

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ESTUDIO ANALÍTICO DE LA PROPAGACIÓN DE PULSOS EN UN
ENLACE DE FIBRA ÓPTICA MONOMODO CONSIDERANDO
EFECTOS NO LINEALES**

Trabajo Especial de Grado presentado por

Fabián Ruiz

ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Ph.D Gloria Carvalho
Dr. José A. López

Octubre-2015

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ESTUDIO ANALÍTICO DE LA PROPAGACIÓN DE PULSOS EN UN
ENLACE DE FIBRA ÓPTICA MONOMODO CONSIDERANDO
EFECTOS NO LINEALES**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Fabián Ruiz

ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Ph.D Gloria Carvalho
Dr. José A. López

Octubre-2015
Caracas-Venezuela

27 de octubre de 2015

Consejo de la Escuela de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

Estimados miembros del Consejo de Escuela

Reciban un cordial saludo. Conforme a lo establecido en el artículo 13 de la “Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV” les remitimos tres ejemplares de la monografía de TEG del estudiante **Fabián Ruiz**, CI: **23710150**, titulado **ESTUDIO ANALÍTICO DE LA PROPAGACIÓN DE PULSOS EN UN ENLACE DE FIBRA ÓPTICA MONOMODO CONSIDERANDO EFECTOS NO LINEALES**, los cuales hemos revisado y consideramos listos para la evaluación por parte de un jurado.

Agradeciendo la consideración que sirvan prestar a la presente, nos despedimos atentamente,

Ph.D Gloria Carvalho
14351425
Tutora
UCV

Dr. José A. López
10504342
Tutor
UCV

Si hay algo tan regocijante como descubrir algo nuevo, es descubrir el agua tibia. La diferencia entre ambas es solo un registro.

Agradecimientos

A mediados del mes de julio del año 2012, aún no sabía nada sobre el área de la óptica no lineal y ni imaginaba trabajar en esta rama de la física. Recibo una llamada de (para ese entonces desconocida para mí) MSc. Bicky A. Márquez, quién trabajaba en el Centro nacional de desarrollo e investigación en telecomunicaciones (Cendit) y me planteó que tenía una oferta de trabajo tipo pasantía larga con trabajo especial de grado y necesitaba a un estudiante que estuviera cerca de concluir la carrera que lo quisiera asumir. Me citó a una entrevista para explicarme de qué se trataba y acepté el trabajo. Al cabo de unos días me explicó que ella estableció contacto conmigo por que había escuchado buenos comentarios de mi persona, uno de sus profesores en el pregrado le había hablado de mí, ese profesor es el Dr. Salvatore de Vincenzo quien me dió clases durante el pregrado a mí también y considero excelente en su labor como docente.

Con ambos estoy muy agradecido, han sido las causas principales de que haya incurrido en esta área. De Bicky aprendí un montón mientras trabajamos juntos y más aún del profesor Salvatore cuando me dió clases.

A mi gran amigo Antonio Delgado le agradezco, quién me ha colaborado de cientos de maneras, partes de este trabajo han sido frutos de conversaciones, de discusiones interesantes sobre física con él.

También le agradezco al profesor Abraham Lozada, a quien recurría cuando me surgían serios problemas matemáticos o físicos en la elaboración de esta investigación, de verdad fué necesaria su colaboración.

Fuera del ámbito académico, tengo razones para decir que los últimos 2 años han sido difíciles para mí. Y durante este tiempo, no hubo mejor compañía, no hubo mejor apoyo, no hubo mejor consejo, no hubo mejor sonrisa, que la de Marbelis Barrera, mi pareja, mi amiga; compañera de alegrías, de tristezas, de risas, de aventuras, compañera de vida.

A quien más le agradezco, quién me contagió su impaciente curiosidad por los fenómenos naturales, con quien pasaba horas, días, semanas, discutiendo sobre algún problema físico, mecánico, matemático, astronómico. Esa obsesión transmitida ha sido clave durante toda mi formación como físico. Me enseñó a ser perfeccionista, detallista. Quien hizo que aprender física fuera un placer y no un deber. Mi padre.

RESUMEN

Se usa el modelo de oscilador anarmónico, basado en el modelo de Lorentz para describir clásicamente la interacción radiación-materia en dieléctricos isótropos a altas intensidades de campo eléctrico y se consigue la posición en función del tiempo de los electrones ligados al material con teoría de perturbaciones, se hace uso de funciones de Green para escribir la solución y obtener la relación causal entre campo y oscilaciones electrónicas. A partir de allí, se establece la relación entre dichas soluciones con el comportamiento macroscópico del material en el cuál viaja la luz, obteniendo así las polarizaciones y susceptibilidades en función del tiempo y de la frecuencia. Se resuelve el problema de propagación en régimen lineal, obteniendo la distribución transversal del campo en la fibra y la ecuación de autovalores. Se hacen una serie de consideraciones físicas para poder escribir una ecuación de propagación de pulsos cortos en fibra óptica monomodo que preserve la polarización. A modo de prueba, se trata la polarización no lineal dentro de esta ecuación de propagación de una manera distinta a la usual, que no llevará a la conocida ecuación de Schrödinger no lineal y permitirá hallar soluciones del campo que se propaga en la fibra considerando efectos de atenuación, dispersión y no linealidad simultáneamente sin recurrir a métodos numéricos. Se discuten finalmente las ventajas y desventajas de este enfoque.

Índice general

Lista de figuras	13
Lista de tablas	15
1. Introducción	17
1.1. Óptica lineal y no lineal	17
1.2. Tipos de medios dieléctricos	18
1.3. Fibra óptica	18
1.3.1. Ventajas y desventajas de su uso	19
1.3.2. Tipos de fibras ópticas	20
1.3.3. Material, ventanas de transmisión, pérdidas y dispersión	21
1.3.4. La fibra objeto de estudio	24
2. Modelo de Oscilador Anarmónico del Electrón	27
2.1. Modelo de Lorentz	27
2.2. Extensión del modelo de Lorentz	28
2.3. Derivación de la ecuación de oscilador anarmónico	29
2.4. Función de Green para el oscilador armónico amortiguado y forzado	32
3. Conexión entre Cantidades Mecánicas y Electrodinámicas	37
3.1. Multipolos eléctricos y polarización	37
3.2. Polarización y susceptibilidad eléctrica en el dominio del tiempo	38
3.3. Polarización y susceptibilidad eléctrica en el dominio de la frecuencia	40
4. Ecuación de propagación en fibra óptica no lineal: Preliminares	45
4.1. Integrabilidad de las ecuaciones de Maxwell	45
4.2. Consideraciones para delimitar el problema	46
4.3. Planteamiento de la ecuación de propagación	48
5. Ecuación de propagación en fibra óptica no lineal: Modos	55
5.1. Solución a las ecuaciones de Maxwell en fibra óptica lineal	55
5.2. Condiciones de frontera y ecuación de autovalores	59
5.3. Aproximación de guiado debil. Modos LP	64

5.4. Características del modo fundamental	65
6. Ecuación de propagación en fibra óptica no lineal: Solución	67
6.1. Perturbando la ecuación de Helmholtz	67
6.2. Solución al problema no lineal	71
6.3. Pulsos gaussianos	72
7. Conclusiones y Recomendaciones	77
A. Vector $\vec{r}_s^{(3)}$ en el dominio de la frecuencia	81
B. Susceptibilidad $\chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''')$ bajo la aproximación de respuesta instantánea	83
C. Índice de refracción complejo	87

Índice de figuras

1.1. Tipos de fibra según su estructura: A.- cilíndrica, B.- birrefringente, C.- planar, D.- de barra	20
1.2. Un ejemplo de dimensiones de una fibra multimodo (a la izquierda) y una monomodo (a la derecha)	21
1.3. Un ejemplo de los perfiles de índice de refracción: A.- salto de índice, B.- índice gradual.	22
1.4. Gráficas de atenuación total en función de la longitud de onda donde se resaltan las ventanas de transmisión de telecomunicaciones.	23
4.1. Paquetes gaussianos de campo eléctrico y solapamiento a distintas frecuencias ω' . Al igual que la intersección (región rellena denotada por “solap”), la integral del producto de estos paquetes disminuirá fuertemente con el aumento de la separación entre los mismos.	51
5.1. En esta convención, la polarización p está definida por el plano de incidencia, formado por la dirección de propagación y un vector normal a la superficie de reflexión; mientras que la polarización s está definida por un vector normal al plano de incidencia.	60
5.2. Modos TM y TE tocando la interfaz entre los medios de índices de refracción n_1 y n_2	60
5.3. Curvas de soluciones exactas de la ecuación de autovalores (5.43). Se distinguen 2 regiones separadas por $V \simeq 2,405$, la región monomodo a la izquierda y la región multimodo a la derecha.	63
5.4. Curvas solución de la ecuación de autovalores con la aproximación de guiado debil. Cada curva tiene un par de índices correspondiente a cada modo LP	64
5.5. Distribución de intensidades para algunos modos LP.	65

Índice de cuadros

5.1. Generalidades sobre los tipos de modos que se propagan en fibras ópticas, incluso es válida la clasificación para otras guías de ondas	62
5.2. Modos linealmente polarizados y sus equivalentes modos exactos	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Óptica lineal y no lineal

La óptica es una parte importante de la vida cotidiana. La luz parece fluir o propagarse a través del espacio vacío, así como a través de objetos materiales y nos provee información visual acerca del mundo. Los efectos familiares de reflexión, refracción, difracción, absorción y dispersión explican una amplia variedad de experiencias visuales comunes a nosotros, desde el enfoque de luz que puede causar una lente hasta los colores que se ven en un arcoiris. Generalmente, aquellos pueden ser explicados asignando un pequeño conjunto de parámetros ópticos a los materiales. Bajo las experiencias ordinarias de la vida cotidiana, esos parámetros son constantes, independientes de la intensidad de la luz que permite la observación del fenómeno óptico. Esta es la rama que llamamos óptica lineal.

Poco después de la invención del primer laser en 1960, Peter Frankin y sus compañeros de trabajo, marcaron el inicio del estudio de la óptica a altas intensidades, llevando a nuevos fenómenos tal como la generación de nuevos colores a partir de luz monocromática en un cristal transparente o el auto enfoque de un rayo óptico en un líquido homogéneo. A las intensidades usadas para generar este tipo de efectos, los parámetros ópticos usuales de los materiales no pueden ser considerados constantes sino que se hacen función de la intensidad de luz. La ciencia de la óptica en este régimen es llamada óptica no lineal.

La teoría de la óptica no lineal se construye sobre la bien entendida óptica lineal, particularmente en base a la interacción luz-materia. Ordinariamente la materia consiste de una colección de núcleos cargados positivamente (de átomos o moléculas) rodeados de electrones cargados negativamente. La luz interactúa primeramente con la materia vía los electrones de valencia en la corteza de orbitales más externa. El parámetro fundamental en esta teoría de interacción luz-materia es la polarización electrónica del material inducida por la luz. La extensión de la definición de este parámetro al régimen no lineal permite la descripción de una rica variedad de fenómenos ópticos a altas intensidades [1].

1.2. Tipos de medios dieléctricos

La naturaleza de un medio dieléctrico se exhibe en la relación entre la densidad de polarización $\mathbf{P}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$, llamada ecuación del medio. Es útil pensar en la relación $\mathbf{P}$ - $\mathbf{E}$ como un sistema en el cual $\mathbf{E}$ es considerado como una entrada aplicada y $\mathbf{P}$ como una salida o respuesta. Nótese que $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\vec{R}, t)$ y $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\vec{R}, t)$ son funciones de la posición y el tiempo. Algunas definiciones útiles son [2]:

- Un medio dieléctrico, se dice ser lineal si el vector $\mathbf{P}(\vec{R}, t)$ está linealmente relacionado con el vector $\mathbf{E}(\vec{R}, t)$. El principio de superposición aplica.
- El medio se dice ser no dispersivo si la respuesta es instantánea. Es decir, $\mathbf{P}$ en el tiempo t está determinado por $\mathbf{E}$ en el mismo tiempo t y no por valores anteriores de $\mathbf{E}$. Ser no dispersivo es claramente una idealización, ya que cualquier sistema físico, sin importar cuán rápido sea, tiene un tiempo de respuesta finito.
- El medio se dice ser homogéneo si la relación entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}$ es independiente de la posición $\vec{R}$.
- El medio se llama isotrópico si la relación entre los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}$ es independiente de la dirección de $\mathbf{E}$, de manera que el medio luce igual desde todas las direcciones. Los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}$ deben ser paralelos.
- El medio se dice ser espacialmente no dispersivo si la relación entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}$ es local, es decir, $\mathbf{P}$ en cada punto está influenciado solo por $\mathbf{E}$ en ese mismo punto

1.3. Fibra óptica

La fibra óptica es una guía de ondas usada para la transmisión de luz. Consiste de un núcleo de material dieléctrico, usualmente vidrio, rodeado por un revestimiento de vidrio o plástico caracterizado por tener un índice de refracción menor que el del núcleo. La luz transmitida a través de fibra óptica es atrapada en el núcleo debido al fenómeno de reflexión total interna. La reflexión total interna ocurre en la interfaz núcleo-revestimiento cuando la luz dentro del núcleo de la fibra es incidente a un ángulo mayor que el ángulo crítico y retorna al núcleo sin pérdidas permitiendo la propagación de luz a través de la fibra [3].

Las fibras ópticas pueden ser usadas para transmitir información en forma de luz a largas distancias. Los sistemas basados en fibra, han ido remplazando los sistemas de transmisión de radio por la gran capacidad de transmisión de datos. Actualmente se usan en telefonía, tráfico de internet, grandes redes de area local (LANs) de alta velocidad, televisión por cable, y es ahora más común en comunicaciones sobre distancias cortas dentro de un edificio. En muchos casos, se usan las fibras de silicio, excepto para distancias muy

cortas, donde las fibras ópticas de plástico pueden ser ventajosas.

1.3.1. Ventajas y desventajas de su uso

Comparado con los sistemas basados en cables eléctricos, el uso de fibras ópticas en comunicaciones tiene ventajas, las más importantes se listan a continuación¹:

1. La capacidad de las fibras en cuanto a transmisión de datos es enorme: una única fibra de silicio puede portar cientos de miles de canales telefónicos, utilizando solo una pequeña parte de su capacidad teórica. La rata de flujo de datos es del orden de los Tb/s , imposible mientras se usen medios basados en cobre. En los últimos 30 años, los progresos asociados a las capacidades de transmisión de enlaces de fibra ha sido significativamente más rápido que (por hacer una comparación) el progreso en la capacidad de almacenamiento de las computadoras.
2. Las pérdidas asociadas con la transmisión de luz en fibras es sorprendentemente pequeña ($\simeq 0,2dB/Km$) para fibras de silicio monomodo modernas, de manera que varias decenas de kilómetros se pueden enlazar sin la necesidad de amplificar la señal.
3. Un gran número de canales puede ser reamplificado en un único amplificador, en caso de ser requerido al transmitir sobre distancias muy grandes.
4. Debido a la gran velocidad de transmisión alcanzable, el costo por bit transportado puede ser extremadamente bajo.
5. Comparado con los cables eléctricos, los cables de fibra óptica son muy ligeros.
6. Los cables de fibra óptica en comparación con los cables eléctricos no presentan problemas por interferencia electromagnética.
7. No emiten campos electromagnéticos, ni ningún tipo de señal al exterior, de manera que no son pinchables. Para poder robar una transmisión en un cable es necesario interrumpir la transmisión cortando el cable para colocar allí el dispositivo que roba la señal.

Sin embargo, existen también algunas desventajas

1. Los costos de fabricación son muy altos en comparación con los medios basados en cobre.
2. Se pueden producir daños serios del material a altas potencias ópticas.
3. Más difícil y costoso hacer empalmes o conexiones que en el caso de cables eléctricos.

¹Disponible en <https://www.rp-photonics.com>

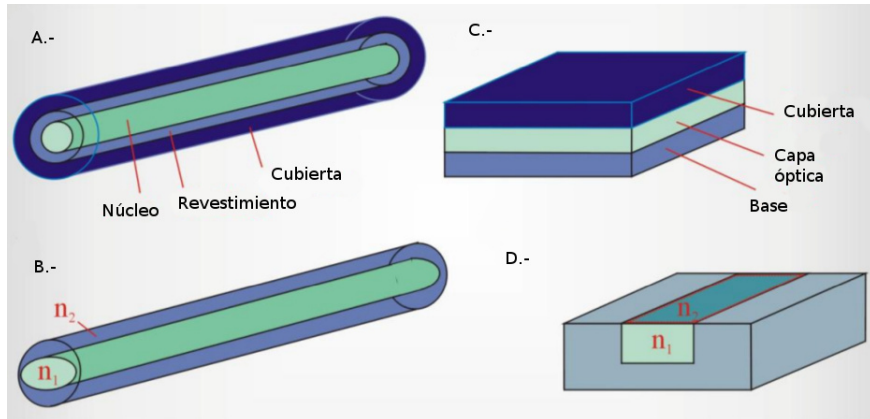


Figura 1.1: Tipos de fibra según su estructura: A.- cilíndrica, B.- birrefringente, C.- planar, D.- de barra

1.3.2. Tipos de fibras ópticas

Presentamos ahora distintos tipos de fibras ópticas usadas en telecomunicaciones y otras aplicaciones. Pueden ser divididas en varios tipos considerando (ver [3])

- Estructura: cilíndrica, birrefringente, planar, de barra. Ver figura 1.1 (tomada y modificada de [3])
- Número de modos: monomodo, multimodo.
- Perfil de índice de refracción: salto de índice, índice gradual.
- Material: vidrio, plástico, semiconductor.
- Dispersión: fibra de dispersión natural, fibra de cambio de dispersión DSF, fibra de dispersión ampliada DWF, dispersión reversa.
- Capacidad de procesamiento de señales: pasivo (transmisión de datos), activo (amplificador).
- Polarización: clásica, polarización mantenida o preservada, polarizadora.

En cuanto a si es monomodo o multimodo, los modos son estructuras simétricas y autosostenidas en el tiempo del campo electromagnético que se propaga en la fibra, de manera que una fibra monomodo solo soporta un modo, que es el modo fundamental; mientras que una fibra multimodo es capaz de soportar un número mayor de modos simultáneamente. Haciendo uso de la teoría de rayos, se puede concluir que en una fibra monomodo, la luz viaja paralela al eje de la fibra sin rebotar por las paredes, mientras que en la fibra multimodo viaja el modo fundamental paralela al eje y además otros modos que van rebotando por las paredes de la fibra. El parámetro que define si una fibra es

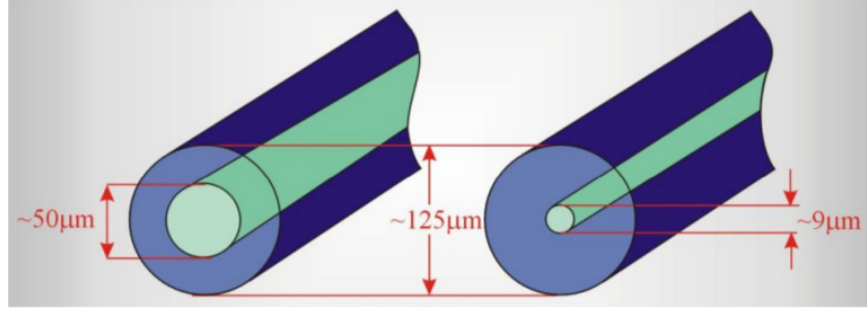


Figura 1.2: Un ejemplo de dimensiones de una fibra multimodo (a la izquierda) y una monomodo (a la derecha)

monomodo o multimodo es la llamada frecuencia normalizada, de la cuál se discutirá en el capítulo 5 y que para fibras cilíndricas con perfil salto de índice se define como

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{(n_{0n}^2 - n_{0r}^2)} \quad (1.1)$$

si la frecuencia normalizada tiene un valor menor a 2,405 la fibra es monomodo, de lo contrario es multimodo. De esta forma, el ser monomodo o multimodo depende tanto del radio del núcleo de la fibra, como de la longitud de onda de trabajo, como de la diferencia de índices de refracción entre el núcleo y el revestimiento. Para una misma longitud de onda y una misma diferencia de índices, el ser monomodo o multimodo dependerá del radio del núcleo de la fibra, ver figura 1.2.

El perfil del índice de refracción en fibras puede ser, salto de índice, en donde el núcleo y el revestimiento tienen valores de índices fijos en toda su extensión, o de índice gradual, donde el núcleo tiene un cambio gradual del índice pasando de un valor máximo en el centro a valores más bajos a medida que se acerca a los bordes del núcleo. Ver figura 1.3 (tomada y modificada de [3]).

1.3.3. Material, ventanas de transmisión, pérdidas y dispersión

Material

El material escogido para fibras ópticas de bajas pérdidas es vidrio de sílice de alta pureza sintetizado por fusión de moléculas de SiO_2 . La diferencia de índices de refracción entre el núcleo y el revestimiento se realiza mediante el uso selectivo de dopantes durante el proceso de fabricación. Dopantes tales como el dióxido de germanio y pentóxido de difósforo (GeO_2 y P_2O_5 respectivamente) incrementan el índice de refracción del sílice puro y son adecuados para el núcleo, mientras que materiales tales como el boro y el fluor (B y F) son usados para el revestimiento, ya que disminuyen el valor del índice de

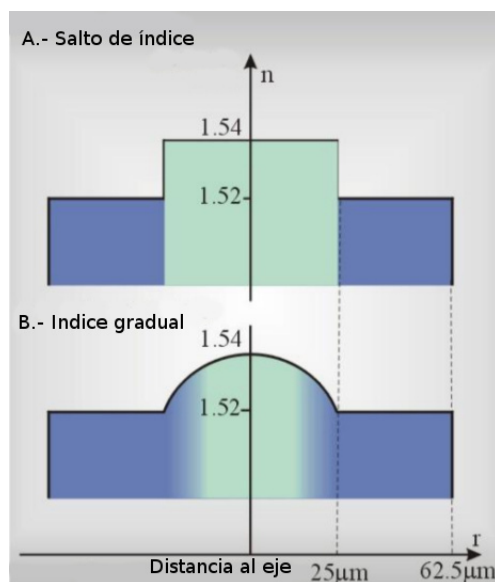


Figura 1.3: Un ejemplo de los perfiles de índice de refracción: A.- salto de índice, B.- índice gradual.

refracción del sílice [4].

Ventanas de transmisión

Cada efecto que contribuye a la atenuación y a la dispersión depende de la longitud de onda. Las comunicaciones en fibra óptica típicamente operan en una región de longitudes de onda correspondiente a una de las “ventanas”² mostrada en la figura 1.4 (tomada y modificada de [3]) donde se resaltan las curvas de atenuación total en varias épocas. Esas ventanas responden a la necesidad de tener la menor cantidad de efectos negativos para la transmisión en distintas aplicaciones.

