así pues, debe ser  $x = y$ . Esto termina la demostración.

### 3. Estimados Interiores

Con el fin de aplicar un teorema de punto fijo (en particular, el principio de Contracción de Banach) al operador (2.5), el mismo debe ser estimado en un espacio de funciones adecuado, cuyos elementos dependan de  $t$  y  $x$ . Sin embargo, esto no es tan sencillo ya que la integral de (2.5) contiene derivadas con respecto a la variable espacial  $x_j$ . Buscando superar esta dificultad y obtener los estimados que necesitamos para el operador  $U$ , restringimos el operador al espacio de funciones para las cuales las derivadas  $\partial_{x_j}u$  pueden ser estimadas por la propia función  $u$ . Esto se logra por medio de los estimados interiores:

Un estimado interior se puede definir como un estimado sobre las derivadas (de primer orden) de una función, el cual es cierto en un subconjunto del dominio de la función que posee una distancia positiva hasta la frontera de tal dominio.

Formalmente, tenemos la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 3.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en el  $X$ -espacio y  $\mathcal{B}(\Omega)$  cualquier espacio de Banach de funciones definidas en  $\Omega$ . Suponga que  $\Omega'$  es un subdominio de  $\Omega$  tal que  $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  es positiva. Entonces una función  $u \in \mathcal{B}(\Omega)$  es llamada **una función con un estimado interior de primer orden** si  $\partial_{x_j}u \in \mathcal{B}(\Omega')$  y*

$$(2.6) \quad \|\partial_{x_j}u\|_{\mathcal{B}(\Omega')} \leq \frac{c}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \|u\|_{\mathcal{B}(\Omega)},$$

donde la constante  $c$  no depende de la elección de  $u$  ni de la elección del par  $\Omega, \Omega'$ .

Los estimados interiores de la forma (2.6) garantizan que el operador (2.5) sea una contracción en un espacio de Banach, ver [11].

### 4. Espacios Asociados

**DEFINICIÓN 4.1.** *Sea  $L$  un operador diferencial de primer orden que depende de  $t, x, u$  y las derivadas de primer orden de  $u$  con respecto a la variable espacial y sea  $l$  es un operador diferencial cuyos coeficientes no dependen del tiempo  $t$ . Se dice que  $L$  es **asociado a  $l$**  si  $L$  transforma soluciones de  $lu = 0$  en soluciones de la misma ecuación para  $t$  fijo, es decir, si  $lu = 0$  implica que  $l(Lu) = 0$ . También se dice que el par de operadores diferenciales  $(L, l)$  son **pares asociados**.*

DEFINICIÓN 4.2. *Dado un operador diferencial  $\mathcal{F}$ , el espacio de funciones  $\mathcal{X}$  es llamado un **espacio asociado** a  $\mathcal{F}$  cuando  $\mathcal{F}$  transforma  $\mathcal{X}$  en sí mismo, es decir, si para cada  $f \in \mathcal{X}$  se tiene que  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{X}$ .*

El hecho de que  $\varphi$  pertenezca a un espacio asociado a  $\mathcal{F}$  permite decir que el operador contracción (2.5) está definido de un espacio de Banach en sí mismo. El problema (2.1) es estudiado, desde el punto de vista de espacios asociados, por W. Tutschke en [11] donde muestra el siguiente teorema con una ligera modificación de la idea dada por W. Walter en [12].

TEOREMA 8. *Considere el problema de valor inicial (2.1). Suponga que la función inicial  $\varphi$  pertenece a un espacio asociado de  $\mathcal{F}$ . Entonces el problema de valor inicial es resoluble, de manera única, siempre que los elementos del espacio asociado satisfagan un estimado interior del tipo:*

$$\|\partial_{x_j} u\|_{\Omega'} \leq \frac{C}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \|u\|_{\Omega}.$$

*Más aún, la solución  $u(x, t)$  pertenece al espacio asociado para cada  $t$ . Siendo  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\Omega'$  un subdominio suyo.*

## SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES INICIALES

En este Capítulo vamos a aplicar el método de espacios asociados que se presentó en el Capítulo 2 para resolver el Problema de Valor Inicial dado por:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) = L(t, x, u, \partial_{x_i} u) \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

donde  $u$  es una función que depende del tiempo  $t$ , la variable espacial  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\varphi$  es una función o dato inicial,  $L$  es un operador diferencial que depende de  $t$ ,  $x$ ,  $u$  y las derivadas de  $u$  con respecto a la variable espacial, usando la teoría de Espacios Asociados. Para ello se usará el operador de Cauchy-Riemann generalizado:

$$D_q = \sum_{j=0}^n q_j(x) e_j \partial_j,$$

donde las funciones  $q_j$  son constantes reales.

En lo que sigue, construiremos lados derechos  $q$ -antimonogénicos generalizados usando matrices de transición.

Posteriormente daremos condiciones suficientes en los coeficientes del operador  $L$  bajo las cuales  $L$  es asociado a ecuaciones con lados derechos  $q$ -antimonogénicos.

### 1. Matrices de Transición

Una función monogénica generalizada es una solución  $u = u(x)$  Clifford álgebra valuada de una ecuación de tipo  $D_q u = F(x, u)$ , donde  $D_q$  es el operador de Cauchy-Riemann generalizado (1.7) y  $F(x, u)$  es lineal en los componentes de  $u$ . En lo que sigue, daremos condiciones para que los lados derechos  $F(x, u)$  sean  $q$ -antimonogénicos utilizando matrices de transición [4].

DEFINICIÓN 1.1. *Una matriz de transición transforma una columna arbitraria con elementos real valuados que dependen de la variable espacial  $x$  en un lado derecho  $q$ -antimonogénico. Las entradas de una matriz de transición son los elementos de la base del Álgebra de Clifford.*

**1.1. Notación.** Consideremos la base  $\beta$  (1.5) y denotemos las componentes real valuadas de  $u(x)$  por  $u_A(x)$ , es decir,

$$(3.2) \quad u(x) = \sum_A u_A(x)e_A,$$

donde  $A$  se mueve en el conjunto de subíndices  $\Gamma = \{0, 1, 2, \dots, 12, 13, \dots, 1n, \dots, 12\dots n\}$ . Entonces el lado derecho  $F(x, u)$  puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$(3.3) \quad F(x, u) = \sum_A F_A(x)u_A,$$

donde  $F_A(x)$  es Clifford álgebra valuada, es decir,

$$(3.4) \quad F_A(x) = \sum_B f_{A,B}(x)e_B,$$

con  $f_{A,B}(x)$  función real valuada y  $A, B \in \Gamma$ .

**1.2. El Caso  $\mathcal{A}_1(2, \alpha_1)$ .** En este caso la base  $\beta = \{e_0, e_1\}$  y el conjunto de subíndices  $\Gamma = \{0, 1\}$ . Desarrollemos la expresión (3.3):

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \sum_A \sum_B f_{A,B}e_B u_A \\ &= \sum_0^1 (f_{A,0}e_0 u_A + f_{A,1}e_1 u_A) \\ &= f_{0,0}e_0 u_0 + f_{0,1}e_1 u_0 + f_{1,0}e_0 u_1 + f_{1,1}e_1 u_1, \end{aligned}$$

luego aplicamos el operador de Cauchy-Riemman generalizado (1.7) a esta función (sólo consideramos los términos que posean las derivadas de  $u$ ) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \overline{D}_q F(x, u) &= (q_0 e_0 \partial_0 - q_1 e_1 \partial_1)(f_{0,0}e_0 u_0 + f_{0,1}e_1 u_0 + f_{1,0}e_0 u_1 + f_{1,1}e_1 u_1) \\ &= q_0 f_{0,0}e_0 \partial_0 u_0 + q_0 f_{0,1}e_1 \partial_0 u_0 + q_0 f_{1,0}e_0 \partial_0 u_1 + q_0 f_{1,1}e_1 \partial_0 u_1 \\ &\quad - q_1 f_{0,0}e_1 \partial_1 u_0 + q_1 \alpha_1 f_{0,1}e_0 \partial_1 u_0 - q_1 f_{1,0}e_1 \partial_1 u_1 + q_1 \alpha_1 f_{1,1}e_0 \partial_1 u_1. \end{aligned}$$

Obteniendo así el siguiente sistema:

$$(3.5) \quad q_0 f_{0,0} e_0 + q_0 f_{0,1} e_1 = 0,$$

$$(3.6) \quad q_0 f_{1,0} e_0 + q_0 f_{1,1} e_1 = 0,$$

$$(3.7) \quad -q_1 f_{0,0} e_1 + q_1 \alpha_1 f_{0,1} e_0 = 0,$$

$$(3.8) \quad -q_1 f_{1,0} e_1 + q_1 \alpha_1 f_{1,1} e_0 = 0.$$

Nótese que estas cuatro ecuaciones coinciden a pares, es decir, si multiplicamos toda la expresión (3.6) por  $-e_1$  obtenemos la ecuación (3.8), análogamente con las expresiones (3.5) y (3.7). Entonces, consideramos únicamente (3.6) y (3.7) de las cuales obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} f_{1,0} - \alpha_1 f_{0,1} = 0, \\ f_{1,1} + f_{0,0} = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo estas relaciones en (3.4) tenemos que:

$$F_0 = f_{0,0} e_0 + f_{0,1} e_1,$$

$$F_1 = f_{1,0} e_0 + f_{1,1} e_1 = \alpha_1 f_{0,1} e_0 - f_{0,0} e_1.$$

El cual puede ser reescrito en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ -e_1 & \alpha_1 e_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \end{pmatrix},$$

donde, la matriz de transición es:

$$(3.9) \quad \begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ -e_1 & \alpha_1 e_0 \end{pmatrix}.$$

**1.3. El Caso  $\mathcal{A}_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ .** Debido a lo extenso de los cálculos en este caso, para la comprobación de los resultados obtenidos, se realizó un algoritmo en el programa *mathematica* (Véase: Apéndice 1). Los resultados que se presentan a continuación fueron obtenidos utilizando cálculos análogos al caso  $A_1(2, \alpha_1)$ .

