

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ALGUNOS ASPECTOS DE LAS ECUACIONES DE WONG PARA
PARTÍCULAS CARGADAS CROMOELECTRICAMENTE EN
INTERACCIÓN CON EL CAMPO DE YANG-MILLS.**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Camilo las Heras G.

ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Prof. Gabriel Abellán
Dr. Lorenzo Leal

Marzo-2015

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ALGUNOS ASPECTOS DE LAS ECUACIONES DE WONG PARA
PARTÍCULAS CARGADAS CROMOELÉCTRICAMENTE EN
INTERACCIÓN CON EL CAMPO DE YANG-MILLS.**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Camilo las Heras G.
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Prof. Gabriel Abellán
Dr. Lorenzo Leal

Marzo-2015
Caracas-Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Camilo las Heras G.**, Cédula de Identidad No. 19.242.900, bajo el título “**Algunos aspectos de las ecuaciones de Wong para partículas cargadas cromoelectricamente en interacción con el campo de Yang-Mills.**”, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 16 de abril de 2015, a las 9:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la sala de seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió aprobarlo por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

En fe de lo cual se levanta la presente acta a los 16 días del mes de abril del año 2015, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el Tutor del Trabajo Especial de Grado, **Dr. Lorenzo Leal**. Firma del jurado examinador

Dr. Abraham Lozada
4.882.675
UCV

Dr. Ernesto Contreras
15.733.583
UCV

Dr. Lorenzo Leal
4.171.960
UCV

“La educación es una tarea continua, y la obligación de mejorar uno mismo no cesa simplemente por tener un trabajo regular.”

Haile Selassie I.

“ Levántate poderosa raza... puedes cumplir lo que te propongas.”

Marcus Garvey.

“ Libertad, Redención y Repatriación Internacional.”

Emmanuel Charles Edwards.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por haberme dado la fuerza para culminar este trabajo, por la motivación para seguir adelante y por cada una de las experiencias vividas durante la carrera.

La realización de este trabajo no hubiese sido posible sin la participación de mis excelentes tutores; el Dr. Lorenzo Leal y el Prof. Gabriel Abellán, quienes con su experiencia y conocimiento, sirvieron de guía durante el desarrollo del mismo, además de brindar explicaciones y correcciones que contribuyeron considerablemente a mi crecimiento en lo académico y en lo personal.

Agradezco también a mi madre, Andrea Gouverneur, por la formación que desde niño he recibido, por apoyarme durante toda la carrera y especialmente durante la realización del TEG, a mi padre, Mikel las Heras, a mis tíos y abuelos por siempre motivarme a seguir adelante y agradezco a mi familia en general por las palabras de aliento.

De igual manera agradezco a mi pareja, Adriana Lezama, con quién viví la mayor parte de las experiencias de mi carrera, brindándome su apoyo en todo momento.

También doy gracias a mis amigos y compañeros, que siempre estuvieron para conversar, debatir, y en general para animarme a continuar, en particular menciono a Daniel Bachour, Miguel García, Julio Torres, Christian Alvarado, Gustavo Marín, Juan José Jimenez, entre otros.

Para finalizar agradezco a la Fundación Cultural Congo Nya Venezuela, y al EABIC (Congreso Negro Internacional Etíope Africano por sus siglas en inglés), por acompañarme durante la primera y segunda parte de la carrera respectivamente.

Resumen

En el presente trabajo se estudian soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento de Yang Mills en $D = 1 + 1$ en los casos siguientes: sin fuentes, en presencia de cargas puntuales estáticas y finalmente para una fuente general. Se revisa la obtención de las ecuaciones de Wong mediante un principio variacional partiendo de una acción propuesta por Balachandran. Se particulariza la solución clásica exacta y general de Yang-Mills para el caso en que las fuentes sean corrientes cromoelectricas puntuales dependientes del tiempo y finalmente se escoge una carga cromoelectrica tal que el resultado del campo sea análogo al caso de Maxwell en $D = 1 + 1$.

Índice general

Lista de figuras	15
Lista de tablas	17
1. Introducción	17
2. Algunos elementos de Teorías de Campos y Formulación de Dirac.	19
2.1. Acción y principio variacional.	19
2.2. Formulación Hamiltoniana.	20
2.3. Formulación de Dirac para Lagrangeanos Singulares.	21
3. Teorías de Calibre.	27
3.1. Teorías abelianas.	27
3.1.1. Transformaciones de Calibre globales.	27
3.1.2. Transformaciones de Calibre locales	28
3.2. Teorías no abelianas	29
3.2.1. Transformaciones de Calibre globales	29
3.2.2. Transformaciones de Calibre Locales: Teoría de Yang-Mills	30
4. Soluciones a la ecuación de onda inhomogénea.	33
4.1. Caso $D = 3 + 1$	33
4.2. Caso $D = 1 + 1$	39
5. Partículas de Wong.	43
5.1. Obtención de las ecuaciones de Wong.	43
5.1.1. Ecuaciones de Movimiento	44
6. Soluciones Clásicas del campo de Yang-Mills en $D = 1 + 1$	49
6.1. Yang-Mills sin fuentes	49
6.2. Yang-Mills con fuentes. Cargas puntuales estáticas.	51
6.3. Solución exacta de Yang Mills con fuentes generales en $D = 1 + 1$	53
6.4. Una solución a las ecuaciones de Yang-Mills en $D = 1 + 1$ con densidad de corriente dependiente del tiempo.	57
7. Conclusiones	61

Índice de figuras

4.1. Polos en 1 dimensión	34
4.2. Contornos de integración.	35
4.3. Contorno r	36
4.4. Contorno a	37

Capítulo 1

Introducción

Las cuatro interacciones fundamentales presentes en el universo pueden ser descritas con asombrosa precisión mediante Teorías de Calibre, que a su vez subyacen en todas las interacciones entre las partículas elementales que conforman la materia [1]. En particular el Modelo Estándar, que unifica tres de las cuatro fuerzas fundamentales se asocia a una Teoría de Calibre no abeliana. Está formado por la Teoría Electrodébil y la Cromodinámica Cuántica con grupos de calibre asociados $SU(2) \times U(1)$ y $SU(3)$ respectivamente, clasifica todas las partículas subatómicas conocidas y describe la interacción entre ellas mediante los bosones de calibre que hacen el papel de partículas mediadoras.

Los campos de Yang Mills [2], están relacionados con estas teorías de calibre no abelianas, y la dinámica de éstos está representada por unas ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de una acción mediante un principio variacional.

El objetivo principal de este trabajo es calcular la solución clásica exacta de las ecuaciones de Yang-Mills en $D = 1 + 1$ con fuentes generales, para luego estudiar la posible aplicación al caso en que la fuente corresponde a partículas con carga cromoelectrónica, tales como partículas de Wong [3][4], o a otro tipo de fuentes que puedan asociarse con partículas puntuales en interacción con el campo de Yang-Mills. Para cumplir este objetivo satisfactoriamente es conveniente repasar ciertos temas específicos y obtener determinados resultados que sirvan como preámbulo al cálculo antes mencionado.

Para ello, en el segundo capítulo estudiaremos algunos aspectos de las Teorías de Campos como la Formulación Lagrangeana y Hamiltoniana [5], además el Método de Dirac para la formulación Hamiltoniana de Lagrangeanos singulares [6] [2], como es el caso de la Teoría de Yang-Mills. En el tercer capítulo repasaremos las Teorías de Calibre Abelianas y no-Abelianas promoviendo simetrías globales a locales, definiremos las derivadas covariantes y estableceremos las ecuaciones de movimiento para luego, en el cuarto capítulo determinar las soluciones de la ecuación de onda inhomogénea en $D = 1 + 1$ y $D = 3 + 1$ [7] en términos de las funciones de Green Adelantada y Retardada, además de la solución de la ecuación homogénea.

Posteriormente en el quinto capítulo obtendremos las ecuaciones de movimiento de

Wong [3][4], que describen la dinámica de una partícula con carga cromoelectrica, aplicando un principio variacional al Lagrangeano propuesto por Balachandran [8]. En el sexto capítulo determinaremos las soluciones clásicas de las ecuaciones de Yang-Mills, sin fuentes, con fuentes puntuales estáticas [9], y luego con fuentes generales, todo ello en dimensión $(1+1)$, lo que nos permitirá obtener una solución exacta. Finalmente particularizaremos la solución exacta de Yang Mills en $D = 1 + 1$ con fuentes generales, al caso en el que las fuentes son n partículas cargadas cromoelectricamente.

Capítulo 2

Algunos elementos de Teorías de Campos y Formulación de Dirac.

En éste capítulo se estudian los fundamentos de la formulación Hamiltoniana de la Teoría Clásica de Campos, así como el método de cuantización a la Dirac para Sistemas con Lagrangeanos Singulares [6][2].

2.1. Acción y principio variacional.

La cantidad fundamental de la mecánica clásica es la acción $S = \int L dt$, donde L es el Lagrangeano del sistema, que en una teoría de campos local, lo podemos escribir como $L = \int \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) d^3x$, por lo tanto

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) d^4x, \quad (2.1)$$

donde $i = 1, \dots, N$, representa el número de campos presentes en la teoría y $\mathcal{L}$ es la Densidad Lagrangeana. Los índices griegos son espacio-temporales y emplearemos la convención $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ para la métrica en el espacio de Minkowsky cuatridimensional.

Las ecuaciones de movimiento que describen el sistema físico se derivan de un método variacional. Este método, conocido como Principio de Mínima Acción de Hamilton, establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración dada a otra en cierto intervalo de tiempo, lo hace a lo largo del camino en el espacio de configuraciones para el cual S tiene un valor estacionario, es decir

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i(x))} \right) \right) \delta \phi_i = 0, \quad (2.2)$$

donde hemos integrado por partes e impusimos que los campos se anulen en el infinito, entonces obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i(x))} \right) = 0, \quad (2.3)$$

que son las ecuaciones de movimiento de la teoría y donde reside la dinámica de la misma.

Sin embargo, para poder cuantizar la teoría es de gran utilidad una descripción Hamiltoniana a partir de la cual se pueda construir un espacio de Hilbert donde a cada observable se le asigne un operador cuántico autoadjunto.

2.2. Formulación Hamiltoniana.

Se pueden ver a los campos como una colección de variables mecánicas Q_n con $(n = 1, \dots, N)$ para N grados de libertad, en el límite cuando N tiende a infinito [5].

Definimos el momento canónico de los campos ϕ_i como

$$\pi_i(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_i(x))}, \quad (2.4)$$

y obtenemos el Hamiltoniano mediante una transformación de Legendre

$$H = \int d^3x \pi_i \dot{\phi}_i - L = \int d^3x \mathcal{H}(\phi(x), \pi(x)), \quad (2.5)$$

donde $\mathcal{H}(\phi(x), \pi(x))$ es la densidad Hamiltoniana.

Podemos definir la derivada funcional como

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(y) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f]}{\epsilon}, \quad (2.6)$$

y entonces llegar a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\phi}_i(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_i(x)}, \quad (2.7)$$

$$\dot{\pi}_i(x) = -\frac{\delta H}{\delta \phi_i(x)}, \quad (2.8)$$

que son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3).

Definimos los corchetes de Poisson entre dos funcionales $F(\phi_i, \pi_i)$ y $G(\phi_i, \pi_i)$ como

$$\{F, G\} = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_i(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi_i(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi_i(x)} \right), \quad (2.9)$$

esta formulación tiene la misma forma en todas las coordenadas canónicas y resultará especialmente útil para cuantizar la teoría.

La evolución de cada uno de los funcionales vendrá dada por

$$\dot{F}(\phi_i(x), \pi_i(x), t) = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.10)$$

en caso de que dependa explícitamente del tiempo.

Una vez que el sistema está descrito por el formalismo Hamiltoniano se puede pasar a su cuantización canónica. La idea básica consiste en reemplazar el álgebra clásica obtenida con el corchete de Poisson entre las variables, por un álgebra cuántica, donde los corchetes serán sustituidos por conmutadores y los observables clásicos pasarán a ser operadores cuánticos, es decir

$$\begin{array}{ll} \text{Teoría Clásica} & \longrightarrow \text{Teoría Cuántica,} \\ A, B, C \text{ (Observables)} & \longrightarrow \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \text{ (Operadores autoadjuntos),} \\ \{A, B\} = C & \longrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = -i\hat{C}. \end{array}$$

Notamos que no existen restricciones en el espacio de Hilbert donde actúan los operadores cuánticos debido a que en el formalismo Hamiltoniano todos los puntos del espacio de fase son accesibles.