Pérdidas

Existe un parámetro que sirve para cuantificar las pérdidas totales durante la transmisión de señales ópticas dentro de la fibra, generadas por cualquier agente, es la llamada constante de atenuación α . Existen diversos mecanismos que generan la atenuación y se pueden clasificar como sigue:

- Mecanismos Intrínsecos: son inevitables, dependen del material elegido. Entre ellos están la absorción en el ultravioleta por transiciones electrónicas de la banda de valencia a la banda de conducción, y en el infrarojo debida a vibraciones de las

²Disponible en <https://www.rp-photonics.com>

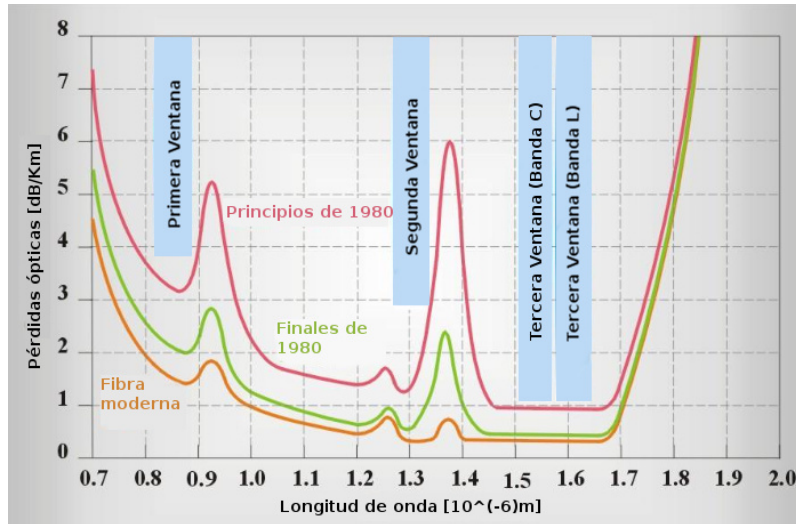


Figura 1.4: Gráficas de atenuación total en función de la longitud de onda donde se resaltan las ventanas de transmisión de telecomunicaciones.

unidades estructurales que componen el material. También entra la dispersión Rayleigh, la atenuación por iones OH generados en la fabricación de la fibra, la generada por impurezas metálicas y por presencia de hidrógeno.

- Mecanismos extrínsecos: dependen de factores externos, son evitables. Entre ellos están las generadas en la instalación de los enlaces, tensión, vibraciones mecánicas, curvaturas que generan daños en la estructura interna del material.

Hoy en día se pueden encontrar fibras con los siguientes valores de atenuación en las distintas bandas

$$\alpha(1550nm) = 0,18dB/Km \quad (1.2)$$

$$\alpha(1300nm) = 0,5dB/Km \quad (1.3)$$

$$\alpha(850nm) = 3 - 5dB/Km \quad (1.4)$$

Dispersión

Cuando una onda electromagnética interactúa con los electrones ligados de un dieléctrico, la respuesta del medio, depende en general de la frecuencia ω . Esta propiedad llamada dispersión cromática, se manifiesta a través de la dependencia en la frecuencia del índice de refracción $n(\omega)$ [4]. Sin embargo, el origen de la dispersión también está asociado a la estructura de guía de onda y surge la llamada dispersión de guía de onda. La dispersión en la fibra, juega un rol crítico en la propagación de pulsos ópticos cortos porque las diferentes componentes espectrales del pulso viajan a diferentes velocidades. Matemáticamente los efectos de dispersión en fibra se estudian mediante la expansión en serie de Taylor de

la constante de propagación β entorno a la frecuencia portadora ω_0 en la cuál el espectro del pulso está centrado

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.5)$$

donde $\beta(\omega_0)$ está asociado al retardo de fase, $\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0}$ está asociado al retardo del grupo por unidad de longitud (retardo de las componentes espectrales), y los términos de orden superior son términos dispersivos asociados con el retardo del grupo.

Además, la dispersión la hay usualmente en dos formas, dispersión normal y anómala, y depende del signo de la derivada segunda de la constante de propagación.

1.3.4. La fibra objeto de estudio

Este trabajo tendrá como finalidad estudiar la propagación de pulsos cortos en una fibra óptica que tiene las siguientes características:

- Estructura cilíndrica
- Monomodo
- Perfil de salto de índice
- Núcleo de sílice fundido
- Preserva la polarización
- Diferencia muy corta entre los índices de refracción entre la cubierta y el núcleo

Además, como medio dieléctrico tiene las siguientes propiedades:

- Es un medio no lineal a las intensidades ópticas consideradas.
- Es un medio dispersivo.
- Es homogéneo.
- Es isótropo.
- Es espacialmente no dispersivo.

Por otro lado, se asumirá que la fuente de los pulsos, los emite centrados en una longitud de onda $\lambda_0 = 1550nm$ (tercera ventana), que la fibra posee un coeficiente de atenuación $\alpha = 0,18dB/Km$ y dispersión anómala $\beta_2 = -20ps^2/Km$.

Una de las razones para llevar a cabo esta investigación es porque se quiere estudiar la posibilidad de predecir el alcance de una señal transmitida en fibra óptica, que ha sido encriptada por modulación de su amplitud usando caos de alta dimensión. Sería muy extenso el trabajo si se considera dicho estudio, por lo menos en la manera en la que se lleva a cabo todo el desarrollo, pero al obtener una solución para los pulsos que viajan en la fibra, se discutirá brevemente la posibilidad de llevar a cabo tal tarea en estudios posteriores a este.

Capítulo 2

Modelo de Oscilador Anarmónico del electrón

2.1. Modelo de Lorentz

A finales del s.XIX, Hendrick A. Lorentz desarrolló un modelo sencillo para describir las propiedades dispersivas de un medio dieléctrico [5], más aún, da una idea general puramente clásica sobre la interacción entre un átomo y un campo electromagnético. Dicho modelo se hizo muy popular en óptica lineal y no lineal. Lorentz postuló que la fuerza de ligadura entre el núcleo y el electrón puede ser descrita por la ley de Hooke. Si dicho sistema se pone en contacto con un campo eléctrico, el electrón será desplazado de su posición de equilibrio. Más aún, el campo eléctrico oscilante de una onda electromagnética hará que el electrón tenga un movimiento armónico simple. Puede ser incluso más complicado si se toma en cuenta el campo magnético oscilante de dicha onda, pero los efectos del mismo pueden despreciarse frente a los generados por el campo eléctrico.

Considerando al electrón como una partícula con masa mucho menor que la del núcleo y que puede ser útil añadir una fuerza de amortiguamiento, Lorentz planteó la siguiente ecuación de movimiento unidimensional de oscilador armónico para el electrón:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2x(t) = -\frac{e}{m_e}E(t) \quad (2.1)$$

Obtener el desplazamiento $x(t)$ del electrón no representa mayores dificultades y el mismo puede relacionarse inmediatamente con el momento dipolar generado por el campo incidente y este a su vez con la polarización del medio dieléctrico que aparecerá en las ecuaciones de Maxwell. El índice de refracción del medio material quedaría explicado en términos de interacciones individuales entre radiación y átomos. El modelo logra exitosamente describir algunas propiedades ópticas de medios lineales con bastante precisión en ciertos casos, por ejemplo, en vapores atómicos y gases no metálicos [6].

2.2. Extensión del modelo de Lorentz

En un dieléctrico arbitrario, los electrones ligados a los átomos componentes, están sometidos a otras fuerzas a parte de la fuerza de ligadura a su núcleo. Dichas fuerzas se deben a interacción con núcleos vecinos e incluso con otros electrones ligados.

Cada electrón en el material puede verse como sumergido en un potencial electrostático originado por todas las partículas que constituyen el medio. Las características de este potencial dependen de la simetría del medio. En una red cristalina ideal, el potencial debe ser periódico, y dicha periodicidad está vinculada con los parámetros de la red.

En algunos vidrios y en líquidos, las moléculas componentes no forman arreglos periódicos de gran alcance, las variaciones locales son aleatorias y el potencial electrostático tendrá formas distintas en cada punto del espacio. Sin embargo, a nivel macroscópico, estas variaciones locales pierden importancia y las direcciones preferenciales desaparecen conforme nos alejamos del medio material (para la mayoría de las aplicaciones esta suposición es válida), el medio se comporta como isótropo, luego, se puede asumir que el potencial al que están sometidos microscópicamente cada uno de los electrones es periódico e igual en cada dirección en la que observamos. El dióxido de silicio fundido de alta pureza es uno de esos materiales.

Antes de abordar en detalle al material componente de la fibra óptica que se pretende modelar, es importante mencionar que el modelo de Lorentz, dado por la ecuación (2.1) es aplicable siempre y cuando:

1. Los efectos cuánticos no jueguen un papel importante en el fenómeno de estudio.
2. Exista isotropía en el material de manera que los electrones se moverán en la misma dirección en la que oscila el campo, sea cual sea la misma.
3. Las ecuaciones de movimiento para electrones distintos no estén acopladas.
4. Pueda suponerse que el campo incidente no es tan grande como para descartar una aproximación parabólica al potencial.

En cuanto al punto 1, una descripción cuántica del medio material asegura una mayor exactitud de los resultados, y es necesaria si la onda incidente o algún armónico generado en el material tiene frecuencias cercanas o iguales a las frecuencias de resonancia del medio. Además, en el fenómeno que se pretende estudiar, se descartan con una descripción clásica, algunos efectos no lineales que aparecen en la fibra óptica como lo son la dispersión Raman y la dispersión de Brillouin. Para un enfoque cuántico de la respuesta de un medio material a estímulos ópticos ver por ejemplo, [6, 7, 8, 9, 10]. El enfoque utilizado en este trabajo es puramente clásico.

Si el punto 2 no se cumple, se puede extender el modelo de Lorentz, considerando que la fuerza restitutiva es de la forma

$$\vec{F}_{res} = - \sum_{i,j=1}^3 K_{ij} x_j(t) \hat{\xi}_i = -\mathbf{K} \vec{r}(t)$$

donde $\{\hat{\xi}_i\}$ es una base ortonormal arbitraria y la constante elástica es ahora una matriz. Eventualmente se podrá escribir en algún sistema de referencia, de manera que K_{ij} sea diagonal, pudiéndose hablar entonces de frecuencias naturales de oscilación en cada eje coordenado, ω_{0x} , ω_{0y} , ω_{0z} . En tal caso se describirían materiales anisótropos y el índice de refracción del material variará según la dirección [1].

El punto 3 implica que el medio material tiene respuesta local, es decir, las oscilaciones de un determinado electrón solo serán originadas por el campo en ese lugar donde se encuentra dicho electrón. Podría suceder, que haya contribuciones de campos que se encuentren en una vecindad del electrón en cuestión, en cuyo caso, la respuesta no es local y se dice que el medio es espacialmente dispersivo, [2]. El modelo de Lorentz se extiende ahora asumiendo que existen electrones ligados entre sí por fuerzas elásticas que cumplen la ley de Hooke, resultando en ecuaciones de oscilador armónico acopladas. Un tratamiento de la respuesta no local en el medio puede verse en [5].

Cuando el punto 4 no se cumple, el potencial en el que están embebidos los electrones se desarrolla en serie y se toman términos mayores al segundo orden. La ecuación de movimiento resultante tendrá, como se verá a continuación, términos no lineales en el desplazamiento, dando origen así a la óptica no lineal.

2.3. Derivación de la ecuación de oscilador anarmónico

Las fuentes ópticas que se usan en la práctica en comunicaciones ópticas, emiten luz a potencias relativamente altas y para el estudio que se realiza en este trabajo es necesario considerar los efectos no lineales que derivan de ese hecho. Como ya se dijo, hay isotropía en el material. Además, la respuesta se considera local.

Sea $\vec{R}$ un vector que va desde un sistema de referencia $\mathcal{O}$ en el medio material hasta un núcleo atómico arbitrario del mismo, y sea $\vec{r}_s$ el vector que va desde el núcleo hasta el electrón s . Se asume ahora que cada átomo tiene Z electrones ligados y que hay f_s electrones con la frecuencia natural de oscilación ω_{0s} , lo cuál corresponde a un tipo de ligadura. Las cantidades $\{f_s\}$ se denominan “*strengths*” del oscilador, [11].

El vector $\vec{r}_s$ de posición instantánea de los electrones depende del núcleo al cuál pertenecan los mismos y del tiempo:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_s(\vec{R}, t)$$

La energía potencial que ven los electrones es $U(r, \theta, \phi)$ en coordenadas esféricas, pero asumiendo la isotropía del medio $U = U(r)$, luego:

$$U(r) \simeq U_0 + \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} r + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=0} r^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dr^3} \right|_{r=0} r^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U}{dr^4} \right|_{r=0} r^4$$

y considerando que la derivada primera es cero y que la isotropía en una dimensión implica que $U(r) = U(-r)$,

$$U(r) \simeq U_0 + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=0} r^2 + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U}{dr^4} \right|_{r=0} r^4$$

con la derivada cuarta negativa se modela mejor la forma del potencial en la vecindad del núcleo.

$$U(r) \simeq U_0 + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=0} r^2 - \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U}{dr^4} \right|_{r=0} r^4$$

A este tipo de medio se le conoce como centrosimétrico (un potencial para un medio no centrosimétrico tendría las potencias impares de r en el desarrollo). La fuerza restitutiva será:

$$\vec{F}_{res} = -\nabla U = - \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=0} \vec{r} + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^4U}{dr^4} \right|_{r=0} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

que para el conjunto de electrones con índice s , se puede escribir:

$$\vec{F}_{res} = -m\omega_{0s}^2 \vec{r} + m\xi_s (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

Por otro lado, la fuerza debida al campo incidente es:

$$\vec{F}_e = -e\mathbf{E}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico en cualquier instante de tiempo $t \in (-\infty, \infty)$. Llegamos así a la ecuación de movimiento para cualquiera de los electrones con índice s :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{r}_s + 2\gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_s + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s - \xi_s (\vec{r}_s \cdot \vec{r}_s) \vec{r}_s = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\vec{R}, t) \quad (2.2)$$

que es una ecuación diferencial de oscilador armónico con un término cúbico en $\vec{r}$. Se puede emplear la teoría de perturbaciones para conseguir una solución aproximada¹. Primero, partimos de la idea de que ξ_s es muy pequeño. Pensemos ahora que la ecuación (2.2) es un caso particular de la siguiente ecuación dependiente del parámetro δ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{r}_s(\delta) + 2\gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_s(\delta) + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s(\delta) - \delta^2 \xi_s [\vec{r}_s(\delta) \cdot \vec{r}_s(\delta)] \vec{r}_s(\delta) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\vec{R}, t) \quad (2.3)$$

¹Hay varias maneras de llegar a la misma solución usando este método, ver por ejemplo [6].

donde $\delta \in [0, 1]$ sirve para hacer una transición entre el problema sin la perturbación y la ecuación (2.2). Al ser la ecuación dependiente de δ , su solución también debe depender de dicho valor. Si existiera un término cuadrático en el desplazamiento² $\vec{r}$, representaría la perturbación de primer orden con δ en lugar de δ^2 . Se propone ahora como solución a (2.3), la siguiente serie de potencias:

$$\vec{r}_s(\vec{R}, t, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{r}_s^{(k+1)}(\vec{R}, t) \delta^k \quad (2.4)$$

Antes de sustituir en la ecuación diferencial, evaluemos el producto $[\vec{r}_s(\delta) \cdot \vec{r}_s(\delta)] \vec{r}_s(\delta)$,

$$[\vec{r}_s(\delta) \cdot \vec{r}_s(\delta)] \vec{r}_s(\delta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \vec{r}_s^{(l+1)} \cdot \vec{r}_s^{(m+1)} \vec{r}_s^{(i+1)} \delta^{l+m+i}$$

haciendo los cambios,

$$\begin{cases} l + m + i = k \\ m + i = j \end{cases}$$

se tendrá

$$[\vec{r}_s(\delta) \cdot \vec{r}_s(\delta)] \vec{r}_s(\delta) = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \vec{r}_s^{(k-j+1)} \cdot \vec{r}_s^{(j-i+1)} \vec{r}_s^{(i+1)} \delta^k$$

sustituyendo ahora la solución (2.4) en (2.3),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\ddot{\vec{r}}_s^{(k+1)} + 2\gamma_s \dot{\vec{r}}_s^{(k+1)} + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s^{(k+1)} \right) \delta^k - \xi_s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \vec{r}_s^{(k-j+1)} \cdot \vec{r}_s^{(j-i+1)} \vec{r}_s^{(i+1)} \delta^{k+2} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}$$

siendo el conjunto $\{\delta^k\}$ linealmente independiente, esta última igualdad se traduce en los infinitos problemas de oscilador armónico forzado siguientes

$$\ddot{\vec{r}}_s^{(1)} + 2\gamma_s \dot{\vec{r}}_s^{(1)} + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s^{(1)} = - (e/m_e) \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_s^{(2)} + 2\gamma_s \dot{\vec{r}}_s^{(2)} + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s^{(2)} = 0 \quad (2.6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_s^{(3)} + 2\gamma_s \dot{\vec{r}}_s^{(3)} + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s^{(3)} = \xi_s (\vec{r}_s^{(1)} \cdot \vec{r}_s^{(1)}) \vec{r}_s^{(1)} \quad (2.7)$$

$$\ddot{\vec{r}}_s^{(4)} + 2\gamma_s \dot{\vec{r}}_s^{(4)} + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s^{(4)} = 2\xi_s (\vec{r}_s^{(2)} \cdot \vec{r}_s^{(1)}) + \xi_s (\vec{r}_s^{(1)} \cdot \vec{r}_s^{(1)}) \vec{r}_s^{(2)}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

La exactitud de la solución propuesta, dependerá ahora del número de ecuaciones que se resuelvan del sistema. Interesa en este trabajo, considerar efectos no lineales de hasta tercer orden, luego se deben encontrar $\vec{r}_s^{(1)}, \vec{r}_s^{(2)}, \vec{r}_s^{(3)}$.

²Cuando se consideran materiales anisótropos, este término cuadrático aparece.

2.4. Función de Green para el oscilador armónico amortiguado y forzado

Las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), pueden resolverse por una vasta cantidad de métodos, que van desde los métodos tradicionales para resolver EDOL, hasta métodos con transformadas integrales como la de Fourier y de Laplace. En particular la solución integral, siendo el kernel la función de Green del sistema, permitirá ver fácilmente el retardo en la respuesta del electrón al campo incidente; más adelante al relacionar las oscilaciones individuales de los electrones con la polarización macroscópica, aparecerá gracias a este método, la así llamada función respuesta del sistema; además, por este método, importa poco la forma funcional y el espectro en frecuencia (discreto o continuo) del campo incidente, el cual se dejará expresado hasta que sea el momento adecuado.

Empecemos considerando la ecuación (2.5)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t) + 2\gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t) + \omega_{0s}^2 \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\vec{R}, t)$$

con $t \in \mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ con las condiciones de Cauchy³

$$\begin{cases} \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, 0) = 0 \\ \dot{\vec{r}}_s^{(1)}(\vec{R}, 0) = 0 \end{cases}$$

Para resolverla⁴, consideremos al operador $\mathcal{L}_s$

$$\mathcal{L}_s \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_s \frac{\partial}{\partial t} + \omega_{0s}^2$$

luego (2.5), se escribe como

$$\mathcal{L}_s \vec{r}_s^{(1)} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\vec{R}, t) \quad (2.8)$$

Nótese que la solución al problema homogéneo

$$\mathcal{L}_s \vec{r}_s^{(1)} = 0$$

con las condiciones de Cauchy, define el núcleo del operador $\mathcal{L}_s$

$$\mathcal{N}(\mathcal{L}_s) = 0$$

luego, existe la inversa de $\mathcal{L}_s$, la cual llamamos $\mathcal{L}_s^{-1}$ y la definimos de la manera siguiente

$$\mathcal{L}_s^{-1} \vec{F}(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_s(t, t') \vec{F}(\vec{R}, t') dt' \quad (2.9)$$

³Dichas condiciones las deben cumplir las soluciones a las ecuaciones (2.2) y (2.3), de manera que las soluciones a (2.5), (2.6) y (2.7) también deben cumplirlas.

⁴Ver [12], para una construcción más rigurosa.

siendo $\vec{F}$ una forzadora arbitraria y donde se ha tomado al núcleo del operador como un tensor de segundo rango, el cual es la función de Green. Aplicando a la ecuación (2.8) se obtiene una representación integral de la solución

$$\mathcal{L}_s^{-1} [\mathcal{L}_s \vec{r}_s^{(1)}] = \vec{r}_s^{(1)} = -\frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_s(t, t') \mathbf{E}(\vec{R}, t') dt' \quad (2.10)$$

aplicando ahora el operador $\mathcal{L}_s$ a (2.10)

$$\mathcal{L}_s \vec{r}_s^{(1)} = -\frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_s \mathbf{G}_s(t, t') \mathbf{E}(\vec{R}, t') dt' = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\vec{R}, t)$$

luego

$$\mathcal{L}_s \mathbf{G}_s(t, t') = \mathbf{1} \delta(t - t')$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad. El caracter tensorial de la función de Green, se ha incorporado, ya que en medios con falta de simetría las oscilaciones de los electrones no están, en general, alineados con el campo incidente. La matriz identidad surge como consecuencia de la isotropía del sistema. Podemos proponer que $\mathbf{G}_s(t, t') = \mathbf{1} G_s(t, t')$ con G_s un escalar, llegando entonces a

$$\mathcal{L}_s G_s(t, t') = \delta(t - t') \quad (2.11)$$

Es bien sabido que la delta de Dirac se convierte en un par de condiciones de frontera que debe cumplir la función G_s . Empecemos considerando la integral de (2.11) entre 0 y $\tau > t'$

$$\left. \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \right|_{t=\tau} - \left. \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} + 2\gamma_s [G_s(\tau, t') - G_s(0, t')] + \omega_{0s}^2 \int_0^\tau G_s(t, t') dt = 1$$

ahora integremos entre $\tau = t' - \varepsilon$ y $\tau = t' + \varepsilon$ y tomemos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[G_s(t' + \varepsilon, t') - G_s(t' - \varepsilon, t') - 2\varepsilon \left. \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} + 2\gamma_s \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} G_s(\tau, t') d\tau + \right. \\ \left. - 4\gamma_s \varepsilon G_s(0, t') + \omega_{0s}^2 \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \int_0^\tau G_s(t, t') dt d\tau \right] = 0 \end{aligned}$$

Las integrales de la forma $\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} f(\tau) d\tau$ en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ son nulas⁵. De aquí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_s(t' + \varepsilon, t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_s(t' - \varepsilon, t')$$

⁵Para verlo, consideremos el siguiente conjunto de desigualdades

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} f(\tau) d\tau \leq \left| \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} f(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} |f(\tau)| d\tau \leq \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \max_{(t'-\varepsilon, t'+\varepsilon)} |f(\tau)| d\tau = \max_{(t'-\varepsilon, t'+\varepsilon)} |f(\tau)| 2\varepsilon$$

que se suele escribir

$$G_{s>}(t', t') = G_{s<}(t', t') \quad (2.12)$$

se asegura entonces que la función de Green es continua en $t = t'$. Integramos de nuevo (2.11) entre $t = t' - \varepsilon$ y $t = t' + \varepsilon$ y tomamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \Big|_{t=t'+\varepsilon} - \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \Big|_{t=t'-\varepsilon} + 2\gamma_s [G_s(t' + \varepsilon, t') - G_s(t' - \varepsilon, t')] + \omega_{0s}^2 \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} G_s(t, t') dt \right\} = 1$$

Por los argumentos antes descritos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \Big|_{t=t'+\varepsilon} - \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \Big|_{t=t'-\varepsilon} \right] = 1$$

que se suele escribir como

$$\frac{\partial G_{s>}(t', t')}{\partial t} - \frac{\partial G_{s<}(t', t')}{\partial t} = 1 \quad (2.13)$$

se ve entonces, cómo se manifiesta en esta ecuación la discontinuidad de la derivada de G_s en $t = t'$.