En este caso la base  $\beta = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}\}$  y el conjunto de subíndices  $\Gamma = \{0, 1, 2, 12\}$ .

Después de aplicar el operador  $\overline{D}_q$  a la función  $F$  (3.3) se obtienen el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-e_2 q_2 f_{0,0} - q_2 (-e_{12} + 2e_0 \gamma_{12}) f_{0,1} + e_0 q_2 \alpha_2 f_{0,2} - q_2 (e_1 \alpha_2 + 2e_2 \gamma_{12}) f_{0,12} = 0, \\
-e_2 q_2 f_{1,0} - q_2 (-e_{12} + 2e_0 \gamma_{12}) f_{1,1} + e_0 q_2 \alpha_2 f_{1,2} - q_2 (e_1 \alpha_2 + 2e_2 \gamma_{12}) f_{1,12} = 0, \\
-e_2 q_2 f_{2,0} - q_2 (-e_{12} + 2e_0 \gamma_{12}) f_{2,1} + e_0 q_2 \alpha_2 f_{2,2} - q_2 (e_1 \alpha_2 + 2e_2 \gamma_{12}) f_{2,12} = 0, \\
-e_2 q_2 f_{12,0} - q_2 (-e_{12} + 2e_0 \gamma_{12}) f_{12,1} + e_0 q_2 \alpha_2 f_{12,2} - q_2 (e_1 \alpha_2 + 2e_2 \gamma_{12}) f_{12,12} = 0, \\
-e_1 q_1 f_{0,0} + e_0 q_1 \alpha_1 f_{0,1} - e_{12} q_1 f_{0,2} + e_2 q_1 \alpha_1 f_{0,12} = 0, \\
-e_1 q_1 f_{1,0} + e_0 q_1 \alpha_1 f_{1,1} - e_{12} q_1 f_{1,2} + e_2 q_1 \alpha_1 f_{1,12} = 0, \\
-e_1 q_1 f_{2,0} + e_0 q_1 \alpha_1 f_{2,1} - e_{12} q_1 f_{2,2} + e_2 q_1 \alpha_1 f_{2,12} = 0, \\
-e_1 q_1 f_{12,0} + e_0 q_1 \alpha_1 f_{12,1} - e_{12} q_1 f_{12,2} + e_2 q_1 \alpha_1 f_{12,12} = 0, \\
e_0 q_0 f_{0,0} + e_1 q_0 f_{0,1} + e_2 q_0 f_{0,2} + e_{12} q_0 f_{0,12} = 0, \\
e_0 q_0 f_{1,0} + e_1 q_0 f_{1,1} + e_2 q_0 f_{1,2} + e_{12} q_0 f_{1,12} = 0, \\
e_0 q_0 f_{2,0} + e_1 q_0 f_{2,1} + e_2 q_0 f_{2,2} + e_{12} q_0 f_{2,12} = 0, \\
e_0 q_0 f_{12,0} + e_1 q_0 f_{12,1} + e_2 q_0 f_{12,2} + e_{12} q_0 f_{12,12} = 0,
\end{array} \right.$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l}
f_{1,0} = \alpha_1 f_{0,1}, \\
f_{1,1} = -f_{0,0}, \\
f_{1,2} = \alpha_1 f_{0,12}, \\
f_{1,12} = -f_{0,2}, \\
f_{2,0} = -2\gamma_{12} f_{0,1} + \alpha_2 f_{0,2}, \\
f_{2,1} = -\alpha_2 f_{0,3}, \\
f_{2,2} = -f_{0,0}, \\
f_{2,12} = f_{0,1}, \\
f_{12,0} = -\alpha_1 \alpha_2 f_{0,3}, \\
f_{12,1} = 2\gamma_{12} f_{0,1} - \alpha_2 f_{0,2}, \\
f_{12,2} = \alpha_1 f_{0,1}, \\
f_{12,12} = 2\gamma_{12} f_{0,3} + f_{0,0}.
\end{array} \right.$$

Así, finalmente se obtiene la matriz de transición para este caso:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_{12} \\ -e_1 & \alpha_1 e_0 & -e_{12} & \alpha_1 e_2 \\ -e_2 & \gamma_{12} e_0 + e_{12} & \alpha_2 e_0 & -\alpha_2 e_1 - \gamma_{12} e_2 \\ e_{12} & 2\gamma_{12} e_1 + \alpha_1 e_2 & -\alpha_2 e_1 & -\alpha_1 \alpha_2 e_0 + 2\gamma_{12} e_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{0,1} \\ f_{0,2} \\ f_{0,12} \end{pmatrix},$$

donde, la matriz de transición es:

$$(3.10) \quad \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_{12} \\ -e_1 & \alpha_1 e_0 & -e_{12} & \alpha_1 e_2 \\ -e_2 & \gamma_{12} e_0 + e_{12} & \alpha_2 e_0 & -\alpha_2 e_1 - \gamma_{12} e_2 \\ e_{12} & 2\gamma_{12} e_1 + \alpha_1 e_2 & -\alpha_2 e_1 & -\alpha_1 \alpha_2 e_0 + 2\gamma_{12} e_{12} \end{pmatrix}.$$

OBSERVACIÓN 1.1. *Es importante señalar que en ambos casos, tanto  $\mathcal{A}_1(2, \alpha_1)$  como  $\mathcal{A}_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ , las matrices de transición obtenidas utilizando el operador de Cauchy-Riemann generalizado (1.7) con  $q_i$  constantes reales, son las mismas que se obtienen aplicando el operador de Cauchy-Riemann usual (1.1).*

## 2. Espacio Asociado

En esta sección consideramos la ecuación diferencial parcial de primer orden de tipo:

$$(3.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \overline{D}_q u + G := Lu,$$

donde  $u(t, x)$  es una función desconocida que toma valores en el álgebra de Clifford,  $t$  es el tiempo y  $x$  un dominio de  $R^{n=1}$ ,  $\overline{D}_q$  es el operador conjugado del operador de Cauchy-Riemann generalizado (1.7) y  $G$  es lineal en los componentes de  $u$ . En lo que sigue, formularemos condiciones suficientes en los coeficientes del operador  $L$  bajo las cuales  $L$  es asociado a ecuaciones con lados derechos  $q$ -antimonogénicos. Para el operador  $L$  el problema de valores iniciales (3.1) tiene solución para una función inicial monogénica generalizada arbitraria  $\varphi$  y la solución es también monogénica generalizada para cada  $t$ .

DEFINICIÓN 2.1. *A un par de operadores diferenciales  $(L, l)$  se les dicen asociados si  $lu = 0$  implica que  $l(Lu) = 0$ .*

Consideremos un par de operadores diferenciales como sigue:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} lu &= D_q u - F(x, u), \\ Lu &= \overline{D}_q u + G(x, u), \end{aligned}$$

donde,

$$(3.13) \quad F = \sum_{i=0}^n F_i u_i,$$

es q-antimonogénica generalizada y

$$(3.14) \quad G = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n a_{i,j} e_i \right) u_j,$$

es una combinación lineal de las componentes de  $u$ . También se puede escribir  $G$  como:

$$G = \sum_{j=0}^n g_j e_j,$$

donde,

$$(3.15) \quad g_j = \sum_{i=0}^n a_{i,j} u_i.$$

Con la finalidad de encontrar las condiciones para operadores asociados, asumimos que los coeficientes  $a_{i,j}$  de  $G$  son diferenciables respecto a las variables espaciales y  $u$  es solución de la ecuación  $lu = 0$ . Entonces tenemos que:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} l(Lu) &= D_q(Lu) - F(x, Lu) \\ &= D_q(\overline{D}_q u + G) - F(x, Lu) \\ &= D_q \overline{D}_q u + D_q G - F(x, Lu) \\ &= \overline{D}_q D_q u + D_q G - F(x, Lu) \\ &= \overline{D}_q F + D_q G - F(x, u^*), \end{aligned}$$

donde  $u^* = Lu = \overline{D}_q u + G$ .

**2.1. El Caso  $\mathcal{A}_1(2, \alpha_1)$ .** En este caso tenemos dos elementos en la base  $\beta = \{e_0, e_1\}$ .

Consideremos la matriz de transición (3.9). Entonces escribimos los componentes de  $F$ ,  $(F_0, F_1)$  como sigue:

$$(3.17) \quad \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ -e_1 & \alpha_1 e_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix},$$

con  $s_0, s_1 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , con  $\Omega$  un dominio conexo y cerrado. Así  $F = F_0 u_0 + F_1 u_1$  es antimogénica. De (3.17) se tiene que:

$$F = f_0 e_0 + f_1 e_1,$$

donde,

$$(3.18) \quad \begin{cases} f_0 = s_0 u_0 + \alpha_1 s_1 u_1, \\ f_1 = s_1 u_0 - s_0 u_1. \end{cases}$$