2.3. Formulación de Dirac para Lagrangeanos Singulares.

En el formalismo Hamiltoniano estándar es necesario que las coordenadas q_n y p_n sean independientes, es decir que a partir de la definición de momento canónico conjugado se pueda despejar las velocidades en función de las coordenadas y los momentos conjugados

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q, p), \quad (2.11)$$

esto ocurre en sistemas cuyo Lagrangeano es Regular $\left(\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_l}\right) \neq 0\right)$.

Si el Lagrangeano del sistema es Singular $\left(\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_l}\right) = 0\right)$, no se pueden despejar todas las velocidades en función de las coordenadas y los momentos conjugados, por lo tanto tenemos

$$\dot{q}_n = f_n(q, p), \quad (2.12)$$

donde $n = 1, \dots, R$ y $R < N$ representa el número de coordenadas independientes.

Debido a esto la definición de momento canónico conjugado generaría relaciones de dependencia, vínculos entre variables del espacio de fase, de tipo

$$\varphi_m(q_n, p_n) = 0, \quad (2.13)$$

con $m = 1, \dots, N - R = M$.

Estas relaciones entre las variables canónicas q_n y p_n , nos indican que no todas son independientes, y a partir de ahora las llamaremos ligaduras primarias. Debido a estas ligaduras tenemos una reducción de los grados de libertad reales de la teoría.

Por lo tanto es necesario el uso de un método alternativo a la Formulación Hamiltoniana Estándar para Lagrangeanos Regulares, que tome en cuenta las ligaduras primarias. Dirac propone un método Hamiltoniano que toma en cuenta estas relaciones sin alejarse del formalismo canónico.

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, planteamos el siguiente funcional

$$\bar{L} = L(q_i, p_i) - \lambda_m \varphi_m(q_i, p_i), \quad (2.14)$$

donde los λ_m son los multiplicadores de Lagrange, mediante un principio variacional obtenemos las siguientes ecuaciones para cada una de las variables

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \zeta_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\zeta}_n} \right) = 0, \quad \zeta = \zeta\{q_n, p_n, \lambda_m\}, \quad (2.15)$$

podemos definir mediante una Transformación de Legendre un nuevo Hamiltoniano $H^*(q_n, p_n) = H(q_n, p_n) + \lambda_m \varphi_m(q_n, p_n)$ y obtener las ecuaciones dinámicas de cada una de las variables

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H(q_n, p_n)}{\partial q_n} - \lambda_m \frac{\partial \varphi(q_n, p_n)}{\partial q_n}, \quad (2.16)$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H(q_n, p_n)}{\partial p_n} + \lambda_m \frac{\partial \varphi(q_n, p_n)}{\partial p_n}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_m} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\lambda}_m} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, renombrando términos y reescribiendo las ecuaciones de movimiento en términos de los corchetes de Poisson

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H^*(q_n, p_n)}{\partial q_n} = \{p_n, H^*(q_n, p_n)\}, \quad (2.19)$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H^*(q_n, p_n)}{\partial p_n} = \{q_n, H^*(q_n, p_n)\}, \quad (2.20)$$

$$\varphi_m(q_n, p_n) = 0. \quad (2.21)$$

Es importante resaltar que no se deben sustituir las ligaduras en los corchetes pues éstas generan parte de la dinámica, para ello utilizamos la siguiente notación

$$\varphi_m(q_n, p_n) \approx 0, \quad (2.22)$$

donde " $\approx$ " se lee como débilmente cero e indica que no todas las ligaduras tienen corchete de Poisson nulo con las variables canónicas.

Ahora, para verificar la consistencia de la dinámica descrita por las ecuaciones, se procede a preservar las ligaduras en el tiempo

$$\dot{\varphi}_m = \{\varphi_m, H^*\} = \{\varphi_m, H\} + \lambda_m \{\varphi_m, \varphi_n\} \approx 0. \quad (2.23)$$

La preservación de las ligaduras puede generar 4 situaciones:

1. Una inconsistencia ($1 = 0$), indicando que el Lagrangeano genera ecuaciones de movimiento inconsistentes, en dado caso se abandona el problema.
2. Una igualdad ($0 = 0$).
3. Se pueden encontrar relaciones entre las variables canónicas independientes de las ligaduras primarias. $\sigma_k(q, p) = 0$ con $k = 1, \dots, K \Rightarrow$ Ligaduras Secundarias.
4. Se pueden encontrar relaciones que determinen a los multiplicadores de Lagrange. $\lambda_m = \lambda_m(q, p)$.

El proceso se termina cuando se obtienen los casos 2 y 4, puesto que en el caso 3 se debe preservar nuevamente la ligadura secundaria en el tiempo y así, volver a obtener una de éstas cuatro posibilidades.

Entonces las Ligaduras Primarias, obtenidas a partir de la definición de momento canónico conjugado, y las Ligaduras Secundarias, obtenidas mediante la preservación de ligaduras, se podrían englobar de la siguiente manera

$$\Lambda_j(q, p) \approx 0, \quad (2.24)$$

donde $j = 1, \dots, M + K = J$, siendo J la suma de todas las ligaduras.

Diremos que un objeto Ω es de primera clase si

$$\{\Omega, \Lambda_j(q, p)\} \approx 0, \quad \forall j, \quad (2.25)$$

y de segunda clase si

$$\{\Omega, \Lambda_j(q, p)\} \not\approx 0, \quad (2.26)$$

para al menos un valor de j .

Si el objeto Ω es una ligadura, denotamos las de primera clase como

$$\vartheta_i(q_n, p_n) \approx 0, \quad (2.27)$$

con $i = 1, \dots, I$, y las de segunda clase como

$$\chi_l(q_n, p_n) \approx 0, \quad (2.28)$$

con $l = 1, \dots, N$.

Si todas las ligaduras son de primera clase, podemos continuar con la cuantización. Los enunciados son

1. Los corchetes de Poisson pasan a ser conmutadores y los observables clásicos pasan a ser operadores cuánticos en un espacio de Hilbert.

$$\{q_i, p_j\} \rightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j], \quad (2.29)$$

así pues

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \quad (2.30)$$

2. La ecuación de Schrodinger de la teoría será:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_t\rangle = H^* |\Psi_t\rangle. \quad (2.31)$$

3. Se implementan las ligaduras como operadores cuánticos, y los estados físicos son aquellos aniquilados por estos operadores

$$\hat{\vartheta}_j(q, p) |\Psi_t\rangle = 0 \quad \forall j, \quad (2.32)$$

donde se puede destacar que en este caso el espacio de Hilbert se encuentra restringido por las ligaduras, tanto primarias como secundarias que ahora actúan como operadores.

Ahora, si tenemos ligaduras de segunda clase debemos realizar el corchete de Poisson entre ellas, recordando que al menos uno debe ser distinto de cero por definición, para posteriormente construir la siguiente matriz

$$C_{kk'} = \{\chi_k, \chi_{k'}\} \Rightarrow \text{Antisimétrica}, \quad (2.33)$$

es decir

$$C_{kk'} = \begin{pmatrix} 0 & \{\chi_1, \chi_2\} & \{\chi_1, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_1, \chi_k\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & 0 & \{\chi_2, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_2, \chi_k\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \{\chi_{k'}, \chi_1\} & \{\chi_{k'}, \chi_2\} & \{\chi_{k'}, \chi_3\} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Dirac enunció y probó el siguiente teorema:

El determinante de la matriz $C_{kk'}$ no es igual a cero, ni siquiera débilmente. Esto quiere decir que de la definición de la matriz, al ser ésta antisimétrica, el número de ligaduras de segunda clase debe ser par debido a que todo determinante de una matriz antisimétrica es cero, si la dimensión de ésta es impar. Esto garantiza la existencia de una inversa, la cual denotaremos por $C_{kk'}^{-1}$, tal que

$$C_{kk'}^{-1} C_{k''k'} = \delta_{kk'}. \quad (2.35)$$

Definimos ahora los corchetes de Dirac que a diferencia de los de Poisson (2.9), sí consideran a las ligaduras de segunda clase.

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_k\} (C_{kk'})^{-1} \{\chi_{k'}, G\}, \quad (2.36)$$

y tenemos que

$$\varphi_i \approx 0 \rightarrow \varphi_i = 0. \quad (2.37)$$

Finalmente postulamos

1. Reemplazamos el álgebra de Corchetes de Dirac por un álgebra cuántica de conmutadores y los observables pasan a ser operadores cuánticos autoadjuntos.

$$\{q_i, p_j\}^* \rightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j], \quad (2.38)$$

2. La dinámica vendrá dada por:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_t\rangle = H^* |\Psi_t\rangle, \quad (2.39)$$

3. Implementamos las ligaduras de primera clase como operadores cuánticos, siendo los estados físicos del sistema los aniquilados por esos operadores.

$$\hat{v}_j(q, p) |\Psi_t\rangle = 0 \quad \forall j. \quad (2.40)$$

En este caso la restricción del espacio de Hilbert viene dada por la acción de los operadores de primera clase.

En resumen

	Formulación Hamiltoniana Estándar	Formulación de Dirac	
		1era Clase	2da Clase
1er Postulado	$\{q_i, p_j\} \rightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j]$	$\{q_i, p_j\} \rightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j]$	$\{q_i, p_j\}^* \rightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j]$
2do Postulado	$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t\rangle = H \Psi_t\rangle$	$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t\rangle = H^* \Psi_t\rangle$	$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t\rangle = H^* \Psi_t\rangle$
3er postulado	$ \Psi_t\rangle$	$\hat{v}_j(q, p) \Psi_t\rangle = 0 \forall j$	$\hat{v}_j(q, p) \Psi_t\rangle = 0 \forall j$

Podemos concluir que, independientemente de si el Lagrangeano es Regular o Singular, las variables dinámicas de la teoría pasarán a ser operadores cuánticos autoadjuntos. Sin embargo en las teorías sin ligaduras no hay restricción sobre los estados cuánticos de la teoría.

Capítulo 3

Teorías de Calibre.

En este capítulo, como introducción a los campos de Yang-Mills, estudiaremos las transformaciones de calibre globales y locales.

La importancia de las teorías de calibre no abelianas o teoría de campos de Yang-Mills reside en el hecho de que las interacciones fuertes están descritas por una teoría de calibre no Abelianas con grupo de calibre $SU(3)$, conocida como la Cromodinámica Cuántica; además, el electromagnetismo y las interacciones débiles están unificadas en una teoría de calibre con grupo de calibre $SU(2) \times U(1)$, la teoría electrodébil. Juntas, la Cromodinámica Cuántica y la Teoría Electrodébil forman el Modelo Estándar, el cual reproduce todos los resultados experimentales conocidos de la física de partículas, hasta energías del orden de unos pocos cientos de GeV [1][2][9][10][11].

3.1. Teorías abelianas.

3.1.1. Transformaciones de Calibre globales.

Las teorías de calibre surgen al promover una simetría global a una local. Comencemos estudiando la densidad Lagrangeana de Dirac para un fermión libre

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.1)$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ es el spinor de Dirac y provee una representación de $U(1)$.

Consideremos una transformación global de la forma

$$\begin{cases} \psi' = e^{-i\theta}\psi, \\ \bar{\psi}' = e^{i\theta}\bar{\psi}, \end{cases} \quad (3.2)$$

con θ un parámetro real. Al realizar la transformación y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}, \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Claramente la Densidad Lagrangiana de Dirac es invariante ante una transformación global.

3.1.2. Transformaciones de Calibre locales

Consideremos ahora las transformaciones locales

$$\begin{cases} \psi' = e^{-i\theta(x)}\psi, \\ \bar{\psi}' = e^{i\theta(x)}\bar{\psi}, \end{cases} \quad (3.4)$$

o infinitesimalmente:

$$\begin{cases} \delta\psi = -i\theta(x)\psi, \\ \delta\bar{\psi} = i\theta(x)\bar{\psi}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Para recordar que estamos trabajando infinitesimalmente y simplificar la notación, hagamos $\theta(x) \rightarrow \epsilon$, donde ϵ depende de x^μ .