Resolviendo ahora (2.11) en los intervalos $t < t'$ y $t > t'$

$$\begin{cases} G_{s<}(t, t') &= e^{-\gamma_s t} [C_1(t') \cos(\Omega_s t) + C_2(t') \sin(\Omega_s t)] \\ G_{s>}(t, t') &= e^{-\gamma_s t} [D_1(t') \cos(\Omega_s t) + D_2(t') \sin(\Omega_s t)] \end{cases}$$

donde se ha tomado en cuenta que las oscilaciones son subamortiguadas. Además

$$\Omega_s = \sqrt{|\gamma_s^2 - \omega_{0s}^2|}$$

Se puede hallar un par de relaciones entre las constantes C_1, C_2, D_1, D_2 al imponer las condiciones de frontera. Imponiendo la condición (2.12),

$$[C_1(t') - D_1(t')] \cos(\Omega_s t') + [C_2(t') - D_2(t')] \sin(\Omega_s t') = 0$$

Imponiendo la condición (2.13) y usando la (2.12)

$$[D_2(t') - C_2(t')] \cos(\Omega_s t') + [C_1(t') - D_1(t')] \sin(\Omega_s t') = \frac{e^{\gamma_s t'}}{\Omega_s}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} D_2(t') &= C_2(t') + \frac{e^{\gamma_s t'}}{\Omega_s} \cos(\Omega_s t') \\ D_1(t') &= C_1(t') - \frac{e^{\gamma_s t'}}{\Omega_s} \sin(\Omega_s t') \end{aligned}$$

La función de Green a trozos queda entonces:

$$G_{s<}(t, t') = e^{-\gamma_s t} [C_1(t') \cos(\Omega_s t) + C_2(t') \sin(\Omega_s t)]$$

$$G_{s>}(t, t') = e^{-\gamma_s t} [C_1(t') \cos(\Omega_s t) + C_2(t') \sin(\Omega_s t)] + \frac{e^{-\gamma_s(t-t')}}{\Omega_s} \sin(\Omega_s(t-t'))$$

Y se puede reescribir haciendo uso de la función salto de Heaviside, como

$$G_s(t, t') = e^{-\gamma_s t} [C_1(t') \cos(\Omega_s t) + C_2(t') \sin(\Omega_s t)] + \Theta(t-t') \frac{e^{-\gamma_s(t-t')}}{\Omega_s} \sin(\Omega_s(t-t')) \quad (2.14)$$

La solución al oscilador armónico (2.5), debe cumplir las condiciones iniciales, de Cauchy. Usando (2.10)

$$\vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, 0) = -\frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_s(0, t') \mathbf{E}(\vec{R}, t') dt' = 0$$

lo cual es cierto, si $G_s(0, t') = 0$ derivando ahora respecto a t a (2.10) y evaluando la condición de Cauchy,

$$\dot{\vec{r}}_s^{(1)}(\vec{R}, 0) = -\frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial \mathbf{G}_s(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} \mathbf{E}(\vec{R}, t') dt' = 0$$

lo que implica que $\left. \frac{\partial G_s(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$. Es decir, la función de Green debe cumplir las condiciones de frontera de Cauchy. Al aplicarlas, se obtiene $C_1(t') = C_2(t') = 0$, con lo que desaparece la solución al problema homogéneo. Finalmente, la función de Green del sistema

$$G_{s_{ij}}(t, t') = G_{s_{ij}}(t-t') = \delta_{ij} \Theta(t-t') \frac{e^{-\gamma_s(t-t')}}{\Omega_s} \sin(\Omega_s(t-t')) \quad (2.15)$$

Teniendo ahora la función de Green para el operador $\mathcal{L}_s$, se pueden resolver tantas ecuaciones diferenciales del conjunto derivado de (2.3) como queramos, ya que todas consisten del operador $\mathcal{L}_s$ aplicado a una función $\vec{r}_s^{(k)}$ con un término fuente que cambia con el valor de k y además todas deben satisfacer las condiciones de Cauchy mencionadas. La solución a (2.5) escrita en componentes es

$$r_{s_i}^{(1)}(\vec{R}, t) = -\frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 G_{s_{ij}}(t-t') \mathbb{E}_j(\vec{R}, t') dt' \quad (2.16)$$

La solución a la ecuación (2.6), basado en (2.9), es la trivial, ya que el término fuente es cero (esta ecuación correspondería a efectos no lineales de segundo orden)

$$\vec{r}_s^{(2)}(\vec{R}, t) = 0 \quad (2.17)$$

La solución a la ecuación (2.7), basado en (2.9), es

$$r_{s_\nu}^{(3)}(\vec{R}, t) = \xi_s \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k G_{s_{\nu k}}(t, t') \left[\vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t') \cdot \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t') \right] r_{s_k}^{(1)}(\vec{R}, t') dt' \quad (2.18)$$

de esta manera, la solución a la ecuación diferencial de orden k que se deriva de (2.3) depende de las $k - 1$ soluciones de orden menor a k . En virtud de (2.16) y tras algunas manipulaciones algebraicas

$$r_{s\nu}^{(3)}(\vec{R}, t) = -\xi_s \left(\frac{e}{m_e} \right)^3 \sum_{jkl} \prod_{m=0}^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \delta_{\nu l} \delta_{jk} \mathcal{G}_s(t, t', t_1, t_2, t_3) \\ \times \mathbb{E}_j(\vec{R}, t_1) \mathbb{E}_k(\vec{R}, t_2) \mathbb{E}_l(\vec{R}, t_3) \quad (2.19)$$

donde se ha definido

$$\mathcal{G}_s(t, t', t_1, t_2, t_3) = G_s(t, t') G_s(t', t_1) G_s(t', t_2) G_s(t', t_3) \quad (2.20)$$

y además, $t_0 = t'$. Es ahora posible dar una solución aproximada a (2.3)

$$\vec{r}_s(\vec{R}, t, \delta) \simeq \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t) + \delta \vec{r}_s^{(2)}(\vec{R}, t) + \delta^2 \vec{r}_s^{(3)}(\vec{R}, t) \quad (2.21)$$

Por construcción, si al hacer el límite $\delta \rightarrow 1$, (2.3) se convierte en (2.2), su solución debe tender a la solución al problema que nos interesa. Es decir, (2.2) tiene como solución

$$\vec{r}_s(\vec{R}, t) = \lim_{\delta \rightarrow 1} \vec{r}_s(\vec{R}, t, \delta) \simeq \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t) + \vec{r}_s^{(2)}(\vec{R}, t) + \vec{r}_s^{(3)}(\vec{R}, t) \quad (2.22)$$

Nótese que, si se hace tender $\delta \rightarrow 0$ la ecuación diferencial de oscilador anarmónico se convierte en un oscilador armónico forzado y amortiguado tal como (2.5) y la solución debe ser

$$\vec{r}_s(\vec{R}, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{r}_s(\vec{R}, t, \delta) = \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t)$$

que es lo que se espera.

Capítulo 3

Conexión entre Cantidades Mecánicas y Electrodinámicas

3.1. Multipolos eléctricos y polarización

Si se aplica un campo eléctrico a un medio hecho de un gran número de átomos o moléculas, las cargas ligadas en cada molécula responderán al campo aplicado realizando movimientos diversos. La densidad de carga molecular será distorsionada. Los momentos multipolares de cada molécula serán distintos al caso en que estuvieran en la ausencia de dicho campo. En sustancias simples, cuando no hay campos aplicados los momentos multipolares son todos cero, al menos cuando se promedie sobre muchas moléculas. El multipolo molecular dominante con campos aplicados es el dipolo. Por lo tanto, se ha producido en el medio una polarización eléctrica $\mathbf{P}$ (momento dipolar por unidad de volumen). Ver [13], donde se construye un modelo más general que involucra los momentos dipolares moleculares, aquí solo consideramos los atómicos.

La expansión multipolar del vector desplazamiento eléctrico es en general

$$\mathbf{D}(\vec{R}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{R}, t) + \mathbf{P}(\vec{R}, t) - \nabla Q(\vec{R}, t) + \dots$$

y en la aproximación de dipolo eléctrico

$$\mathbf{D}(\vec{R}, t) \simeq \varepsilon_0 \mathbf{E}(\vec{R}, t) + \mathbf{P}(\vec{R}, t)$$

A su vez, se define $\mathbf{P}$ como

$$\mathbf{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} = N \langle \vec{p} \rangle \quad (3.1)$$

donde $d\vec{p}$ es el momento dipolar del elemento de volumen dv , N es el número de átomos por unidad de volumen y $\langle \vec{p} \rangle$ es la contribución media de cada átomo a la polarización en la unidad de volumen [14]. Suponiendo que cada átomo del material tiene f_s electrones

con la frecuencia de resonancia ω_{0s} , el momento dipolar medio de cada átomo será

$$\langle \vec{p} \rangle = -e \sum_s f_s \vec{r}_s$$

quedando así la polarización macroscópica

$$\mathbf{P}(\vec{R}, t) = -Ne \sum_s f_s \vec{r}_s(\vec{R}, t) \quad (3.2)$$

donde $\vec{r}_s(\vec{R}, t)$ es la solución (2.22) al oscilador anarmónico. Ahora se puede ver como surgen polarizaciones de varios ordenes en el material

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\vec{R}, t) &\simeq -Ne \sum_s f_s \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t) - Ne \sum_s f_s \vec{r}_s^{(2)}(\vec{R}, t) - Ne \sum_s f_s \vec{r}_s^{(3)}(\vec{R}, t) \\ &\simeq \mathbf{P}^{(1)}(\vec{R}, t) + \mathbf{P}^{(2)}(\vec{R}, t) + \mathbf{P}^{(3)}(\vec{R}, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se ha colocado el símbolo “ $\simeq$ ” ya que la solución (2.22) es una aproximación, pero en general la polarización está conformada por una suma infinita de términos, de orden cada vez mayor y menor tamaño. Los efectos no lineales de tercer orden ya son bastante pequeños como se verá más adelante, lo cual justifica truncar la serie allí.

3.2. Polarización y susceptibilidad eléctrica en el dominio del tiempo

En vista de que

$$\mathbf{P}^{(1)}(\vec{R}, t) = -Ne \sum_s f_s \vec{r}_s^{(1)}(\vec{R}, t)$$

Comencemos escribiendo explícitamente la componente μ -ésima el vector de polarización de primer orden, usando la solución (2.16)

$$\mathbb{P}_{\mu}^{(1)}(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left[\frac{Ne^2}{m_e} \delta_{\mu i} \sum_s f_s G_s(t - t') \right] \mathbb{E}_i(\vec{R}, t') dt'$$

definimos el tensor de susceptibilidad eléctrica de primer orden, como sigue

$$\tilde{\chi}_{\mu i}^{(1)}(t - t') = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \delta_{\mu i} \sum_s f_s G_s(t - t')$$

y usando la función de Green dada en (2.15)

$$\tilde{\chi}_{\mu i}^{(1)}(t - t') = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \delta_{\mu i} \Theta(t - t') \sum_s \frac{f_s e^{-\gamma_s(t-t')}}{\Omega_s} \sin(\Omega_s(t - t')) \quad (3.4)$$

de manera que la polarización de primer orden se puede escribir como

$$\mathbb{P}_\mu^{(1)}(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \sum_i \tilde{\chi}_{\mu i}^{(1)}(t - t') \mathbb{E}_i(\vec{R}, t') dt' \quad (3.5)$$

Cabe destacar que la función de Heaviside dentro de la susceptibilidad, impone una restricción sobre las contribuciones que hace el campo eléctrico sobre la polarización. La integral en (3.5) se realiza solo hasta el tiempo t debido a dicha función, tomando en cuenta el campo en tiempos pasados, pero nunca futuros. Existe entonces un retardo en la respuesta a primer orden del material ante un campo incidente y una relación de causalidad, además en general, el estímulo (campo incidente) y la respuesta (polarización) no están en fase.

En cuanto a la polarización de segundo orden, es nula, ya que $\vec{r}_s^{(2)}$ lo es

$$\mathbb{P}_\mu^{(2)}(\vec{R}, t) = 0 \quad (3.6)$$

Pasemos ahora a la polarización de tercer orden

$$\mathbf{P}^{(3)}(\vec{R}, t) = -Ne \sum_s f_s \vec{r}_s^{(3)}(\vec{R}, t)$$

acudimos ahora, a la ecuación (2.19) para sustituirla en la relación anterior y separamos la integral en t' del resto de integrales, ordenando adecuadamente se llega a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu^{(3)}(\vec{R}, t) = \prod_{m=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \sum_{jkl} \left[\frac{Ne^4}{m_e^3} \delta_{\mu l} \delta_{jk} \sum_s \xi_s f_s \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_s(t, t', t_1, t_2, t_3) dt' \right] \\ \times \mathbb{E}_j(\vec{R}, t_1) \mathbb{E}_k(\vec{R}, t_2) \mathbb{E}_l(\vec{R}, t_3) \end{aligned}$$

Una de las propiedades que cumple esta expresión integral es el intercambio que puede hacerse en las variables t_1, t_2, t_3 simultáneo al cambio de índices j, k, l manteniendo invariante a la expresión. Existen tres posibilidades que se listan a continuación

$$\left\{ \begin{array}{ll} j \leftrightarrow k & \text{y } t_1 \leftrightarrow t_2 \\ j \leftrightarrow l & \text{y } t_1 \leftrightarrow t_3 \\ k \leftrightarrow l & \text{y } t_2 \leftrightarrow t_3 \end{array} \right.$$

A esta propiedad se le conoce con el nombre de simetría intrínseca de permutación, y como se verá más adelante, también se cumple en el dominio de la frecuencia. Considerando estas tres posibilidades, puede construirse la polarización de tercer orden de manera que tome en cuenta esta simetría, quedando así

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu^{(3)}(\vec{R}, t) = \prod_{m=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \sum_{jkl} \left[\frac{Ne^4}{3m_e^3} (\delta_{\mu l} \delta_{jk} + \delta_{\mu j} \delta_{lk} + \delta_{\mu k} \delta_{jl}) \right. \\ \left. \times \sum_s \xi_s f_s \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_s(t, t', t_1, t_2, t_3) dt' \right] \mathbb{E}_j(\vec{R}, t_1) \mathbb{E}_k(\vec{R}, t_2) \mathbb{E}_l(\vec{R}, t_3) \end{aligned}$$

definimos el tensor de susceptibilidad eléctrica de tercer orden, como sigue

$$\tilde{\chi}_{\mu l j k}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) = \frac{Ne^4}{3\varepsilon_0 m_e^3} (\delta_{\mu l} \delta_{jk} + \delta_{\mu j} \delta_{lk} + \delta_{\mu k} \delta_{jl}) \sum_s \xi_s f_s \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_s(t, t', t_1, t_2, t_3) dt' \quad (3.7)$$

de manera que la polarización de tercer orden se pueda escribir como

$$\mathbb{P}_{\mu}^{(3)}(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \sum_{jkl} \tilde{\chi}_{\mu l j k}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) \times \mathbb{E}_j(\vec{R}, t_1) \mathbb{E}_k(\vec{R}, t_2) \mathbb{E}_l(\vec{R}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3.8)$$

De nuevo, la causalidad está implícita en la susceptibilidad de tercer orden mediante la función de Heaviside. La polarización de tercer orden es el resultado de la interacción del campo con la materia en tres instantes de tiempo, en general, distintos.

3.3. Polarización y susceptibilidad eléctrica en el dominio de la frecuencia

Al tratar la ecuación de ondas en la fibra óptica, es conveniente trabajar en el dominio de Fourier. A continuación construiremos los vectores $\vec{r}_s^{(1)}$ y $\vec{r}_s^{(3)}$ en el dominio de la frecuencia, para lo cual definimos la transformada de Fourier $\tilde{\phi}(\omega)$ de la función $\phi(t)$ así como su inversa, de la manera siguiente:

$$\tilde{\phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.9)$$

$$\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.10)$$

Ahora, haciendo uso de (3.9)

$$\tilde{r}_{s_i}^{(1)}(\vec{R}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{s_i}^{(1)}(\vec{R}, t) e^{i\omega t} dt$$

sustituyendo $r_{s_i}^{(1)}(\vec{R}, t)$ por (2.16)

$$\tilde{r}_{s_i}^{(1)}(\vec{R}, \omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{m_e} \sum_j G_{s_{ij}}(t - t') \mathbb{E}_j(\vec{R}, t') dt' e^{i\omega t} dt \quad (3.11)$$

Para hallar esta integral, se puede empezar sustituyendo a $G_{s_{ij}}(t - t')$ por la transformada inversa de $\tilde{G}_{s_{ij}}(\omega)$, suponiéndola como conocida. Se puede luego ir arreglando términos de manera adecuada para simplificar la expresión

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{s_i}^{(1)}(\vec{R}, \omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{m_e} \sum_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{s_{ij}}(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} d\omega' \right] \mathbb{E}_j(\vec{R}, t') dt' e^{i\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{m_e} \sum_j \tilde{G}_{s_{ij}}(\omega') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_j(\vec{R}, t') e^{i\omega' t'} dt' \right] d\omega' \end{aligned}$$

pudiéndose reconocer en el primer corchete a la delta de dirac $\delta(\omega - \omega')$ y en el segundo corchete, a la transformada de Fourier del campo $\tilde{\mathbb{E}}_j(\vec{R}, \omega')$. Luego,

$$\tilde{r}_{si}^{(1)}(\vec{R}, \omega) = -\frac{e}{m_e} \sum_j \tilde{G}_{sij}(\omega) \tilde{\mathbb{E}}_j(\vec{R}, \omega) \quad (3.12)$$

La polarización de primer orden en el dominio de la frecuencia será

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\mu^{(1)}(\vec{R}, \omega) &= -Ne \sum_s f_s \tilde{r}_{s\mu}^{(1)}(\vec{R}, \omega) \\ &= \frac{Ne^2}{m_e} \sum_i \sum_s f_s \tilde{G}_{s\mu i}(\omega) \tilde{\mathbb{E}}_i(\vec{R}, \omega) \end{aligned} \quad (3.13)$$

La polarización de primer orden en el dominio del tiempo (3.5) se escribe como la convolución de la susceptibilidad por el campo, luego, es de esperarse que al aplicar la transformada de Fourier de dicha polarización, se tenga:

$$\tilde{\mathbb{P}}_\mu^{(1)}(\vec{R}, \omega) = \varepsilon_0 \sum_i \chi_{\mu i}^{(1)}(\omega) \tilde{\mathbb{E}}_i(\vec{R}, \omega) \quad (3.14)$$

al igualar con la ecuación (3.13), se puede obtener la susceptibilidad eléctrica de primer orden en el dominio de la frecuencia

$$\chi_{\mu i}^{(1)}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_s f_s \tilde{G}_{s\mu i}(\omega) \quad (3.15)$$

donde $\tilde{G}_{s\mu i}(\omega)$ se calcula a continuación

$$\tilde{G}_{s\mu i}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\mu i} \Theta(\tau) \frac{e^{-\gamma_s \tau}}{\Omega} \sin(\Omega \tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

la función de Heaviside restringe el intervalo de integración y la integral que queda se puede calcular fácilmente usando integración por partes, resolviendo, se llega a la función de Green en el dominio de la frecuencia

$$\tilde{G}_{s\mu i}(\omega) = \frac{\delta_{\mu i}}{D_s(\omega)} \quad \text{con} \quad D_s(\omega) = \omega_{0s}^2 - \omega^2 - 2i\gamma_s \omega \quad (3.16)$$

y se puede sustituir en (3.15), de manera que la susceptibilidad en el dominio de la frecuencia es, finalmente:

$$\chi_{\mu i}^{(1)}(\omega) = \sum_s \frac{Ne^2 f_s}{\varepsilon_0 m_e D_s(\omega)} \delta_{\mu i} = \chi^{(1)}(\omega) \delta_{\mu i} \quad (3.17)$$

Recordando que la suma se realiza sobre las frecuencias de resonancia del sistema. La susceptibilidad eléctrica de primer orden está relacionada con el índice de refracción del material como sigue:

$$n^2(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega) = 1 + \sum_s \frac{Ne^2 f_s}{\varepsilon_0 m_e D_s(\omega)} \quad (3.18)$$

dicha cantidad es una medida de la respuesta del medio ante la interacción con una onda electromagnética y la dependencia de esta respuesta con la frecuencia, se conoce como dispersión cromática. Esta ecuación tiene la misma forma que la famosa ecuación de Sellmeier (ver [4])

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (3.19)$$

donde ω_j es la frecuencia de resonancia y B_j es la intensidad de la j -ésima resonancia. La suma se extiende sobre todas las resonancias del material que contribuyen al rango de frecuencias de interés. En el caso de fibras ópticas, los parámetros B_j y ω_j se obtienen experimentalmente ajustando curvas de dispersión con la ecuación (3.19) con $m = 3$ y depende de los constituyentes del núcleo. Para sílice fundida, estos parámetros son (ver [4]) $B_1 = 0,6961663$, $B_2 = 0,4079426$, $B_3 = 0,8974794$, $\lambda_1 = 0,0684043\mu m$, $\lambda_2 = 0,1162414\mu m$ y $\lambda_3 = 9,896161\mu m$, donde $\lambda_j = 2\pi c/\omega_j$ y c es la velocidad de la luz en el vacío. Nótese que una diferencia crucial entre (3.18) y (3.19) es la consideración del amortiguamiento dado por el factor γ que se relacionará posteriormente con la atenuación de las señales en el medio. La atenuación suele ser muy pequeña en fibras de sílice fundida y la ecuación de Sellmeier funciona bastante bien.