Ahora, para construir el sistema (3.16), tenemos que:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \overline{D}_q F &= (q_0 e_0 \partial_0 - q_1 e_1 \partial_1)(f_0 e_0 + f_1 e_1) \\ &= e_0(q_0 \partial_0 f_0 + \alpha_1 q_1 \partial_1 f_1) + e_1(q_0 \partial_0 f_1 - q_1 \partial_1 f_0). \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.18) en (3.19) tenemos:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \overline{D}_q F &= e_0 (-q_1 \alpha_1 u_1 \partial_1 s_0 + q_1 \alpha_1 u_0 \partial_1 s_1 + q_1 \alpha_1 s_1 \partial_1 u_0 - q_1 \alpha_1 s_0 \partial_1 u_1 + q_0 u_0 \partial_0 s_0 \\ &\quad + q_0 \alpha_1 u_1 \partial_0 s_1 + q_0 s_0 \partial_0 u_0 + q_0 \alpha_1 s_1 \partial_0 u_1) \\ &\quad + e_1 (-q_1 u_0 \partial_1 s_0 - q_1 \alpha_1 u_1 \partial_1 s_1 - q_1 s_0 \partial_1 u_0 - q_1 \alpha_1 s_1 \partial_1 u_1 - q_0 u_1 \partial_0 s_0 + q_0 u_0 \partial_0 s_1 \\ &\quad + q_0 s_1 \partial_0 u_0 - q_0 s_0 \partial_0 u_1). \end{aligned}$$

por otro lado,

$$(3.21) \quad \begin{aligned} D_q G &= (q_0 e_0 \partial_0 + q_1 e_1 \partial_1)(g_0 e_0 + g_1 e_1) \\ &= e_0(q_0 \partial_0 g_0 - q_1 \alpha_1 \partial_1 g_1) + e_1(q_0 \partial_0 g_1 + q_1 \partial_1 g_0). \end{aligned}$$

entonces, usando (3.15)

$$\begin{aligned}
 D_q G &= e_0 \left( -q_1 \alpha_1 a_{1,0} \partial_1 u_0 - q_1 \alpha_1 a_{1,1} \partial_1 u_1 - q_1 \alpha_1 u_0 \partial_1 a_{1,0} - q_1 \alpha_1 u_1 \partial_1 a_{1,1} \right. \\
 &\quad \left. + q_0 a_{0,0} \partial_0 u_0 + q_0 a_{0,1} \partial_0 u_1 + q_0 u_0 \partial_0 a_{0,0} + q_0 u_1 \partial_0 a_{0,1} \right) \\
 (3.22) \quad &+ e_1 \left( q_1 a_{0,0} \partial_1 u_0 + q_1 a_{0,1} \partial_1 u_1 + q_1 u_0 \partial_1 a_{0,0} + q_1 u_1 \partial_1 a_{0,1} + q_0 a_{1,0} \partial_0 u_0 \right. \\
 &\quad \left. + q_0 a_{1,1} \partial_0 u_1 + q_0 u_0 \partial_0 a_{1,0} + q_0 u_1 \partial_0 a_{1,1} \right).
 \end{aligned}$$

como  $u$  es solución de la ecuación  $lu = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 lu &= D_q u - F(x, u) \\
 &= (q_0 e_0 \partial_0 + q_1 e_1 \partial_1)(u_0 e_0 + u_1 e_1) - (f_0 e_0 + f_1 e_1) \\
 &= e_0 (q_0 \partial_0 u_0 - \alpha_1 q_1 \partial_1 u_1 - f_0) + e_1 (q_0 \partial_0 u_1 + q_1 \partial_1 u_0 - f_1),
 \end{aligned}$$

donde usando (3.18) tenemos que:

$$(3.23) \quad \begin{cases} q_0 \partial_0 u_0 = \alpha_1 q_1 \partial_1 u_1 + s_0 u_0 + \alpha_1 s_1 u_1, \\ q_0 \partial_0 u_1 = -q_1 \partial_1 u_0 + s_1 u_0 - s_0 u_1. \end{cases}$$

Sustituyendo (3.23) en  $u^* = Lu = \overline{D}_q + G$  obtenemos  $u^* = u_0^* e_0 + u_1^* e_1$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 F(x, u^*) &= (s_0 u_0^* + \alpha_1 s_1 u_1^*) e_0 + (s_1 u_0^* - s_0 u_1^*) e_1 \\
 &= f_0^* e_0 + f_1^*.
 \end{aligned}$$

de donde,

$$(3.24) \quad \begin{cases} f_0^* = s_0 (q_0 \partial_0 u_0 + \alpha_1 q_1 \partial_1 u_1 + a_{0,0} u_0 + a_{0,1} u_1) \\ \quad + \alpha_1 s_1 (q_0 \partial_0 u_1 - q_1 \partial_1 u_0 + a_{1,0} u_0 + a_{1,1} u_1) \\ f_1^* = s_1 (q_0 \partial_0 u_0 + \alpha_1 q_1 \partial_1 u_1 + a_{0,0} u_0 + a_{0,1} u_1) \\ \quad - s_0 (q_0 \partial_0 u_1 - q_1 \partial_1 u_0 + a_{1,0} u_0 + a_{1,1} u_1) \end{cases}$$

Finalmente utilizando (3.19), (3.22) y (3.24) y cambiando las derivadas con respecto a  $x_0$  por las relaciones (3.23) podemos desarrollar el sistema (3.16).

$$l(Lu) = A_0 e_0 + A_1 e_1,$$

donde,

$$A_i = \sum_{j=0}^1 A_i^{(j1)} \partial_1 u_j + \sum_{k=0}^1 A_i^k u_k,$$

obteniendo los coeficientes que acompañan a las derivadas de  $u$ ,

$$\text{Grupo}(A) = \begin{cases} A_0^{(01)} &= -q_1 a_{0,1} - q_1 \alpha_1 a_{1,0} + 2\alpha_1 q_1 s_1, \\ A_0^{(11)} &= q_1 \alpha_1 a_{0,0} - q_1 \alpha_1 a_{1,1} - 2\alpha_1 q_1 s_0, \\ A_1^{(01)} &= q_1 a_{0,0} - q_1 a_{1,1} - 2q_1 s_0, \\ A_1^{(11)} &= \alpha_1 q_1 a_{1,0} + q_1 a_{0,1} - 2\alpha_1 q_1 s_1, \end{cases}$$

y los coeficientes que acompañan a la función  $u$ :

$$\text{Grupo}(B) = \begin{cases} A_0^0 &= s_1 a_{0,1} - \alpha_1 s_1 a_{1,0} + q_1 \alpha_1 \partial_1 s_1 - q_1 \alpha_1 \partial_1 a_{1,0} + q_0 \partial_0 s_0 + q_0 \partial_0 a_{0,0}, \\ A_0^1 &= \alpha_1 s_1 a_{0,0} - 2s_0 a_{0,1} - \alpha_1 s_1 a_{1,1} - q_1 \alpha_1 \partial_1 s_0 - q_1 \alpha_1 \partial_1 a_{1,1} + q_0 \alpha_1 \partial_0 s_1 + q_0 \partial_0 a_{0,1}, \\ A_1^0 &= -s_1 a_{0,0} + 2s_0 a_{1,0} + s_1 a_{1,1} - q_1 \partial_1 s_0 + q_1 \partial_1 a_{0,0} + q_0 \partial_0 s_1 + q_0 \partial_0 a_{1,0}, \\ A_1^1 &= -s_1 a_{0,1} + \alpha_1 s_1 a_{1,0} - q_1 \alpha_1 \partial_1 s_1 + q_1 \partial_1 a_{0,1} - q_0 \partial_0 s_0 + q_0 \partial_0 a_{1,1}. \end{cases}$$

Igualando a cero las ecuaciones del Grupo(A) y del Grupo (B) obtenemos condiciones suficientes para que  $(l, L)$  sean operadores asociados. Note que las cuatro ecuaciones del Grupo(A) coinciden a pares, entonces obtenemos las siguientes relaciones del Grupo(A):

$$(3.25) \quad \begin{cases} \alpha_1 a_{1,0} &= 2\alpha_1 s_1 - a_{0,1}, \\ a_{1,1} &= -2s_0 + a_{0,0}. \end{cases}$$

Sustituyendo las relaciones (3.25) en el Grupo(B) y luego sumar  $A_0^0$  y  $A_1^1$  tenemos:

$$(3.26) \quad \begin{cases} a_{0,0} &= s_0 + k_0, \\ a_{0,1} &= \alpha_1 s_1 + k_1, \end{cases}$$

con  $k_0, k_1$  constantes reales.

De acuerdo con (3.26) y (3.25) se tiene que:

$$(3.27) \quad \begin{cases} \alpha_1 a_{1,0} &= \alpha_1 s_1 - k_1 \\ a_{1,1} &= -s_0 + k_0 \end{cases}$$

donde  $\alpha_1, k_0, k_1$  son constantes reales arbitrarias.

Sustituimos (3.26) en el Grupo(B) y obtenemos:

$$\begin{cases} q_0 \partial_0 s_0 + s_1 k_1 &= 0, \\ \alpha_1 q_0 \partial_0 s_1 - s_0 k_1 &= 0. \end{cases}$$

Denotando,

$$s = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

y

$$K = \frac{1}{q_0} \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ \frac{k_1}{\alpha_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces obtenemos el siguiente sistema:

$$(3.28) \quad \partial_0 s(x_0, x_1) = K s(x_0, x_1).$$

Fijando  $x_1$  el sistema (3.28) puede ser considerado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para  $s_j$  con coeficientes constantes cuya solución viene dada por:

$$(3.29) \quad s(x_0, x_1) = e^{(K(x_0 - \xi))s(\xi, x_1)}.$$

Finalmente, con todos estos cálculos, el siguiente teorema queda demostrado:

**TEOREMA 9.** *Supongamos que los coeficientes  $a_{i,j}, s_j$  son continuamente diferenciables en  $x_0, x_1$  y diferenciables en el tiempo  $t$ . Si las condiciones (3.26) y (3.27) son satisfechas, entonces el operador  $L$  es asociado al operador  $l$ .*

**2.2. El Caso  $\mathcal{A}_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ .** En este caso tenemos cuatro elementos en la base  $\beta = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}\}$ . Consideremos los operadores diferenciales  $l$  y  $L$  dados en (3.12) con  $n = 3$  en (3.13) y (3.14) donde  $u_3 = u_{12}$  y  $F_3 = F_{12}$

Considerando la matriz de transición (3.10), escribimos los componentes de  $F$ ,  $(F_0, F_1, F_2, F_{12})$  como sigue:

$$(3.30) \quad \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_{12} \\ -e_1 & \alpha_1 e_0 & -e_{12} & \alpha_1 e_2 \\ -e_2 & -2\gamma_{12} e_0 + e_{12} & \alpha_2 e_0 & -\alpha_2 e_1 - 2\gamma_{12} e_2 \\ e_{12} & 2\gamma_{12} e_1 + \alpha_1 e_2 & -\alpha_2 e_1 & -\alpha_1 \alpha_2 e_0 + 2\gamma_{12} e_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_{12} \end{pmatrix}$$

con  $s_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R}), j = \{0, 1, 2, 12\}$ , donde  $\Omega$  es un dominio conexo y cerrado.

