

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**DISTRIBUCIONES DE MATERIA ESFÉRICAMENTE
SIMÉTRICAS, ANISÓTROPAS, NO DISIPATIVAS, MODELADAS
CON ECUACIONES DE ESTADO POLÍTROPAS EN EL
CONTEXTO DE LA RELATIVIDAD GENERAL**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Pablo León
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de:

Prof. Ernesto Fuenmayor

Abril-2015

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**DISTRIBUCIONES DE MATERIA ESFÉRICAMENTE
SIMÉTRICAS, ANISÓTROPAS, NO DISIPATIVAS, MODELADAS
CON ECUACIONES DE ESTADO POLÍTROPAS EN EL
CONTEXTO DE LA RELATIVIDAD GENERAL**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Pablo León
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de:

Prof. Ernesto Fuenmayor

Abril-2015

Caracas-Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Pablo León**, Cédula de Identidad No. 20413212, bajo el título “**Distribuciones de materia esféricamente simétricas, anisótropas, no disipativas, modeladas con ecuaciones de estado politropas en el contexto de la relatividad general**”, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 06 de mayo de 2015, a las 11:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la sala de seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió aprobarlo por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

En fe de lo cual se levanta la presente acta a los 6 días del mes de mayo del año 2015, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el Tutor del Trabajo Especial de Grado, **Prof. Ernesto Fuenmayor**. Firma del jurado examinador

Prof. Abraham Lozada
4882675
UCV

Profa. Solmar Varela
18190097
UCV

Prof. Ernesto Fuenmayor
10336198
UCV

Página libre

“Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber”.

Albert Einstein.

Agradecimientos

A mis padres, por siempre darme todo su apoyo, moral y económico. También por todas aquellas ocasiones en las que me tuvieron que acompañar cuando tenía que salir de madrugada a Caracas y esperarme cuando regresaba muy tarde.

A Katiuska Huapaya, por brindarme todo su apoyo incondicional, además de darme ánimos en todo momento y nunca dejar que me rindiera.

A mi tutor, el profesor Ernesto Fuenmayor, por prestarme toda su ayuda al dirigirme, corregirme y aconsejarme durante toda la elaboración de este trabajo.

A Luis Herrera, por tomarse la molestia de invertir parte de su tiempo en respondernos algunas dudas y guiarnos en ciertas ocasiones, al profesor Ernesto Fuenmayor y a mi.

Al profesor Fermin Dalmagro, por su gran ayuda en realizar, en conjunto conmigo, lo que fue prácticamente todo el análisis numérico presente en este trabajo .

Resumen

En el presente trabajo construimos el formalismo para estudiar la fractura (o inversión) en estrellas relativistas generales con anisotropía local en las presiones. Consideramos dos posibles ecuaciones de estado polítropas diferentes, las cuales conducen a la misma ecuación de Lane-Emden en el límite Newtoniano, que denominamos Caso I y Caso II. Nos basamos en un modelo heurístico para obtener materia localmente anisótropa a partir de configuraciones isótropas conocidas. Discutimos el efecto de perturbaciones a la densidad de energía y la anisotropía local, sobre la posible aparición de fracturas (o inversiones) en configuraciones esféricamente simétricas.

Índice general

Lista de figuras	15
1. Introducción	17
2. Ecuaciones de Campo y Fracturas	21
2.1. Ecuaciones de campo para un fluido anisótropo	21
2.2. Condiciones de acoplamiento	23
2.3. Ecuaciones dinámicas	25
2.4. Fractura	26
3. Ecuaciones de Estado Polítropas	30
3.1. Polítropo newtoniano para materia isótropa	31
3.1.1. Modelos estelares polítropos con K como parámetro libre	33
3.1.2. Presión de radiación y el polítropo $n=3$	33
3.1.3. Modelos estelares polítropos con K fija	34
3.1.4. El gas completamente degenerado de electrones y los modelos polítropos $n=3/2$, $n=3$	34
3.1.5. Límite de masa de Chandrasekhar	35
3.2. Polítropo newtoniano para la materia anisótropa	36
3.2.1. Modelando polítropos newtonianos anisótropos	37
3.3. El polítropo relativista general para la materia isótropa	38
3.3.1. Caso I	38
3.3.2. Caso II	40
3.4. El polítropo relativista general para la materia anisótropa	42
3.4.1. Caso I	42
3.4.2. Caso II	43
3.4.3. Modelando polítropos relativistas generales anisótropos	43
4. Fractura en Modelos Polítropos	46
4.1. Caso I	46
4.1.1. Perturbación vía K y h	47
4.1.2. Perturbación vía n y h	49
4.2. Caso II	50
4.2.1. Perturbación vía K y h	51
4.2.2. Perturbación vía n y h	52