Pasamos ahora, al vector $\vec{r}^{(3)}$ en el dominio de la frecuencia, el cuál puede encontrarse mediante un proceso similar al usado para el vector $\vec{r}^{(1)}$, el cálculo es bastante largo y tedioso, por lo cuál, se ha incluido en el apéndice A. Lo que se quiere ahora, es mostrar la simetría intrínseca de permutación que cumple el vector de polarización de tercer orden. Partimos del resultado (A.1)

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{s\nu}^{(3)}(\omega) = & - \left(\frac{e}{m_e} \right)^3 \xi_s \sum_{kl} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_s(\omega') \tilde{E}(\omega') \cdot \tilde{G}_s(\omega'') \tilde{E}(\omega'') \\ & \times \tilde{G}_{s\nu k}(\omega) \tilde{G}_{s kl}(\omega''') \tilde{E}_l(\omega''') \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \end{aligned}$$

la polarización de tercer orden en el dominio de la frecuencia será

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{\mu}^{(3)}(\vec{R}, \omega) = & - Ne \sum_s f_s \tilde{r}_{s\mu}^{(3)}(\vec{R}, \omega) \\ = & \sum_s \frac{Ne^4 \xi_s f_s}{m_e^3 (2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{kl} \tilde{G}_s(\omega') \tilde{E}(\omega') \cdot \tilde{G}_s(\omega'') \tilde{E}(\omega'') \\ & \times \tilde{G}_{s\mu k}(\omega) \tilde{G}_{s kl}(\omega''') \tilde{E}_l(\omega''') \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \end{aligned} \quad (3.20)$$

aislemos los términos que contienen productos de funciones de Green y de campos, por un momento:

$$\sum_{kl} G_{s\mu k}(\omega) \tilde{G}_{s kl}(\omega''') \tilde{E}_l(\omega''') \tilde{G}_s(\omega') \tilde{E}(\omega') \cdot \tilde{G}_s(\omega'') \tilde{E}(\omega'')$$

sabemos que $\tilde{\mathbf{G}}_s = \mathbf{1}\tilde{G}_s$ así que escrito en componentes es proporcional a la delta de Kronecker. Simplificamos aún más escribiendo solo los objetos que quedarían con índices espaciales

$$\sum_{kl} \delta_{\mu k} \delta_{kl} \tilde{\mathbb{E}}_l(\omega''') \tilde{\mathbf{E}}(\omega') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega'')$$

Para resaltar el carácter de simetría de este objeto, conviene escribir el producto escalar de la manera siguiente

$$\sum_{kl} \delta_{\mu k} \delta_{kl} \tilde{\mathbb{E}}_l(\omega''') \sum_{jn} \tilde{\mathbb{E}}_j(\omega') \tilde{\mathbb{E}}_n(\omega'') \delta_{jn}$$

sumando ahora en k y reordenando

$$\sum_{jln} \delta_{\mu l} \delta_{jn} \tilde{\mathbb{E}}_j(\omega') \tilde{\mathbb{E}}_n(\omega'') \tilde{\mathbb{E}}_l(\omega''') \quad (3.21)$$

se puede ver ahora la simetría que cumple bajo intercambio de índices l, j, n simultáneo al intercambio de $\omega', \omega'', \omega'''$ (simetría intrínseca de permutación). Ahora se puede escribir la contracción así

$$\sum_{jln} \frac{1}{3} (\delta_{\mu l} \delta_{jn} + \delta_{\mu j} \delta_{ln} + \delta_{\mu n} \delta_{jl}) \tilde{\mathbb{E}}_j(\omega') \tilde{\mathbb{E}}_n(\omega'') \tilde{\mathbb{E}}_l(\omega''')$$

sustituyendo esta última relación y la forma explícita de la función de Green en el dominio de la frecuencia (3.16) en (3.20),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{\mu}^{(3)}(\vec{R}, \omega) = \sum_s \frac{Ne^4 \xi_s f_s}{3m_e^3 (2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{jln} \frac{(\delta_{\mu l} \delta_{jn} + \delta_{\mu j} \delta_{ln} + \delta_{\mu n} \delta_{jl})}{D_s(\omega) D_s(\omega') D_s(\omega'') D_s(\omega''')} \\ \tilde{\mathbb{E}}_j(\omega') \tilde{\mathbb{E}}_n(\omega'') \tilde{\mathbb{E}}_l(\omega''') \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \end{aligned} \quad (3.22)$$

Y al escribir con el tensor de susceptibilidad de tercer orden, quedaría, como usualmente se denota en la literatura, (ver por ejemplo [15])

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{\mu}^{(3)}(\vec{R}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{jln} \varepsilon_0 \chi_{\mu jln}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') \tilde{\mathbb{E}}_j(\omega') \tilde{\mathbb{E}}_n(\omega'') \tilde{\mathbb{E}}_l(\omega''') \\ \times \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \end{aligned} \quad (3.23)$$

comparando (3.23) con (3.22) se puede encontrar el tensor de susceptibilidad de tercer orden

$$\chi_{\mu jln}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') = \sum_s \frac{Ne^4 \xi_s f_s}{3\varepsilon_0 m_e^3 (2\pi)^2} \frac{(\delta_{\mu l} \delta_{jn} + \delta_{\mu j} \delta_{ln} + \delta_{\mu n} \delta_{jl})}{D_s(\omega) D_s(\omega') D_s(\omega'') D_s(\omega''')} \quad (3.24)$$

por comodidad se puede hacer

$$\chi_{\mu jln}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') = \frac{1}{3} \chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') (\delta_{\mu l} \delta_{jn} + \delta_{\mu j} \delta_{ln} + \delta_{\mu n} \delta_{jl}) \quad (3.25)$$

Capítulo 4

Ecuación de propagación en fibra óptica no lineal: Preliminares

4.1. Integrabilidad de las ecuaciones de Maxwell

La ecuación de propagación de ondas se deduce de las ecuaciones de Maxwell, estas contienen información sobre el medio donde dichas ondas viajan, mediante las relaciones constitutivas para $\mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ y $\mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ [13]. También incluye los efectos que puedan surgir como consecuencia de tener fuentes de campo eléctrico o magnético. En cuanto a las relaciones constitutivas, sabemos que en general, al hacer un promedio en un volumen macroscópico

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + (\mathbf{P} - \nabla \mathbf{Q} + \dots) \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - (\mathbf{M} + \dots)\end{aligned}$$

En el material de interés se pueden despreciar los términos de orden mayor al de polarización eléctrica y magnética y la forma explícita de las polarizaciones son conocidas. En el caso de la eléctrica, vimos en el capítulo anterior que está compuesta por un término lineal y por uno no lineal en el campo eléctrico; mientras que la magnética es cero, debido a que el dióxido de silicio no es un material magnético. Las relaciones constitutivas son conocidas en este medio y son

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(L)}(\mathbf{E}) + \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Similarmente, las fuentes de campo, es decir, las densidades de carga libre ρ y de corriente libre $\mathbf{J}$ son promedios en un volumen macroscópico del medio. Dichas densidades se conocen en todo tiempo t y valen cero. Por otro lado, la fibra óptica que tratamos tiene geometría cilíndrica y se propondrán condiciones de frontera adecuadas. Teniendo así, las condiciones necesarias y suficientes para obtener una solución matemática para los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$

4.2. Consideraciones para delimitar el problema

En vista de la complejidad matemática que implicaría el tratamiento del término no lineal de la polarización en una ecuación de ondas, se hacen de antemano una serie de observaciones:

1. La no linealidad en $\mathbb{E}$, ecuación (3.23), sugiere que el campo que se proponga como solución a la ecuación de ondas debe ser real. Además, el principio de superposición no es válido en óptica no lineal.
2. Existen fuentes ópticas en la práctica, que pueden emitir luz con un ancho de banda en frecuencia muy corto y se observa que al propagarse esta luz en la fibra, también tiene un ancho de banda corto. Luego, se puede asumir que el campo que viaja en la fibra es quasi-monocromático. Es útil, separar el mismo, en una parte que varía rápidamente con el tiempo y una parte envolvente que varía lentamente.
3. Entre los efectos no lineales de tercer orden, está la generación de terceros armónicos, y una vez generados, pueden interactuar con otros campos que viajen en la fibra mediante el mismo mecanismo generando nuevas frecuencias.

Considerando estas observaciones y suponiendo que el espectro en frecuencia de la luz del rayo laser al entrar en la fibra está centrada en ω_0 , el campo eléctrico en algún instante de tiempo t , debe ser de la forma

$$\mathbf{E}(\vec{R}, t) = \sum_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \vec{E}_{\sigma}(\vec{R}, t) e^{-i\omega_{\sigma} t} + \frac{1}{2} \vec{E}_{\sigma}^*(\vec{R}, t) e^{i\omega_{\sigma} t} \right)$$

Donde la suma se realiza sobre todas las frecuencias que pudieron generarse en el recorrido de la luz a través de la fibra, que son, armónicos impares de ω_0 .

4. Experimentalmente se observa que el efecto preponderante en la propagación de luz en fibra óptica monomodo es el *efecto Kerr*, los armónicos generados tienen una amplitud muy pequeña y pueden ser despreciados. Entonces, la suma en σ se reduce a la única frecuencia ω_0

$$\mathbf{E}(\vec{R}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \vec{E}^*(\vec{R}, t) e^{i\omega_0 t} \quad (4.2)$$

Se sustituye ahora este campo en la expresión para la polarización de tercer orden (3.8), para lo cual se debe primero sustituir en el triple producto $\mathbb{E}_j(\vec{R}, t_1) \mathbb{E}_k(\vec{R}, t_2) \mathbb{E}_l(\vec{R}, t_3)$, se omitirán los paréntesis, y las dependencias temporales se toman como índices numéricos, además, *c.c.* denota el complejo conjugado

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{j1} \mathbb{E}_{k2} \mathbb{E}_{l3} &= \left(\frac{1}{2} E_{j1} e^{-i\omega_0 t_1} + c.c. \right) \left(\frac{1}{2} E_{k2} e^{-i\omega_0 t_2} + c.c. \right) \left(\frac{1}{2} E_{l3} e^{-i\omega_0 t_3} + c.c. \right) \\ &= \frac{1}{8} E_{j1} E_{k2} E_{l3} e^{-i\omega_0(t_1+t_2+t_3)} + c.c. + \frac{1}{8} E_{j1} E_{k2} E_{l3}^* e^{-i\omega_0(t_1+t_2-t_3)} + c.c. + \\ &\quad + \frac{1}{8} E_{j1} E_{k2}^* E_{l3} e^{-i\omega_0(t_1-t_2+t_3)} + c.c. + \frac{1}{8} E_{j1} E_{k2}^* E_{l3}^* e^{-i\omega_0(t_1-t_2-t_3)} + c.c. \end{aligned}$$

Al sustituir en (3.8), y usando la convención de Einstein para índices repetidos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu^{(3)} = & \frac{\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\mu jkl}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{j1} E_{k2} E_{l3} e^{-i\omega_0(t_1+t_2+t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c. + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\mu jkl}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{j1} E_{k2} E_{l3}^* e^{-i\omega_0(t_1+t_2-t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c. + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\mu jkl}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{j1} E_{k2}^* E_{l3} e^{-i\omega_0(t_1-t_2+t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c. + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\mu jkl}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{j1} E_{k2}^* E_{l3}^* e^{-i\omega_0(t_1-t_2-t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c.\end{aligned}$$

donde el tensor de susceptibilidad eléctrica de tercer orden es real. Por la simetría intrínseca de permutación, se pueden agrupar varios términos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu^{(3)} = & \frac{\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\mu jkl}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{j1} E_{k2} E_{l3} e^{-i\omega_0(t_1+t_2+t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c. + \\ & + \frac{3\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{\mu jkl}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{j1} E_{k2} E_{l3}^* e^{-i\omega_0(t_1+t_2-t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c.\end{aligned}$$

5. Se asume que el campo óptico mantiene su polarización a lo largo de la fibra, lo cuál no es cierto en general, a menos de que se use una fibra que mantenga la polarización. De igual manera, en la práctica es una buena aproximación [4]

$$\mathbf{E}(\vec{R}, t) = \mathbb{E}(\vec{R}, t) \hat{x}$$

Recordando el carácter tensorial de $\chi^{(3)}$ dado por las deltas de Kronecker, se requiere que $\mu = x$. Así, la polarización

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x^{(3)} = & \frac{\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{x1} E_{x2} E_{x3} e^{-i\omega_0(t_1+t_2+t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c. + \\ & + \frac{3\varepsilon_0}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) E_{x1} E_{x2} E_{x3}^* e^{-i\omega_0(t_1+t_2-t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 + c.c.\end{aligned}$$

6. El retardo implícito dado por las funciones de Green en la susceptibilidad de tercer orden contiene información que es capaz de explicar otros fenómenos que ocurren y que son importantes en otras escalas. Un camino que se puede tomar para simplificar el problema, es suponer una forma distinta del tensor de susceptibilidad de tercer orden, que implica respuesta instantánea, es decir, no aparecen fenómenos de dispersión no lineal y con cuya introducción se desprecian además¹ las vibraciones moleculares, que ocurren en una escala de tiempo de 60 – 70 fs en fibras de silicio, por lo tanto, si la respuesta del medio es instantánea comparada a la duración del pulso ($\tau/T_0 \ll 1$ donde T_0 es el ancho del pulso y τ es el tiempo de respuesta no

¹En el caso en el que el tensor de susceptibilidad se hubiese derivado usando la mecánica cuántica

lineal de el medio) para anchos de pulso mayores a $1ps$ la aproximación es válida, ver por ejemplo [4, 15, 16, 17]

$$\tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}(t, t_1, t_2, t_3) = \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}\delta(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3) \quad (4.3)$$

aunque pudieran considerarse otras formas de $\tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}$ más complicadas que si toman en cuenta los efectos despreciados con la anterior y que también simplifican un poco el problema.

Luego, se tiene:

$$\mathbb{P}_x^{(3)}(\vec{R}, t) = \varepsilon_0 \frac{\tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}}{8} E_x(\vec{R}, t) e^{-3i\omega_0 t} + c.c. + \varepsilon_0 \frac{3}{4} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)} |E_x|^2 E_x(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

El primer término se puede despreciar ya que requiere conjugación de fase [4]. Finalmente, el vector de polarización de tercer orden, al igual que el campo eléctrico que viaja en la fibra, se escribe bajo estas consideraciones, como

$$\mathbf{P}_x^{(3)}(\vec{R}, t) = \frac{1}{2} P_x(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2} P_x^*(\vec{R}, t) e^{i\omega_0 t} \quad (4.4)$$

donde

$$P_x^{(3)}(\vec{R}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)} |E_x(\vec{R}, t)|^2 E_x(\vec{R}, t) \quad (4.5)$$

que usando la forma (3.25) para la susceptibilidad,

$$P_x^{(3)}(\vec{R}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} |E_x(\vec{R}, t)|^2 E_x(\vec{R}, t) \quad (4.6)$$

4.3. Planteamiento de la ecuación de propagación

Planteamos ahora, las ecuaciones de Maxwell para el caso de interés, que implica que no hay fuentes y que las ecuaciones constitutivas del medio material son las dadas por las ecuaciones (4.1)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.10)$$

Aplicando el rotor a la ecuación (4.7) y usando la relación constitutiva para $\mathbf{H}$ (4.1)

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

usando ahora la ecuación (4.8) y la relación constitutiva para $\mathbf{D}$ (4.1)

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(L)}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

En vista de la forma escalar que se consiguió para el tensor de susceptibilidad de tercer orden bajo la aproximación de campo linealmente polarizado (válida en la práctica), también la constante dieléctrica será escalar; lo que se suele hacer al trabajar con fibra es suponer que la variación espacial que puede tener la constante dieléctrica, ya que depende del módulo del campo al cuadrado, es muy pequeña y se puede tratar como una constante; además, se vió en el capítulo 3 que la susceptibilidad no varía en el espacio, lo que hay implícito es la isotropía del dióxido de silicio. Luego

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) \simeq \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \\ \Rightarrow \frac{\nabla \cdot \mathbf{D}}{\varepsilon} &\simeq \nabla \cdot \mathbf{E} \simeq 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

la ecuación (4.11) toma la forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2} \quad (4.13)$$

Nótese que se puede recuperar la ecuación de propagación convencional, si se hace $\mathbf{P}^{(NL)} = 0$. Ahora se puede sustituir la forma de la polarización de primer orden conseguida en el capítulo 3, dada por la ecuación (3.5)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}^{(1)}(t-t') \mathbf{E}(t') dt' + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2} \quad (4.14)$$

Como se mencionó en la sección 4.2, se propone una solución que debe ser real y que está compuesta por una parte de variación rápida y otra de variación lenta en el tiempo, ecuación (4.2),

$$\mathbf{E}(\vec{R}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

Al sustituir esta forma de campo en (4.14), surgen las respectivas ecuaciones para el campo considerado y su conjugado. Además, suponiendo campo linealmente polarizado en la dirección x , también se puede sustituir la forma de la polarización no lineal, dada en la ecuación (4.5), entonces:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E e^{-i\omega_0 t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E e^{-i\omega_0 t}) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}^{(1)}(t-t') E(t') e^{-i\omega_0 t'} dt' + \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3}{4} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)} |E|^2 E e^{-i\omega_0 t} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podemos ahora aplicar la transformada de Fourier para simplificar los cálculos, tratemos cada término separadamente, empecemos con el término del lado izquierdo en (4.15) y

partamos del hecho que la transformada de Fourier es la definida por (3.9) y en particular la del campo eléctrico es $\mathcal{F}[E(\vec{R}, t)] = \tilde{E}(\vec{R}, \omega)$

$$\mathcal{F} \left[\nabla^2 E(\vec{R}, t) e^{(-i\omega_0 t)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 E(\vec{R}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \nabla^2 \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) \quad (4.16)$$

El primer término del lado derecho de (4.15)

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(E(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} \right) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(E(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} \right) e^{i\omega t} dt$$

integrando por partes dos veces, se llega a:

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(E(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} \right) \right] = -\omega^2 \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) \quad (4.17)$$

Tratemos ahora el segundo término del lado derecho, para lo cuál, podemos escribir primero al integrando en el dominio de la frecuencia usando la transformada inversa de Fourier como sigue,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}^{(1)}(t - t') E(\vec{R}, t') e^{-i\omega_0 t'} dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right) E(\vec{R}, t') e^{-i\omega_0 t'} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{R}, t') e^{i(\omega - \omega_0)t'} dt' \right) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

como se quiere su derivada segunda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}^{(1)}(t - t') E(\vec{R}, t') e^{-i\omega_0 t'} dt' \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[-\omega^2 \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) \right] \end{aligned}$$

al aplicarle la transformada de Fourier a este última relación, es trivial que

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}^{(1)}(t - t') E(\vec{R}, t') e^{-i\omega_0 t'} dt' \right) \right] = -\omega^2 \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) \quad (4.18)$$

En la literatura usual, por ejemplo, [4, 18], se asume que en el tercer término de (4.15) $\tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)} |E|^2$ es una constante pequeña y la transformada de Fourier de dicho término es trivial y sería esa constante multiplicada por (4.17). Nosotros tomaremos otro camino. Primero demostremos que así como $\tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}$ no depende del tiempo, (en la aproximación de respuesta instantánea) $\chi_{xxxx}^{(3)}$ no depende de la frecuencia; al ser un cálculo relativamente largo, se realiza en el apéndice B. Apliquemos la transformada de Fourier al término no lineal de (4.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3}{4} \tilde{\chi}^{(3)} |E(t)|^2 E(t) e^{-i\omega_0 t} \right) \right] &= -\omega^2 \mathcal{F} \left[\frac{3}{4} \tilde{\chi}^{(3)} |E(t)|^2 E(t) e^{-i\omega_0 t} \right] \\ &= -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0} \tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

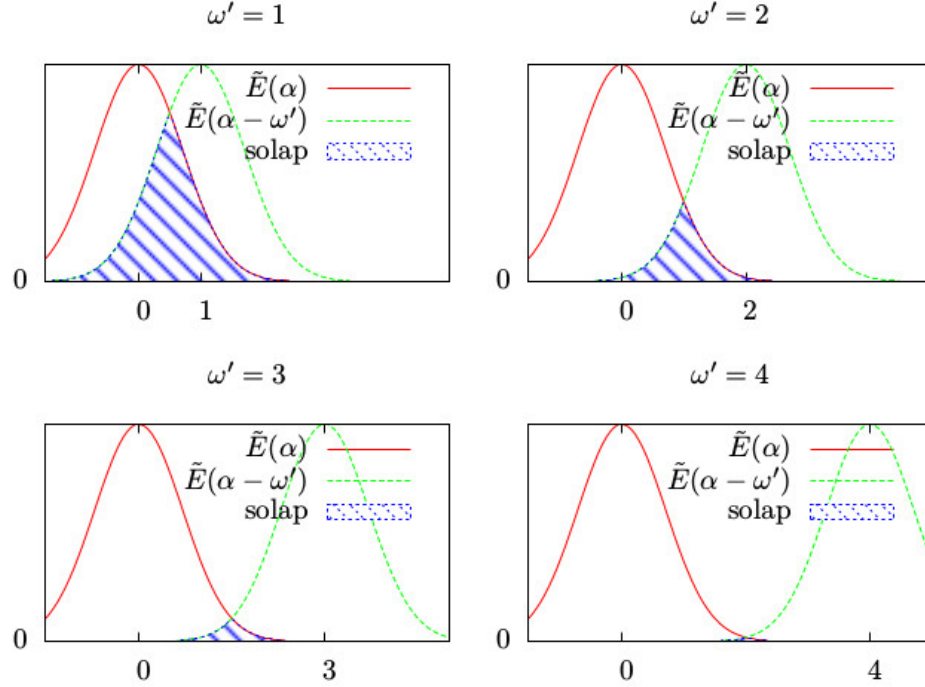


Figura 4.1: Paquetes gaussianos de campo eléctrico y solapamiento a distintas frecuencias ω' . Al igual que la intersección (región rellena denotada por “solap”), la integral del producto de estos paquetes disminuirá fuertemente con el aumento de la separación entre los mismos.

en base a los resultados del apéndice B (B.13), (B.11), se tendrá:

$$-\frac{\omega^2}{\varepsilon_0} \tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) = -\frac{3}{4} \omega^2 \chi^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\alpha) \tilde{E}^*(\alpha - \omega') \tilde{E}(\omega - \omega_0 - \omega') d\alpha d\omega' \quad (4.19)$$

En la sección 4.2, ítem 2, se ha supuesto que el ancho de banda de los pulsos enviados por la fibra, es muy corto en comparación con la frecuencia portadora de la señal. En la expresión (4.19), el producto de los campos tiene un tamaño importante para ser considerado, cuando la frecuencia ω' es comparable con el ancho del pulso, ya que más allá de ese valor el producto $\tilde{E}(\alpha) \tilde{E}^*(\alpha - \omega')$ es muy pequeño. Por un momento podemos, por simplicidad, asumir que los campos en (4.19) son reales, y consideramos una forma de paquete tipo gaussiano (aunque podrían ser otras formas), la figura 4.1, ilustra esta situación para los dos primeros campos de la relación (4.19). La integral en ω' puede realizarse en un intervalo finito $(-\Delta\omega_0, \Delta\omega_0)$, donde $\Delta\omega_0$ es el ancho del pulso, y en vista de que ese ancho es muy pequeño, se desarrolla el integrando en serie de McLaurin en la variable ω' tomando hasta primer grado el polinomio.