Así,  $F = F_0 u_0 + F_1 u_1 + F_2 u_2 + F_{12} u_{12}$  es  $q$ -antimonogénica. De (3.30) se tiene que:

$$F = f_0 e_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_{12} e_{12},$$

donde,

$$(3.31) \quad \begin{cases} f_0 &= s_0 u_0 + s_1 u_1 \alpha_1 + s_2 u_2 \alpha_2 - s_{12} u_{12} \alpha_1 \alpha_2 - 2s_1 u_2 \gamma_{12}, \\ f_1 &= s_1 u_0 - s_0 u_1 - s_{12} u_2 \alpha_2 - s_2 u_{12} \alpha_2 + 2s_1 u_{12} \gamma_{12}, \\ f_2 &= s_2 u_0 - s_0 u_2 + s_{12} u_1 \alpha_1 + s_1 u_{12} \alpha_1 - 2s_{12} u_2 \gamma_{12}, \\ f_{12} &= s_{12} u_0 - s_2 u_1 + s_1 u_2 + s_0 u_{12} + 2s_{12} u_{12} \gamma_{12}. \end{cases}$$

Realizando calculos análogos al caso  $A_1(2, \alpha_1)$  obtenemos:

$$l(Lu) = \sum_{i=0}^3 A_i e_i,$$

donde,

$$A_i = \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^2 A_i^{(jk)} \partial_k u_j + \sum_{l=0}^3 A_i^l u_l.$$

Entonces,

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0^{(01)} = 2q_1\alpha_1s_1 - q_1a_{0,1} - q_1\alpha_1a_{1,0}, \\ A_0^{(11)} = -2q_1\alpha_1s_0 + q_1\alpha_1a_{0,0} - q_1\alpha_1a_{1,1}, \\ A_0^{(21)} = -2q_1\alpha_1\alpha_2s_3 - q_1a_{0,3} - q_1\alpha_1a_{1,2}, \\ A_0^{(31)} = 4q_1\alpha_1\gamma_{12}s_1 - 2q_1\alpha_1\alpha_2s_2 + q_1\alpha_1a_{0,2} - q_1\alpha_1a_{1,3}, \\ A_0^{(02)} = -4q_2\gamma_{12}s_1 + 2q_2\alpha_2s_2 - q_2a_{0,2} + 2q_2\gamma_{12}a_{1,0} - q_2\alpha_2a_{2,0}, \\ A_0^{(12)} = 4q_2\gamma_{12}s_0 + 2q_2\alpha_1\alpha_2s_3 - 2q_2\gamma_{12}a_{0,0} + q_2a_{0,3} + 2q_2\gamma_{12}a_{1,1} - q_2\alpha_2a_{2,1}, \\ A_0^{(22)} = -2q_2\alpha_2s_0 + q_2\alpha_2a_{0,0} + 2q_2\gamma_{12}a_{1,2} - q_2\alpha_2a_{2,2}, \\ A_0^{(32)} = 2q_2\alpha_1\alpha_2s_1 - 8q_2\gamma_{12}^2s_1 + 4q_2\alpha_2\gamma_{12}s_2 - q_2\alpha_2a_{0,1} - 2q_2\gamma_{12}a_{0,2} + 2q_2\gamma_{12}a_{1,3} - q_2\alpha_2a_{2,3}, \\ A_0^{(0)} = s_1a_{0,1} + s_2a_{0,2} + s_3a_{0,3} - \alpha_1s_1a_{1,0} + 2\gamma_{12}s_1a_{2,0} - \alpha_2s_2a_{2,0} + \alpha_1\alpha_2s_3a_{3,0} \\ - 2q_2\gamma_{12}\partial_2s_1 + q_2\alpha_2\partial_2s_2 + 2q_2\gamma_{12}\partial_2a_{1,0} - q_2\alpha_2\partial_2a_{2,0} + q_1\alpha_1\partial_1s_1 \\ - q_1\alpha_1\partial_1a_{1,0} + q_0\partial_0s_0 + q_0\partial_0a_{0,0}, \\ A_0^{(1)} = \alpha_1s_1a_{0,0} - 2s_0a_{0,1} + \alpha_1s_3a_{0,2} - s_2a_{0,3} - \alpha_1s_1a_{1,1} + 2\gamma_{12}s_1a_{2,1} - \alpha_2s_2a_{2,1} \\ + \alpha_1\alpha_2s_3a_{3,1} + 2q_2\gamma_{12}\partial_2s_0 + q_2\alpha_1\alpha_2\partial_2s_3 + 2q_2\gamma_{12}\partial_2a_{1,1} - q_2\alpha_2\partial_2a_{2,1} \\ - q_1\alpha_1\partial_1s_0 - q_1\alpha_1\partial_1a_{1,1} + q_0\alpha_1\partial_0s_1 + q_0\partial_0a_{0,1}, \\ A_0^{(2)} = -2\gamma_{12}s_1a_{0,0} + \alpha_2s_2a_{0,0} - \alpha_2s_3a_{0,1} - 2s_0a_{0,2} - 2\gamma_{12}s_3a_{0,2} + s_1a_{0,3} - \alpha_1s_1a_{1,2} \\ + 2\gamma_{12}s_1a_{2,2} - \alpha_2s_2a_{2,2} + \alpha_1\alpha_2s_3a_{3,2} - q_2\alpha_2\partial_2s_0 + 2q_2\gamma_{12}\partial_2a_{1,2} - q_2\alpha_2\partial_2a_{2,2} \\ - q_1\alpha_1\alpha_2\partial_1s_3 - q_1\alpha_1\partial_1a_{1,2} - 2q_0\gamma_{12}\partial_0s_1 + q_0\alpha_2\partial_0s_2 + q_0\partial_0a_{0,2}, \\ A_0^{(3)} = -\alpha_1\alpha_2s_3a_{0,0} + 2\gamma_{12}s_1a_{0,1} - \alpha_2s_2a_{0,1} + \alpha_1s_1a_{0,2} + 2\gamma_{12}s_3a_{0,3} - \alpha_1s_1a_{1,3} \\ + 2\gamma_{12}s_1a_{2,3} - \alpha_2s_2a_{2,3} + \alpha_1\alpha_2s_3a_{3,3} + q_2\alpha_1\alpha_2\partial_2s_1 - 4q_2\gamma_{12}^2\partial_2s_1 + 2q_2\alpha_2\gamma_{12}\partial_2s_2 \\ + 2q_2\gamma_{12}\partial_2a_{1,3} - q_2\alpha_2\partial_2a_{2,3} + 2q_1\alpha_1\gamma_{12}\partial_1s_1 - q_1\alpha_1\alpha_2\partial_1s_2 - q_1\alpha_1\partial_1a_{1,3} \\ - q_0\alpha_1\alpha_2\partial_0s_3 + q_0\partial_0a_{0,3}. \end{array} \right.$$

Los coeficientes  $A_i^{(jk)}$  y  $A_i^{(l)}$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$  tienen estructuras similares a  $A_0^{(jk)}$  y  $A_0^{(l)}$  respectivamente. Igualando todos los coeficientes  $A_i^{(jk)}$  y  $A_i^{(l)}$  a cero, obtenemos las condiciones suficientes bajo las cuales  $(l, L)$  son operadores asociados.

En este caso tenemos 32 coeficientes de las derivadas de  $u$ , igualando estos coeficientes  $A_i^{(jk)}$  a cero, obtenemos un sistema que coincide a pares, por lo tanto, solo quedan 16 ecuaciones las cuales denotaremos por  $Grupo(A)$ . Resolviendo el  $Grupo(A)$ , obtenemos las siguientes

relaciones:

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,0} = -\frac{-2\alpha_1 s_1 + a_{0,1}}{\alpha_1}, \\ a_{1,1} = -2s_0 + a_{0,0}, \\ a_{1,2} = -\frac{2\alpha_1 \alpha_2 s_3 + a_{0,3}}{\alpha_1}, \\ a_{1,3} = 4\gamma_{12} s_1 - 2\alpha_2 s_2 + a_{0,2}, \\ a_{2,0} = -\frac{-2\alpha_1 \alpha_2 s_2 + 2\gamma_{12} a_{0,1} + \alpha_1 a_{0,2}}{\alpha_1 \alpha_2}, \\ a_{2,1} = -\frac{-2\alpha_1 \alpha_2 s_3 - a_{0,3}}{\alpha_2}, \\ a_{2,2} = -2s_0 + a_{0,0} - \frac{2\gamma_{12}(2\alpha_1 \alpha_2 s_3 + a_{0,3})}{\alpha_1 \alpha_2}, \\ a_{2,3} = 2\alpha_1 s_1 - a_{0,1}, \\ a_{3,0} = -\frac{a_{0,3}}{\alpha_1 \alpha_2}, \\ a_{3,1} = -\frac{2\gamma_{12} a_{0,1} + \alpha_1 a_{0,2}}{\alpha_1 \alpha_2}, \\ a_{3,2} = \frac{a_{0,1}}{\alpha_1}, \\ a_{3,3} = -\frac{-\alpha_1 \alpha_2 a_{0,0} + 2\gamma_{12} a_{0,3}}{\alpha_1 \alpha_2}. \end{array} \right.$$