5. Discusión	53
5.1. Caso I	54
5.2. Caso II	58
A.	63

Índice de figuras

5.1.	δR vs ξ (caso I) para distintos valores fijos de n y Γ para $h = 1$ y $\delta\beta = -10^{-6}$.	55
5.2.	δR vs ξ (caso I) para distintos valores fijos de n , α y Γ para $\delta\beta = -10^{-6}$.	56
5.3.	δR vs ξ (caso I) para distintos valores de h con $\delta\beta = -10^{-6}$.	57
5.4.	δR vs ξ (caso I) para distintos valores de n con $\delta\beta = -10^{-6}$.	57
5.5.	δR vs ξ (caso II) para distintos valores fijos de n y Γ para $h = 1$ y $\delta\beta = -10^{-6}$.	59
5.6.	δR vs ξ (caso II) para distintos valores fijos de n , α y Γ para $\delta\beta = -10^{-6}$.	60
5.7.	δR vs ξ (caso II) para distintos valores de h con $\delta\beta = -10^{-6}$.	61
5.8.	δR vs ξ (caso II) para distintos valores de n con $\delta\beta = -10^{-6}$.	61

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la relatividad general, describe y conecta las concepciones de espacio, tiempo y gravitación. Fue formulada por Albert Einstein en 1915, y a veces se le atribuye una gran dificultad y abstracción, principalmente debido a que su naturaleza envuelve un punto de vista que puede ir en contra de las nociones intuitivas usuales. También porque requiere en su manejo cierta experiencia en el campo de la geometría diferencial, la cual muchas veces no es común para los físicos.

Principalmente dos desarrollos, que relacionan la relatividad general con otras áreas de la física, han contribuido de una forma importante a mantener vivo el interés por esta teoría, que, aunque es considerada de gran belleza e incuestionablemente geométrica, había permanecido algo aislada dentro de la física. La primera es el descubrimiento (en la astrofísica) de cuerpos compactos de alta energía, quasars, estrellas de neutrones, pulsares y fuentes compactas de rayos-X. Es claro que el colapso gravitacional y/o campos gravitacionales intensos desempeñan un papel importante en la descripción de tales objetos.

Un segundo factor que ha promovido y renovado el interés en la relatividad general, es el hecho de conseguir una teoría cuántica de la gravitación. Para avanzar hacia tal fin, es necesario de un conocimiento profundo de algunos aspectos de la teoría clásica de gravitación y relatividad general.

El interés en este programa se ha afianzado con las predicciones de creación de partículas en el intenso campo gravitacional de un agujero negro, y también por los avances en el estudio de teorías de calibre en física de partículas y en teoría cuántica de campos.

El renacimiento del interés surgido por la relatividad comenzó a finales de la década de los 50's, particularmente guiados por el grupo de Londres liderado por Herman Bondi y el de Princeton, responsabilidad de John Wheeler, y aunque es difícil adivinar cuando surgen “trending topics” en física, es claro que la teoría en sí hace muchos planteamientos fundamentales que conciernen a la estructura del espacio-tiempo y la naturaleza del campo gravitacional. Luego de estudiar la teoría, uno siente que ha ganado profundas pistas en cuanto a cómo funciona la naturaleza.

Entre todas las teorías propuestas para describir los fenómenos de interacción gravitacional, la relatividad general es una de las que goza de mayor aceptación dentro de la comunidad científica, esto se debe principalmente a su gran éxito en la descripción de muchos escenarios en la astrofísica, en los cuales los objetos bajo estudio son muy compactos y masivos, como por ejemplo las enanas blancas y las estrellas de neutrones. Esta teoría está basada en las ecuaciones de Einstein, las cuales nos brindan una relación sencilla entre la geometría del espacio-tiempo (tensor de Einstein) y el contenido de materia y energía del espacio (tensor de energía-momento).