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta\omega_0}^{\Delta\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\alpha) \tilde{E}^*(\alpha) \tilde{E}(\omega - \omega_0) d\alpha d\omega' + \int_{-\Delta\omega_0}^{\Delta\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega' \tilde{E}(\alpha) \frac{\partial \tilde{E}^*(\alpha)}{\partial \omega'} \tilde{E}(\omega - \omega_0) d\alpha d\omega' + \\ & + \int_{-\Delta\omega_0}^{\Delta\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega' \tilde{E}(\alpha) \tilde{E}^*(\alpha) \frac{\partial \tilde{E}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega'} d\alpha d\omega' \end{aligned}$$

las dos últimas integrales son nulas, ya que el intervalo de integración en ω' es simétrico. Sustituyendo en (4.19):

$$-\frac{\omega^2}{\varepsilon_0}\tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) = -\frac{3}{4}\omega^2\chi^{(3)}2\Delta\omega_0\tilde{E}(\omega - \omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha \quad (4.20)$$

Sustituyendo ahora las transformadas de Fourier (4.16), (4.17), (4.18), (4.20) en la ecuación (4.15), se tiene la ecuación de propagación en el dominio de la frecuencia

$$\nabla^2\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \chi^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4}\chi^{(3)}2\Delta\omega_0\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha\right)\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = 0 \quad (4.21)$$

Los cambios no lineales en el índice de refracción son menores a 10^{-6} en la práctica. Experimentalmente se observa que a $1550nm$ la atenuación es mínima y el valor de $\alpha_0 c/2\omega$ es 10^{-11} veces más pequeño que el índice de refracción usual n_0 . Luego, tanto los efectos no lineales como la atenuación, se pueden tratar como perturbaciones al índice de refracción n_0 . Escribamos nuevamente la ecuación (4.21), definiendo algunos parámetros:

$$\nabla^2\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) + \frac{\omega^2}{c^2}\eta^2(\omega)\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = 0 \quad (4.22)$$

donde $\eta(\omega)$ será el índice de refracción complejo, ya que las susceptibilidades son en general complejas

$$\begin{aligned} \eta^2(\omega) &= 1 + \chi^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4}\chi^{(3)}(\omega)2\Delta\omega_0\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha \\ &= 1 + \Re[\chi^{(1)}] + \frac{3}{4}\Re[\chi^{(3)}]2\Delta\omega_0\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha + \\ &\quad + i\left(\Im[\chi^{(1)}] + \frac{3}{4}\Im[\chi^{(3)}]2\Delta\omega_0\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si asumimos ahora que:

$$n_0^2 = 1 + \Re[\chi^{(1)}] \quad \text{es el índice de refracción usual} \quad (4.24)$$

$$\alpha_0 = \frac{\omega}{cn_0}\Im[\chi^{(1)}] \quad \text{es la constante de atenuación usual} \quad (4.25)$$

$$n_2 = \frac{3}{4n_0}\Delta\omega_0\Re[\chi^{(3)}] \quad \text{es el índice de refracción no lineal} \quad (4.26)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2}\frac{\omega\Delta\omega_0}{cn_0}\Im[\chi^{(3)}] \quad \text{es la constante de atenuación no lineal} \quad (4.27)$$

y además

$$\tilde{n} = n_0 + n_2\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha \quad (4.28)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha_0 + \alpha_2\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{E}(\alpha)|^2d\alpha \quad (4.29)$$

Entonces el índice de refracción, se puede escribir de la manera siguiente

$$\eta^2(\omega) = \left(\tilde{n} + i \frac{\tilde{\alpha}c}{2\omega} \right)^2 \quad (4.30)$$

Siempre y cuando se tenga en cuenta, que experimentalmente n_2, α_0, α_2 son muy pequeños y cualquier término cuadrático en ellos es despreciable², incluso α_2 es tan pequeño que suele ignorarse en problemas de propagación (este será el caso, ya que además lo habíamos asumido en la sección 4.2, ítem 4). Con estas consideraciones:

$$\begin{aligned} \eta^2(\omega) &= \left(n_0 + n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + i \frac{c}{2\omega} \alpha_0 \right)^2 \\ &= (n_0 + \Delta n)^2 \\ &\simeq n_0^2 + 2n_0 \Delta n \end{aligned} \quad (4.31)$$

en donde

$$\Delta n = n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + i \frac{\alpha_0}{2k_0} \quad (4.32)$$

La ecuación de Helmholtz está lista ahora para ser resuelta al sustituir (4.31) en (4.22)

$$\left[\nabla^2 \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) + k_0^2 (n_0^2 + 2n_0 \Delta n) \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = 0 \right] \quad (4.33)$$

El término con Δn se considera como la perturbación a la ecuación de Helmholtz.

Un tratamiento similar al anterior se puede llevar a cabo para encontrar la ecuación para el vector $\mathbf{H}$. Suponiendo un campo de la forma

$$\mathbf{H}(\vec{R}, t) = \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

la ecuación de onda será:

$$\left[\nabla^2 \tilde{H}(\vec{R}, \omega - \omega_0) + k_0^2 (n_0^2 + 2n_0 \Delta n) \tilde{H}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = 0 \right] \quad (4.34)$$

La resolución de estas ecuaciones será el tema principal de los dos siguientes capítulos. En el capítulo 5, se resolverá el caso lineal, en donde además se considera el carácter vectorial general de los campos para poder estudiar los modos de propagación. No será sino hasta el capítulo 6, que se retomen las ecuaciones (4.33) y (4.34) con todas las consideraciones que hemos hecho para conseguir finalmente una solución para la propagación dentro de una fibra óptica monomodo.

²Ver apéndice C, donde se hace el cálculo detalladamente

Capítulo 5

Ecuación de propagación en fibra óptica no lineal: Modos

En el capítulo anterior se dedujo la ecuación de movimiento para el campo eléctrico y el magnético dentro de la fibra óptica en el dominio de las frecuencias para pulsos cortos. Obtener una solución a aquellas ecuaciones, es posible aplicando teoría de perturbaciones, donde Δn , ecuación (4.32), representa la perturbación a la ecuación diferencial. Pero además, para que dicha solución sea única, se deben imponer condiciones de frontera, las ecuaciones de Maxwell acoplan y vinculan a los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$, sobre ambos, deben estar impuestas aquellas condiciones de borde. Este capítulo estará dedicado a tratar el problema lineal (no perturbado) para hallar una solución con la imposición de las condiciones antes mencionadas y encontrar los autovalores que corresponden a los modos soportados por la fibra óptica.

5.1. Solución a las ecuaciones de Maxwell en fibra óptica lineal

Por ahora olvidaremos que la fibra óptica con la que se trabajará es monomodo y que los campos, como supusimos en el capítulo anterior, solo tienen componentes transversales a la dirección de propagación. Lo que se hizo en el capítulo anterior fue una muestra de lo que es el problema. Además, suponemos que la susceptibilidad eléctrica de primer orden es real, de manera que el índice de refracción sea n_0 . Las ecuaciones para los campos, en el dominio de la frecuencia serán las siguientes

$$\boxed{\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\vec{R}, \omega) + k_0^2 n_0^2 \tilde{\mathbf{E}}(\vec{R}, \omega) = 0} \quad (5.1)$$

$$\boxed{\nabla^2 \tilde{\mathbf{H}}(\vec{R}, \omega) + k_0^2 n_0^2 \tilde{\mathbf{H}}(\vec{R}, \omega) = 0} \quad (5.2)$$

Se tienen dos campos vectoriales, cada uno con sus respectivas ecuaciones de movimiento, lo cual implica que existen seis incógnitas, correspondientes a las tres componentes

espaciales de cada campo vectorial. Existen cuatro ecuaciones de Maxwell que los vinculan y por lo tanto, solo dos componentes de los campos son independientes. Se tomará ese conjunto a ser $\mathbb{H}_z$ y $\mathbb{E}_z$. Entonces, se empezará por resolver las ecuaciones (5.1) y (5.2) solo para la componente z . Si Ψ es cualquiera, $\mathbb{H}_z$ o $\mathbb{E}_z$, se tendrá:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{R}, \omega) + k_0^2 n_0^2(\omega) \Psi(\vec{R}, \omega) = 0 \quad (5.3)$$

Por separación de variables, se propone la siguiente solución

$$\Psi(\vec{R}, \omega) = N(\omega) R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) = \Psi(\rho, \phi, z, \omega) \quad (5.4)$$

lo cual lleva al sustituir y reordenar a:

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \rho^2 k_0^2 n_0^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2$$

de lo cuál se sigue que

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

Con la condición de frontera de función univaluada $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, la solución será

$$\boxed{\Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{Z}} \quad (5.5)$$

Ahora al separar la parte de la ecuación dependiente de z de la parte dependiente de ρ , aparece una constante, la cual se definirá como γ^2 ,

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k_0^2 n_0^2 - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 \quad (5.6)$$

donde γ en general es complejo, se puede definir como $\gamma \equiv \alpha' + i\beta$ y como se espera que la solución a la ecuación sea una onda oscilante, el parámetro β debe representar una constante de fase, llamada constante de propagación. Mientras que α' es proporcional al factor de atenuación α y no se incluirá por el momento, ya que la misma, como ya se mencionó, se tratará como una perturbación. Por ahora $\gamma^2 = -\beta^2$.

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_0^2 n_0^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (5.7)$$

Suponiendo que el radio del núcleo de la fibra es a , se asume que el comportamiento en la coordenada ρ , de la onda que se propaga dentro de la fibra debe ser oscilatorio si $\rho < a$, mientras que si $\rho > a$ debe decaer exponencialmente. Esto sugiere que, la ecuación anterior se convierta en una ecuación de Bessel si $\rho < a$ y se convierta en una ecuación de Bessel modificada si $\rho > a$. Como el índice de refracción del núcleo es distinto al del revestimiento, lo ya mencionado, se puede cumplir.

$$\begin{cases} k_0^2 n_{0n}^2 - \beta^2 > 0 & \text{si } \rho < a & n_{0n}: \text{índice del núcleo} \\ k_0^2 n_{0r}^2 - \beta^2 < 0 & \text{si } \rho > a & n_{0r}: \text{índice del revestimiento} \end{cases}$$

Se debe insistir, en que este hecho se ha impuesto para que la propagación de la onda sea la que se espera. Y se puede comprobar que es consistente con la condición fundamental para que pueda haber reflexión total interna dentro de la fibra, la cual es: $n_{0r}^2 < \frac{\beta^2}{k_0^2} < n_{0n}^2$ (el índice de refracción en el núcleo debe ser mayor al índice en el revestimiento). Se define ahora, el parámetro h , de manera que:

$$h^2 = h_1^2 = k_0^2 n_{0n}^2 - \beta^2 \quad \text{si } \rho < a \quad (5.8)$$

$$h^2 = \tilde{h}_2^2 = k_0^2 n_{0r}^2 - \beta^2 \quad \text{si } \rho > a \quad (5.9)$$

a su vez se define h_2

$$\tilde{h}_2 = ih_2 \quad (5.10)$$

Se tiene entonces, que si $\rho < a$:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(h_1^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

es una ecuación de Bessel, cuya solución es

$$R(\rho) = AJ_m(h_1\rho) + CN_m(h_1\rho)$$

que debe ser una solución finita en el origen, condición necesaria y suficiente para que $C = 0$. Luego,

$$\boxed{R(\rho) = AJ_m(h_1\rho) \quad \text{con } \rho < a} \quad (5.11)$$

Y si $\rho > a$:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left(h_2^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

es una ecuación de Bessel modificada, cuya solución es

$$R(\rho) = BK_m(h_2\rho) + DI_m(h_2\rho)$$

que debe hacerse cero en el infinito, condición necesaria y suficiente para que $D = 0$. Luego,

$$\boxed{R(\rho) = BK_m(h_2\rho) \quad \text{con } \rho > a} \quad (5.12)$$

En cuanto a la parte en z , se tiene,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0$$

cuya solución es inmediata,

$$Z(z) = C_1 e^{i\beta z} + C_2 e^{-i\beta z}$$

el signo en las exponenciales complejas está asociado con una dirección de propagación en el eje z . Entonces escogemos $C_2 = 0$ y dejamos que la constante C_1 sea absorbida por la constante de la parte en ρ . La solución es entonces,

$$\boxed{Z(z) = e^{i\beta z}} \quad (5.13)$$

Hasta ahora, se puede concluir que la solución a las componentes z de los campos eléctrico y magnético son las siguientes:

si $\rho < a$:

$$\mathbb{E}_z(\vec{R}, \omega) = AN(\omega)J_m(h_1\rho)e^{im\phi}e^{i\beta z} \quad (5.14)$$

$$\mathbb{H}_z(\vec{R}, \omega) = \tilde{A}N(\omega)J_m(h_1\rho)e^{im\phi}e^{i\beta z} \quad (5.15)$$

si $\rho > a$:

$$\mathbb{E}_z(\vec{R}, \omega) = BN(\omega)J_m(h_1\rho)e^{im\phi}e^{i\beta z} \quad (5.16)$$

$$\mathbb{H}_z(\vec{R}, \omega) = \tilde{B}N(\omega)J_m(h_1\rho)e^{im\phi}e^{i\beta z} \quad (5.17)$$

Con las ecuaciones (5.14)–(5.17), se pueden hallar ahora las restantes componentes de los campos. Para ello, se usan la ley de Faraday y la ley de Ampere-Maxwell, que en el dominio de la frecuencia se escriben como:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\vec{R}, \omega) = i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}(\vec{R}, \omega) \quad (5.18)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\vec{R}, \omega) = i\omega\varepsilon_0n_0^2\tilde{\mathbf{E}}(\vec{R}, \omega) \quad (5.19)$$

además, los campos tienen tres componentes y en coordenadas cilíndricas se escriben como

$$\tilde{\mathbf{E}}(\vec{R}, \omega) = \mathbb{E}_\rho\hat{\rho} + \mathbb{E}_\phi\hat{\phi} + \mathbb{E}_z\hat{z}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\vec{R}, \omega) = \mathbb{H}_\rho\hat{\rho} + \mathbb{H}_\phi\hat{\phi} + \mathbb{H}_z\hat{z}$$

las ecuaciones vectoriales anteriores llevan a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbb{E}_z}{\partial\phi} - \frac{\partial\mathbb{E}_\phi}{\partial z} = \mu_0i\omega\mathbb{H}_\rho \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial\mathbb{E}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\mathbb{E}_z}{\partial\rho} = \mu_0i\omega\mathbb{H}_\phi \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\mathbb{E}_\phi) - \frac{\partial\mathbb{E}_\rho}{\partial\phi}\right) = \mu_0i\omega\mathbb{H}_z \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbb{H}_z}{\partial\phi} - \frac{\partial\mathbb{H}_\phi}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0n_0^2\mathbb{E}_\rho \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\mathbb{H}_z}{\partial\rho} = -i\omega\varepsilon_0n_0^2\mathbb{E}_\phi \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\mathbb{H}_\phi) - \frac{\partial\mathbb{H}_\rho}{\partial\phi}\right) = -i\omega\varepsilon_0n_0^2\mathbb{E}_z \quad (5.25)$$

El procedimiento comienza entonces, despejando $\mathbb{E}_\phi$ de la ecuación (5.24), se deriva respecto a z y se sustituye en (5.20), obteniendo

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbb{E}_z}{\partial\phi} - \frac{i}{\omega\varepsilon_0n_0^2}\left(\frac{\partial^2\mathbb{H}_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\mathbb{H}_z}{\partial z\partial\rho}\right) = \mu_0i\omega\mathbb{H}_\rho \quad (5.26)$$

por simplicidad se retomará la notación $\gamma = i\beta$, así como $h^2 = k_0^2 n_0^2 - \beta^2$. Además se supondrá que la dependencia en z de $\mathbb{H}_\rho$ es igual a la de $\mathbb{H}_z$, lo cual implica,

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_\rho}{\partial z^2} = \gamma^2 \mathbb{H}_\rho$$

al sustituir esta expresión en (5.26), se puede despejar $\mathbb{H}_\rho$,

$$\mathbb{H}_\rho = \frac{1}{h^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathbb{H}_z}{\partial \rho} - \frac{i\varepsilon_0 \omega n_0^2}{\rho} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial \phi} \right) \quad (5.27)$$

Ahora se realiza un procedimiento análogo, pero esta vez se despeja $\mathbb{H}_\phi$ de la ecuación (5.21), se deriva respecto a z y se sustituye en (5.23). Como en el caso anterior se asume la dependencia en z de $\mathbb{E}_\rho$ igual a la de $\mathbb{E}_z$, consiguiendo esta vez,

$$\mathbb{E}_\rho = \frac{1}{h^2} \left(\frac{i\mu_0 \omega}{\rho} \frac{\partial \mathbb{H}_z}{\partial \phi} + \gamma \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial \rho} \right) \quad (5.28)$$

Se puede hallar ahora sin problema las componentes restantes $\mathbb{H}_\phi$ y $\mathbb{E}_\phi$, por sustitución directa,

$$\mathbb{H}_\phi = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \mathbb{H}_z}{\partial \phi} + i\omega \varepsilon_0 n_0^2 \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial \rho} \right) \quad (5.29)$$

$$\mathbb{E}_\phi = \frac{1}{h^2} \left(-i\mu_0 \omega \frac{\partial \mathbb{H}_z}{\partial \rho} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \mathbb{E}_z}{\partial \phi} \right) \quad (5.30)$$

5.2. Condiciones de frontera y ecuación de autovalores

A cualquier frecuencia ω la fibra óptica, puede soportar un número finito de modos guiados cuya distribución espacial $\mathbf{E}(\vec{R}, \omega)$ es una solución de la ecuación de ondas y satisface todas las condiciones de contorno apropiadas. Adicionalmente, la fibra soporta un continuo de modos de radiación no guiados.

Se empezó calculando la componente z de los campos, componente que está en la misma dirección de propagación de la onda¹. La onda que se propaga en la fibra, puede poseer cualquier polarización, la cual puede ser descrita por superposición de ondas que tienen sus vectores en dos planos mutuamente perpendiculares (denotados como polarización s y p , ver figura 5.1). Las ondas transversales magnéticas (TM), las cuales tienen el vector de campo eléctrico con polarización p , están caracterizadas por tener intensidad de campo eléctrico $\mathbb{E}_z$ distinto de cero, mientras que la componente de campo magnético $\mathbb{H}_z$ es cero. Por el contrario, en el caso de ondas transversales eléctricas (TE), el vector de campo eléctrico posee polarización s , la intensidad de campo $\mathbb{E}_z$ es cero, mientras que la

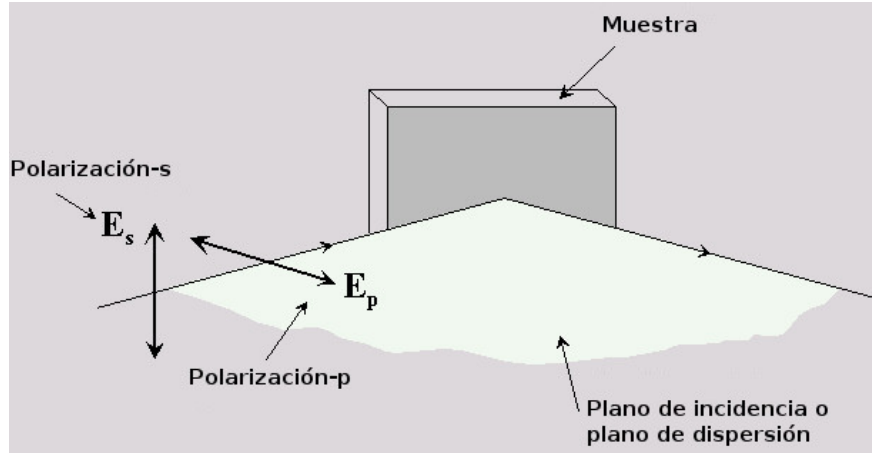


Figura 5.1: En esta convención, la polarización p está definida por el plano de incidencia, formado por la dirección de propagación y un vector normal a la superficie de reflexión; mientras que la polarización s está definida por un vector normal al plano de incidencia.