Al realizar la transformación, la variación de la Densidad Lagrangeana viene dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(\delta\psi) - m\delta\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\delta\psi, \\ \delta\mathcal{L} &= \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\epsilon\psi, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde hemos usado que

$$\delta\psi = -i\epsilon\psi, \quad (3.7)$$

$$\delta\bar{\psi} = i\epsilon\bar{\psi}, \quad (3.8)$$

$$\partial_\mu\delta\psi = -i(\partial_\mu\epsilon\psi + \epsilon\partial_\mu\psi). \quad (3.9)$$

Notamos que la densidad Lagrangeana de Dirac no es invariante ante transformaciones locales, debido a que la derivada parcial no transforma covariantemente. Solucionaremos este problema introduciendo la derivada covariante que sí transforma como los campos:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad (3.10)$$

$$\delta(D_\mu\psi) = -i\epsilon D_\mu\psi, \quad (3.11)$$

donde A_μ es un campo vectorial que representa el campo de calibre y transforma como

$$\delta A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\epsilon. \quad (3.12)$$

Ahora podemos definir una nueva Densidad Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.13)$$

que es invariante ante las transformaciones locales de los campos (3.7)(3.8)(3.12), y describe un fermión masivo interactuando con el campo de calibre. Sin embargo se puede notar que no hay un término cinético para A_μ , por lo tanto es un campo no dinámico en ésta teoría. Para otorgarle dinámica al campo A_μ en el sentido canónico y para que la teoría sea cerrada, notamos que como el campo transforma longitudinalmente, mediante un gradiente, el rotacional del campo no debe verse afectado por ese tipo de transformación. De esta manera se define el tensor electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.14)$$

Investiguemos cómo transforma localmente $F_{\mu\nu}$. Aplicando la variación

$$\delta(F_{\mu\nu}) = \partial_\mu(\delta A_\nu) - \partial_\nu(\delta A_\mu) = \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu\epsilon - \partial_\nu\partial_\mu\epsilon) = 0, \quad (3.15)$$

debido a que el tensor electromagnético es invariante de calibre, podemos escribir la parte dinámica de la Densidad Lagrangeana para el campo de calibre como:

$$\mathcal{L}_{GAUGE} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \implies \delta\mathcal{L}_{GAUGE} = 0, \quad (3.16)$$

donde la constante de proporcionalidad se define convenientemente para los cálculos que se van a realizar.

La teoría completa de una partícula masiva invariante de calibre acoplada con campo de calibre $U(1)$ es

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.17)$$

que es la densidad Lagrangeana de la Electrodinámica Cuántica.

Es posible generalizar estas ideas considerando otros grupos de simetría. En general estos grupos serán no abelianos y son objeto importante de estudio pues se conoce que las interacciones débiles y fuertes están descritas como teorías de calibre $SU(2)$ y $SU(3)$ respectivamente.

3.2. Teorías no abelianas

3.2.1. Transformaciones de Calibre globales

Consideremos la teoría libre de Dirac, descrita por una Densidad Lagrangeana que contiene múltiples campos fermiónicos.

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_k\gamma^\mu\partial_\mu\psi_k - m\bar{\psi}_k\psi_k, \quad (3.18)$$

donde $k = 1, \dots, \dim R$ es un índice de simetría interno y $\dim R$ denota la dimensión de la representación.

Las transformaciones globales son

$$\begin{cases} \psi'_k = e^{-i\theta^a T^a} \psi_k, \\ \bar{\psi}'_k = \bar{\psi}_k e^{i\theta^a T^a}, \end{cases} \quad (3.19)$$

donde ahora θ^a es un parámetro real y T^a son los generadores del álgebra asociada a Infinitesimalmente la variación de los campos fermiónicos

$$\begin{cases} \delta\psi_k = -i\theta^a T^a_{kl}\psi_l, \\ \delta\bar{\psi}_k = i\theta^a \bar{\psi}_l T^a_{lk}, \end{cases} \quad (3.20)$$

donde a es la dimensión del álgebra asociada al grupo (número de generadores).

Bajo transformaciones globales de este tipo la Densidad Lagrangeana permanece invariante. Los generadores del grupo satisfacen un álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (3.21)$$

y cumplen también la normalización

$$Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad (3.22)$$

con $a, b, c = 1, \dots, \dim G$.

Las constantes reales f^{abc} se denominan constantes de estructura del grupo de simetría y son completamente antisimétricas en los índices. Por ejemplo, para $SU(2)$ (de matrices unitarias 2x2 con determinante 1), se tiene que $f^{abc} = \epsilon^{abc}$, donde ϵ^{abc} es el símbolo de Levi Civita.

3.2.2. Transformaciones de Calibre Locales: Teoría de Yang-Mills

Ahora trataremos de promover una simetría local, para ello consideramos las transformaciones locales infinitesimales

$$\begin{cases} \delta \psi_k = -i \epsilon^a T_{kl}^a \psi_l, \\ \delta \bar{\psi}_k = i \epsilon^a \bar{\psi}_l T_{lk}^a. \end{cases} \quad (3.23)$$

Nuevamente notamos que la derivada ordinaria actuando sobre los campos no transforma covariantemente

$$\delta(\partial_\mu \psi_k) = -i(\partial_\mu \epsilon^a) T_{kl}^a \psi_l - i \epsilon^a T_{kl}^a \partial_\mu \psi_l, \quad (3.24)$$

entonces podemos determinar cómo transforma la Densidad Lagrangeana

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= i(\delta \bar{\psi}_k) \gamma_k^\mu \partial_\mu \psi_k + i \bar{\psi}_k \gamma_k^\mu \delta(\partial_\mu \psi_k) - m(\delta \bar{\psi}_k \psi_k + \bar{\psi}_k \delta \psi_k), \\ \delta \mathcal{L} &= \bar{\psi}_k \gamma_k^\mu \partial_\mu \epsilon^a T_{kl}^a \psi_l, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde realizamos un cambio de índices a conveniencia.

Podemos notar que $\mathcal{L}$ no es invariante ante transformaciones locales, definimos entonces la derivada covariante e introducimos un nuevo campo A_μ .

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + i g A_\mu) \psi, \quad (3.26)$$

ahora $A_\mu = T^a A_\mu^a$ es un elemento del álgebra y representa el campo de calibre. El número de campos de calibre es el mismo que la dimensión del álgebra, entonces, en componentes

$$D_\mu \psi_k = \partial_\mu \psi_k + i g T_{kl}^a A_\mu^a \psi_l, \quad (3.27)$$

nuevamente partiendo del requisito de covariancia podemos ver cómo transforman los campos A_μ

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon^a - \epsilon^c f^{abc} A_\mu^b, \quad (3.28)$$

donde realizamos un cambio de índices a conveniencia y utilizamos las propiedades de antisimetría de las constantes de estructura.

En resumen, la Densidad Lagrangeana (3.18) es invariante bajo las transformaciones locales infinitesimales de los campos (3.23) y (3.28). Es necesario agregar dinámica al campo A_μ encontrando el término cinético, para ello es más fácil si pasamos a las transformaciones finitas.

$$\begin{cases} \psi' \longrightarrow U\psi, \\ \bar{\psi}' \longrightarrow \bar{\psi}U^{-1}, \\ A'_\mu \longrightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}, \end{cases} \quad (3.29)$$

con $U = e^{-i\theta^a(x)T^a}$.

Para darle dinámica al campo A_μ necesitamos construir el tensor $F_{\mu\nu}$ como se hizo en el caso abeliano. Veamos cómo transforma el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}^M$ bajo la nueva transformación de calibre del A_μ (3.29)

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{M'} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)U^{-1} + \partial_\mu U A_\nu U^{-1} + U A_\nu \partial_\mu U^{-1} \\ &\quad - \partial_\nu U A_\mu U^{-1} - U A_\mu \partial_\nu U^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U \partial_\nu U^{-1} - \partial_\nu U \partial_\mu U^{-1}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

claramente no es invariante de calibre.

Estudiemos cómo transforma el término $ig[A_\mu, A_\nu]$

$$\begin{aligned} ig[A'_\mu, A'_\nu] &= ig(A'_\mu A'_\nu - A'_\nu A'_\mu), \\ &= igU[A_\mu, A_\nu]U^{-1} + (\partial_\nu U)A_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U)A_\nu U^{-1} \\ &\quad + UA_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - UA_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{ig}\{(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - (\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

pero sabemos que $UU^{-1} = 1$, por lo tanto $\partial_\mu(UU^{-1}) = 0$, entonces $(\partial_\mu U)U^{-1} = -U(\partial_\mu U^{-1})$, y podemos afirmar que

$$\begin{aligned} ig[A'_\mu, A'_\nu] &= igU[A_\mu, A_\nu]U^{-1} + \partial_\nu U A_\mu U^{-1} - \partial_\mu U A_\nu U^{-1}, \\ &\quad - UA_\nu \partial_\mu U^{-1} + UA_\mu \partial_\nu U^{-1} + \frac{1}{ig}\{-\partial_\mu U \partial_\nu U^{-1} + \partial_\nu U \partial_\mu U^{-1}\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Comparando (3.30) y (3.32), podemos definir un nuevo tensor de campo para el caso no abeliano

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu], \quad (3.33)$$

que transforma como $F'_{\mu\nu} \longrightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1}$. En componentes

$$F_{\mu\nu} = T^a F_{\mu\nu}^a = T^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - g f^{cba} T^a A_\mu^c A_\nu^b, \quad (3.34)$$

donde realizamos un cambio de índices ($a \rightarrow c$) en el último término. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= T^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + T^a g f^{abc} A_\mu^c A_\nu^b \\ &= T^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - T^a g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned} \quad (3.35)$$

de donde podemos escribir en componentes

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.36)$$

Finalmente, la Densidad Lagrangeana asociada a los fermiones en interacción con el campo de Yang-Mills sería

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i \bar{\psi}_k \gamma^\mu D_\mu \psi_k - m \bar{\psi}_k \psi_k. \quad (3.37)$$

Podemos decir que toda teoría de calibre surge al promover una simetría local a partir de una global. Partiendo de la Densidad Lagrangeana de Dirac, que describe un fermión cargado de masa m y espín $\frac{1}{2}$, podemos obtener la Densidad Lagrangeana de la Electrodinámica Cuántica, que es la teoría de este fermión y un campo electromagnético en interacción, y es invariante ante transformaciones de calibre locales. De igual manera generalizando para simetrías más complejas obtuvimos la Densidad Lagrangeana de una teoría que describe a un fermión y un campo de calibre no abeliano en interacción, teorías como éstas son la Teoría Débil y la Cromodinámica Cuántica.

Capítulo 4

Soluciones a la ecuación de onda inhomogénea.

En este capítulo se estudiarán las soluciones a las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en dimensión $D = 3 + 1$ y $D = 1 + 1$ que se reducen a resolver la ecuación de onda inhomogénea [7].

4.1. Caso $D = 3 + 1$

El campo electromagnético debido a una fuente externa $J^\alpha(x)$, satisface las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (4.1)$$

donde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ es el tensor electromagnético, entonces en términos de los potenciales

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (4.2)$$

donde el operador D'Alembertiano se define como $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \partial_0^2 - \partial_i \partial^i = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$.

Si los potenciales satisfacen el calibre de Lorentz ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$), entonces son solución de una ecuación de onda inhomogénea

$$\square A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (4.3)$$

cuya solución vendrá dada en términos de una función de Green $D(x, x')$ que satisface

$$\square D(x, x') = \delta^4(x - x') = \delta(x_0 - x'_0) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.4)$$

En la ausencia de superficies límites (fronteras), la función de Green puede depender solo del cuadvivector $z^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$. Por lo tanto

$$D(x, x') = D(x - x') = D(z), \quad (4.5)$$

y la condición que debe satisfacer la función de Green es

$$\square D(z) = \delta^4(z). \quad (4.6)$$

Ahora utilizamos la integral de Fourier para resolver esta ecuación. La transformada de Fourier en 4 dimensiones $\tilde{D}(k)$ de la función de Green está definida por

$$D(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot z}, \quad (4.7)$$

con $k \cdot z = k_0 z_0 - \vec{k} \cdot \vec{z}$. Además sabiendo que $\delta^4(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot z}$, encontramos que la función de Green en el k -espacio

$$\tilde{D}(k) = \frac{-1}{(k_0^2 - k^2)} = \frac{-1}{k \cdot k}, \quad (4.8)$$

donde $k = |\vec{k}|$ y además hemos utilizado que $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial z_0}$. Entonces la función de Green es

$$D(z) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot z}}{k \cdot k}. \quad (4.9)$$

Como el integrando es singular cuando $k \cdot k = 0$, debemos interpretar esta integral mediante el estudio de las singularidades, para ello consideremos primero la integración en k_0

$$D(z) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2}. \quad (4.10)$$

Resolveremos primero

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{(k_0 + k)(k_0 - k)}, \quad (4.11)$$

donde se puede ver que el integrando tiene dos polos simples $k_0 = \pm k$.

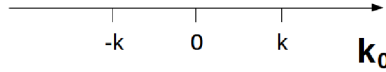


Figura 4.1: Polos en 1 dimensión

Podemos darle sentido la integral (4.11) mediante el Teorema del Residuo de Cauchy, para ello desplazaremos los polos del eje real y utilizaremos un contorno que puede cerrarse en el infinito mediante una semicircunferencia en la mitad inferior o superior del plano, dependiendo del signo de z_0 , y luego tomaremos el límite cuando los polos vuelven a la recta real. Supongamos

$$w = k_0 + ik_i = |w|(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad (4.12)$$

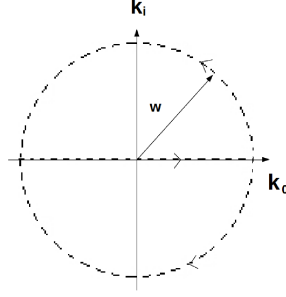


Figura 4.2: Contornos de integración.

con $(\rho = |w|)$, $\mathbb{R}e(w) = k_0$ e $\mathbb{I}m(w) = k_i$.