Por otro lado, tenemos 16 coeficientes  $A_i^{(l)}$  de las componentes  $u_0, u_1, u_2, u_{12}$ , igualando estos coeficientes a cero, obtenemos un sistema que llamaremos Grupo(B). Sustituyendo las relaciones (3.33) en el Grupo(B) obtenemos:

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{0,0} = k_0 + s_0, \\ a_{0,1} = k_1 + \alpha_1 s_1, \\ a_{0,2} = k_2 - 2\gamma_{12} s_1 + \alpha_2 s_2, \\ a_{0,3} = k_3 - \alpha_1 \alpha_2 s_3, \\ \partial_0 s_3 = 0. \end{array} \right.$$

De acuerdo con (3.33) y (3.34) se tiene que:

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,0} = -\frac{k_1}{\alpha_1} + s_1, \\ a_{1,1} = k_0 - s_0, \\ a_{1,2} = -\frac{k_3}{\alpha_1} - \alpha_2 s_3, \\ a_{1,3} = k_2 + 2\gamma_{12}s_1 - \alpha_2 s_2, \\ a_{2,0} = -\frac{k_2\alpha_1 + 2k_1\gamma_{12}}{\alpha_1\alpha_2} + s_2, \\ a_{2,1} = \frac{k_3}{\alpha_2} + \alpha_1 s_3, \\ a_{2,2} = k_0 - s_0 + 2\gamma_{12} \left( -\frac{k_3}{\alpha_1\alpha_2} - s_3 \right), \\ a_{2,3} = -k_1 + \alpha_1 s_1, \\ a_{3,0} = -\frac{k_3}{\alpha_1\alpha_2} + s_3, \\ a_{3,1} = -\frac{k_2\alpha_1 + 2k_1\gamma_{12}}{\alpha_1\alpha_2} - s_2, \\ a_{3,2} = \frac{k_1}{\alpha_1} + s_1, \\ a_{3,3} = k_0 + s_0 + 2\gamma_{12} \left( -\frac{k_3}{\alpha_1\alpha_2} + s_3 \right). \end{array} \right.$$

Sustituyendo (3.34) en el Grupo(B), se obtiene que:

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 s_0 = \frac{(k_2\alpha_1\gamma_{12} + k_1(-\alpha_1\alpha_2 + 2\gamma_{12}^2))s_1 - \alpha_2(k_2\alpha_1 + k_1\gamma_{12})s_2}{q_0\alpha_1\alpha_2}, \\ \partial_0 s_1 = \frac{k_3(-\gamma_{12}s_1 + \alpha_2 s_2) + k_1\alpha_2(s_0 + \gamma_{12}s_3)}{q_0\alpha_1\alpha_2}, \\ \partial_0 s_2 = \frac{1}{q_0\alpha_1\alpha_2} (-k_3\alpha_1 s_1 + k_2\alpha_1(s_0 + \gamma_{12}s_3) + \gamma_{12}(k_3 s_2 + 2k_1(s_0 + \gamma_{12}s_3))), \\ \partial_0 s_3 = 0. \end{array} \right.$$

Denotando,

$$s = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

y

$$K = \frac{1}{q_0} \begin{pmatrix} 0 & \frac{(k_2\alpha_1\gamma_{12} + k_1(-\alpha_1\alpha_2 + 2\gamma_{12}^2))}{\alpha_1\alpha_2} & -\frac{(k_2\alpha_1 + k_1\gamma_{12})}{\alpha_1} & 0 \\ \frac{k_1}{\alpha_1} & -\frac{k_3\gamma_{12}}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{k_3}{\alpha_1} & \frac{k_1\gamma_{12}}{\alpha_1} \\ \frac{(k_2\alpha_1 + 2k_1\gamma_{12})}{\alpha_1\alpha_2} & -\frac{k_3}{\alpha_2} & \frac{k_3\gamma_{12}}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{(k_2\alpha_1\gamma_{12} + 2k_1\gamma_{12}^2)}{\alpha_1\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el siguiente sistema final:

$$(3.37) \quad \partial_0 s(x_0, x_1, x_2) = Ks(x_0, x_1, x_2).$$

Fijando  $x_1, x_2$  el sistema (3.37) puede ser considerado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para  $s_j$  con coeficientes constantes, cuya solución viene dada por:

$$(3.38) \quad s(x_0, x_1, x_2) = e^{(K(x_0\xi))s(x_0, x_1, x_2)}.$$

Finalmente, después de estos cálculos, el siguiente teorema queda demostrado:

**TEOREMA 10.** *Supongamos que los coeficientes  $a_{i,j}$ ,  $s_j$  son continuamente diferenciables en  $x_0, x_1, x_2$  y diferenciables en el tiempo  $t$ . Si las condiciones (3.38) y (3.35) son satisfechas, entonces el operador  $L$  es asociado al operador  $l$ .*

## CONCLUSIÓN

En este trabajo de investigación, logramos construir espacios asociados para el operador  $D_q$  con los  $q_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  constantes reales, a través de lados derechos q-antimonogénicos en el anillo  $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$ , para los casos particulares  $n = 1, 2$ . Usando estos espacios asociados, algunos estimados interiores provistos en [7] y aplicando un teorema de punto fijo, se logra dar garantía de la existencia de la solución para el problema de valores iniciales, siguiendo el método de espacios asociados de Walter y Tutschke [12].

Para resolver problemas de valores iniciales con este método de espacios asociados, primero presentamos las condiciones para que los lados derechos  $F(x, u)$  sean q-antimonogénicos utilizando matrices de transición. Luego, mostramos las condiciones suficientes sobre los coeficientes de un operador lineal de primer orden en el análisis de Clifford  $L$  para que sea asociado a ecuaciones diferenciales con lados derechos q-antimonogénicos. Estos resultados se comprobaron con algoritmos elaborados en el programa *mathematica*, lo cual hace los resultados expuestos exactos y fiables.

Todos los resultados obtenidos en esta tesis son originales y nos permiten generalizar los resultados de [1] y [3].

Como extensión natural a este trabajo se pueden considerar operadores más generales, por ejemplo:

$$(4.1) \quad D_{q,\lambda} = \sum_{i=0}^n q_i e_i \partial_i - \lambda,$$

donde  $q_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  pueden ser funciones reales o constantes reales y  $\lambda$  puede ser Clifford valuada o una constante real. El caso  $q_i = 1$ ,  $\forall i$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se puede ver en [10].

## Apéndice

### Apéndice 1: Algoritmo para el Cálculo de la Matriz de Transición $A_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ .

El código presentado a continuación se utilizó para comprobar las condiciones suficientes para la construcción de un lado derecho anti-monogénico  $A_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ .

```

"T Matrix RHS by Antonio Di Teodoro and Maria Clara Sapiain";
ClearAll["Global`*"];
ExpandNCM[(h : NonCommutativeMultiply)[a___, b_Plus, c___]] :=
  Distribute[h[a, b, c], Plus, h, Plus, ExpandNCM[h[##]] &]
ExpandNCM[(h : NonCommutativeMultiply)[a___, b_Times, c___]] :=
  Most[b] ExpandNCM[h[a, Last[b], c]]
ExpandNCM[a_] := ExpandAll[a]
"Right hand side function";
"Clifford A2 Case";
"Preliminaries";
BASE = {e0, e1, e2, e12};
Funcionesu = {u0[x0, x1, x2], u1[x0, x1, x2], u2[x0, x1, x2], u12[x0, x1, x2]};

DerivafunPI =  $\sum_{A=0}^3 \sum_{B=0}^3 \partial_{x_A} u_B[x_0, x_1, x_2]$ ;
Ajust = {u3(1,0,0)[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  u12(1,0,0)[x0, x1, x2],
  u3(0,1,0)[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  u12(0,1,0)[x0, x1, x2], u3(0,0,1)[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  u12(0,0,1)[x0, x1, x2]};
DerivafunPII = DerivafunPI //. Ajust;
ConjuntDerFun = {DerivafunPII[[1]], DerivafunPII[[2]], DerivafunPII[[3]],
  DerivafunPII[[4]], DerivafunPII[[5]], DerivafunPII[[6]],
  DerivafunPII[[7]], DerivafunPII[[8]], DerivafunPII[[9]],
  DerivafunPII[[10]], DerivafunPII[[11]], DerivafunPII[[12]]};
Notacionee = {e3  $\rightarrow$  e12, u3  $\rightarrow$  u12};

"Order";
NicoOrder = {e_x ** Y_ * e_x_  $\rightarrow$  e_x ** e_x * Y, e_x_ ** Y_ * e_k_  $\rightarrow$  e_x ** e_k * Y};

"Clifford Rules";
DOSParCliffordRules = {e0 ** e_x_  $\rightarrow$  e_x, e_x_ ** e0  $\rightarrow$  e_x,
  e1 ** e1  $\rightarrow$  - $\alpha_1$  e0, e1 ** e2  $\rightarrow$  e12, e1 ** e12  $\rightarrow$  - $\alpha_1$  e2,
  e2 ** e1  $\rightarrow$  2  $\gamma_{12}$  e0 - e12, e2 ** e2  $\rightarrow$  - $\alpha_2$  e0, e2 ** e12  $\rightarrow$  2  $\gamma_{12}$  e2 +  $\alpha_2$  e1};

"Dirac operator construction";
U =  $\sum_{B=0}^3 \sum_{A=0}^3 f_{A,B}[x_0, x_1, x_2] u_A[x_0, x_1, x_2] e_B$ ;
CliffU = U //. Notacionee;
UA = ExpandNCM[e0 ** q0  $\partial_{x_0}$  CliffU] //. NicoOrder;
UB = ExpandNCM[e1 ** q1  $\partial_{x_1}$  CliffU] //. NicoOrder;
UC = ExpandNCM[e2 ** q2  $\partial_{x_2}$  CliffU] //. NicoOrder;
CliffCROU = UA - UB - UC //. DOSParCliffordRules;

Funucero = {u0[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  0, u1[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  0, u2[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  0, u12[x0, x1, x2]  $\rightarrow$  0};
"Solving the system";
WRulesCROU = CliffCROU //. Funucero;
SFinalI = Collect[WRulesCROU, ConjuntDerFun];
"Construction Final System, just T matrix.";
SFinalII = {SFinalI[[1]], SFinalI[[2]], SFinalI[[3]],
  SFinalI[[4]], SFinalI[[5]], SFinalI[[6]], SFinalI[[7]], SFinalI[[8]],
  SFinalI[[9]], SFinalI[[10]], SFinalI[[11]], SFinalI[[12]]};
ConjuntDerFunAl = {DerivafunPII[[1]]  $\rightarrow$  1, DerivafunPII[[2]]  $\rightarrow$  1,
  DerivafunPII[[3]]  $\rightarrow$  1,
  DerivafunPII[[4]]  $\rightarrow$  1, DerivafunPII[[5]]  $\rightarrow$  1, DerivafunPII[[6]]  $\rightarrow$  1,
  DerivafunPII[[7]]  $\rightarrow$  1, DerivafunPII[[8]]  $\rightarrow$  1, DerivafunPII[[9]]  $\rightarrow$  1,