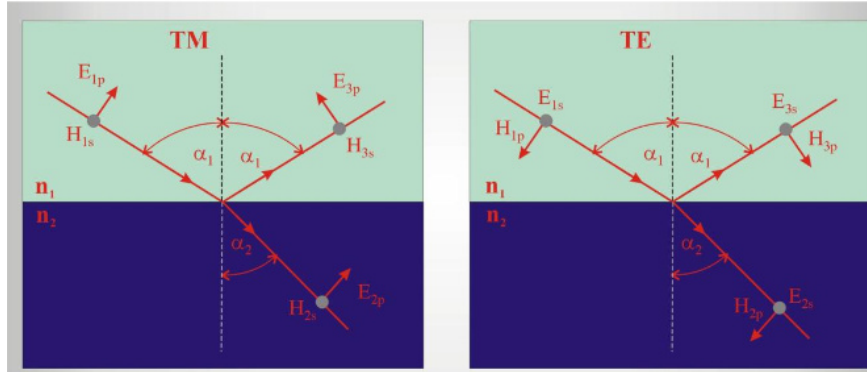


Figura 5.2: Modos TM y TE tocando la interfaz entre los medios de índices de refracción n_1 y n_2 .

intensidad $\mathbb{H}_z$ es distinta de cero, ver figura 5.2. Existen también modos con ambas intensidades $\mathbb{E}_z$ y $\mathbb{H}_z$ distintas de cero, a tales modos se les denomina híbridos HE y EH. En el caso de interés, los únicos rayos con modos (TE) o (TM) que viajan por la fibra, son los meridionales. Así, en general, se tendrán modos EH y HE viajando por la misma. Dicho esto, se sobreentiende ahora, que los campos tendrán sus componentes z distintas de cero y ahora se procederá a hallar la forma explícita de los mismos, para lo cual, es suficiente tomar las ecuaciones (5.28), (5.30), (5.27) y (5.29) y sustituir en ellas los campos que ya se habían encontrado en z , tanto para el núcleo como para el revestimiento de la fibra. Al hacer esto, quedan las siguientes expresiones para todas las componentes del campo electromagnético:

$$\text{si } \rho < a$$

¹El hecho de que haya componente de los campos en la misma dirección del eje de la fibra, no implica que la onda deje de ser transversal.

$$\mathbb{H}_z = \tilde{A}J_m(h_1\rho)e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.31)$$

$$\mathbb{E}_z = AJ_m(h_1\rho)e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.32)$$

$$\mathbb{H}_\phi = \frac{i}{h_1^2} \left(\frac{\gamma m}{\rho} \tilde{A}J_m(h_1\rho) + \omega \varepsilon_0 n_{0n}^2 AJ'_m(h_1\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.33)$$

$$\mathbb{E}_\phi = \frac{i}{h_1^2} \left(\frac{\gamma m}{\rho} AJ_m(h_1\rho) - \omega \mu_0 \tilde{A}J'_m(h_1\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.34)$$

$$\mathbb{H}_\rho = \frac{1}{h_1^2} \left(\gamma \tilde{A}J'_m(h_1\rho) + m \frac{\omega \varepsilon_0 n_{0n}^2}{\rho} AJ_m(h_1\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.35)$$

$$\mathbb{E}_\rho = \frac{1}{h_1^2} \left(\gamma AJ'_m(h_1\rho) - m \frac{\omega \mu_0}{\rho} \tilde{A}J_m(h_1\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.36)$$

si $\rho > a$

$$\mathbb{H}_z = \tilde{B}K_m(h_2\rho)e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.37)$$

$$\mathbb{E}_z = BK_m(h_2\rho)e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.38)$$

$$\mathbb{H}_\phi = \frac{i}{\tilde{h}_2^2} \left(\frac{\gamma m}{\rho} \tilde{B}K_m(h_2\rho) + \omega \varepsilon_0 n_{0r}^2 BK'_m(h_2\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.39)$$

$$\mathbb{E}_\phi = \frac{i}{\tilde{h}_2^2} \left(\frac{\gamma m}{\rho} BK_m(h_2\rho) - \omega \mu_0 \tilde{B}K'_m(h_2\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.40)$$

$$\mathbb{H}_\rho = \frac{1}{\tilde{h}_2^2} \left(\gamma \tilde{B}K'_m(h_2\rho) + m \frac{\omega \varepsilon_0 n_{0r}^2}{\rho} BK_m(h_2\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.41)$$

$$\mathbb{E}_\rho = \frac{1}{\tilde{h}_2^2} \left(\gamma BK'_m(h_2\rho) - m \frac{\omega \mu_0}{\rho} \tilde{B}K_m(h_2\rho) \right) e^{im\phi}e^{\gamma z} \quad (5.42)$$

En donde la constante $N(\omega)$, por comodidad ha sido absorbida por las demás constantes. La condición de frontera de que las componentes tangenciales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ sean continuas a través de la interfaz núcleo-revestimiento, requiere que $\mathbb{E}_z$, $\mathbb{H}_z$, $\mathbb{E}_\phi$ y $\mathbb{H}_\phi$, sean las mismas cuando ρ se aproxima desde adentro o desde afuera a $\rho = a$. La igualdad de aquellas componentes en $\rho = a$ lleva a la siguiente ecuación de autovalores, también conocida como relación de dispersión, cuyas soluciones determinan las constantes de propagación β para los modos de la fibra

$$\left[\frac{J'_m(h_1a)}{h_1^2 J_m(h_1a)} + \frac{K'_m(h_2a)}{h_2^2 K_m(h_2a)} \right] \left[\frac{J'_m(h_1a)}{h_1^2 J_m(h_1a)} + \frac{n_{0r}^2}{n_{0n}^2} \frac{K'_m(h_2a)}{h_2^2 K_m(h_2a)} \right] = \left(\frac{2m\beta k_0 n_{0n} \Delta}{ah_1^2 h_2^2} \right)^2 \quad (5.43)$$

donde la prima denota, derivación respecto de ρ , también se ha hecho uso de las importantes relaciones:

$$h_1^2 + h_2^2 = k_0^2(n_{0n}^2 - n_{0r}^2) = 2k_0^2 n_{0n}^2 \Delta \quad (5.44)$$

$$\Delta = \frac{(n_{0n}^2 - n_{0r}^2)}{2n_{0n}^2} \quad (5.45)$$

Se puede definir un parámetro respecto al cuál se estudie la variación de la constante de propagación β , este parámetro es la frecuencia normalizada V

$$V = \sqrt{(ah_1)^2 + (ah_2)^2} = k_0 a \sqrt{(n_{0n}^2 - n_{0r}^2)} = k_0 a n_{0n} \sqrt{2\Delta} \quad (5.46)$$

El procedimiento suele consistir en fijar un valor de m , sustituir en la ecuación de autovalores h_2 en términos de la frecuencia normalizada y h_1 , sustituir en la ecuación de autovalores a β en términos de h_1 , de manera que se pueda obtener h_1 , luego a h_2 y finalmente a β . Como la fibra óptica circular está acotada en un plano transversal a la misma, se necesitan dos índices para especificar los modos; a las diferentes soluciones a (5.43) se les asigna un segundo índice entero l . Existen cuatro tipos de modos, y se muestran en el cuadro 5.1.

El número de modos soportado por una fibra específica en una longitud de onda dada,

Tipo	Nombre	Características
Híbridos	HE_{ml}	$E_z \neq 0 ; H_z \neq 0 ; H_z > E_z $
	EH_{ml}	$E_z \neq 0 ; H_z \neq 0 ; E_z > H_z $
Transversales	TE_{0l}	$E_z = 0 ; H_z \neq 0$
	TM_{0l}	$E_z \neq 0 ; H_z \neq 0$

Cuadro 5.1: Generalidades sobre los tipos de modos que se propagan en fibras ópticas, incluso es válida la clasificación para otras guías de ondas

depende de sus parámetros de diseño, es decir, el radio del núcleo a y la diferencia entre los índices de refracción entre el núcleo y el revestimiento. Un importante parámetro para cada modo, es su frecuencia de corte. Esta determina a partir de que valor de la frecuencia normalizada el modo es soportado por la fibra; por debajo de dicho valor, el modo no se propaga. Esta frecuencia está determinada por la condición $h_2 = 0$. El valor de h_1 cuando $h_2 = 0$ para un modo dado, determina la frecuencia de corte h_{1c} ; de la ecuación (5.46), es útil definir V_c mediante la relación:

$$V_c = h_{1c}a = k_0 a \sqrt{(n_{0n}^2 - n_{0r}^2)} \quad (5.47)$$

En la figura 5.3, se muestran gráficamente las soluciones numéricas a la ecuación de autovalores (5.43). A continuación, una lista de las características más importantes del gráfico:

- En el eje de las ordenadas (del lado izquierdo), se tienen los valores de β , acotados entre la constante de propagación del revestimiento $k_0 n_2$ (n_2 equivale al índice n_{0r}) y la constante de propagación del núcleo $k_0 n_1$ (n_1 equivale al índice n_{0n}). Es decir, el comportamiento del modo que se este estudiando es un intermedio entre el que tendría si el material fuera infinito con índice de refracción n_{0n} y el que tendría si el

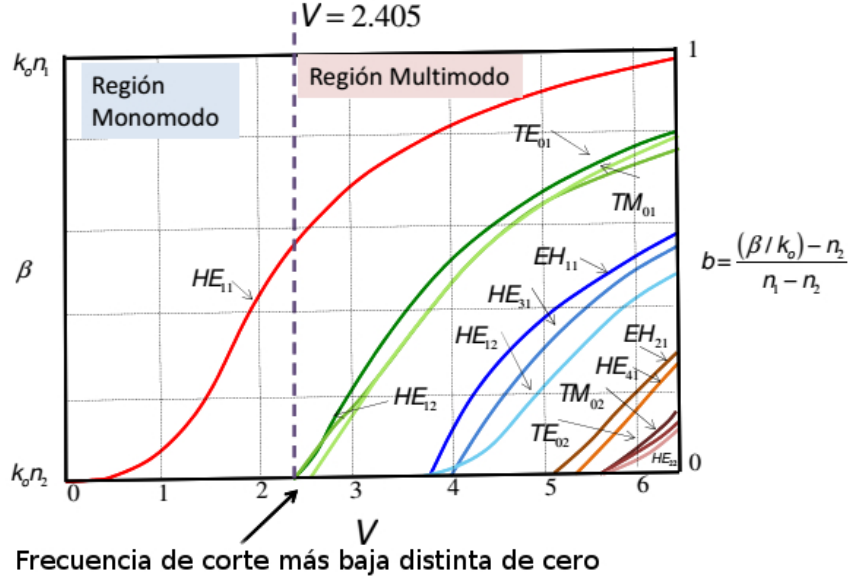


Figura 5.3: Curvas de soluciones exactas de la ecuación de autovalores (5.43). Se distinguen 2 regiones separadas por $V \simeq 2,405$, la región monomodo a la izquierda y la región multimodo a la derecha.

material fuera infinito con índice de refracción n_{0r} . En vista de eso, cuando el valor de β para determinado modo se acerca al límite inferior, el modo se comporta como si solo viera material de la cubierta, se puede demostrar que una parte significativa de la energía de ese modo viaja en la cubierta y se dice que *el modo está débilmente ligado*. Por el contrario, si el valor de β se acerca al límite superior, el modo se comporta como si solo viera material del núcleo y se puede demostrar que prácticamente toda su energía viaja en el núcleo y se dice que *el modo está fuertemente ligado*.

- Para cada modo como dijimos anteriormente hay una frecuencia de corte. A medida que la curva se acerca al límite inferior el modo va cada vez menos confinado, entregando su energía a la cubierta, hasta que llega el punto donde deja de ser un modo guiado. El modo HE_{11} es el único con frecuencia de corte igual a 0, este modo siempre se propaga y por esta razón es llamado modo fundamental.
- Por debajo de $V \simeq 2,405$ el único modo que se propaga es el HE_{11} y por lo tanto la fibra es monomodo. Por encima de este valor la fibra será multimodo y puede a su vez ser de pocos modos o de muchos modos cuando $V \gg 2,405$. En la práctica, las fibras están diseñadas para que V sea cercano a V_c , ya que, un valor de V muy bajo implica pérdidas innecesarias.

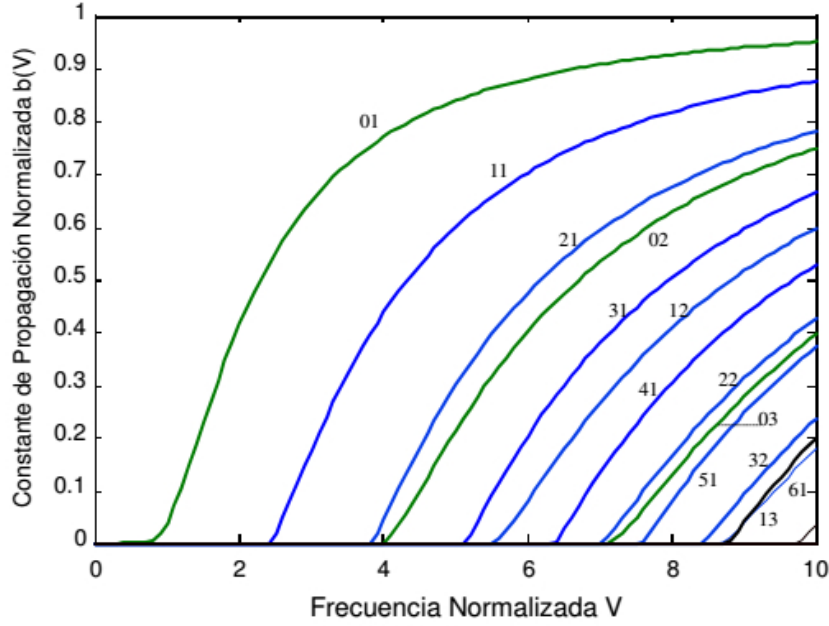


Figura 5.4: Curvas solución de la ecuación de autovalores con la aproximación de guiado débil. Cada curva tiene un par de índices correspondiente a cada modo LP

5.3. Aproximación de guiado débil. Modos LP

En la práctica suele suceder que los índices de refracción del núcleo y el revestimiento son muy parecidos. El valor de Δ , definido en la ecuación (5.45), está en el rango $0,1\% < \Delta < 1\%$ y aplica la llamada aproximación de guiado débil

$$n_{0n} \simeq n_{0r}$$

$$\Delta \simeq \frac{n_{0n} - n_{0r}}{n_{0n}}$$

Lo que sucede en este caso es que varios modos exactos tienen los mismos autovalores, es decir, están degenerados. Luego, lo que se propaga son combinaciones lineales de esos modos degenerados y una de las consecuencias es que no se conservan muchas de sus componentes vectoriales. Solo son relevantes una componente de $\mathbf{E}$ y una de $\mathbf{H}$ mutuamente ortogonales. Se puede hallar la forma de la ecuación de autovalores usando la aproximación de Δ pequeño en la ecuación (5.43) y usando algunas propiedades de las funciones de Bessel. Obteniéndose constantes de propagación muy parecidas mostradas en la figura 5.4. Así como en el caso de la ecuación exacta de autovalores, usando la aproximación de guiado débil surge un segundo índice para la designación de los modos a parte del índice azimutal (m), los modos se designan LP_{mp} y los modos exactos que lo conforman se muestran en el cuadro 5.2. En dicho cuadro se muestra el factor de degeneración de cada modo. Cuando $m = 0$ la degeneración ocurre por las formas de polarización de campo eléctrico que puede tener el modo, siendo x o y . Cuando $m \neq 0$ el factor de degeneración

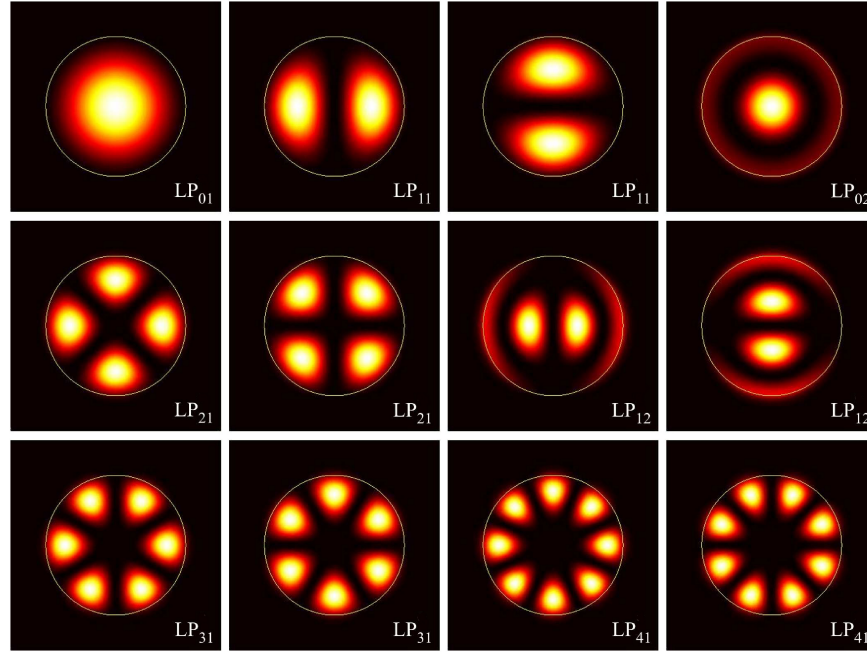


Figura 5.5: Distribución de intensidades para algunos modos LP.

cambia por los dos posibles valores que a su vez puede tener m , ya que: $m = \pm|m|$. En la

Designación	Modos que lo componen	Factor de Degeneración
LP ₀₁	HE ₁₁ × 2	2
LP ₁₁	TE ₀₁ ; TM ₀₁ ; HE ₂₁ × 2	4
LP ₂₁	EH ₁₁ × 2 ; HE ₃₁ × 2	4
LP ₀₂	HE ₁₂ × 2	2
LP ₃₁	EH ₂₁ × 2 ; HE ₄₁ × 2	4
LP ₁₂	TE ₀₂ ; TM ₀₂ ; HE ₂₂ × 2	4

Cuadro 5.2: Modos linealmente polarizados y sus equivalentes modos exactos

figura 5.5 se muestran las distribuciones de intensidades para algunos de los modos LP. Los modos con $m \neq 0$ tienen una degeneración 2 que se manifiesta como una rotación del patrón de intensidades.

5.4. Características del modo fundamental

La distribución de campo $\mathbf{E}(\vec{R}, t)$ correspondiente al modo HE₁₁ tiene tres componentes distintas de cero $\mathbb{E}_\rho$, $\mathbb{E}_\phi$ y $\mathbb{E}_z$ o en coordenadas cartesianas $\mathbb{E}_x$, $\mathbb{E}_y$ y $\mathbb{E}_z$. Entre ellas, $\mathbb{E}_x$ o $\mathbb{E}_y$ domina, por lo tanto, en un buen grado de aproximación, el modo fundamental

de la fibra está linealmente polarizado en la dirección x o y , dependiendo de si $\mathbb{E}_x$ o $\mathbb{E}_y$ domina. Sin embargo, incluso una fibra monomodo no es estrictamente monomodo ya que es capaz de soportar dos modos de polarizaciones ortogonales, las cuales son soluciones aproximadas de la ecuación (5.1). El modo fundamental HE_{11} corresponde al LP_{01} en esta notación. Los dos modos polarizados ortogonalmente de una fibra monomodo están degenerados, bajo condiciones ideales. En la práctica, irregularidades tales como variaciones aleatorias en la forma y tamaño del núcleo a lo largo de la fibra, rompe bruscamente esta degeneración. Las fibras que preservan su polarización, pueden mantener la polarización lineal si la luz es inyectada con esta condición inicial a lo largo de uno de los ejes principales de la fibra.

Asumiendo que la luz incidente está polarizada a lo largo de un eje principal de la fibra (escogido de manera que coincida con el eje x), el campo eléctrico para el modo fundamental de la fibra HE_{11} está dado aproximadamente por:

$$\mathbf{E}(\vec{R}, \omega) = \hat{x} A(\omega) R(\rho) e^{i\beta(\omega)z}$$

donde $A(\omega)$ es una constante de normalización. La distribución transversal en el núcleo es,

$$R(\rho) = J_0(h_1 \rho) \quad (5.48)$$

donde $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ es la distancia radial. Con frecuencia, suele aproximarse la función de Bessel $J_0(\rho)$ mediante una gaussiana (ver [4]), de manera que

$$R(\rho) \simeq e^{-\rho^2/w^2} \quad (5.49)$$

donde w es un parámetro para fijar la curva a la real. Fuera del núcleo, el campo decae exponencialmente como:

$$R(\rho) = \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} J_0(h_1 a) e^{-h_2(\rho-a)}$$

donde a $K_m(h_2 \rho)$ se le aproximó con el término líder de su expansión asintótica y un factor constante fué añadido para asegurar la igualdad de $F(\rho)$ en $\rho = a$. La constante de propagación $\beta(\omega)$ se obtiene al resolver la ecuación de autovalores (5.43). Su dependencia en la frecuencia resulta, no solo de la dependencia con la frecuencia de n_{0n} y n_{0r} sino también de la dependencia en la frecuencia de h_1 . La primera, se refiere a la dispersión del material, mientras que la última es llamada dispersión de guía de ondas. Generalmente, la dispersión del material domina a menos que la longitud de onda esté cercana a la longitud de onda de dispersión cero.

Capítulo 6

Ecuación de propagación en fibra óptica no lineal: Solución

6.1. Perturbando la ecuación de Helmholtz

Recordando el capítulo 4, buscamos soluciones a las ecuaciones no lineales en el campo eléctrico y en el campo magnético (4.33) y (4.34). Se aplicará la teoría de perturbaciones donde el término con Δn representa dicha perturbación. Se plantea el problema de la siguiente forma, para el campo eléctrico

$$\nabla^2 \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) + \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 2n_0 \Delta n) \tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = 0 \quad (6.1)$$

si se quiere obtener una solución por separación de variables, se puede proponer la siguiente,

$$\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = \tilde{E}_0(\omega - \omega_0) R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) \quad (6.2)$$

al sustituir en la ecuación diferencial y recordando la forma del índice de refracción obtenida en el capítulo 4

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(n_0^2 + 2n_0 n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}_0(\alpha)|^2 |R|^2 |\Phi|^2 |Z|^2 d\alpha + i \frac{\alpha_0}{2k_0} \right) = 0 \quad (6.3)$$

de esta manera, solo será separable la ecuación si se hace $|\Phi|^2 = 1$ y $|Z|^2 = 1$, que no es algo descabellado ya que en el caso lineal esto se cumple. Bajo esa premisa

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(n_0^2 + 2n_0 n_2 |R|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}_0(\alpha)|^2 d\alpha + i \frac{\alpha_0}{2k_0} \right) = 0 \quad (6.4)$$

la ecuación es separable, llevando a las soluciones en ϕ y z

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad (6.5)$$

$$Z(z) = e^{i\tilde{\beta}z} \quad (6.6)$$

la ecuación en ρ queda

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(k_0^2 n_0^2 + 2k_0^2 n_0 \Delta n - \tilde{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

Esta ecuación debe escribirse tanto en el núcleo de la fibra, como en la cubierta. Las expresiones solo se diferenciarán en el índice de refracción y en un signo. Bajo la aproximación de guiado debil, válida en la práctica, se hace $n_{0n} \simeq n_{0r}$. Pero para tener un poco más de exactitud, se suele trabajar con el índice de refracción efectivo de la fibra; que no es más que el valor que tendría el índice de refracción si el material fuera infinito y homogéneo

$$n_{ef}(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{k_0(\omega)} \quad (6.7)$$

Puede plantearse entonces el problema de la luz viajando en ese medio equivalente, con condiciones de frontera de finitud en el origen y nulidad en el infinito. La ecuación correspondiente será

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(k_0^2 n_{ef}^2 + 2k_0^2 n_{ef} \Delta n - \tilde{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

la cuál puede escribirse de la manera siguiente

$$\left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho} \right] + 2k_0^2 n_{ef} \Delta n \rho R = \left(\tilde{\beta}^2 - k_0^2 n_{ef}^2 \right) \rho R$$

Nótese que si se olvida de la perturbación Δn por un momento, la ecuación anterior queda escrita como un problema de Sturm-Liouville. El procedimiento usual en la literatura de óptica no lineal (por ejemplo en [4]) es el de aplicar la teoría de perturbaciones, para ello consideramos

$$\hat{B} \equiv \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho} \quad \rightarrow \quad \text{espectro no degenerado}$$

$$\hat{W} \equiv 2k_0^2 n_{ef} \Delta n \rho$$

$$\lambda \equiv \tilde{\beta}^2 - k_0^2 n_{ef}^2$$

Se puede escribir de manera simplificada

$$\hat{B}R + \hat{W}R = \lambda \rho R \quad (6.8)$$

Uno está tentado a decir que la función solución R es una autofunción del problema, pero esto no puede ser un problema de autovalores y autofunciones por la dependencia no lineal de $\hat{W}$ con el campo. Escribamos por comodidad¹

$$\begin{aligned} \Delta n &= n_2 |R(\rho)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}_0(\alpha)|^2 d\alpha + i \frac{\alpha_0}{2k_0} \\ &= n_2 |R(\rho)|^2 S_0 + i \frac{\alpha_0}{2k_0} \end{aligned}$$