Si $z_0 > 0$, tenemos que

$$e^{-iwz_0} = e^{-i(\rho \cos \theta + i\rho \sin \theta)z_0} = e^{-i\rho \cos \theta z_0} e^{\rho \sin \theta z_0} = e^{-ik_0 z_0} e^{\rho \sin \theta z_0}, \quad (4.13)$$

ahora si

$$\begin{cases} \rho \sin \theta > 0 & e^{\rho \sin \theta z_0} \rightarrow \infty, \\ \rho \sin \theta < 0 & e^{\rho \sin \theta z_0} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

en este caso cerramos la semicircunferencia en la mitad inferior del plano para que el integrando sea finito en la región de integración.

Por otro lado, si $z_0 < 0$

$$e^{iwz_0} = e^{i(\rho \cos \theta + i\rho \sin \theta)z_0} = e^{ik_0 z_0} e^{-\rho \sin \theta z_0}, \quad (4.15)$$

entonces si

$$\begin{cases} \rho \sin \theta > 0 & e^{-\rho \sin \theta z_0} \rightarrow 0, \\ \rho \sin \theta < 0 & e^{-\rho \sin \theta z_0} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.16)$$

en este otro caso debemos cerrarlo en la mitad superior del plano por un análisis análogo al anterior.

Ahora las singularidades podrían ser desplazadas hacia el eje imaginario ($\mathbb{I}m(w)$) positivo o negativo (ver Figura 4.2). Desplazamos primero las singularidades levemente hacia el negativo (ver Figura 4.3). Entonces, si $z_0 > 0$ tendremos un contorno de integración que llamaremos r que encierra ambas singularidades y tenemos que

$$\oint_r dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} + \int_c dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)}, \quad (4.17)$$

donde la integral en C se anula pues para $z_0 > 0$, $e^{-iwz_0} \rightarrow 0$ en nuestro contorno de integración. Entonces la integral que nos interesa resolver es

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} = \oint_r dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)}. \quad (4.18)$$

Luego, como la función a integrar es analítica dentro de la región de definida por la

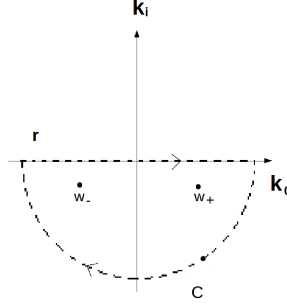


Figura 4.3: Contorno r .

curva C , excepto en ambas singularidades mediante el Teorema del Residuo de Cauchy y el Teorema del Residuo de un Polo Simple podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \oint_r dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} &= -2\pi i (\text{Res}(f(w), w_+) + \text{Res}(f(w), w_-)) \\ &= -\frac{2\pi}{k} e^{-\epsilon z_0} \sin kz_0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Una vez resuelta la integral, tomamos el límite cuando los polos vuelven al eje real

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_r dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = -\frac{2\pi}{k} \sin kz_0, \quad (4.20)$$

notemos que si $z_0 < 0$, debemos integrar en una región que no encierra a las singularidades, entonces según el teorema del Residuo: $\oint_r dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = 0$. Por lo tanto la función de Green para el contorno r es

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \frac{\sin kz_0}{k}, \quad (4.21)$$

para todo valor de z_0 , donde

$$\Theta(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_0 > 0, \\ 0 & \text{si } z_0 \leq 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Ahora resolviendo la integral en el espacio, como $d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$, podemos decir que

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} dk (e^{ik(z_0-R)} - e^{ik(z_0+R)}), \quad (4.23)$$

donde hicimos que el eje z de nuestro sistema coincida con $\vec{z} = \vec{x} - \vec{x}'$, pues este vector permanece invariante en el espacio, debido a ello $\vec{k} \cdot \vec{z} = kR \cos \theta$ con $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Entonces tenemos que

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{4\pi R} \delta(z_0 - R), \quad (4.24)$$

con z_0 y R positivos, devolviendo el cambio

$$D_r(x - x') = \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R), \quad (4.25)$$

a esta función de Green la llamamos Función de Green retardada porque el punto temporal donde se encuentra la fuente (x'_0) es siempre menor que el punto de observación (x_0).

A continuación desplazaremos las singularidades levemente hacia arriba del eje real. Si $z_0 > 0$ debemos integrar en una región donde no se encuentran las singularidades,

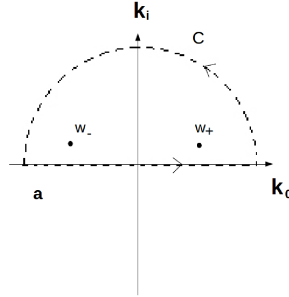


Figura 4.4: Contorno a .

por lo tanto según el teorema del Residuo: $\oint_a dw \frac{e^{-iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = 0$. Mientras que si $z_0 < 0$ tendremos un contorno de integración que encierra ambas singularidades, entonces se cumple que

$$\oint_a dw \frac{e^{iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} + \int_c dw \frac{e^{iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)}, \quad (4.26)$$

donde la integral en C se anula pues para $z_0 < 0$, $e^{iwz_0} \rightarrow 0$ en nuestro contorno de integración, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} &= \oint_r dw \frac{e^{iwz_0}}{(w - w_+)(w - w_-)}, \\ &= 2\pi i (Res(f(w), w_+) + Res(f(w), w_-)) = \frac{2\pi}{k} e^{-\epsilon z_0} \sin kz_0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

y ahora tomamos el límite cuando los polos vuelven al eje real

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_r dw \frac{e^{i\bar{w}z_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = \frac{2\pi}{k} \sin kz_0. \quad (4.28)$$

Entonces la función de Green para el contorno a es:

$$D_a(z) = \frac{-\Theta(-z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \frac{\sin kz_0}{k}, \quad (4.29)$$

para todo valor de z_0 .

Finalmente integrando en el espacio obtenemos

$$D_a(z) = \frac{\Theta(-z_0)}{4\pi R} \delta(z_0 + R), \quad (4.30)$$

y devolviendo el cambio

$$D_a(x - x') = \frac{\Theta(-x_0 + x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 + R), \quad (4.31)$$

a esta función de Green la llamaremos adelantada porque el punto temporal de observación es siempre menor al punto temporal de la fuente.

Podemos escribir las Funciones de Green Retardada (4.25) y Adelantada (4.31) en forma covariante

$$D_r(x - x') = \frac{1}{2\pi} \Theta(x_0 - x'_0) \delta\{(x - x')^2\}, \quad (4.32)$$

$$D_a(x - x') = \frac{1}{2\pi} \Theta(x'_0 - x_0) \delta\{(x - x')^2\}. \quad (4.33)$$

Ahora la solución de la ecuación de onda inhomogénea puede ser escrita en términos de la función de Green como

$$A^\alpha(x) = A_{in}^\alpha(x) + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x - x') J^\alpha(x'), \quad (4.34)$$

$$= A_{out}^\alpha(x) + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_a(x - x') J^\alpha(x'), \quad (4.35)$$

donde los términos $A_{in}^\alpha(x)$ y $A_{out}^\alpha(x)$ corresponden a la solución de la ecuación de ondas homogénea.

El empleo de la solución en términos de la función de Green Retardada (4.34) o Adelantada (4.35) es materia de conveniencia. Según sean las condiciones de borde del problema puede convenir el uso de una u otra, o aún de combinaciones lineales apropiadas de ambas.

4.2. Caso $D = 1 + 1$

Al igual que en $D = 3 + 1$, las ecuaciones de Maxwell en $D = 1 + 1$ pueden escribirse como

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (4.36)$$

donde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ y $\alpha, \beta = 0, 1$. Notemos que para $D = 1 + 1$ no hay campo magnético pues los elementos del tensor $F^{\alpha\beta}$ distintos de cero son $F^{01} = -F^{10} = -\frac{E_i}{c} = \frac{E^i}{c}$.

Si los potenciales satisfacen el calibre de Lorentz ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$) son solución de una ecuación de onda inhomogénea

$$\square A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (4.37)$$

donde $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \partial_0 \partial^0 - \partial_1 \partial^1 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_1 \partial^1$. Podemos encontrar la solución a esta ecuación encontrando una función de Green que, en ausencia de superficies límites, satisfaga

$$\square D(z) = \delta^2(z), \quad (4.38)$$

donde $z^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$.

La transformada de Fourier en 2 dimensiones $\tilde{D}(k)$ de la función de Green está definida por

$$D(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot z}, \quad \text{con } k \cdot z = k_0 z_0 - k_1 z_1, \quad (4.39)$$

sabiendo que $\delta^2(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k e^{-ik \cdot z}$, podemos encontrar la función de Green en el k -espacio

$$\tilde{D}(k) = \frac{-1}{(k_0^2 - k_1^2)} = \frac{-1}{k \cdot k}, \quad (4.40)$$

y entonces la función de Green es

$$D(z) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int d^2 k \frac{e^{-ik \cdot z}}{k \cdot k}. \quad (4.41)$$

Debemos resolver mediante el estudio de las singularidades

$$D(z) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1 z_1} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k_1^2}, \quad (4.42)$$

entonces resolveremos primero

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k_1^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{(k_0 + k_1)(k_0 - k_1)}, \quad (4.43)$$

donde se puede ver que el integrando tiene dos polos simples $k_0 = \pm k_1$.

Podemos darle sentido a esta integral mediante el Teorema del Residuo de Cauchy, para

ello desplazamos primero las singularidades levemente hacia abajo del eje real.

Si $z_0 > 0$ tendremos un contorno de integración que llamaremos r que encierra ambas singularidades en la mitad inferior del plano, entonces tenemos que

$$\oint_r dw \frac{e^{-i\vec{w}z_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k_1^2} + \int_c dw \frac{e^{-i\vec{w}z_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} \quad (4.44)$$

La integral en C se anula pues para $z_0 > 0$, $e^{-i\vec{w}z_0} \rightarrow 0$ en nuestro contorno de integración, entonces, mediante el teorema del Residuo y Teorema del Residuo de un Polo Simple obtenemos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k_1^2} = \oint_r dw \frac{e^{-i\vec{w}z_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = -\frac{2\pi}{k_1} e^{\epsilon z_0} \sin k_1 z_0. \quad (4.45)$$

Una vez resuelta la integral, tomamos el límite cuando los polos vuelven al eje real.

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k_1^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_r dw \frac{e^{-i\vec{w}z_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = -\frac{2\pi}{k_1} \sin k_1 z_0, \quad (4.46)$$

notemos que si $z_0 < 0$, debemos integrar en una región donde no se encuentran las singularidades, entonces según el teorema del Residuo: $\oint_r dw \frac{e^{-i\vec{w}z_0}}{(w - w_+)(w - w_-)} = 0$.

Entonces la función de Green para el contorno r es

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{e^{ik_1 z_1} \sin k_1 z_0}{k_1}, \quad (4.47)$$

para todo valor de z_0 , donde

$$\Theta(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_0 > 0, \\ 0 & \text{si } z_0 \leq 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

Podemos reescribir esta función de la siguiente manera

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{4} (\text{sgn}(z_1 + z_0) - \text{sgn}(z_1 - z_0)), \quad (4.49)$$

donde utilizamos propiedades trigonométricas y argumentos de paridad, además $\text{sgn}(y)$ es la función signo que tiene la representación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin ky}{k} = \pi \text{sgn}(y), \quad \text{con} \quad \text{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (4.50)$$

Ahora, si desplazamos las singularidades levemente hacia el eje imaginario positivo y procedemos de manera análoga al contorno r la función de Green para el contorno a es

$$D_a(z) = \frac{\Theta(-z_0)}{4} (\text{sgn}(z_1 + z_0) - \text{sgn}(z_1 - z_0)). \quad (4.51)$$

Entonces en dimensión $1+1$ tenemos que las Funciones de Green Retardada y Adelantada son

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{4}(\text{sgn}(z_1 + z_0) - \text{sgn}(z_1 - z_0)), \quad (4.52)$$

$$D_a(z) = \frac{\Theta(-z_0)}{4}(\text{sgn}(z_1 + z_0) - \text{sgn}(z_1 - z_0)), \quad (4.53)$$

que también se pueden expresar mediante la Función de Heaviside

$$D_r(z) = \frac{\Theta(z_0)}{2}(\Theta(z_1 + z_0) - \Theta(z_1 - z_0)), \quad (4.54)$$

$$D_a(z) = \frac{\Theta(-z_0)}{4}(\Theta(z_1 + z_0) - \Theta(z_1 - z_0)). \quad (4.55)$$

Devolviendo el cambio ($z^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$) podemos obtener una expresión para los potenciales, en términos de las funciones de Green que además es solución de la ecuación de onda inhomogénea.