Un planteamiento usual en el estudio de la gravitación consiste en centrarse únicamente en la resolución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Basados en la suposición de que los aspectos geométricos del espacio-tiempo tenderán a prevalecer sobre la eventual relevancia de la física local.

Sin embargo existe un buen número de escenarios en los cuales las diferentes variables que caracterizan la distribución material juegan un papel determinante en la evolución del objeto autogravitante, incluso en presencia de campos gravitacionales muy intensos. Esto significa, que existen una gran variedad de situaciones en las cuales el objeto autogravitante evolucionará de una forma u otra dependiendo de manera fundamental de las especificaciones de la física local (ver [1]).

Por otra parte, también es bastante común suponer que el objeto bajo estudio posee isotropía en las presiones, sin embargo existen fuertes evidencias teóricas que sugieren que una variada gama de fenómenos físicos puede dar lugar a anisotropía local [1]. Entre las posibles fuentes de anisotropía local, se encuentran los intensos campos magnéticos observados en las enanas blancas y las estrellas de neutrones. También es conocido que en objetos de muy altas densidades, la viscosidad puede causar anisotropía en las presiones [1, 2, 3]. Para mayor detalle sobre las posibles fuentes de anisotropía ver [4].

Con la finalidad de resolver las ecuaciones de campo de Einstein en el interior de una configuración de materia se requiere, además de las condiciones de contorno, información adicional sobre el sistema, la cual debe ser presentada por medio de una ecuación de estado que nos relacione al menos dos de las cantidades físicas asociadas al problema en consideración, como por ejemplo una relación entre la densidad de masa bariónica, la temperatura y la presión (el caso de un gas ideal).

Entre las diversas ecuaciones de estado posibles, existe un conjunto de particular interés, conocidas como las ecuaciones de estado polítropas, las cuales nos proporcionan una relación sencilla entre la presión y la densidad de masa bariónica (en el caso Newtoniano). Estas relaciones fueron introducidas inicialmente en el contexto de la gravedad Newtoniana para lidiar con una gran variedad de fenómenos en astrofísica [5, 6]. Su gran éxito se debe principalmente a la simplicidad de la ecuación de estado y su ecuación principal asociada (ecuación de Lane-Emden).

Tiempo después, la teoría de los polítropos fue extendida al contexto de la relatividad

general para fluidos isótopos por F. Tooper en dos trabajos (ver [7, 8]), en los cuales plantea dos posibles versiones de la ecuación de estado polítropa. En la primera de ellas la presión está relacionada con la densidad de masa bariónica (al igual que el caso Newtoniano), y en la segunda versión la presión se relaciona con la densidad de energía. En estas publicaciones se obtuvo como resultado dos sistemas de ecuaciones (uno para cada versión de la ecuación de estado polítropa), los cuales al ser integrados nos proporcionan toda la información necesaria sobre la estructura mecánica del sistema bajo estudio.

Recientemente, el interés en las ecuaciones de estado polítropas fue renovado, principalmente por una serie de estudios realizados por L. Herrera y colaboradores [2, 3, 9]. Los dos primeros trabajos [2, 3] tuvieron como finalidad extender la teoría de los polítropos para considerar distribuciones de materia con anisotropía local en las presiones, tanto en el caso Newtoniano como en el Relativista General. En estos trabajos, se plantea una ecuación de estado polítropa únicamente para la presión radial y a diferencia del caso isótropo, se requiere de información adicional sobre la anisotropía del sistema, con la finalidad de poder integrar los sistemas de ecuaciones resultantes, la cual depende de cada modelo en específico.

Luego, en uno de sus últimos trabajos [9], L. Herrera estudia los dos casos posibles del polítropo relativista general anisótropo, asumiendo que el tensor de Weyl es igual a cero (condición conformemente plana), con la finalidad de integrar los sistemas de ecuaciones obtenidos en sus dos publicaciones anteriores [2, 3].

Normalmente, en la teoría de los polítropos se supone que el sistema en consideración se encuentra en equilibrio hidrostático, lo cual representa, en general, una muy buena aproximación de un sistema físico real, debido a que las estrellas varían muy poco en una escala de tiempo que es muy grande comparada con el tiempo típico en el cual el sistema reacciona a una perturbación del equilibrio hidrostático.