¹Aquí S_0 se escoge arbitrariamente para simplificar la notación, pero no pretende ser el módulo del vector de Poynting, porque no lo es.

ahora la perturbación

$$\hat{W} = g(\beta)|R(\rho)|^2\rho + i\beta\alpha_0\rho \quad (6.9)$$

en donde se ha hecho $g(\beta) = 2k_0^2 n_{ef} n_2 S_0$. La ecuación (6.8) queda entonces

$$\hat{B}R + g(\beta)|R|^2\rho R + i\beta\alpha_0\rho R = \lambda\rho R \quad (6.10)$$

El procedimiento usual al aplicar la teoría de perturbaciones, es el de añadir un parámetro δ que sirve para hacer una transición entre el problema no perturbado y el que si lo está. Para ello

$$0 \leq \delta \leq 1$$

ahora suponemos que la ecuación (6.10) es un caso particular de la siguiente

$$\hat{B}R(\delta) + \delta g(\beta)|R(\delta)|^2\rho R(\delta) + i\delta\beta\alpha_0\rho R(\delta) = \lambda(\delta)\rho R(\delta) \quad (6.11)$$

se puede expandir en serie de potencias tanto a λ como a R ,

$$R(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} R^{(i)}\delta^i$$

$$\lambda(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{(i)}\delta^i$$

por argumentos de independencia lineal, habrá una ecuación para cada potencia de δ al sustituir en (6.11), cada una involucra términos de orden cada vez mayor que mejoran la exactitud de la solución. Aquí bastará con encontrar las correcciones de hasta primer orden y sus ecuaciones son:

$$\hat{B}R^{(0)} = \lambda^{(0)}\rho R^{(0)} \quad (6.12)$$

$$\hat{B}R^{(1)} + g(\beta)|R^{(0)}|^2\rho R^{(0)} + i\beta\alpha_0\rho R^{(0)} = \lambda^{(0)}\rho R^{(1)} + \lambda^{(1)}\rho R^{(0)} \quad (6.13)$$

la primera de ellas correspondiente al problema no perturbado y siendo un problema de Sturm-Liouville, tiene asociado el problema de autovalores y autofunciones siguiente²

$$\hat{B}R_k^{(0)} = \lambda_k^{(0)}\rho R_k^{(0)} \quad (6.14)$$

como las autofunciones generan todo el espacio, $R^{(1)}$ puede escribirse en términos de ellas

$$R^{(1)} = \sum_k b_k R_k^{(0)}$$

²Ya que, se propone como solución a (6.12), $R^{(0)} = \sum_k c_k R_k^{(0)}$, que no es más que una combinación lineal de autofunciones.

se puede sustituir en (6.13), luego multiplicar por $R_m^{(0)*}$ e integrar en todo el espacio, para así conseguir los valores de $\lambda_m^{(1)}$

$$\lambda_m^{(1)} = \frac{g(\beta) \sum_{ijl} c_i c_j^* c_l \int_0^\infty R_m^{(0)*} R_i^{(0)} R_j^{(0)*} R_l^{(0)} \rho d\rho}{c_m \int_0^\infty |R_m^{(0)}|^2 \rho d\rho} + i\beta\alpha_0 \quad (6.15)$$

el índice m indica que existe una corrección distinta para cada autovalor $\lambda_m^{(0)}$ pero de ninguna manera indica que $\lambda_m^{(1)}$ sea un autovalor. Por otro lado, no se consigue a primer orden alguna corrección para $R^{(0)}$, [4]. Para la propagación monomodo, y con la aproximación de guiado debil, sabemos que solo el modo LP_{01} se propagará en la fibra y que se puede aproximar por una gaussiana (5.49). La suma en (6.15) se hace entonces para el único modo propagado y por comodidad se hacen las constantes c iguales a 1.

$$\lambda_0^{(1)} = \frac{g(\beta) \int_0^\infty |R_0^{(0)}|^4 \rho d\rho}{\int_0^\infty |R_0^{(0)}|^2 \rho d\rho} + i\beta\alpha_0 \quad (6.16)$$

Concluido este paso, pasemos a ver la modificación en β , partiendo de la definición de λ

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \tilde{\beta}^2 - k_0^2 n_{ef}^2 = \lambda_0^{(0)} + \delta\lambda_0^{(1)} \\ &= \beta^2 - k_0^2 n_{ef}^2 + \delta\lambda_0^{(1)} \\ \Rightarrow \tilde{\beta}^2 - \beta^2 &= (\tilde{\beta} + \beta)(\tilde{\beta} - \beta) = \delta\lambda_0^{(1)} \end{aligned}$$

la diferencia $\tilde{\beta} - \beta$ debe estar dada por $\Delta\beta$ y es pequeña, luego

$$\begin{aligned} (2\beta + \Delta\beta) \Delta\beta &\simeq 2\beta\Delta\beta \\ &\simeq \delta\lambda_0^{(1)} \\ \Rightarrow \Delta\beta &\simeq \frac{\delta\lambda_0^{(1)}}{2\beta} \\ \Delta\beta &= \delta \frac{g(\beta) \int_0^\infty |R_0^{(0)}|^4 \rho d\rho}{2\beta \int_0^\infty |R_0^{(0)}|^2 \rho d\rho} + i\frac{\alpha_0}{2} \end{aligned}$$

Haciendo tender $\delta \rightarrow 1$ se recupera el tamaño original de la perturbación, además se sustituye a $g(\beta)$ para simplificar y así obtenemos la modificación de la constante de propagación β

$$\Delta\beta = \frac{k_0 n_2 S_0 \int_0^\infty |R_0^{(0)}|^4 \rho d\rho}{\int_0^\infty |R_0^{(0)}|^2 \rho d\rho} + i\frac{\alpha_0}{2} \quad (6.17)$$

6.2. Solución al problema no lineal

Sabemos que al propagarse el modo fundamental linealmente polarizado, no hay variación azimutal. La solución (6.2) es

$$\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = \tilde{E}_0(\omega - \omega_0) R_0^{(0)} e^{i\tilde{\beta}z} \quad (6.18)$$

Como vimos en la sección anterior, $\tilde{\beta} = \beta + \Delta\beta$ y en vista del carácter complejo de $\Delta\beta$ dado por $i\alpha_0/2$, no se cumple que $|Z|^2 = 1$, condición que, como vimos, debe cumplirse. Consideramos 2 maneras de arreglar el problema, la trivial sería trabajar sin atenuación, pudiéndose incluir igualmente si se modela numéricamente el sistema. La segunda manera, es asumir $|Z|^2 \simeq 1$ lo cual implica que la solución es válida mientras z no sea demasiado grande. Supongamos que el valor más bajo que puede tener $|Z|^2$ es 0,9 y que la atenuación $\alpha_{dB} = 0,18 dB/Km$, que se puede transformar a Km^{-1} usando $\alpha_{dB} = 4,343\alpha_0$, [4]. Se tiene entonces que $\alpha_0 = 0,0414 Km^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= |e^{i(\beta + \Delta\beta_{nl} + i\alpha_0/2)z}|^2 = e^{-\alpha_0 z} > 0,9 \\ &\Rightarrow z < 2,545 Km \end{aligned} \quad (6.19)$$

Es decir, mientras las distancias de propagación sean menores a $2,545 Km$ la ecuación (6.1) con el término de atenuación distinto de cero, se considera separable y su solución está dada por (6.18). La misma solución y el desarrollo que se muestra en las páginas siguientes es válido si se ignoran las pérdidas, es decir, haciendo $\alpha_0 = 0$.

Por otro lado, pueden desarrollarse en serie de Taylor tanto a β como $\Delta\beta$ entorno a la frecuencia portadora ω_0

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \\ &= \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\Delta\beta(\omega) = \Delta\beta_0 + \Delta\beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\Delta\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (6.21)$$

donde se ha hecho $\beta_n = \left. \frac{d^n\beta(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega_0}$ y $\Delta\beta_n = \left. \frac{d^n\Delta\beta(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega_0}$. Asumiendo la aproximación de campo quasi-monocromático el ancho del pulso $\Delta\omega \ll \omega_0$ y se pueden considerar efectos dispersivos solo hasta de segundo orden³

$$\beta(\omega) \simeq \beta_0 + \beta_1\Delta\omega + \frac{1}{2}\beta_2\Delta\omega^2 \quad (6.22)$$

$$\Delta\beta(\omega) \simeq \Delta\beta_0 \quad (6.23)$$

³En el caso en que $\beta_2 = 0$, que se logra a una determinada longitud de onda, se suele considerar el término de dispersión de tercer orden.

luego

$$\tilde{\beta} = \beta_0 + \beta_1 \Delta\omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta\omega^2 + \Delta\beta_0 \quad (6.24)$$

y ahora la solución (6.18) se escribirá astutamente como

$$\tilde{E}(\vec{R}, \omega - \omega_0) = \tilde{E}_0(\omega - \omega_0) e^{i(\beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2(\omega - \omega_0)^2)z} R_0^{(0)}(\rho) e^{i(\beta_0 + \Delta\beta_0)z}$$

haciendo el cambio $\gamma = \omega - \omega_0$, sustituyendo $\Delta\beta_0$ haciendo uso de (6.17) y reacomodando términos se llega a la solución para el campo eléctrico en el dominio de la frecuencia

$$\tilde{E}(\vec{R}, \gamma) = \tilde{E}_0(\gamma) e^{i[(\beta_1 + \frac{1}{2c} n_2 S_0) \gamma + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma^2]z} e^{-\rho^2/w^2} e^{-\frac{1}{2} \alpha_0 z} e^{i(\beta_0 + \frac{1}{2c} \omega_0 n_2 S_0)z} \quad (6.25)$$

Basta entonces conocer la forma del pulso en el dominio de la frecuencia en la entrada de la fibra ($z = 0$) o si se quiere, la forma de los pulsos que emite la fuente de la que se disponga para tener la descripción completa de los mismos. Se debe recordar que S_0 depende del espectro del pulso, por lo tanto de la amplitud de la señal, es decir, para cada forma de pulso hay un valor de S_0 que debe ser calculado. Apliquemos ahora la transformada de Fourier inversa para obtener el comportamiento en el dominio del tiempo

$$E(\vec{R}, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(\gamma) e^{i[(\beta_1 + \frac{1}{2c} n_2 S_0) \gamma + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma^2]z - i\gamma t} d\gamma \right) e^{-\rho^2/w^2} e^{-\frac{1}{2} \alpha_0 z} e^{i(\beta_0 + \frac{1}{2c} \omega_0 n_2 S_0)z} \quad (6.26)$$

6.3. Pulsos gaussianos

La forma de pulso más común en el campo de las comunicaciones ópticas es el gaussiano. Es más general y útil en la práctica añadirle una fase que se denomina “*Chirp*”. Supongamos que la fuente emite dichos pulsos con un ancho $\Delta\omega_0$ (este valor corresponde al ancho que tendría el mismo pulso si se omite el Chirp) y centrados en la frecuencia ω_0 , es decir,

$$\tilde{E}_0(\gamma) = A \exp \left\{ -\frac{1 + iC}{2} \left(\frac{\gamma}{\Delta\omega_0} \right)^2 \right\} \quad (6.27)$$

para sustituir en (6.26) se debe resolver la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp \left\{ -\frac{1 + iC}{2} \left(\frac{\gamma}{\Delta\omega_0} \right)^2 + i \left(\beta_1 + \frac{n_2 S_0}{2c} \right) \gamma z + i \frac{1}{2} \beta_2 \gamma^2 z - i\gamma t \right\} d\gamma$$

en donde se puede completar cuadrados para obtener otra gaussiana, fácilmente integrable,

$$I = A \sqrt{\frac{2\pi(\Delta\omega_0)^2}{1 + i(C - \beta_2(\Delta\omega_0)^2 z)}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta\omega_0)^2 \left[\left(\beta_1 + \frac{n_2 S_0}{2c} \right) z - t \right]^2}{2 [1 + i(C - \beta_2(\Delta\omega_0)^2 z)]} \right\} \quad (6.28)$$

se puede usar la notación exponencial para los complejos en los denominadores,

$$1 + i(C - \beta_2(\Delta\omega_0)^2 z) = \left[1 + (C - \beta_2(\Delta\omega_0)^2 z)^2 \right]^{1/2} \exp \{ i \operatorname{tg}^{-1} (C - \beta_2(\Delta\omega_0)^2 z) \}$$

por otro lado, ya se puede calcular S_0

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha = \frac{\sqrt{2\pi} A^2}{T_0} \quad (6.29)$$

y además, definir los siguientes parámetros

$$T_0 = \frac{1}{\Delta\omega_0} \quad (6.30)$$

$$L_D = \frac{1}{|\beta_2|(\Delta\omega_0)^2} \quad (6.31)$$

$$T(z) = T_0 \sqrt{1 + \left(C - \operatorname{sgn}(\beta_2) \frac{z}{L_D} \right)^2} \quad (6.32)$$

$$V_{gnl} = \frac{2cT_0}{2cT_0\beta_1 + n_2\sqrt{2\pi}A^2} \quad (6.33)$$

El primero de ellos es el ancho del pulso sin chirp en el dominio del tiempo. En cuanto al segundo, es una longitud referencia donde los efectos dispersivos se hacen importantes. El tercero será el nuevo ancho del pulso que ahora es dependiente de z , el chirp que se le ha impuesto al pulso gaussiano permite controlar como cambia el ancho del pulso en su recorrido por la fibra. Se pueden distinguir varios casos que se discutirán más adelante. El último parámetro es la velocidad de grupo no lineal, que depende de la amplitud del pulso. Con amplitudes mayores el pulso viaja más lentamente a través de la fibra. El máximo valor de la velocidad de grupo se obtiene cuando $n_2 = 0$, es decir, en el caso lineal, retomándose la velocidad $V_g = 1/\beta_1$.

Con estas consideraciones la integral (6.28) queda

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{T_0 T(z)}} A \exp \left\{ -\frac{(z/V_{gnl} - t)^2}{2T^2(z)} \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{tg}^{-1}(C - \operatorname{sgn}(\beta_2)z/L_D) + \right. \\ \left. + i \frac{(z/V_{gnl} - t)^2}{2T^2(z)} (C - \operatorname{sgn}(\beta_2)z/L_D) \right\} \quad (6.34)$$

Recordando ahora las ecuaciones (6.26) y (4.2) el campo eléctrico en la fibra óptica bajo todas las consideraciones hechas es finalmente

$$\mathbb{E}(\vec{R}, t) = \frac{A}{\sqrt{8\pi T_0 T(z)}} \exp \left\{ -\frac{(z/V_{gnl} - t)^2}{2T^2(z)} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_0 z \right\} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{w^2} \right\} \times \\ \exp \left\{ i\phi_1(z) + i\phi_2(z, t) + i \left[\left(\beta_0 + \frac{\omega_0 n_2 \sqrt{2\pi} A^2}{2cT_0} \right) z - \omega_0 t \right] \right\} + c.c. \quad (6.35)$$

en donde se ha hecho

$$\phi_1(z) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}(C - \operatorname{sgn}(\beta_2)z/L_D) \quad (6.36)$$

$$\phi_2(z, t) = \frac{(z/V_{\text{gnt}} - t)^2}{2T^2(z)} (C - \operatorname{sgn}(\beta_2)z/L_D) \quad (6.37)$$

En cuanto a la función $T(z)$, primero, en $z = 0$ el pulso tiene un ancho $T(0) = T_0\sqrt{1 + C^2}$ así que el parámetro de chirp no puede ser escogido tan grande puesto que la aproximación de pulsos cortos que hemos hecho no sería válida. Segundo, esta representa la desviación estándar del pulso y su dependencia con z es tal que el pulso se irá ensanchando a medida que el mismo se propaga debido a la dispersión de segundo orden gobernada por β_2 , sin embargo, con la escogencia adecuada del parámetro de chirp C se puede compensar la dispersión durante un tramo de la fibra. Es bien sabido que la dispersión de segundo orden existe en dos variedades⁴ las cuales se denominan dispersión normal, cuando $\beta_2 > 0$, y dispersión anómala cuando $\beta_2 < 0$. Ambas formas de dispersión pueden ocurrir en la banda C de la segunda ventana de transmisión y esto depende de los constituyentes de la fibra, así como de los parámetros geométricos. Así que a $\lambda = 1550\text{nm}$ se pueden considerar cinco casos (que incluyen la escogencia del parámetro de chirp):

1. Dispersión normal y parámetro de chirp negativo ($\beta_2 > 0$ y $C < 0$)
2. Dispersión anómala y parámetro de chirp positivo ($\beta_2 < 0$ y $C > 0$)

Para estos dos primeros casos, se tiene:

$$T(z) = T_0\sqrt{1 + (|C| + z/L_D)^2} \quad (6.38)$$

se vé que el pulso siempre será más ancho que en la entrada de la fibra $T(z) > T(0)$ debido a la dispersión.

3. Dispersión normal y parámetro de chirp positivo ($\beta_2 > 0$ y $C > 0$)
4. Dispersión anómala y parámetro de chirp negativo ($\beta_2 < 0$ y $C < 0$)

Para estos dos últimos casos se tendrá:

$$T(z) = T_0\sqrt{1 + (|C| - z/L_D)^2} \quad (6.39)$$

para este caso se vé que puede ocurrir que el ancho del pulso durante un tramo sea menor al de la entrada $T(z) < T(0)$. Este fenómeno es conocido como compresión de pulsos, lo que ocurre es que el chirp retarda el ensanchamiento del pulso y jugando con los parámetros β_2 , T_0 y C se puede controlar hasta donde se comprimirá el pulso. El valor de z para el cual se obtiene el mínimo del ancho del pulso es:

$$z_{\min} = CL_D = \frac{CT_0}{|\beta_2|} \quad (6.40)$$

⁴Puede suceder que en la longitud de onda de trabajo la dispersión sea cero, pero no consideramos ese caso en vista de que haría falta considerar efectos de tercer orden en la dispersión.

y el valor mínimo que toma el ancho $T(z)$ es

$$T_{min} = T(z_{min}) = T_0 \quad (6.41)$$

y el parámetro de chirp establece la diferencia entre el valor del ancho del pulso a la entrada y el valor mínimo.

5. Dispersión normal o anómala y parámetro de chirp nulo ($C = 0$)

$$T(z) = T_0 \sqrt{1 + (z/L_D)^2} \quad (6.42)$$

el ensanchamiento respecto a los casos 1 y 2 es menor pero sigue sucediendo.

Otro aspecto que se puede estudiar es el corrimiento en frecuencia a lo largo del pulso propagado. Para ello, consideramos

$$\phi = \phi_1(z) + \phi_2(z, t) \quad (6.43)$$

basado en [4], calculamos ahora la derivada temporal de dicha fase, la cuál es una medida de la frecuencia de un punto determinado del pulso.

$$\delta\omega = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi_2}{\partial t} = \frac{\tau}{T^2(z)} \left(C - \text{sgn}(\beta_2) \frac{z}{L_D} \right) \quad (6.44)$$

donde se hizo el cambio de variable $\tau = t - z/V_{gnt}$ que equivale a montarse en el pulso y viajar con él. Si $\tau = 0$ estamos justo en la cima del pulso, si $\tau > 0$ estamos delante de la cima y si $\tau < 0$ estamos detrás de la misma. Se pueden distinguir nuevamente cinco casos:

1. Dispersión normal y parámetro de chirp negativo ($\beta_2 > 0$ y $C < 0$)

$$\delta\omega = -\frac{\tau}{T^2(z)} \left(|C| + \frac{z}{L_D} \right) \begin{cases} > 0 & \text{si } T < 0 \\ < 0 & \text{si } T > 0 \end{cases}$$

es decir, las componentes de luz roja viaja más rápido que las de componente azul y viajan delante, mientras que las de azul van atrás.

2. Dispersión anómala y parámetro de chirp positivo ($\beta_2 < 0$ y $C > 0$)

$$\delta\omega = \frac{\tau}{T^2(z)} \left(|C| + \frac{z}{L_D} \right) \begin{cases} > 0 & \text{si } T > 0 \\ < 0 & \text{si } T < 0 \end{cases}$$

caso contrario al anterior, son las componentes de luz azul las que van adelante más rápido.

3. Dispersión normal y parámetro de chirp positivo ($\beta_2 > 0$ y $C > 0$)

$$\delta\omega = \frac{\tau}{T^2(z)} \left(|C| - \frac{z}{L_D} \right) \begin{cases} > 0 & \text{si } T > 0 \text{ y } z < z_{min} \\ < 0 & \text{si } T > 0 \text{ y } z > z_{min} \end{cases}$$

es decir, las componentes azules irán en la parte delantera del pulso antes de la máxima compresión del pulso y justo al pasar por z_{min} las componentes rojas empiezan a ir delante de las azules. Así, el mecanismo de compresión de pulsos usando el parámetro de chirp consiste en enviar delante las componentes azules del espectro y luego las rojas, de manera que, al haber dispersión normal, las rojas se acerquen poco a poco a las azules comprimiendo el intervalo en z en donde viajan.

4. Dispersión anómala y parámetro de chirp negativo ($\beta_2 < 0$ y $C < 0$)

$$\delta\omega = -\frac{\tau}{T^2(z)} \left(|C| - \frac{z}{L_D} \right) \begin{cases} > 0 & \text{si } T > 0 \text{ y } z > z_{min} \\ < 0 & \text{si } T > 0 \text{ y } z < z_{min} \end{cases}$$

en este caso, sucede lo contrario al caso anterior, ya que se está en régimen de dispersión anómala.