Es oportuno señalar que el caso $1 + 1$ dimensional, donde no existe campo magnético, y el campo eléctrico tiene una sola componente, el resolver las ecuaciones de Maxwell con fuentes empleando el uso de potenciales retardados o adelantados no representa una simplificación en relación a la integración directa de las ecuaciones de Maxwell (ver el Apéndice A).

Capítulo 5

Partículas de Wong.

5.1. Obtención de las ecuaciones de Wong.

En este capítulo obtendremos las ecuaciones de Wong, propuestas para describir la dinámica clásica de una partícula con carga cromoelectrica interactuando con el campo de Yang-Mills, aplicando el principio variacional a la acción propuesta por Balachandran. A estas partículas con carga no abeliana las denominaremos partículas de Wong [3][4][8].

La acción en cuestión es

$$\begin{aligned} S_{B-W} &= S_{Y-M} + S_{PART} + S_{INT}, \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - m \int d\tau \sqrt{(\dot{z}_i^\mu(\tau))^2} - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\tau \text{Tr} \left(K_i g_i^{-1}(\tau) D_\tau g_i(\tau) \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a T^a$ representa el campo tensorial de Yang-Mills, las matrices $g_i(\tau)$ pertenecen a $SU(N)$ y representan grados de libertad adicionales asociados con las n partículas. Así mismo, se definen las matrices, $I_i(\tau) = ig(g_i(\tau) K_i g_i^{-1}(\tau)) = I_i^a T^a$ y $K_i = K_i^a T^a$ que son elementos del álgebra. Finalmente, $z_i(\tau)$ denota la línea de mundo de la partícula i -ésima.

El primer término de la acción, S_{Y-M} , corresponde a la acción de Yang Mills libre, el segundo, S_{PART} , al de la partícula libre y el tercero, S_{INT} es el término de interacción.

Las transformaciones de calibre son

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^\Omega = \Omega^{-1} A_\mu \Omega + \frac{1}{ig} \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega, \quad (5.2)$$

$$K_i \rightarrow K_i^\Omega = K_i, \quad (5.3)$$

$$g_i \rightarrow g_i^\Omega = \Omega^{-1} g_i, \quad (5.4)$$

donde $\Omega \in SU(N)$.

Como demostramos en el capítulo 3, la acción de Yang-Mills libre es invariante ante este tipo de transformaciones. Sabiendo que la derivada covariante $D_\tau g_i(\tau) = \partial_\tau g_i + A_i(\tau) g_i(\tau)$,

con $A_i(\tau) = igA_\mu(z_i(\tau))\dot{z}_i^\mu(\tau)$, transforma como las matrices $g_i(\tau)$ podemos verificar la invariancia de calibre del término de interacción

$$\begin{aligned} L_{INT}^\Omega &= -2 \sum_i \text{Tr}(K_i^\Omega g_i^{-1\Omega} (D_\tau g_i)^\Omega) = -2 \sum_i \text{Tr}(K_i g_i^{-1} \Omega \Omega^{-1} (D_\tau g_i)) \\ &= -2 \sum_i \text{Tr}(K_i g_i^{-1} (D_\tau g_i)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por lo tanto la acción de Balachandran-Wong es invariante ante estas transformaciones de calibre.

5.1.1. Ecuaciones de Movimiento

Debido a que las variables dinámicas son $A_\mu(x)$, $z_i^\mu(\tau)$ y $g_i(\tau)$, nos conviene reescribir el término de interacción S_{INT} haciendo explícito el campo $A_\mu(x)$

$$\begin{aligned} S_{INT} &= -2 \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \text{Tr}(K_i g_i^{-1}(\tau) D_\tau g_i(\tau)) \\ &= -2 \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \left\{ \text{Tr}(K_i g_i^{-1}(\tau) \dot{g}_i(\tau)) + ig \text{Tr}(K_i g_i^{-1}(\tau) A_\mu(z_i(\tau)) \dot{z}_i^\mu(\tau) g_i(\tau)) \right\} \\ &= -2 \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \text{Tr}(K_i g_i^{-1}(\tau) \dot{g}_i(\tau)) - 2ig \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) \text{Tr}(K_i g_i^{-1}(\tau) A_\mu(z_i(\tau)) g_i(\tau)) \\ &= -2 \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \text{Tr}(K_i g_i^{-1}(\tau) \dot{g}_i(\tau)) - 2 \int d^4x \text{Tr}(j^\mu(x) A_\mu(x)), \end{aligned} \quad (5.6)$$

con $j^\mu(x) = \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) I_i(\tau) \delta^4(x - z_i(\tau))$ la densidad de corriente de Wong.

Para determinar las ecuaciones de movimiento de la teoría utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Xi_\sigma^d} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \Xi_\sigma^d)} \right) = 0, \quad (5.7)$$

donde Ξ representa cualquiera de las variables dinámicas de la teoría. Entonces respecto a $A_\mu(x)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Y-M}}{\partial A_\sigma^d} = \frac{\partial}{\partial A_\sigma^d} \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a \right) = g F^{\mu\sigma a} f^{bda} A_\mu^b, \quad (5.8)$$

donde hicimos un cambio de índices a conveniencia. El término de interacción también contribuye en la ecuación dinámica pues

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{INT}}{\partial A_\sigma^d} = \frac{\partial}{\partial A_\sigma^d} \left(-j^{\mu a}(x) A_\mu^a(x) \right) = -j^{\sigma d}. \quad (5.9)$$

Finalmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma^d} = \frac{\partial \mathcal{L}_{Y-M}}{\partial A_\sigma^d} + \frac{\partial \mathcal{L}_{INT}}{\partial A_\sigma^d} = g f^{bda} F^{\mu\sigma a} A_\mu^b - j^{\sigma d}. \quad (5.10)$$

También necesitamos saber que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma^d)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{Y-M}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma^d)} = -F^{\rho\sigma d}, \quad (5.11)$$

por lo tanto, la ecuación de Euler Lagrange queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma^d} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma^d)} \right) = g f^{bda} F^{\mu\sigma a} A_\mu^b - j^{\sigma d} + \partial_\rho F^{\rho\sigma d} = 0, \quad (5.12)$$

de donde podemos reescribir

$$\begin{aligned} \partial_\rho F^{\rho\sigma d} + g f^{bda} F^{\mu\sigma a} A_\mu^b &= j^{\sigma d} \\ \partial_\rho F^{\rho\sigma} + i g [A_\rho, F^{\rho\sigma}] &= j^\sigma \\ D_\rho F^{\rho\sigma} &= j^\sigma, \end{aligned} \quad (5.13)$$

y notamos que corresponden a las ecuaciones de movimiento de Yang Mills con fuentes.

Las matrices $g_i(\tau)$ representan grados de libertad adicionales asociados a las partículas y pertenecen al grupo de simetría $SU(N)$, entonces asumimos que los elementos del grupo son parametrizados por un conjunto de $N^2 - 1$ variables independientes $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $g_i(\xi) = \exp\{-i\xi_i^a T^a\}$. Además por ser una representación de un grupo de Lie, omitiendo el índice i por brevedad

$$g(\epsilon)g(\xi) = g(\alpha(\epsilon, \xi)), \quad (5.14)$$

desarrollando $\alpha(\epsilon, \xi)$ hasta primer orden tenemos que

$$\alpha(\epsilon, \xi) = a + b\epsilon + c\xi + \Theta(\epsilon^2, \xi^2), \quad (5.15)$$

luego, usando que $\alpha(0, \xi) = \xi$ y $\alpha(\epsilon, 0) = \epsilon$ tenemos que $a = 0$ y $b = c = 1$, por lo tanto

$$\alpha(\epsilon, \xi) = \epsilon + \xi + \Theta(\epsilon^2, \xi^2). \quad (5.16)$$

Entonces podemos ver que

$$\begin{aligned} g(\delta\epsilon)g(\xi) &= g(\alpha(\delta\epsilon, \xi)) = g\left(\alpha(0, \xi) + \frac{\partial\alpha(\epsilon, \xi)}{\partial\epsilon^b} \Big|_{\epsilon=0} \delta\epsilon^b\right) \\ &= g\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial\epsilon^b} \Big|_{\epsilon=0} \delta\epsilon^b\right) = g(\xi) + \frac{\partial g}{\partial\xi^c} \frac{\partial\alpha^c}{\partial\epsilon^b} \Big|_{\epsilon=0} \delta\epsilon^b, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde expandimos g en torno a ξ . Por otro lado

$$g(\delta\epsilon)g(\xi) = (1 - i\delta\epsilon^a T^a)g(\xi) = g(\xi) + \frac{\partial g}{\partial\xi^c} N^{cb} \delta\epsilon^b, \quad (5.18)$$

con $N^{cb} = \frac{\partial\alpha^c(\epsilon, \xi)}{\partial\epsilon^b} \Big|_{\epsilon=0}$.
Entonces tenemos que

$$-iT^a g(\xi) = \frac{\partial g}{\partial\xi^c} N^{ca}, \quad (5.19)$$

donde la matriz N^{ca} es invertible como se muestra a continuación. De no serlo, existirían $N^2 - 1$ parámetros x^a , al menos uno distinto de cero, tal que $N^{ca}x^a = 0$, por lo tanto

$$-ix^a T^a g(\xi) = \frac{\partial g}{\partial \xi^a} N^{ca} x^a = 0, \quad (5.20)$$

de donde concluimos que $x^a T^a = 0$. Pero esto contradice la independencia lineal de los generadores del grupo, entonces por reducción al absurdo la matriz N^{ca} es invertible y tenemos que

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^c} = -i(N^{-1})^{ac} T^a g(\xi). \quad (5.21)$$

Además, como sabemos que $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \xi^a} \dot{\xi}^a$ y $\frac{\partial g^{-1}(\xi)}{\partial \xi^a} = -g^{-1}(\xi) \frac{\partial g}{\partial \xi^a} g^{-1}(\xi)$, podemos determinar las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L_{INT}}{\partial \xi_j^a} - d_\tau \left(\frac{\partial L_{INT}}{\partial \xi_j^a} \right) = 0, \quad (5.22)$$

con

$$L_{INT} = -2 \sum_i Tr(K_i g_i^{-1}(\tau) D_\tau g_i(\tau)) = -2 \sum_i Tr(K_i g_i^{-1}(\tau) (\partial_\tau g_i(\tau) + A_i(\tau) g_i(\tau))) \quad (5.23)$$

Entonces el primer término de la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{INT}}{\partial \xi_j^a} &= -2Tr \left(-K_j g^{-1}(\xi) \frac{\partial g}{\partial \xi_j^a} g^{-1}(\xi) (\dot{g}_j + A_j g_j) \right. \\ &\quad \left. + K_j g_j^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_j^a \partial \xi_j^b} \dot{\xi}^b + K_j g_j^{-1} A_j \frac{\partial g_j}{\partial \xi_j^a} \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

y el otro término de la ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial L_{INT}}{\partial \dot{\xi}_j^a} = -2Tr \left(K_i g_i^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j^a} \right), \quad (5.25)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L_{INT}}{\partial \dot{\xi}_j^a} \right) &= -2Tr \left(K_j \dot{g}_j^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j^a} + K_j g_j^{-1} \frac{\partial \dot{g}_j}{\partial \xi_j^a} \right) \\ &= -2Tr \left(-K_j g_j^{-1} \dot{g}_j g_j^{-1} \frac{\partial g_j}{\partial \xi_j^a} + K_j g_j^{-1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial \xi_j^a \partial \xi_j^b} \dot{\xi}^b \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Las ecuaciones dinámicas de ξ_i^a son

$$\frac{\partial L_{INT}}{\partial \xi_i^a} - \partial_\tau \left(\frac{\partial L_{INT}}{\partial \dot{\xi}_i^a} \right) = Tr \left(\frac{1}{g} T^c [I_i(\tau), A_i(\tau) + \dot{g}_i g_i^{-1}] \right) = 0, \quad (5.27)$$

donde hemos hecho uso del teorema de Trazas y el hecho que $(N^{-1})^{ca} N^{ad} = \delta^{cd}$. Recordando que $I_i(\tau) = i g g_i K_i g_i^{-1}$ es fácil ver que

$$\dot{I}_i(\tau) = [\dot{g} g_i^{-1}, I_i(\tau)], \quad (5.28)$$

con lo que finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben

$$\dot{I}_i(\tau) + [A_i(\tau), I_i(\tau)] = 0. \quad (5.29)$$

Ahora, para determinar las ecuaciones de movimiento respecto a $z_i^\mu(\tau)$

$$\frac{\partial L_{B-W}}{\partial z_j^\sigma} - \partial_\tau \left(\frac{\partial L_{B-W}}{\partial \dot{z}_j^\sigma} \right) = 0, \quad (5.30)$$

con

$$\frac{\partial L_{B-W}}{\partial z_j^\sigma} = -2\dot{z}_j^\mu(\tau) \text{Tr}(I_j(\tau) \frac{\partial A_\mu(z_j)}{\partial z_j^\sigma}), \quad (5.31)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{B-W}}{\partial \dot{z}_j^\sigma} &= \frac{\partial L_{PART}}{\partial \dot{z}_j^\sigma} + \frac{\partial L_{INT}}{\partial \dot{z}_j^\sigma} \\ &= -m \frac{\dot{z}_i^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{z}_i^\mu(\tau)^2}} \delta_\mu^\sigma \delta_{ij} - 2\delta_\mu^\sigma \delta_{ij} \text{Tr}(I_i(\tau) A_\mu(z_i(\tau))). \end{aligned} \quad (5.32)$$