En una serie de trabajos L. Herrera y colaboradores [10, 11] introdujeron el concepto de fractura (cracking) con la finalidad de describir un posible comportamiento de una distribución de fluido justo en el instante en que está sale del equilibrio, como consecuencia de perturbaciones independientes a la densidad de energía y la anisotropía local del sistema. La idea está basada en que cada elemento de fluido, a ambos lados de la fractura, se acelerarán unos con respecto a otros, lo que conlleva a la aparición de fuerzas radiales de diferente signo en la distribución.

Un resultado interesante de los trabajos de L. Herrera [10, 11], es la estrecha relación entre la presencia de anisotropía local en las presiones y la aparición de fracturas. De hecho, se considera que un efecto como la fractura solo es posible si la anisotropía del sistema es perturbada y en el caso particular de sistemas localmente isótopos, la fractura ocurriría sólo si se permiten desviaciones de esta condición.

El concepto de fractura resulta de gran utilidad ya que nos permite conocer información del sistema, justo en el instante en que este sale del equilibrio, sin necesidad de

resolver las ecuaciones dinámicas. Otra aplicación fue introducida recientemente por L. Núñez [12, 13], en la cual plantea que el concepto de fractura puede usarse como un procedimiento cualitativo para identificar posibles configuraciones anisótropas inestables.

El objetivo de este trabajo es estudiar la posible aparición de fractura en los dos posibles casos de los modelos polítropos anisótropos relativistas general, bajo perturbaciones independientes a la densidad de energía y a la anisotropía local del sistema. Con este fin, se usó un modelo heurístico para la anisotropía local propuesto por L. Herrera y M. Cosenza [14], lo que nos permitirá obtener soluciones para distribuciones de fluidos anisótropas por medio de soluciones isótropas conocidas.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 2, se plantea las ecuaciones de campo de Einstein para un fluido esféricamente simétrico y anisótropo, presentaremos también las condiciones de acoplamiento, además de una breve discusión sobre las ecuaciones dinámicas y finalmente se estudia con detalle el concepto de fractura. En el capítulo 3 comenzamos con un repaso detallado sobre la teoría de los polítropos en el contexto Newtoniano para fluidos isótropos. Luego se extiende la teoría para incluir anisotropía local y por último estudiaremos el polítropo isótropo relativista general con su respectiva extensión para el caso anisótropo. En el capítulo 4, presentamos el estudio del proceso de fractura para los modelos polítropos anisótropos relativistas general. Finalmente en el capítulo 5 se exponen los resultados obtenidos y algunas conclusiones relevantes.

Capítulo 2

Ecuaciones de Campo y Fracturas

2.1. Ecuaciones de campo para un fluido anisótropo

En este capítulo consideraremos la evolución de distribuciones de materia esféricamente simétricas, las cuales asumimos que son localmente anisótropas y acotadas por una superficie esférica Σ .

El elemento de línea está dado por coordenadas tipo Schwarzschild (simetría esférica)

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

donde $\nu(r, t)$ y $\lambda(r, t)$ son funciones de sus argumentos. Las coordenadas son: $x^0 = t$; $x^1 = r$; $x^2 = \theta$; $x^3 = \phi$. La métrica dada en la expresión (2.1) debe satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = -8\pi T_\mu^\nu, \quad (2.2)$$

donde, G_μ^ν , R_μ^ν , R y T_μ^ν denotan el tensor de Einstein, el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de energía-momento, respectivamente. Por simplicidad se utilizarán unidades “geometrizadas”, de manera que se tomará igual a uno la velocidad de la luz y la constante gravitacional ($c=G=1$). Por medio de (2.1), las ecuaciones de campo (2.2) toman la siguiente forma [1, 15]

$$-8\pi T_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (2.3)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (2.4)$$

$$-8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = -\frac{e^{-\nu}}{4} (2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (2.5)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad (2.6)$$

donde las primas y los puntos indican derivación con respecto a r y t , respectivamente. Con la finalidad de dotar de significado físico a las componentes del tensor de energía-momento T_μ^ν , se aplicará el esquema propuesto por Bondi [1, 15]. Para ello, comenzaremos por introducir coordenadas Minkowskianas (τ, x, y, z) en cada punto del espacio-tiempo

$$d\tau = e^{\nu/2} dt, \quad dx = e^{\lambda/2}, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \sin \theta d\phi. \quad (2.7)$$