```

**Apéndice 2: Algoritmo para el Cálculo del Espacio Asociado  $A_1(2, \alpha_1)$ .**

El código presentado a continuación se utilizó para comprobar las condiciones suficientes para operadores diferenciales asociados para el caso  $A_1(2, \alpha_1)$ .

```

"Necessary condition for Associate
  space by Antonio Di Teodoro and Maria Clara Sapiain";
ClearAll["Global`*"];
"Funcion para tener DISTRIBUTIVA";
ExpandNCM[(h : NonCommutativeMultiply)[a____, b_Plus, c____]] :=
  Distribute[h[a, b, c], Plus, h, Plus, ExpandNCM[h[###]] &]
ExpandNCM[(h : NonCommutativeMultiply)[a____, b_Times, c____]] :=
  Most[b] ExpandNCM[h[a, Last[b], c]]
ExpandNCM[a_] := ExpandAll[a]
"Right hand side function";
"Complex Case";
"Preliminaries";
"Base, Functions and derivatives";
BASE = {e_0, e_1};
Funcionesu = {u_0[x_0, x_1], u_1[x_0, x_1]};
Funciones = {s_0[x_0, x_1], s_1[x_0, x_1]};
Funcionesa = {a_0^0[x_0, x_1], a_0^1[x_0, x_1], a_1^0[x_0, x_1], a_1^1[x_0, x_1]};
DerivaFun = {u_x_^(0,1)[x_0, x_1], u_x_^(1,0)[x_0, x_1]};
"Order";
NicoOrder = {e_x ** Y_ * e_x_ => e_x ** e_x * Y, e_x_ ** Y_ * e_k_ => e_x ** e_k * Y};
NicoOrderNull = {e_x_ ** A_ (B_ + C_) => A (e_x ** B + e_x ** C)};
NicoOrderParente = {e_x_ ** (Y_ * e_x_) => e_x ** e_x * Y, e_x_ ** (Y_ * e_k_) => e_x ** e_k * Y};
EquilibrateFinale = {e_x_ ** Y_ => e_x Y};
spacelikevar = {x_0 => x_0, x_1 => x_1};
"Clifford Rules";
ClassicComplexCliffordRules = {e_0 ** e_x_ => e_x, e_x_ ** e_0 => e_x, e_1 ** e_1 => -e_0};
ParametricComplexCliffordRules = {e_0 ** e_x_ => e_x, e_x_ ** e_0 => e_x, e_1 ** e_1 => -alpha_1 * e_0};
NoconstantParametricComplexCliffordRules =
  {e_0 ** e_x_ => e_x, e_x_ ** e_0 => e_x, e_1 ** e_1 => -alpha_1[x_0, x_1] * e_0};

"Function F";
RF = Sum[F_A u_A[x_0, x_1], {A, 0, 1}];
"This is from the transition matrix of complex case";
Tranmatrix = {F_0 => s_0[x_0, x_1] + e_1 s_1[x_0, x_1], F_1 => alpha_1 * s_1[x_0, x_1] - e_1 s_0[x_0, x_1]};
RRRF = RF //. Tranmatrix;
RRF = Simplify[RRRF];
"Construction of Cauchy-Riemann";
A = ExpandNCM[e_0 ** q_0 D_x0 RRF];
NullA = A //. NicoOrderNull;
ParenteNullA = NullA //. NicoOrderParente;
RDA = ParenteNullA //. NicoOrder;
"%";
B = ExpandNCM[e_1 ** q_1 D_x1 RRF];
NullB = B //. NicoOrderNull;
ParenteNullB = NullB //. NicoOrderParente;
RDB = ParenteNullB //. NicoOrder;
CRO = RDA - RDB;
WRulesCRO = CRO //. ParametricComplexCliffordRules;
EquiWRulesCRO = WRulesCRO //. EquilibrateFinale;
CollectEquiWRulesCRO = Collect[EquiWRulesCRO, BASE];

```

```
"Function G";
```

```

RG =  $\sum_{A=0}^1 \sum_{B=0}^1 a_{B,A} [x_0, x_1] e_B u_A [x_0, x_1];$ 
GA = ExpandNCM[e_0 ** q_0  $\partial_{x_0}$  RG];
GB = ExpandNCM[e_1 ** q_1  $\partial_{x_1}$  RG];
CROG = (GA + GB) //. NicoOrder;
WRulesCROG = CROG //. ParametricComplexCliffordRules;
SystemCROG = Collect[WRulesCROG, BASE];

"Function $u^* = \bar{D}u + G$";

U =  $\sum_{A=0}^1 u_A [x_0, x_1] e_A;$ 
UA = ExpandNCM[e_0 ** q_0  $\partial_{x_0}$  U];
UB = ExpandNCM[e_1 ** q_1  $\partial_{x_1}$  U];
CROU = UA - UB //. NicoOrder;
WRulesCROU = CROU //. ParametricComplexCliffordRules;
SystemCROU = Collect[WRulesCROU, BASE];
SystemG = Collect[RG, BASE];
U* = Collect[SystemCROU + SystemG, BASE];

"F(x,u*) function,  $\mu_A = u^*$ ";

StarF =  $\sum_{A=0}^1 F_A \mu_A;$ 
Tranmatrix2 = {F_0  $\rightarrow$  e_0 s_0 [x_0, x_1] + e_1 s_1 [x_0, x_1], F_1  $\rightarrow$   $\alpha_1 * e_0 s_1 [x_0, x_1] - e_1 s_0 [x_0, x_1]$ };
RStarF = StarF //. Tranmatrix2;
aditionale = {e_x  $\rightarrow$  1};
AU* = Extract[U*, {1}] //. aditionale;
BU* = Extract[U*, {2}] //. aditionale;
RuleforFu* = { $\mu_0 \rightarrow AU^*$ ,  $\mu_1 \rightarrow BU^*$ };
Fu* = RStarF //. RuleforFu*;
FinalFu* = FullSimplify[Fu*];
ColFinalFu* = Collect[FinalFu*, BASE];

"Construction of  $\bar{D}u + FG + F(x, Fu^*)$ ";
FinaleconBrio = ColequiWRulesCRO + SystemCROG - ColFinalFu*;
Collect[FinaleconBrio, BASE];

"In order to desapier the derivatives rspect to x0";
Nullderivative = {q_0 * u_0(1,0) [x_0, x_1]  $\rightarrow$  s_0 [x_0, x_1] * u_0 [x_0, x_1] +
 $\alpha_1 * s_1 [x_0, x_1] * u_1 [x_0, x_1] + \alpha_1 * q_1 * u_1^{(0,1)} [x_0, x_1]$ , q_0 * u_1(1,0) [x_0, x_1]  $\rightarrow$ 
 $-s_0 [x_0, x_1] * u_1 [x_0, x_1] + s_1 [x_0, x_1] * u_0 [x_0, x_1] - q_1 * u_0^{(0,1)} [x_0, x_1]$ };
FinaleconBrio2 = FinaleconBrio //. Nullderivative;
FinaleFinale = Collect[FinaleconBrio2, BASE];

"Take to terms";
MasterOfCollect = {u_0 [x_0, x_1], u_1 [x_0, x_1], u_1(0,1) [x_0, x_1], u_0(0,1) [x_0, x_1] };
FinaleT1 = (FinaleFinale)[[1]] //. aditionale;
FinaleT2 = (FinaleFinale)[[2]] //. aditionale;
"Real Part";
NICO_1 = Collect[FinaleT1, MasterOfCollect];
"Vectorial Part";
NICO_2 = Collect[FinaleT2, MasterOfCollect];

"Group A";