El otro término de la ecuación es entonces

$$\partial_\tau \left(\frac{\partial L_{B-W}}{\partial \dot{z}_i^\sigma} \right) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(m \frac{\dot{z}_i^\sigma(\tau)}{\sqrt{\dot{z}_i^\sigma(\tau)^2}} \right) - 2\text{Tr} \left(\dot{I}_i(\tau) A_\sigma(z_i) + I_i(\tau) \frac{\partial A_\sigma}{\partial z_i^\mu} \dot{z}_i^\mu \right), \quad (5.33)$$

podemos reescribir uno de estos términos en función de las ecuaciones dinámicas de las matrices $g_i(\tau)$. Observando (5.29) tenemos que

$$\dot{I}_i(\tau) = -[A_i(\tau), I_i(\tau)], \quad (5.34)$$

por lo tanto

$$\text{Tr}(\dot{I}_i(\tau) A_\sigma(z_i)) = \dot{z}_i^\mu(\tau) \text{Tr}(ig I_i(\tau) [A_\mu(z_i), A_\sigma(z_i)]), \quad (5.35)$$

ahora las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\partial L_{B-W}}{\partial z_j^\sigma} - \partial_\tau \left(\frac{\partial L_{B-W}}{\partial \dot{z}_j^\sigma} \right) = 0, \quad (5.36)$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(m \frac{\dot{z}_i^\sigma(\tau)}{\sqrt{\dot{z}_i^\sigma(\tau)^2}} \right) = -2\dot{z}_i^\mu(\tau) \text{Tr} \left(I_i(\tau) F_{\mu\sigma} \right). \quad (5.37)$$

que constituyen una generalización de la fuerza de Lorentz al caso no Abelian.

Finalmente las ecuaciones de movimiento respecto a las variables dinámicas son

$$\begin{aligned} D_\rho F^{\rho\sigma} &= j^\sigma, \\ \dot{I}_i(\tau) &= -[A_i(\tau), I_i(\tau)], \\ \frac{\partial}{\partial\tau} \left(m \frac{\dot{z}_i^\sigma(\tau)}{\sqrt{\dot{z}_i^\sigma(\tau)^2}} \right) &= -2\dot{z}_i^\mu(\tau) \text{Tr} \left(I_i(\tau) F_{\mu\sigma} \right). \end{aligned}$$

Obtuvimos las ecuaciones dinámicas que describen la interacción de n partículas de Wong con carga no abeliana, con el campo de Yang Mills. Por otra parte, puede verse que la ecuación para la carga cromoelectrónica (5.29) surge como una condición de consistencia de las ecuaciones de Yang Mills. En efecto, si se toma la cuatridivergencia covariante de la ecuación (5.13), el miembro izquierdo es idénticamente nulo en virtud de las identidades de Bianchi. Por tanto el miembro derecho debe anularse, y esto, en última instancia equivale a la ecuación del transporte paralelo de la carga cromoelectrónica de cada partícula de Wong.

Capítulo 6

Soluciones Clásicas del campo de Yang-Mills en $D = 1 + 1$

A continuación estudiaremos las soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento de Yang-Mills sin fuentes en $D = 1 + 1$, también para el caso en que la fuente es puntual y estática, y luego la solución exacta para una fuente general [1][2][9]. Finalmente particularizaremos esta solución al caso en que las fuentes dependan del tiempo explícitamente.

6.1. Yang-Mills sin fuentes

La acción para la teoría de los campos de calibre de Yang-Mills libres es

$$S_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = -\frac{1}{2} \int d^2x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (6.1)$$

con $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$ y $A_\mu = A_\mu^a T^a$ elementos del álgebra de Lie. Mediante un Principio Variacional podemos obtener las ecuaciones de movimiento de la teoría, como se vió en el capítulo anterior

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0, \quad (6.2)$$

donde D_μ es la derivada covariante y asumimos que los campos tienden a cero en el infinito. Si expandimos (6.2) tenemos que

$$\begin{cases} D_0 F^{01} = \partial_0 F^{01}(t, x^1) + ig[A_0(t, x^1), F^{01}(t, x^1)] = 0, \\ D_1 F^{10} = \partial_1 F^{10}(t, x^1) + ig[A_1(t, x^1), F^{10}(t, x^1)] = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Fijando el calibre temporal ($A_0 = 0$) obtenemos que: $F^{01} = \partial^0 A^1$ y $F^{10} = -\partial^0 A^1$, y las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$\ddot{A}^1 = 0, \quad (6.4)$$

$$\partial_1(-\dot{A}^1) + ig[A_1, -\dot{A}^1] = 0. \quad (6.5)$$

La solución de (6.4) viene dada por

$$A^1(t, x^1) = C(x^1)t + K(x^1), \quad (6.6)$$

donde $C(x^1) = C_a(x^1)T^a$ y $K(x^1) = K_a(x^1)T^a$ son elementos del álgebra de Lie, y por lo tanto matrices. Entonces insertando en (6.5) obtenemos que

$$\frac{\partial C(x^1)}{\partial x^1} = ig[K(x^1), C(x^1)] = igK(x^1)C(x^1) - igC(x^1)K(x^1), \quad (6.7)$$

dado que la matriz $C(x)$ conmuta consigo misma. Esta es una ecuación diferencial de primer orden en derivadas parciales cuya solución general vendrá dada por

$$C(x^1) = \Omega^\dagger(x^1)C(-\infty)\Omega(x^1), \quad (6.8)$$

con $\Omega(x^1) = \mathcal{P} \exp \left\{ -ig \int_{-\infty}^{x^1} dx' K(x') \right\}$ la exponencial camino-ordenada del elemento del álgebra $K(x)$ (que no guarda relación alguna con la “ K ” que aparece en las ecuaciones de Wong). Adoptamos como convención el ordenamiento ascendente de los caminos. Por último la matriz constante $C(-\infty)$ depende de las condiciones iniciales.

Para probar que (6.8) es solución de la ecuación diferencial (6.7), consideremos

$$C'(x^1) = \Omega'^\dagger(x^1)C(-\infty)\Omega(x^1) + \Omega^\dagger(x^1)C(-\infty)\Omega'(x^1). \quad (6.9)$$

Tomemos la derivada de la exponencial camino-ordenada

$$\Omega'(x^1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega(x^1 + \epsilon) - \Omega(x^1)}{\epsilon}, \quad (6.10)$$

con

$$\Omega(x^1 + \epsilon) = \Omega(x^1) \exp \left\{ -igK(x^1 + \epsilon)\epsilon \right\}, \quad (6.11)$$

entonces

$$\Omega'(x^1) = -ig\Omega(x^1)K(x^1), \quad (6.12)$$

$$\Omega'^\dagger(x^1) = igK(x^1)\Omega^\dagger(x^1), \quad (6.13)$$

puesto que $K(x^1) = K_a(x^1)T^a$ y $T^{a\dagger} = T^a$, entonces $K^\dagger(x^1) = K(x^1)$. Finalmente, para probar que $C(x^1)$ es solución

$$C'(x^1) = igK(x^1)C(x^1) - igC(x^1)K(x^1) = ig[K(x^1), C(x^1)], \quad (6.14)$$

demostramos así que $C(x^1)$ es solución de la ecuación diferencial (6.7), por lo tanto

$$A^1(t, x^1) = \Omega(x^1)^\dagger C(-\infty)\Omega(x^1)t + K(x^1), \quad (6.15)$$

$$E(x^1) = -\Omega(x^1)^\dagger C(-\infty)\Omega(x^1), \quad (6.16)$$

representan el campo de calibre y el campo eléctrico para una teoría de Yang Mills sin fuentes en $D = 1 + 1$, donde $E(x^1) = F^{10} = -\dot{A}^1$. Podemos notar que el campo eléctrico será constante salvo una transformación de calibre independiente del tiempo.

6.2. Yang-Mills con fuentes. Cargas puntuales estáticas.

La acción para la teoría de los campos de calibre de Yang-Mills con fuentes es

$$S = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - 2\text{Tr}(j^\mu A_\mu) \right\}, \quad (6.17)$$

notamos que a la acción de Yang-Mills libre le agregamos un término que corresponde a la interacción y acopla las corrientes j^μ con el campo de calibre A_μ . Nuevamente mediante un Principio Variacional obtenemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] - j^\nu = 0 \implies D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (6.18)$$

y entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} D_0 F^{01} = \partial_0 F^{01}(t, x^1) + ig[A_0(t, x^1), F^{01}(t, x^1)] = j^1, \\ D_1 F^{10} = \partial_1 F^{10}(t, x^1) + ig[A_1(t, x^1), F^{10}(t, x^1)] = j^0 = \rho. \end{cases} \quad (6.19)$$

Fijando el calibre temporal ($A_0 = 0$) obtenemos que $F^{01} = \partial^0 A^1$, y las ecuaciones de movimiento pasan a ser

$$\ddot{A}^1 = j^1, \quad (6.20)$$

$$\partial_1(-\dot{A}^1) + ig[A_1, -\dot{A}^1] = \rho. \quad (6.21)$$

Si consideramos fuentes tipo delta de Dirac.

$$j^\mu = (\rho, 0), \quad (6.22)$$

$$\rho(x^1) = \delta(x^1 - x_p) I_a T^a, \quad (6.23)$$

donde I_a , que es un vector constante en el espacio interno, representa la carga que porta una partícula estática en el punto $x^1 = x_p$. Es importante destacar que la corriente j^μ debe obedecer una ecuación de consistencia (en este caso es la ecuación de continuidad) que en este caso se cumple de manera trivial; volveremos sobre este punto en la próxima sección. Las ecuaciones de movimiento quedarían de la siguiente manera

$$\ddot{A}^1 = 0, \quad (6.24)$$

$$\partial_1(-\dot{A}^1) + ig[A_1, -\dot{A}^1] = \delta(x^1 - x_p) I_a T^a. \quad (6.25)$$

Como la densidad de corriente es igual a cero, análogamente al caso sin fuentes, la solución de (6.24) viene dada por

$$A^1(t, x^1) = C(x^1)t + K(x^1), \quad (6.26)$$

donde $C(x^1)$ y $K(x^1)$ son elementos del álgebra de Lie. Luego, insertando en (6.25) obtenemos

$$C'(x^1) - ig[K(x^1), C(x^1)] = -\rho(x^1), \quad (6.27)$$

donde $C(x^1) = C_{HOMOGENEA} + C_{PARTICULAR}$.

Para encontrar una solución de (6.27), vamos a inspirarnos en la siguiente ecuación diferencial “no matricial”

$$C'(x^1) - igK(x^1)C(x^1) = -\rho(x^1), \quad (6.28)$$

cuya solución viene dada por

$$C(x^1) = e^{-ig \int_{-\infty}^{x^1} K(x') dx'} \left[- \int_{-\infty}^{x^1} \rho(x') e^{ig \int_{-\infty}^{x'} K(y') dy'} dx' + C(-\infty) \right]. \quad (6.29)$$

Partiendo de este resultado proponemos que la solución de (6.27) es

$$C(x^1) = \Omega^\dagger(x^1) \Delta(x^1) \Omega(x^1), \quad (6.30)$$

$$\text{con } \Delta(x^1) = - \int_{-\infty}^{x^1} \Omega(x') \rho(x') \Omega^\dagger(x') dx' + C(-\infty).$$

Para comprobar que es solución, calculemos

$$C'(x^1) = \Omega'^\dagger(x^1) \Delta(x^1) \Omega(x^1) + \Omega^\dagger(x^1) \Delta'(x^1) \Omega(x^1) + \Omega^\dagger(x^1) \Delta(x^1) \Omega'(x^1), \quad (6.31)$$

donde

$$\Omega'(x^1) = -ig\Omega(x^1)K(x^1), \quad (6.32)$$

$$\Omega'^\dagger(x^1) = igK(x^1)\Omega^\dagger(x^1), \quad (6.33)$$

$$\Delta'(x^1) = -\Omega(x^1)\rho(x^1)\Omega^\dagger(x^1), \quad (6.34)$$

entonces, insertando en (6.31) tenemos que

$$C'(x^1) = ig[K(x^1), C(x^1)] - \rho(x^1). \quad (6.35)$$

Por lo tanto (6.30) sí es solución de la ecuación diferencial (6.27). Además notamos que contiene dos términos, el primero asociado a la fuente y que es la solución particular; el segundo término corresponde a la solución homogénea.