Se verifica que en estas coordenadas el elemento de línea (2.1) se escribe como

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.8)$$

Además, si denotamos con una barra las componentes del tensor de energía-momento en el sistema local Minkowskiano, se verifican las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \bar{T}_0^0 &= T_0^0, \quad \bar{T}_1^1 = T_1^1, \quad \bar{T}_2^2 = T_2^2, \\ \bar{T}_3^3 &= T_3^3, \quad \bar{T}_{01} = e^{-(\nu+\lambda)/2} T_{01}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Suponiendo ahora que para un observador comóvil con la materia, cuya velocidad con respecto a las coordenadas localmente Minkowskianas llamaremos ω , el contenido físico de la fuente consiste en un fluido anisótropo con densidad de energía ρ , presión radial P_r y presión tangencial $P_\perp$. Denotando con tilde a las componentes del tensor de energía-momento en el sistema comóvil, se tiene

$$\tilde{T}_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Entonces, las componentes $\bar{T}_\beta^\alpha$ se expresan como

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \tilde{T}^{\gamma\delta}, \quad (2.11)$$

donde Λ_β^α , son las matrices de Lorentz. Por medio de (2.9), (2.10) y (2.11) se obtiene

$$T_0^0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2}, \quad (2.12)$$

$$T_1^1 = -\frac{P_r + \rho \omega^2}{1 - \omega^2}, \quad (2.13)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -P_\perp, \quad (2.14)$$

$$T_{01} = -\frac{(\rho + P_r) \omega e^{(\nu+\lambda)/2}}{1 - \omega^2}. \quad (2.15)$$

Entonces, hemos expresado las componentes del tensor de energía momento en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) a través de variables físicas medidas por un observador comóvil con la materia y localmente Minkowskiano. Además, la velocidad de un elemento de fluido cualquiera, en coordenadas (t, r, θ, ϕ) , está relacionada con ω por la expresión

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{(\lambda-\nu)/2}. \quad (2.16)$$

Puesto que las superficies $r = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$ son esferas de área $4\pi r^2$, la condición $\omega > 0$ implica expansión y $\omega < 0$ contracción del elemento de fluido correspondiente.

Fuera de la distribución de materia, el elemento de línea viene dado por la solución de vacío de Schwarzschild [16]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.17)$$

2.2. Condiciones de acoplamiento

La región interior, cuyo espacio tiempo está definido por el elemento de línea (2.1), y la región exterior, descrita por la métrica (2.17), están separadas por la hipersuperficie $r = r_\Sigma(t)$. Con la finalidad de evitar la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas sobre la hipersuperficie de acoplamiento, es necesario que ambas soluciones (interna y externa) satisfagan ciertas condiciones conocidas con el nombre de condiciones de acoplamiento.

Estas condiciones fueron definidas por primera vez, de manera matemáticamente rigurosa, por Darmois. De acuerdo con Darmois [1], la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento de dos regiones del espacio tiempo sobre una hipersuperficie, es que, tanto la métrica inducida sobre ella (primera forma fundamental) como la derivada covariante del vector normal, proyectada sobre dicha hipersuperficie (segunda forma fundamental) sean continuas a través de la misma. De esta forma, para acoplar las dos métricas (2.1) y (2.17) sobre la hipersuperficie $r = r_\Sigma(t)$ se exigirá, primero que todo, la continuidad de la primera forma fundamental a través de $r = r_\Sigma(t)$, es decir

$$\left[e^\nu - e^\lambda \dot{r}_\Sigma^2\right]_\Sigma dt^2 = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}_\Sigma^2\right]_\Sigma dt^2, \quad (2.18)$$

y esta ecuación se satisface si

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}, \quad (2.19)$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}. \quad (2.20)$$

El sub-índice Σ indica que la cantidad está evaluada sobre la superficie Σ .