```

```

Uno = {u_x[x0, x1] ==> 1, u_x^(1,0)[x0, x1] ==> 1, u_x^(0,1)[x0, x1] ==> 1};
BaseSolderiva = {a1,0[x0, x1], a1,1[x0, x1]};
m = 1;
Do[Do[A_m = NICO_i[[j]] // . Uno; m = m + 1, {j, 2}], {i, 2}]

"Group B";
m = 1;
Do[Do[B_m = NICO_i[[j]] // . Uno; m = m + 1, {j, 3, 4}], {i, 2}]

BABELTOWER1 = Solve[A1 == 0 && A2 == 0, BaseSolderiva];
BABELTOWERDEV0 = D_x0 BABELTOWER1;
BABELTOWERDEV1 = D_x1 BABELTOWER1;

Do[C_i = B_i // . BABELTOWER1, {i, 4}]
Do[Cdev0_i = C_i // . BABELTOWERDEV0, {i, 4}]
Do[Cdev1_i = Cdev0_i // . BABELTOWERDEV1, {i, 4}]
Do[SustC_i = FullSimplify[Cdev1_i], {i, 4}]

M = FullSimplify[SustC_1 + SustC_4];
M_1 = M[[1, 1, 1, 1]];
M_2 = M[[1, 1, 1, 2]];

BABELTOWER2 = DSolve[M_1 == 0, a0,1[x0, x1], x1] // . {C[1] ==> k0};
BABELTOWER3 = DSolve[M_2 == 0, a0,0[x0, x1], x0] // . {C[1] ==> k1};
SustBabelDer0 = D_x0 BABELTOWER2;
SustBabelDer1 = D_x1 BABELTOWER2;
SustBabelDer03 = D_x0 BABELTOWER3;
SustBabelDer13 = D_x1 BABELTOWER3;

Fin1 = {SustC_1, SustC_2} // . BABELTOWER2;
Fin2 = Fin1 // . BABELTOWER3;
Fin3 = Fin2 // . SustBabelDer0;
Fin4 = Fin3 // . SustBabelDer1;
Fin5 = Fin4 // . SustBabelDer03;
FinFin = Fin5 // . SustBabelDer13;
"Final Solution";
SolFinale = Solve[FinFin[[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1]] == 0 &&
  FinFin[[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]] == 0, {s0^(1,0)[x0, x1], s1^(1,0)[x0, x1]};

```

**Apéndice 3: Algoritmo para el Cálculo del Espacio Asociado  $A_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ .**

El código presentado a continuación se utilizó para comprobar las condiciones suficientes para operadores diferenciales asociados para el caso  $A_2(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ .

```

"Necessary condition for Associate
  space by Antonio Di Teodoro and Maria Clara Sapiain";
ClearAll["Global`*"];
"Definition of Distributive Function";
ExpandNCM[(h : NonCommutativeMultiply)[a____, b_Plus, c____]] :=
  Distribute[h[a, b, c], Plus, h, Plus, ExpandNCM[h[###]] &]
ExpandNCM[(h : NonCommutativeMultiply)[a____, b_Times, c____]] :=
  Most[b] ExpandNCM[h[a, Last[b], c]]
ExpandNCM[a_] := ExpandAll[a]
"Right hand side function";
"Clifford A2 parametric Case";
"Prelims";
NicoOrder = {e_x ** Y_ * e_x_ -> e_x ** e_x * Y, e_x_ ** Y_ * e_k_ -> e_x ** e_k * Y};
NicoOrderNull = {e_x_ ** A_ (B_ + C_ + D_ + E_) -> A (e_x ** B + e_x ** C + e_x ** D + e_x ** E)};
NicoOrderParente = {e_x_ ** (Y_ * e_x_) -> e_x ** e_x * Y, e_x_ ** (Y_ * e_k_) -> e_x ** e_k * Y};
EquilibrateFinale = {e_x_ ** Y_ -> e_x Y};
BASE = {e_0, e_1, e_2, e_12};
Funcionesu = {u_0[x0, x1, x2], u_1[x0, x1, x2], u_2[x0, x1, x2], u_12[x0, x1, x2]};
DerivaFun = {u_x_^(1,0,0)[x0, x1, x2], u_x_^(0,1,0)[x0, x1, x2], u_x_^(0,0,1)[x0, x1, x2]};
Funciones = {s_0[x0, x1, x2], s_1[x0, x1, x2], s_2[x0, x1, x2], s_3[x0, x1, x2]};
"Parametric Clifford Rules";
DOSClassCliffordRules = {e_0 ** e_x_ -> e_x, e_x_ ** e_0 -> e_x,
  e_1 ** e_1 -> -alpha_1 e_0, e_1 ** e_2 -> e_12, e_1 ** e_12 -> -alpha_1 e_2,
  e_2 ** e_1 -> 2 gamma_12 e_0 - e_12, e_2 ** e_2 -> -alpha_2 e_0, e_2 ** e_12 -> 2 gamma_12 e_2 + alpha_2 e_1};

"Construction of Function F";
CliffRF = Sum[A=0 to 3 F_A u_A[x0, x1, x2];
"This is from the transition matrix of Clifford parametric case";
Tranmatrix =
  {F_0 -> e_0 s_0[x0, x1, x2] + e_1 s_1[x0, x1, x2] + e_2 s_2[x0, x1, x2] + e_12 s_3[x0, x1, x2],
  F_1 -> -e_1 s_0[x0, x1, x2] + alpha_1 e_0 s_1[x0, x1, x2] - e_12 s_2[x0, x1, x2] + alpha_1 e_2 s_3[x0, x1, x2],
  F_2 -> -e_2 s_0[x0, x1, x2] - 2 gamma_12 e_0 s_1[x0, x1, x2] + e_12 s_1[x0, x1, x2] +
  alpha_2 e_0 s_2[x0, x1, x2] - alpha_2 e_1 s_3[x0, x1, x2] - 2 gamma_12 e_2 s_3[x0, x1, x2],
  F_3 -> e_12 s_0[x0, x1, x2] + 2 gamma_12 e_1 s_1[x0, x1, x2] + alpha_1 e_2 s_1[x0, x1, x2] -
  alpha_2 e_1 s_2[x0, x1, x2] - alpha_1 alpha_2 e_0 s_3[x0, x1, x2] + 2 gamma_12 e_12 s_3[x0, x1, x2]};
CliffRRRF = CliffRF /. Tranmatrix;
uuu = {u_3[x0, x1, x2] -> u_12[x0, x1, x2]};
tempCliffRRRF = CliffRRRF /. uuu;
CliffRRRF = Expand[tempCliffRRRF];

"Construction of Cauchy-Riemann";
A = ExpandNCM[e_0 ** q_0 partial_x0 CliffRRRF];
NullA = A /. NicoOrderNull;
ParenteNullA = NullA /. NicoOrderParente;
RDA = ParenteNullA /. NicoOrder;
"-----";
B = ExpandNCM[e_1 ** q_1 partial_x1 CliffRRRF];
NullB = B /. NicoOrderNull;
ParenteNullB = NullB /. NicoOrderParente;
RDB = ParenteNullB /. NicoOrder;
"-----";
C2 = ExpandNCM[e_2 ** q_2 partial_x2 CliffRRRF];
NullC2 = C2 /. NicoOrderNull;

```

```

ParenteNullC2 = NullC2 //. NicoOrderParente;
RDC2 = ParenteNullC2 //. NicoOrder;
"%";
CliffCRO = RDA - RDB - RDC2;
WRulesCRO = CliffCRO //. DOSClassCliffordRules;
ColEquiWRulesCRO = Collect[WRulesCRO, BASE];

"Function G";
functRG = 
$$\sum_{A=0}^3 \sum_{B=0}^3 a_{B,A} [x0, x1, x2] e_B u_A [x0, x1, x2];$$

Notacionee = {e3 -> e12, u3[x0, x1, x2] -> u12[x0, x1, x2]};
CliffRG = functRG //. Notacionee;
GA = ExpandNCM[e0 ** q0  $\partial_{x0}$  CliffRG];
GB = ExpandNCM[e1 ** q1  $\partial_{x1}$  CliffRG];
GC = ExpandNCM[e2 ** q2  $\partial_{x2}$  CliffRG];
CliffCROG = (GA + GB + GC) //. NicoOrder;
WRulesCROG = CliffCROG //. DOSClassCliffordRules;
SystemCROG = Collect[WRulesCROG, BASE];

"Function u* =  $\bar{D}u + G$ ";
U = 
$$\sum_{A=0}^3 u_A [x0, x1, x2] e_A;$$

CliffU = U //. Notacionee;
UA = ExpandNCM[e0 ** q0  $\partial_{x0}$  CliffU];
UB = ExpandNCM[e1 ** q1  $\partial_{x1}$  CliffU];
UC = ExpandNCM[e2 ** q2  $\partial_{x2}$  CliffU];
CliffCROU = (UA - UB - UC) //. NicoOrder;
WRulesCROU = CliffCROU //. DOSClassCliffordRules;
SystemCROU = Collect[WRulesCROU, BASE];
CliffSystemG = Collect[CliffRG, BASE];
CliffU* = Collect[SystemCROU + CliffSystemG, BASE];

"F(x, u*) function,  $\mu_A = u^*$ ";
StarF = 
$$\sum_{A=0}^3 F_A \mu_A;$$

RStarF = StarF //. Tranmatrix;
aditionale = {e_x -> 1};
AU* = Extract[CliffU*, {1}] //. aditionale;
BU* = Extract[CliffU*, {2}] //. aditionale;
CU* = Extract[CliffU*, {3}] //. aditionale;
DU* = Extract[CliffU*, {4}] //. aditionale;
RuleforFu* = { $\mu_0$  -> AU*,  $\mu_1$  -> BU*,  $\mu_2$  -> CU*,  $\mu_3$  -> DU*};
Fu* = RStarF //. RuleforFu*;
FinalFu* = FullSimplify[Fu*];
ColFinalFu* = Collect[FinalFu*, BASE];

"Construction of  $\bar{D}u + FG + F(x, Fu^*)$ ";
FinaleconBrio = ColEquiWRulesCRO + SystemCROG - ColFinalFu*;
Collect[FinaleconBrio, BASE];

"In order to desaper the derivatives respect to x0";
lu1 = UA + UB + UC //. NicoOrder;
lu2 = lu1 //. DOSClassCliffordRules;