Una vez obtenido el $C(x)$, podemos escribir el potencial de calibre y el campo eléctrico

$$A^1(t, x^1) = \{ \Omega^\dagger(x^1) [- \int_{-\infty}^{x^1} \Omega(x') \rho(x') \Omega^\dagger(x') dx' + C(-\infty)] \Omega(x^1) \} t + K(x^1), \quad (6.36)$$

$$E(x^1) = \Omega^\dagger(x^1) [\int_{-\infty}^{x^1} \Omega(x') \rho(x') \Omega^\dagger(x') dx' - C(-\infty)] \Omega(x^1). \quad (6.37)$$

Si $\rho(x^1) = \delta(x^1 - x_p)I_a T^a = \delta(x^1 - x_p)I$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{x^1} \Omega(x') \rho(x') \Omega^\dagger(x') dx' = \int_{-\infty}^{x^1} \Omega(x') \delta(x' - x_p) I \Omega^\dagger(x') dx' = \Theta(x^1 - x_p) \Omega(x_p) I \Omega^\dagger(x_p) \quad (6.38)$$

considerando entonces todos los valores posibles de x^1 . Utilizando la $\rho(x^1)$ podemos reescribir el campo eléctrico como

$$E(x^1) = \Theta(x^1 - x_p) \Omega^\dagger(x^1) \Omega(x_p) I_a T^a \Omega^\dagger(x_p) \Omega(x^1) - \Omega^\dagger(x^1) C(-\infty) \Omega(x^1). \quad (6.39)$$

Ahora, haciendo una transformación de calibre independiente del tiempo

$$E^\Omega = \Theta(x^1 - x_p) \Omega(x_p) I_a T^a \Omega^\dagger(x_p) - C(-\infty), \quad (6.40)$$

e imponiendo que $E^\Omega(\infty) = -E^\Omega(-\infty)$ obtenemos

$$C(-\infty) = \frac{1}{2} \Omega(x_p) I \Omega^\dagger(x_p). \quad (6.41)$$

Entonces el campo cromoelectrónico es

$$E^\Omega(x^1) = \left\{ \Theta(x^1 - x_p) - \frac{1}{2} \right\} \Omega(x_p) I \Omega^\dagger(x_p) \quad (6.42)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \Theta(x^1 - x_p) - \Theta(x_p - x^1) \right\} \Omega(x_p) I \Omega^\dagger(x_p), \quad (6.43)$$

de donde se puede notar que para una partícula puntual y estática, ubicada en el punto x_p , el campo eléctrico $E^\Omega(x^1)$ a la derecha del punto es uniforme y vale $\frac{1}{2} \Omega(x_p) I \Omega^\dagger(x_p)$, mientras que a la izquierda del punto cambia de signo.

6.3. Solución exacta de Yang Mills con fuentes generales en $D = 1 + 1$

Consideremos ahora el caso en el que las fuentes son generales. Las ecuaciones de movimiento de Yang-Mills son

$$\ddot{A}^1 = j, \quad (6.44)$$

$$\partial_1(-\dot{A}^1) + ig[A_1, -\dot{A}^1] = \rho, \quad (6.45)$$

donde la densidad de corriente j y la densidad de carga ρ , aún siendo generales, deben estar vinculadas por la ecuación de continuidad no abeliana. En efecto, se cumple que

$$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = D_\nu j^\nu, \quad (6.46)$$

pero puede verse que

$$D_\nu j^\nu = -\frac{1}{2} [D_\mu, D_\nu] F^{\mu\nu} = -\frac{ig}{2} [F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0, \quad (6.47)$$

de aquí obtenemos la ecuación de continuidad o la ecuación de la conservación covariante de la carga

$$D_\nu j^\nu = D_0 \rho + D_1 j = \partial_0 \rho(x, t) + \partial_1 j(x, t) + ig[A_1, j(x, t)] = 0. \quad (6.48)$$

Es fácil comprobar que esta relación se verifica para el caso de la sección anterior.

Tenemos hasta ahora las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{A}^1 = j(x, t), \\ \partial_1(-\dot{A}^1) + ig[A_1, -\dot{A}^1] = \rho(x, t), \\ \partial_0 \rho(x, t) + \partial_1 j(x, t) + ig[A_1, j(x, t)] = 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Integrando en el tiempo (6.44) en el intervalo comprendido entre t_0 y t tenemos

$$\dot{A}^1(x, t) = \int_{t_0}^t j(x, t') dt' + C(x, t_0), \quad (6.50)$$

con $C(x, t_0) = \dot{A}^1(x, t_0)$. En consecuencia de (6.50) obtenemos el campo de calibre

$$A^1(x, t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt' + C(x, t_0)t + D(x, t_0), \quad (6.51)$$

con $D(x, t_0) = K(x, t_0) - C(x, t_0)t_0$ y $K(x, t_0) = A^1(x, t_0)$.

Insertando ahora (6.50) y (6.51) en (6.45) tenemos

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = & - \int_{t_0}^t j'(x, t') dt' - C'(x, t_0) + ig \left\{ \left[- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', - \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] \right. \\ & + \left[- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', -C(x, t_0) \right] + \left[-C(x, t_0)t, - \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] \\ & + \left[-C(x, t_0)t, -C(x, t_0) \right] + \left[-D(x, t_0), - \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] \\ & \left. + \left[-D(x, t_0), C(x, t_0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Podemos reescribir ciertos términos observando que

$$\int_{t_0}^t j(x, t') t' dt' = t \int_{t_0}^t j(x, t') dt' - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', \quad (6.53)$$

y por lo tanto, la segunda línea de (6.52) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \left[- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', -C(x, t_0) \right] + \left[-C(x, t_0)t, - \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] = \\ & \left[C(x, t_0), \int_{t_0}^t j(x, t') t' dt' \right]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Con estos cambios, $\rho(x, t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = & - \int_{t_0}^t j'(x, t') dt' - C'(x, t_0) + ig \left\{ \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] \right. \\ & + \left[C(x, t_0), \int_{t_0}^t (j(x, t') t') dt' \right] + \left[D(x, t_0), \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] \\ & \left. + \left[D(x, t_0), C(x, t_0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Es posible encontrar otra expresión para $\rho(x, t)$ integrando en el tiempo la ecuación de continuidad (6.48), esto es

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = & - \int_{t_0}^t j'(x, t') dt' - ig \left\{ \int_{t_0}^t dt' \left[- \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} j(x, t''') dt''' dt'', j(x, t') \right] \right. \\ & + \int_{t_0}^t dt' \left[-C(x, t_0), j(x, t') t' \right] + \left[-D(x, t_0), \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] \left. \right\} \\ & + \rho(x, t_0). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Sabiendo que

$$\partial_0 \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] = \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', j(x, t) \right], \quad (6.57)$$

entonces integrando en el tiempo

$$\begin{aligned} \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} j(x, t'') dt'' dt', \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \right] &= \int_{t_0}^t dt' \left[\int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} j(x, t''') dt''' dt'', j(x, t') \right] \\ &= - \int_{t_0}^t dt' \left[- \int_{t_0}^{t'} \int_{t_0}^{t''} j(x, t''') dt''' dt'', j(x, t') \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

Ahora podemos comparar ambas expresiones (6.55) y (6.56) y obtener

$$C'(x, t_0) - ig \left[K(x, t_0), C(x, t_0) \right] = -\rho(x, t_0). \quad (6.59)$$

Proponemos la siguiente solución notando que esta ecuación diferencial se parece a la ecuación correspondiente al caso de fuentes estáticas puntuales (6.27)

$$C(x, t_0) = \Omega^\dagger(x) \Delta(x) \Omega(x), \quad (6.60)$$

con

$$\Delta(x) = - \int_{-\infty}^x \Omega(x') \rho(x', t_0) \Omega^\dagger(x') dx' + C(-\infty, t_0), \quad (6.61)$$

$$\Omega(x) = \mathcal{P} \exp \left\{ -ig \int_{-\infty}^x dx' K(x, t_0) \right\}, \quad (6.62)$$

donde $\Omega(x)$ es la exponencial camino-ordenada del elemento del álgebra $K(x, t_0)$.

Para comprobar que (6.60) es solución de (6.59) hacemos

$$C'(x, t_0) = \Omega^{\dagger'}(x) \Delta(x) \Omega(x) + \Omega^\dagger(x) \Delta'(x) \Omega(x) + \Omega(x)^\dagger \Delta(x) \Omega'(x), \quad (6.63)$$

donde

$$\Omega'(x) = -ig \Omega(x) K(x, t_0), \quad (6.64)$$

$$\Omega^{\dagger'}(x) = ig K(x, t_0) \Omega^\dagger(x), \quad (6.65)$$

$$\Delta'(x) = -\Omega(x) \rho(x, t_0) \Omega^\dagger(x), \quad (6.66)$$

insertando estas expresiones en (6.63) obtenemos nuevamente la ecuación diferencial (6.59), probando así que (6.60) es solución.

Por lo tanto, recordando que $E(x, t) = -\dot{A}^1(x, t)$ y utilizando (6.60) podemos decir que

$$\begin{aligned} E(x, t) &= - \int_{t_0}^t j(x, t') dt' - C(x, t_0) \\ &= - \int_{t_0}^t j(x, t') dt' \\ &\quad + \Omega^\dagger(x) \left(\int_{-\infty}^x \Omega(x') \rho(x', t_0) \Omega^\dagger(x') dx' - C(-\infty, t_0) \right) \Omega(x). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Esta expresión representa el campo eléctrico para la teoría de Yang-Mills con fuentes generales en $D = 1 + 1$. Podemos notar de (6.56) que, si $j(x, t) = 0$, entonces $\rho(x, t_0) = \rho(x, t)$, recuperando así la solución para fuentes estáticas puntuales. Si además se impone que $\rho(x, t) = 0$, recuperamos el campo eléctrico constante, salvo una transformación de calibre, para el caso sin fuentes.

Finalmente, nótese que en virtud de la ecuación de continuidad, ρ y j no pueden especificarse de manera independiente. Esto se refleja en la solución del siguiente modo: j puede darse para todo t y todo x , pero una vez hecho esto, ρ sólo puede darse para un t_0 arbitrario y para todo x .

6.4. Una solución a las ecuaciones de Yang-Mills en $D = 1 + 1$ con densidad de corriente dependiente del tiempo.

Una vez determinada la solución general de Yang Mills en $D = 1 + 1$ con fuentes generales (6.67), podemos particularizar esta solución a algunos casos especiales. Para ello es necesario conocer la densidad de corriente para cualquier posición y tiempo $j(x, t)$, y la densidad de carga en un tiempo fijo t_0 para cualquier posición $\rho(x, t_0)$.

En el caso en que las fuentes sean n partículas de Wong, tenemos que

$$J^\mu(x, t) = \sum_i \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) I_i(\tau) \delta^2(x^\mu - z_i^\mu(\tau)) = (\rho(x, t), j(x, t)), \quad (6.68)$$

donde $z_i^\mu(t) = (t, z_i(t))$ y $\dot{z}_i^\mu(t)$ corresponden con la línea de mundo y la cuatriveLOCIDAD de la partícula i -ésima respectivamente, $I_i(t)$ es la carga cromoelectrica, solución de la ecuación de transporte paralelo de Wong (5.29) y a la $J^\mu(x, t)$ la denominamos densidad de corriente de Wong. Por lo tanto

$$\rho(x, t) = \sum_i I_i(t) \delta(x - z_i(t)), \quad (6.69)$$

$$j(x, t) = \sum_i \dot{z}_i(t) I_i(t) \delta(x - z_i(t)). \quad (6.70)$$

Cabe destacar que como $I_i(t)$ es solución de la ecuación de transporte paralelo, es necesario conocer el campo de calibre para todo x y t , es decir $A^1(x, t)$ que viene dado por la expresión (6.51), que a su vez contiene la densidad de carga en un tiempo fijo $\rho(x, t_0)$, por lo tanto no podemos utilizar la solución general (6.67) para particularizarla al caso de n partículas de Wong.