5. Dispersión normal o anómala y parámetro de chirp nulo ($C = 0$) es un caso similar al 1 o 2.

En cuanto a los efectos no lineales, ya se había mencionado como se modifica la velocidad de propagación del pulso al modificar la amplitud de la señal. Por otro lado se manifiesta el efecto Kerr en la fase

$$\varphi = \left(\beta_0 + \frac{\omega_0 n_2 \sqrt{2\pi} A^2}{2cT_0} \right) z = k_0(\omega_0)z \left(n_{ef} + n_2 \frac{\sqrt{2\pi} A^2}{2T_0} \right) \quad (6.45)$$

que se traduce en un fenómeno de auto modulación de fase, en vista de la dependencia de la fase con la amplitud inicial del pulso, sin embargo no se ve una diferencia de fases dentro del mismo pulso, hecho característico de la auto modulación de fase. Algo curioso es que también depende del ancho del pulso, el efecto no lineal en la fase se incrementa cuanto más cortos sean los pulsos. Se puede calcular la velocidad de dicha fase

$$V_\varphi = \frac{2cT_0}{2T_0 n_{ef} + n_2 \sqrt{2\pi} A^2} \quad (6.46)$$

que depende de la amplitud inicial del pulso al igual que la velocidad de grupo. Pueden compararse ambas velocidades y se concluye que $V_\varphi > V_{gnt}$. Esta no es la velocidad de fase total, la cual se calcula haciendo $-\frac{\partial\phi}{\partial t} / \frac{\partial\phi}{\partial z}$ donde ϕ es la fase total que aparece en (6.35). Montado en la cima del pulso ($\tau = t - z/V_{gnt} = 0$), se puede demostrar que la velocidad de fase es

$$V_\phi(\tau = 0) = \frac{2\omega_0 T^2(z)}{2k_0 (n_{ef} + n_2 \sqrt{2\pi} A^2 / 2T_0) T^2(z) + T_0^2 \text{sgn}(\beta_2) / L_D} \quad (6.47)$$

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

La obtención de la respuesta de un material dieléctrico en presencia de campos electromagnéticos intensos puede ser más general de lo que en esta investigación ha sido. Se ha partido de un modelo clásico de oscilador anarmónico del electrón, y fué de gran utilidad para obtener principalmente la forma en la que las polarizaciones se relacionan con los campos eléctricos, sin embargo, para obtener una forma más exacta de las susceptibilidades es necesario el uso de la mecánica cuántica y posteriormente de la mecánica estadística. La relación causal entre campo eléctrico y polarización se visualiza muy bien gracias a la construcción, en el capítulo 2, de las soluciones a las ecuaciones diferenciales en forma integral haciendo uso de la función de Green, y aparecen las susceptibilidades naturalmente como esa conexión entre causa y efecto, muchos textos en el área lo hacen de la misma manera.

Por otro lado, es importante recordar que se ha conseguido una ecuación de propagación para el campo eléctrico bajo una serie de consideraciones, las más importantes listadas en el capítulo 4, entre ellas, quizás el unico aporte de esta investigación, es el tratamiento que se le dá a la derivada segunda de la polarización de tercer orden, que trae algunas diferencias con los resultados encontrados en la literatura usual. El índice de refracción que aparece en la ecuación de propagación de pulsos en las referencias es dependiente del módulo del campo eléctrico instantáneo al cuadrado

$$\tilde{n} = n_0 + n_2 |E(\vec{R}, t)|^2 \quad (7.1)$$

que se puede demostrar, coincide con el índice de refracción que se tendría en caso de tener campo monocromático propagándose en la fibra y su uso se justifica al analizar el orden de magnitud de los términos que aparecen al derivar, quedándose con el término de orden cero. Mientras que, con las aproximaciones hechas en este trabajo se llega a la ecuación (4.28)

$$\tilde{n} = n_0 + n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\vec{R}, \alpha)|^2 d\alpha$$

calculando la transformada de Fourier y considerando el pequeño ancho espectral de

la señal enviada. Se consideró hasta primer orden de aproximación, los cuales dieron cero. Una de las características de esta forma es que no se llega a la ecuación no lineal de Schrödinger al desarrollar la ecuación de propagación. Usualmente se propone una aproximación en el desarrollo de la ecuación no lineal de propagación de campo eléctrico, es la llamada aproximación de envolvente que varía suavemente en el espacio, que consiste en hacer

$$\tilde{E}_0(\omega - \omega_0)Z(z) = \tilde{\mathcal{A}}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z}$$

y despreciar su derivada segunda en z . Con dicha aproximación y con el índice de refracción (7.1) se llega a la ecuación no lineal de Schrödinger que admite soluciones gaussianas así como solitones (una generalización de pulsos de tipo secante hiperbólico), entre otros. Pero las soluciones analíticas son posibles solo bajo ciertos regímenes, en los cuales se desprecian términos de la ecuación, por ejemplo, se desprecia la no linealidad, o la dispersión o la atenuación. En el desarrollo que hemos hecho no se desprecia ninguno de estos factores por lo menos para distancias cortas de propagación y otra característica interesante es que podemos dar a la entrada la forma de pulso que queramos y en principio puede hallarse la evolución del mismo con la solución (6.35). Se sugiere para futuros estudios relacionados, evaluar la estabilidad de pulsos de tipo secante hiperbólico y solitones mediante esta ecuación y contrastarlos con las predicciones hechas por la ecuación no lineal de Schrödinger, en principio en el primer caso es posible hacerlo de manera analítica.

En cuanto a la forma en la que se comportan pulsos gaussianos dentro de la fibra, son los mismos que predice la ecuación no lineal de Schrödinger, excepto por la dependencia con el campo instantáneo que se presenta en el fenómeno de auto modulación de fase, que impone una fase distinta a cada punto del pulso en términos de su amplitud, [4, 19]. Mientras que aquí, se obtiene una dependencia con la amplitud de la señal a la entrada. El comportamiento de la fase obtenido parece más bien asociado a la portadora de la señal ω_0 , y se ve como una característica global del pulso, mientras que en la práctica el comportamiento de la fase es local, cambiando en cada punto del pulso. Por otro lado, se ha puesto de manifiesto el fenómeno de ensanchamiento de los pulsos por efectos dispersivos de segundo orden y como puede ser contrarestrado agregando un chirp adecuado.

En cuanto a la posibilidad de hacer una descripción del comportamiento de un tren de pulsos (bits), todos centrados en la misma frecuencia ω_0 , modulados en amplitud por una señal caótica, se puede decir, que conociendo como se comportan individualmente los paquetes a una amplitud arbitraria A , dado por la solución (6.35) se podría saber el comportamiento del tren completo simplemente haciendo una superposición de pulsos entrantes de la manera siguiente

$$E_0(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp \left\{ -\frac{(t - nt_0)^2}{2T_0^2} \right\} \quad (7.2)$$

se calcularía su transformada de Fourier y se usaría la ecuación (6.26) para obtener la

evolución del tren de pulsos. El parámetro A_n estará dado por la modulación que le dé el caos en ese instante. El parámetro t_0 es la separación temporal entre pulsos y está asociado con la velocidad de la información. Pero como en principio no se puede conocer el valor de A_n para cada pulso o cuando se repita el experimento serán distintos valores, se recurriría a estudiar los casos límites de amplitud para que el sistema admita como un “encendido”. Por lo visto en el capítulo 6 básicamente el fenómeno no lineal relevante en este caso es la diferencia de velocidades a causa de la amplitud, luego, se estudiaría la distancia que pueden recorrer de manera que en la llegada no surja un error en la interpretación en esos casos límites, (por ejemplo, dos pulsos consecutivos que tengan los valores máximo y mínimo de amplitud viajarán con la mayor diferencia de velocidades posible y no deben superponerse en ningún momento durante su trayecto). Esto debe hacerse maximizando la velocidad de información para optimizar las capacidades de la fibra.

Apéndice A

Vector $\vec{r}_s^{(3)}$ en el dominio de la frecuencia

Partimos de la definición de la transformada de Fourier (3.9) aplicada a la ν -ésima componente del vector desplazamiento de tercer orden, además, se omitirá por el momento la dependencia con el vector de posición $\vec{R}$ por cuestiones de espacio

$$\tilde{r}_{s\nu}^{(3)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{s\nu}^{(3)}(t) e^{i\omega t} dt$$

y usando la solución (2.18)

$$\tilde{r}_{s\nu}^{(3)}(\omega) = \xi_s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k G_{s\nu k}(t-t') [\vec{r}_s^{(1)}(t') \cdot \vec{r}_s^{(1)}(t')] r_{sk}^{(1)}(t') dt' e^{i\omega t} dt$$

donde aparezca $\vec{r}_s^{(1)}$ se usa la relación (2.16)

$$\begin{aligned} &= - \left(\frac{e}{m_e} \right)^3 \xi_s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k G_{s\nu k}(t-t') \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_s(t'-t_1) \mathbf{E}(t_1) dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_s(t'-t_2) \mathbf{E}(t_2) dt_2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l G_{skl}(t'-t_3) \mathbb{E}_l(t_3) dt_3 dt' e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

ahora, se sustituyen todas las funciones de Green en el dominio del tiempo por la transformada inversa de Fourier de las correspondientes en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} &= - \left(\frac{e}{m_e} \right)^3 \xi_s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{kl} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{s\nu k}(\bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}(t-t')} d\bar{\omega} \right] \times \\ &\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}_s(\omega') e^{-i\omega'(t'-t_1)} d\omega' \right) \mathbf{E}(t_1) dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}_s(\omega'') e^{-i\omega''(t'-t_2)} d\omega'' \right) \mathbf{E}(t_2) dt_2 \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{skl}(\omega''') e^{-i\omega'''(t'-t_3)} d\omega''' \right) \mathbb{E}_l(t_3) dt_3 \end{aligned}$$

se puede observar que en cada una de las integrales de variable t_i , con $i = 1, 2, 3$ lo único que depende de t_i es el campo y una parte de la exponencial que acompaña a la función de Green, esto forma la transformada de Fourier del campo de variable t_i . Además, no hay nada que dependa de la variable t' excepto algunas exponenciales, pudiendo entonces integrarse; lo mismo pasa con la variable t . Luego:

$$= - \left(\frac{e}{m_e} \right)^3 \xi_s \sum_{kl} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}_s(\omega') \mathbf{E}(\omega') \cdot \tilde{\mathbf{G}}_s(\omega'') \mathbf{E}(\omega'') \\ \times \tilde{G}_{s_{\nu k}}(\bar{\omega}) \tilde{G}_{s_{kl}}(\omega''') \mathbb{E}_l(\omega''') \delta(\bar{\omega} - \omega' - \omega'' - \omega''') \delta(\omega - \omega') d\bar{\omega} d\omega' d\omega'' d\omega'''$$

integrando ahora en $\bar{\omega}$, se llega a la forma con la que se trabaja en el capítulo 3

$$\tilde{r}_{s\nu}^{(3)}(\omega) = - \left(\frac{e}{m_e} \right)^3 \xi_s \sum_{kl} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}_s(\omega') \mathbf{E}(\omega') \cdot \tilde{\mathbf{G}}_s(\omega'') \mathbf{E}(\omega'') \\ \times \tilde{G}_{s_{\nu k}}(\omega) \tilde{G}_{s_{kl}}(\omega''') \mathbb{E}_l(\omega''') \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \quad (\text{A.1})$$

Apéndice B

Susceptibilidad $\chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''')$ bajo la aproximación de respuesta instantánea

Supongamos, como en el capítulo 4, que el campo que debe propagarse dentro de la fibra, tiene la forma

$$\mathbf{E} = \mathbb{E}(t)\hat{x} = \hat{x} \left(\frac{1}{2}E(t)e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2}E^*(t)e^{i\omega_0 t} \right) \quad (\text{B.1})$$

y su transformada de Fourier por lo tanto será

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{i(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t)e^{i(\omega+\omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{2}\tilde{E}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\tilde{E}^*(-\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Recordando ahora la polarización de tercer orden dada por la ecuación (3.23), y considerando que así como el campo eléctrico está polarizado en x , la polarización también lo está, además obviamos la dependencia espacial, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}^{(3)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') \mathbb{E}(\omega') \mathbb{E}(\omega'') \mathbb{E}(\omega''') \\ &\quad \times \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

debemos entonces sustituir el producto de los campos que puede hacerse fácilmente usando (B.2),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}(\omega') \tilde{\mathbb{E}}(\omega'') \tilde{\mathbb{E}}(\omega''') &= \frac{1}{8} \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}(\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega''' - \omega_0) + c.c. \\ &\quad + \frac{1}{8} \tilde{E}^*(-\omega' - \omega_0) \tilde{E}(\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega''' - \omega_0) + c.c. \\ &\quad + \frac{1}{8} \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}^*(-\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega''' - \omega_0) + c.c. \\ &\quad + \frac{1}{8} \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}(\omega'' - \omega_0) \tilde{E}^*(-\omega''' - \omega_0) + c.c. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

que al sustituir en (B.3) y considerar la simetría intrínseca de permutación junto al hecho de que el término asociado al tercer armónico requiere conjugación de fase y es muy pequeño,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}^{(3)}(\omega) = \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}^*(-\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega''' - \omega_0) \\ \times \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' + c.c. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

el vector de polarización puede escribirse, al igual que el campo, de la manera siguiente

$$\tilde{\mathbb{P}}^{(3)}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \tilde{P}^{(3)*}(-\omega - \omega_0) \quad (\text{B.6})$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) = \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}^*(-\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega''' - \omega_0) \\ \times \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

por otro lado, se había encontrado la polarización correspondiente al efecto Kerr en el dominio del tiempo en el capítulo 4, bajo la aproximación de respuesta instantánea

$$P^{(3)}(\vec{R}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} |E(\vec{R}, t)|^2 E(\vec{R}, t) \quad (\text{B.8})$$

obviando la dependencia espacial y calculando su transformada de Fourier, se obtendrá otra forma de escribir la ecuación (B.7)

$$\tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) = \mathcal{F} \left[P^{(3)}(\vec{R}, t) e^{-i\omega_0 t} \right] = \mathcal{F} \left[\frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} |E(t)|^2 E(t) e^{-i\omega_0 t} \right]$$

donde $\tilde{\chi}^{(3)}$ no depende del tiempo y puede salir de la transformada,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) &= \frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) E^*(t) E(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} d\omega_1 \right] E(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{3}{4} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_1) \tilde{E}(\omega - \omega_0 - \omega_1) d\omega_1 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

en cuanto a la función $H(\omega_1)$

$$\begin{aligned} H(\omega_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) E^*(t) e^{i\omega_1 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t} d\omega_2 \right] E^*(t) e^{i\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega_2) \tilde{E}^*(\omega_2 - \omega_1) d\omega_2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

sustituyendo ahora (B.10) en (B.9)

$$\tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) = \frac{3}{4(2\pi)^2} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega_2) \tilde{E}^*(\omega_2 - \omega_1) \tilde{E}(\omega - \omega_0 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{B.11})$$

haciendo en esta expresión los cambios de variable

$$\begin{cases} \omega_2 &= \omega' - \omega_0 \\ \omega_1 &= \omega' + \omega'' \end{cases}$$

se llega a la siguiente

$$\tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) = \frac{3}{4(2\pi)^2} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}^*(-\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega - \omega_0 - \omega'' - \omega') d\omega' d\omega''$$

podemos ahora por comodidad agregar una integral de una delta de dirac en una variable ω'''

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(3)}(\omega - \omega_0) &= \frac{3}{4(2\pi)^2} \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega' - \omega_0) \tilde{E}^*(-\omega'' - \omega_0) \tilde{E}(\omega''' - \omega_0) \\ &\quad \times \delta(\omega - \sum_{\rho} \omega_{\rho}) d\omega' d\omega'' d\omega''' \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

comparando ahora (B.12) con (B.7), se puede finalmente encontrar la forma de la susceptibilidad eléctrica de tercer orden en el dominio de la frecuencia bajo la aproximación de respuesta instantánea

$$\chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \omega''') = \frac{\tilde{\chi}^{(3)}}{4\pi^2} \quad (\text{B.13})$$

de donde se puede concluir que no depende de la frecuencia, lo cual desprecia los efectos de dispersión no lineal como ya se había dicho

Apéndice C

Índice de refracción complejo

Se dijo en el capítulo 4, que el índice de refracción complejo puede escribirse como (4.30)

$$\begin{aligned}\eta^2(\omega) &= \left(\tilde{n} + i \frac{\tilde{\alpha} c}{2\omega} \right)^2 \\ &= \tilde{n}^2 + i \frac{c}{\omega} \tilde{n} \tilde{\alpha} - \frac{c^2}{4\omega^2} \tilde{\alpha}^2\end{aligned}\tag{C.1}$$

bajo la suposición de que (4.28), (4.29)

$$\begin{cases} \tilde{n} &= n_0 + n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \\ \tilde{\alpha} &= \alpha_0 + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \end{cases}$$

desarrollando los términos de segundo grado en (C.1) separadamente,

$$\begin{aligned}\tilde{n}^2 &= n_0^2 + 2n_0 n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + n_2^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^2 \\ \tilde{\alpha}^2 &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + \alpha_2^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^2 \\ \tilde{n} \tilde{\alpha} &= n_0 \alpha_0 + \alpha_0 n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + n_0 \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + n_2 \alpha_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^2\end{aligned}$$

si se toma en cuenta que experimentalmente se consigue que α_0, α_2, n_2 son muy pequeños y que por lo tanto cualquier término cuadrático en ellos es despreciable, se tendrá

$$\begin{aligned}\tilde{n}^2 &\simeq n_0^2 + 2n_0 n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \\ \tilde{\alpha}^2 &\simeq 0 \\ \tilde{n} \tilde{\alpha} &\simeq n_0 \alpha_0 + n_0 \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha\end{aligned}$$

sustituyendo del lado derecho de (C.1)

$$\eta^2(\omega) \simeq n_0^2 + 2n_0n_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + i \frac{cn_0}{\omega} \left(\alpha_0 + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \right) \quad (\text{C.2})$$

y simultáneamente debe ser igual a lo que se definió inicialmente como $\eta^2(\omega)$, (4.23)

$$\begin{aligned} \eta^2(\omega) = 1 + \Re[\chi^{(1)}] + \frac{3}{4}\Re[\chi^{(3)}]2\Delta\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha + \\ + i \left(\Im[\chi^{(1)}] + \frac{3}{4}\Im[\chi^{(3)}]2\Delta\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\alpha)|^2 d\alpha \right) \end{aligned}$$

así, comparando términos se llega a

$$\begin{aligned} n_0^2 &= 1 + \Re[\chi^{(1)}] \\ \alpha_0 &= \frac{\omega}{cn_0} \Im[\chi^{(1)}] \\ n_2 &= \frac{3}{4n_0} \Delta\omega_0 \Re[\chi^{(3)}] \\ \alpha_2 &= \frac{3}{2} \frac{\omega \Delta\omega_0}{cn_0} \Im[\chi^{(3)}] \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Richard L. Sutherland. *Handbook of Nonlinear Optics*. Marcel Dekker, Inc., second edition, 2003.
 - [2] Bahaa E.A. Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, 1991.
 - [3] Halina Abramczyk. *Fundamentals of Optical Fiber Transmission*. Technical University of Lodz, Laboratory of Laser Molecular Spectroscopy, 2008. Disponible en: <http://www.mitr.p.lodz.pl/evu/lectures/>.
 - [4] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, fourth edition, 2007.
 - [5] Yu.P. Svirko and N.I. Zheludev. *Polarization of Light in Nonlinear Optics*. John Wiley & Sons Ltd., England, 1998.
 - [6] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, third edition, 2008.
 - [7] Myron W. Evans. *Modern Nonlinear Optics Part 1*, volume 119 of *Advances in Chemical Physics*. John Wiley & Sons, Inc, second edition, 2001.
 - [8] Geoffrey New. *Introduction to Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 2011.
 - [9] Fredrik Jonsson. *Lecture Notes on Nonlinear Optics*. Royal Institute of Technology Department of Laser Physics and Quantum Optics, Stockholm, Sweden, 2003.
 - [10] V. Lucarini, J.J. Saarinen, K.-E. Peiponen, and E.M. Vartiainen. *Kramers-Kronig Relations in Optical Materials Research*. Number 110 in Springer Series in Optical Science. Springer Verlag, Heidelberg Berlin, 2005.
 - [11] Sergey A. Ponomarenko. *Fundamentals of Nonlinear Optics*, 2012.
 - [12] Pedro L. Torres. *Curso en Métodos de la Física Teórica*. Facultad de Ciencias U.C.V., Caracas, Venezuela, 2006.
 - [13] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., third edition, 1999.
-

- [14] Bernardo García Olmedo. *Fundamentos de Electromagnetismo. Iniciación al cálculo numérico en electromagnetismo*. Dpto. de Electromagnetismo y Física de la materia. Universidad de Granada, 2006.
 - [15] V. Shahraam Afshar and Tanya M. Monro. A full vectorial model for pulse propagation in emerging waveguides with subwavelength structures part i: Kerr nonlinearity. *Optics Express*, 17 (4), 2008.
 - [16] Zoltán Krisztián Várallyay. *Nonlinear wave propagation and ultrashort pulse compression in step-index and microstructured fibers*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, Atomic Physics Department, 2007.
 - [17] Miguel González Herráez. *Desarrollo de técnicas no lineales para la medida de la distribución longitudinal de dispersión cromática en fibras ópticas monomodo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
 - [18] D.L. Mills. *Nonlinear Optics Basic Concepts*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 1991.
 - [19] Y.R. Shen and Guo-Zhen Yang. Theory of self-phase modulation and spectral broadening. In Robert R. Alfano, editor, *The Supercontinuum Laser Source*. Springer, 2006.
 - [20] Govind P. Agrawal. Ultrashort pulse propagation in nonlinear dispersive fibers. In Robert R. Alfano, editor, *The Supercontinuum Laser Source*. Springer, 2006.
 - [21] Q. Lin and Govind P. Agrawal. Raman response function for silica fibers. *Optics Letters*, 31, No. 21:3086–3088, November 2006.
 - [22] Halina Abramczyk. *Nonlinear Phenomena in Optical Fibers*. Technical University of Lodz, Laboratory of Laser Molecular Spectroscopy, 2008. Disponible en: <http://www.mitr.p.lodz.pl/evu/lectures/>.
 - [23] Halina Abramczyk. *Fundamentals of Optical Fiber Transmission-2*. Technical University of Lodz, Laboratory of Laser Molecular Spectroscopy, 2008. Disponible en: <http://www.mitr.p.lodz.pl/evu/lectures/>.
 - [24] Halina Abramczyk. *Dispersion Phenomena in Optical Fibers*. Technical University of Lodz, Laboratory of Laser Molecular Spectroscopy, 2008. Disponible en: <http://www.mitr.p.lodz.pl/evu/lectures/>.
 - [25] A. Zheltikov, A. L’Huillier, and F. Krausz. Nonlinear optics. In F. Trager, editor, *Springer Handbook of Lasers and Optics*. Springer, 2007.
 - [26] Peter Hertel. *Linear Response Theory*. University of Osnabruck, Germany, 2001.
-

-
- [27] P.V. Mamyshev and S.V. Chernikov. Ultrashort-pulse propagation in optical fibers. *Optics Letters*, 15, No. 19:1076–1078, 1990.
 - [28] Allan W. Snyder and John D. Love. *Optical Waveguide Theory*. Springer Science and Business Media, 1983.
 - [29] H.A. Haus. *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
 - [30] C. Sulem and P.L. Sulem. *The Nonlinear Schrodinger Equation, Self-Focusing and Wave Collapse*. Springer, 1999.
 - [31] M.J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch. *Discrete and Continuous Nonlinear Schrodinger Systems*. Cambridge University Press, 2004.
 - [32] P.E. Zhidkov. *Korteweg-de Vries and Nonlinear Schroedinger Equations: Qualitative Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 2001.
 - [33] Mark G. Kuzyk. *Nonlinear Optics*. Washington State University, 2010.
 - [34] Albert Messiah. *Quantum Mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.
-