```

```

lu = Collect[FullSimplify[lu2 - CliffRRF], BASE];
BaseSolderiva =
  {u0(1,0,0)[x0, x1, x2], u1(1,0,0)[x0, x1, x2], u2(1,0,0)[x0, x1, x2], u12(1,0,0)[x0, x1, x2]};
Ma1 = lu[[1]] //. aditionale;
Ma2 = lu[[2]] //. aditionale;
Ma3 = lu[[3]] //. aditionale;
Ma4 = lu[[4]] //. aditionale;
lufinale = Solve[Ma1 == 0 && Ma2 == 0 && Ma3 == 0 && Ma4 == 0, BaseSolderiva];
FinaleconBrio2 = FinaleconBrio //. lufinale;
FinaleFinale = Collect[FinaleconBrio2, BASE];

"Take to terms";
MasterOfCollect = {u0[x0, x1, x2], u1[x0, x1, x2], u2[x0, x1, x2], u12[x0, x1, x2],
  u0(0,1,0)[x0, x1, x2], u1(0,1,0)[x0, x1, x2], u2(0,1,0)[x0, x1, x2], u12(0,1,0)[x0, x1, x2],
  u0(0,0,1)[x0, x1, x2], u1(0,0,1)[x0, x1, x2], u2(0,0,1)[x0, x1, x2], u12(0,0,1)[x0, x1, x2]};
Do[FinaleTi = (FinaleFinale)[[1, i]] //. aditionale, {i, 4}]
Do[NICOi = Collect[FullSimplify[FinaleTi], MasterOfCollect], {i, 4}]
"Real Part";
NICO1 = Collect[FinaleT1, MasterOfCollect];
"Vectorial Part";
NICO2 = Collect[FinaleT2, MasterOfCollect];
"Multivectorial Part 1";
NICO3 = Collect[FinaleT3, MasterOfCollect];
"Multivectorial Part 2";
NICO4 = Collect[FinaleT4, MasterOfCollect];
Uno =
  {ux[x0, x1, x2] => 1, ux(0,0,1)[x0, x1, x2] => 1, ux(0,1,0)[x0, x1, x2] => 1};
BaseSolderival = {a1,0[x0, x1, x2], a1,1[x0, x1, x2], a1,2[x0, x1, x2],
  a1,3[x0, x1, x2], a2,0[x0, x1, x2], a2,1[x0, x1, x2],
  a2,2[x0, x1, x2], a2,3[x0, x1, x2], a3,0[x0, x1, x2],
  a3,1[x0, x1, x2], a3,2[x0, x1, x2], a3,3[x0, x1, x2]};
"Group A";
m = 1;
Do[Do[Am = NICOi[[j]] //. Uno; m = m + 1, {j, 8}], {i, 4}]
M = Table[Ai == 0, {i, 32}];
BABELTOWER1 = Solve[M, BaseSolderival];
BabelTower1DER0 = ∂x0 BABELTOWER1;
BabelTower1DER1 = ∂x1 BABELTOWER1;
BabelTower1DER2 = ∂x2 BABELTOWER1;
Cbando = {γ12 => 0, α1 => 1, α2 => 1};
"Group B";
m = 1;
Do[Do[Bm = NICOi[[j]] //. Uno; m = m + 1, {j, 9, 12}], {i, 4}]
Do[SusBi = Bi //. BABELTOWER1, {i, 16}]
Do[SusDER0Bi = SusBi //. BabelTower1DER0, {i, 16}]
Do[SusDER1Bi = SusDER0Bi //. BabelTower1DER1, {i, 16}]
Do[SustBi = SusDER1Bi //. BabelTower1DER2, {i, 16}]

"Final Calculations";
SA = Expand[SustB1 + SustB6];
SB = Expand[SustB4 - SustB10];
SC = Expand[SustB3 + SustB8];

DeSA = {-2 q1 α1 s1(0,1,0)[x0, x1, x2] + 2 q1 a0,1(0,1,0)[x0, x1, x2],

```

```

- 2 q0 s0(1,0,0) [x0, x1, x2] + 2 q0 a0,0(1,0,0) [x0, x1, x2]};
DeSB = { -3 q0 α1 s3(1,0,0) [x0, x1, x2] - q0 α1 α2 s3(1,0,0) [x0, x1, x2] +
q0 a0,3(1,0,0) [x0, x1, x2] -  $\frac{q0 a0,3^{(1,0,0)} [x0, x1, x2]}{\alpha_2}$  };
DeSC = { 2 q1 α1 α2 s3(0,1,0) [x0, x1, x2] + 2 q1 a0,3(0,1,0) [x0, x1, x2],
4 q0 γ12 s1(1,0,0) [x0, x1, x2] - 2 q0 α2 s2(1,0,0) [x0, x1, x2] + 2 q0 a0,2(1,0,0) [x0, x1, x2] };
IntDes00 = DSolve[DeSA[[2]] == 0, a0,0[x0, x1, x2], x0] /. {C[1] -> k0};
IntDes01 = DSolve[DeSA[[1]] == 0, a0,1[x0, x1, x2], x1] /. {C[1] -> k1};
IntDes02 = DSolve[DeSC[[2]] == 0, a0,2[x0, x1, x2], x0] /. {C[1] -> k2};
IntDes03 = DSolve[DeSC[[1]] == 0, a0,3[x0, x1, x2], x1] /. {C[1] -> k3};
DesSBcond = DeSB[[1]] /. ∂x0 IntDes03;
IntDes3 = Solve[DesSBcond == 0, s3(1,0,0) [x0, x1, x2] ];
SustMary = {IntDes00[[1, 1]], IntDes01[[1, 1]],
IntDes02[[1, 1]], IntDes03[[1, 1]], IntDes3[[1, 1]]};
Cocoa = {SustMary, ∂x0 SustMary, ∂x1 SustMary, ∂x2 SustMary};
FormaijIndepent = FullSimplify[BABELTOWER1 /. Cocoa];
Finaleij = FormaijIndepent[[1]];
Cocoa2 = {Finaleij, ∂x0 Finaleij, ∂x1 Finaleij, ∂x2 Finaleij};

Do[SustMaryBi = FullSimplify[Bi /. Cocoa[[1]]], {i, 4}];
Do[SustMary1Bi = FullSimplify[SustMaryBi /. Cocoa[[2]]], {i, 4}];
Do[SustMary2Bi = FullSimplify[SustMary1Bi /. Cocoa[[3]]], {i, 4}];
Do[SustMary3Bi = FullSimplify[SustMary2Bi /. Cocoa[[4]]], {i, 4}];

Do[SustMaryFBi = FullSimplify[SustMary3Bi /. Cocoa2[[1]]], {i, 4}];
Do[SustMaryF1Bi = FullSimplify[SustMaryFBi /. Cocoa2[[2]]], {i, 4}];
Do[SustMaryF2Bi = FullSimplify[SustMaryF1Bi /. Cocoa2[[3]]], {i, 4}];
Do[SustMaryF3Bi = FullSimplify[SustMaryF2Bi /. Cocoa2[[4]]], {i, 4}];

"Paper Conditions";
FinalArt = FullSimplify[
Solve[SustMaryF3B1[[1, 1, 1, 1]] == 0 && SustMaryF3B2[[1, 1, 1, 1]] == 0 &&
SustMaryF3B3[[1, 1, 1, 1]] == 0 && SustMaryF3B4[[1, 1, 1, 1]] == 0, {s0(1,0,0) [x0,
x1, x2], s1(1,0,0) [x0, x1, x2], s2(1,0,0) [x0, x1, x2], s3(1,0,0) [x0, x1, x2]}];
"Checking";
Cbando = {γ12 -> 0, α1 -> 1, α2 -> 1};
FinalArt /. Cbando;

```

## Bibliografía

- [1] Di Teodoro A. (2013). *Generalized monogenic functions satisfying differential equations with anti-monogenic right-hand side on Clifford algebras depending on parameters*. Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 58,no. 12.
- [2] Tutschke W. & Vanegas C. J. (2008). *Clifford algebras depending on parameters and their applications to partial differential equations*. Contained in Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis. Science Press Beijing, pp. 430-449.
- [3] Thanh Van N. (2006)*Differential operators in a Clifford Analysis associated to differential equations with anti-monogenic right-hand sides*. ICTP. IC/2006/134
- [4] Tutschke W. & Yüksel U.(1999). *Generalized monogenic functions satisfying differential equations with anti-monogenic right-hand sides: Complex methods for Partial Diferential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Isaac series.
- [5] Tutschke W. & Vanegas C. J.(2008). *Métodos del Análisis Complejo en Dimensiones Mayores*. XXI Escuela Venezolana de Matemática. Ediciones IVIC.
- [6] Tutschke W. & Yüksel (1999). *Interior  $L_p$ -estimates for functions with integral representations*, Applicable Analysis,73:1,281 294
- [7] Tutschke W. & Thanh Van N. (2006) *Interior Estimates in the Sup-norm for Generalized Monogenic Functions Satisfying a Differential Equation with an Anti-monogenic Right-hand Side*. Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 52, no. 5.
- [8] Tutschke W. (1989) *Solution of Initial Value Problems in Classes of Generalized Analytic Functions*. Teubner Leipzig and Springer Verlag.
- [9] Brackx R., Delanghe R. & Sommen F. (1982) *Clifford Analysis*. Reseach Notes in Math. Pitman, London.

- [10] Di Teodoro A. & Sapiain M. *Solution of the initial value problem for no lineal differential equation in general Clifford type*. Preprint 2014.
  
- [11] Tutschke W. (15 August 2006). *Associated spaces a new tool of real and complex analysis* (Submitted to the Proceedings of the 14th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. Hue, Vietnam).
  
- [12] Walter W. (1985). *An elementary proof of the Cauchy-Kowalevsky theorem*. Amer. Math. Monthly, vol. 92, 115-125.
  
- [13] Kreyzig E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classic Library. John Wiley & Sons.