En lugar de eso proponemos entonces las siguientes fuentes

$$\rho(x, t_0) = \sum_i I'_i(t_0) \delta(x - z_i(t_0)), \quad (6.71)$$

$$j(x, t) = \sum_i \dot{z}_i(t) I'_i(t) \delta(x - z_i(t)), \quad (6.72)$$

donde $I'(t)$ no necesariamente satisface la ecuación del transporte paralelo de Wong (5.29) y debe pensarse como una carga cromoelectrica dada. La ecuación de continuidad se garantiza desde el momento que $\rho(x, t)$ no está dada sino que debe calcularse en función de $j(x, t)$ y de $\rho(x, t_0)$ precisamente a través de la ecuación de continuidad. En este sentido, esta propuesta para las fuentes no corresponde a la de Wong, aunque es reminiscente de la misma, puesto que se toma una densidad de corriente con soporte en la línea de mundo de partículas puntuales.

El campo cromoelectrico para las densidades de carga y corriente cromoelectricas puntuales, dadas por (6.71) y (6.72), queda definido entonces como

$$\begin{aligned} E(x, t) = & - \sum_i \int_{t_0}^t \dot{z}_i(t') I'_i(t') \delta(x - z_i(t')) dt' \\ & + \Omega^\dagger(x) \left\{ \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x - x') \Omega(x') I'_i(t_0) \delta(x' - z_i(t_0)) \Omega^\dagger(x') dx' \right. \\ & \left. - C(-\infty, t_0) \right\} \Omega(x). \end{aligned} \quad (6.73)$$

Si ahora $I'(t)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial matricial

$$\dot{I}'_i(t) + [A_i(z_i(t), t_0), I'_i(t)] = 0, \quad (6.74)$$

donde $A_i(z_i(t), t_0) = ig A_1(z_i(t), t_0) \dot{z}_i(t)$, entonces la solución es $I'_i(t) = U_i^{-1}(t_0, t) I'_i(t_0) U_i(t_0, t)$ con $U_i(t_0, t) = T \exp \left\{ \int_{t_0}^t A_i(z_i(t'), t_0) dt' \right\}$ la exponencial tiempo-ordenada del potencial $A_i(x, t_0)$ evaluado en $x = z_i(t)$. El campo cromoelectrico es entonces

$$\begin{aligned} E(x, t) = & - \sum_i \int_{t_0}^t \dot{z}_i(t') U_i^{-1}(t_0, t') I'_i(t_0) U_i(t_0, t') \delta(x - z_i(t')) dt' \\ & + \Omega^\dagger(x) \left\{ \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x - x') \Omega(x') I'_i(t_0) \delta(x' - z_i(t_0)) \Omega^\dagger(x') dx' \right. \\ & \left. - C(-\infty, t_0) \right\} \Omega(x). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Haciendo una transformación de calibre $E(x, t) = \Omega^\dagger(x) E^\Omega(x, t) \Omega(x)$ independiente de t tenemos

$$\begin{aligned} E^\Omega(x, t) = & \Omega(x) \left\{ - \sum_i \int_{t_0}^t \dot{z}_i(t') U_i^{-1}(t_0, t') I'_i(t_0) U_i(t_0, t') \delta(x - z_i(t')) dt' \right\} \Omega^\dagger(x) \\ & + \sum_i \Theta(x - z_i(t_0)) \Omega(z_i(t_0)) I'_i(t_0) \Omega^\dagger(z_i(t_0)) - C(-\infty, t_0) \\ = & - \sum_i \int_{t_0}^t \dot{z}_i(t') \Omega(z_i(t')) U_i^{-1}(t_0, t') I_i(t_0) U_i(t_0, t') \Omega^\dagger(z_i(t')) \delta(x - z_i(t')) dt' \\ & + \sum_i \Theta(x - z_i(t_0)) \Omega(z_i(t_0)) I_i(t_0) \Omega^\dagger(z_i(t_0)) - C(-\infty, t_0), \end{aligned} \quad (6.76)$$

pero como $K(x) = A^1(x, t_0)$, podemos decir que

$$\begin{aligned} U_i(t_0, t) \Omega^\dagger(z_i(t)) = & T \exp \left\{ \int_{t_0}^t A_i(z_i(t'), t_0) dt' \right\} \left(\mathcal{P} \exp \left\{ - ig \int_{-\infty}^{z_i(t)} K(x') dx' \right\} \right)^\dagger \\ = & \mathcal{P} \exp \left\{ ig \int_{z_i(t_0)}^{z_i(t)} A_1(z_i(t'), t_0) dz_i(t') \right\} \left(\mathcal{P} \exp \left\{ - ig \int_{-\infty}^{z_i(t)} A^1(x', t_0) dx' \right\} \right)^\dagger \\ = & \Omega^\dagger(z_i(t_0)), \end{aligned} \quad (6.77)$$

por lo tanto

$$\Omega(z_i(t))U_i^{-1}(t_0, t) = \Omega(z_i(t_0)). \quad (6.78)$$

Entonces el campo eléctrico salvo una transformación de calibre viene dado por

$$\begin{aligned} E^\Omega(x, t) = & - \sum_i \int_{t_0}^t \dot{z}_i(t') \Omega(z_i(t_0)) I'_i(t_0) \Omega^\dagger(z_i(t_0)) \delta(x - z_i(t')) dt' \\ & + \sum_i \Theta(x - z_i(t_0)) \Omega(z_i(t_0)) I'_i(t_0) \Omega^\dagger(z_i(t_0)) - C(-\infty, t_0). \end{aligned} \quad (6.79)$$

Si decimos que $\bar{I}'_i(t_0) = \Omega(z_i(t_0)) I'_i(t_0) \Omega^\dagger(z_i(t_0))$, entonces

$$E^\Omega(x, t) = \sum_i \bar{I}'_i(t_0) \Theta(x - z_i(t)) - C(-\infty, t_0). \quad (6.80)$$

Comparando con el Apéndice A, notamos que esta expresión, salvo una transformación de calibre, es análoga a la que se obtiene para el campo eléctrico producido por n partículas cargadas en movimiento, en el caso abeliano en $D = 1 + 1$.

Capítulo 7

Conclusiones

Con la finalidad de obtener las soluciones clásicas del campo de Yang-Mills sin fuentes, con fuentes puntuales estáticas y con fuentes generales, todo ello en $D = 1 + 1$, se resolvieron las ecuaciones de movimiento en cada caso. Siempre la solución se logró expresar en términos de exponenciales camino-ordenadas cuyos argumentos son elementos del álgebra de Lie.

En el primer caso se obtuvo un campo cromoelectrico constante salvo una transformación de calibre dependiente de la coordenada espacial. Al considerar como fuente una carga puntual y estática, el campo eléctrico quedó expresado en términos de una Theta de Heavyside más una constante y, al imponer como condición que $E(\infty) = -E(\infty)$, se obtuvo que el campo tiene la misma magnitud en todo el espacio, pero a la derecha del punto donde se ubica la partícula es positivo y a la izquierda es negativo. Si suponemos que no hay cargas, obtenemos el resultado obtenido anteriormente. Si consideramos fuentes generales, se tiene que $\rho(x, t)$ y $j(x, t)$ deben estar vinculadas mediante la ecuación de conservación covariante de la carga. En este caso, la solución depende de la densidad de corriente para todo x, t y de la densidad de carga para todo x y un tiempo fijo, y contiene un término constante que está relacionado con las condiciones de frontera y condiciones iniciales. Como era de esperarse, este caso engloba a los dos anteriores y efectivamente podemos simplificar la solución general exacta al caso sin fuentes y con fuentes puntuales estáticas.

Luego particularizamos este resultado al caso en que las fuentes sean n cargas cromoelectricas puntuales y finalmente redujimos esta última expresión a un caso específico, cuando la carga cromoelectrica sea solución de la ecuación diferencial (6.74) en lugar de la ecuación de transporte paralelo de Wong (5.35), y encontramos que el campo cromoelectrico, salvo una transformación de calibre independiente del tiempo, es análogo al campo eléctrico producido por n partículas cargadas en movimiento, en el caso abeliano.

Sería interesante tratar de aprovechar la experiencia de este trabajo para explorar el estudio de soluciones cuánticas correspondientes a corrientes externas generales en $D = 1 + 1$, así como para intentar hallar soluciones clásicas en dimensiones superiores.

Apéndice A

Solución general de Maxwell en $D = 1 + 1$ y particularización para el caso de n partículas cargadas

La acción para el campo electromagnético con fuentes generales en $D = 1 + 1$ es

$$S = \int dx^2 \left(-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right), \quad (\text{A.1})$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético.

Mediante un principio variacional, podemos obtener las ecuaciones de movimiento de la teoría

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (\text{A.2})$$

expandiendo índices y utilizando el calibre temporal ($A_0 = 0$) obtenemos

$$\begin{cases} \partial_0 F^{01} = \ddot{A}^1 = j, \\ \partial_1 F^{10} = -\partial_1 \dot{A}^1 = \rho, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Integrando la segunda ecuación de movimiento (A.3) tenemos

$$\dot{A}^1(x, t) = - \int_{x_0}^x \rho(x', t) dx' + \dot{A}^1(x_0, t), \quad (\text{A.4})$$

insertando ahora (A.4) en la primera ecuación de movimiento

$$\ddot{A}^1(x, t) = -\partial_0 \left(\int_{x_0}^x \rho(x', t) dx' \right) + \ddot{A}^1(x_0, t) = j(x, t), \quad (\text{A.5})$$

integrando en el tiempo (A.5)

$$\dot{A}^1(x, t) = \int_{t_0}^t j(x, t') dt' + \int_{x_0}^x \rho(x', t) dx' - \int_{x_0}^x \rho(x', t_0) dx' + \dot{A}^1(x_0, t_0), \quad (\text{A.6})$$

entonces podemos reescribir (A.4) como

$$\dot{A}^1(x, t) = \int_{t_0}^t j(x, t') dt - \int_{x_0}^x \rho(x', t_0) dx' + \dot{A}^1(x_0, t_0), \quad (\text{A.7})$$

y finalmente, el campo eléctrico en $D = 1 + 1$ es

$$E(x, t) = - \int_{t_0}^t j(x, t') dt + \int_{x_0}^x \rho(x', t_0) dx' + E(x_0, t_0) \quad (\text{A.8})$$

Notamos que en esta expresión para el campo eléctrico, es necesario conocer la densidad de corriente para cualquier tiempo y posición ($j(x, t)$), la densidad de carga en el tiempo inicial para cualquier posición ($\rho(x, t_0)$), y el campo eléctrico en la frontera en un tiempo inicial. Podemos obtener una expresión análoga a (A.8) si utilizamos las ecuaciones de movimiento en orden inverso, en este caso necesitaremos $j(x, t_0)$ y $\rho(x, t)$

Ahora si las fuentes dependientes del tiempo son n partículas cargadas, entonces

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \sum_i q_i \delta(x - z_i(t)), \\ j(x, t) = \sum_i \dot{z}_i(t) q_i \delta(x - z_i(t)), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

y tenemos que el campo eléctrico queda definido como

$$E(x, t) = \sum q_i \Theta(x - z_i(t)) + E(x_0, t_0) \quad (\text{A.10})$$

En ausencia de cargas el campo sería una constante que depende de las condiciones iniciales y de frontera.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

1,5 cm



**ALGUNOS ASPECTOS DE LAS ECUACIONES DE WONG PARA
PARTÍCULAS CARGADAS CROMOELECTRICAMENTE EN
INTERACCIÓN CON EL CAMPO DE YANG-MILLS.**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Camilo las Heras G.

ante la Facultad de Ciencias de la
ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Dr. Lorenzo Leal
Prof. Gabriel Abellán

Marzo-2015

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

3 cm

3,6 cm

3,9 cm

2,9 cm

1,2 cm

0,5 cm

Bibliografía

- [1] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, 2008.
 - [2] Ashok Das. *Field Theory*. World Scientific, 2006.
 - [3] SK Wong. *Field and Particle Equations for the Classical Yang-Mills Field and Particles with Isotopic Spin*. Il Nuovo Cimento A, 1970.
 - [4] Lorenzo Leal. *Ecuaciones Clásicas de la Teoría de Chern-Simons e Invariantes de Nudo*. Trabajo de ascenso, UCV, Facultad de Ciencias, 2002.
 - [5] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 1962.
 - [6] Paul Adrien Maurice Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Courier Dover Publication, 2001.
 - [7] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley New York etc., 1962.
 - [8] Borchardt S Balachandran AP and Stern A. *Lagrangian and Hamiltonian descriptions of Yang-Mills Particles*. Physical Review D, 1978.
 - [9] Francisco Ysalguez. *Aspectos Clásicos y Cuánticos de las Teorías de Yang-Mills en dimensión $(1+1)$* . Tesis de Grado, UCV, Facultad de Ciencias, 2012.
 - [10] Kerson Huang. *Quarks, Leptons & Gauge Fields*. World Scientific Singapore, 1982.
 - [11] Michele Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2004.
-