En lugar de exigir la continuidad de la primera y segunda forma fundamental, vamos a pedir la continuidad de la primera forma (ecuaciones (2.19) y (2.20)) y la continuidad, a través de Σ , de las componentes independientes del flujo de energía-momento [1]. Así requeriremos (además de (2.19) y (2.20))

$$(T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)_\Sigma^+ = (T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(-)}, \quad (2.21)$$

$$(T_{\mu\nu}n^\mu v^\nu)_\Sigma^+ = (T_{\mu\nu}n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)}, \quad (2.22)$$

donde n^μ es un vector tipo espacio normal a Σ y v^μ un vector tipo tiempo. El simbolo (+) indica que las componentes son evaluadas del lado externo de Σ y (-) en el lado interno. Ahora con la finalidad de hallar estos dos vectores escribiremos la ecuación de la frontera como

$$\Psi \equiv r - r_\Sigma(t) = 0. \quad (2.23)$$

El vector unitario normal a esta hipersuperficie está dado por

$$n_\mu^{(+)} = \frac{\partial_\mu \Psi}{(-\partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi g^{\alpha\beta})^{1/2}}. \quad (2.24)$$

De las ecuaciones (2.23) y (2.24), se obtiene

$$n_\mu^{(+)} = (-\beta \dot{r}_\Sigma, \beta, 0, 0), \quad (2.25)$$

con

$$\beta = \frac{1}{\left(\left[1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right] - \left[1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right]^{-1} \dot{r}_\Sigma^2 \right)^{1/2}}. \quad (2.26)$$

De igual forma se obtiene la expresión para el vector unitario normal a Σ , evaluado desde el interior

$$n_\mu^{(-)} = (-\dot{r}_\Sigma \gamma, \gamma, 0, 0), \quad (2.27)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{(e^{-\lambda_\Sigma} - \dot{r}_\Sigma^2 e^{-\nu_\Sigma})^{1/2}}. \quad (2.28)$$

Definiendo ahora el vector unitario tipo tiempo v^μ , tal que

$$v^\mu v_\mu = 1, \quad (2.29)$$

las componentes de este vector se pueden escribir como

$$v^{\mu(+)} = \beta \delta_t^\mu + \beta \dot{r}_\Sigma \delta_r^\mu, \quad (2.30)$$

y

$$v^{\mu(-)} = \frac{e^{\nu_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_t^\mu + \frac{\omega_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_r^\mu. \quad (2.31)$$

Las expresiones para el tensor de energía-momento a ambos lados de la frontera, son

$$T_{\mu\nu}^{(+)} = 0, \quad (2.32)$$

y

$$T_{\mu\nu}^{(-)} = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} - P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P_r - P_{\perp})s_{\mu}s_{\nu}, \quad (2.33)$$

con

$$u^{\mu} = \left(\frac{e^{\nu/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, \frac{\omega e^{-\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, 0, 0 \right), \quad (2.34)$$

$$s^{\mu} = \left(\frac{\omega e^{\nu/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, \frac{e^{-\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, 0, 0 \right), \quad (2.35)$$

donde u^{μ} denota la cuadri-velocidad y s^{μ} es un vector que cumple con las propiedades $s^{\mu}u_{\mu} = 0$, $s^{\mu}s_{\mu} = -1$.

Por medio de las ecuaciones (2.19)-(2.20) y (2.21)-(2.22) se obtiene

$$[P_r]_{\Sigma} = 0. \quad (2.36)$$

Éste resultado es evidente ya que la región exterior a la distribución de fluido esta descrita por la solución de vacío de Schwarzschild, donde no hay presiones.

2.3. Ecuaciones dinámicas

En relatividad general, a diferencia del electromagnetismo, las ecuaciones de movimiento no son independientes de las ecuaciones de campo, sino una consecuencia de éstas. En efecto, las ecuaciones de movimiento dadas por

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0, \quad (2.37)$$

se pueden obtener de (2.2) y de las identidades de Bianchi. Entonces, el conjunto de ecuaciones (2.37) no aporta ninguna información que no esté ya contenida en (2.3)-(2.5). Sin embargo en muchos casos, la forma explícita de (2.37) puede llegar a ser más útil para integrar el sistema y/o dar una interpretación física a una determinada situación. Calculando

$$T^{\nu}_{1;\nu} = 0, \quad (2.38)$$

se obtiene

$$(-8\pi T_1^1)' = \frac{16\pi}{r}(T_1^1 - T_2^2) + 4\pi\nu'(T_1^1 - T_0^0) + \frac{e^{-\nu}}{r} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right). \quad (2.39)$$

Considerando el caso estático

$$T_0^0 = \rho; \quad T_1^1 = -P_r; \quad T_2^2 = -P_{\perp},$$

$$\ddot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = 0,$$

se tiene que la ecuación (2.39) se transforma en

$$P'_r = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P_r) + \frac{2(P_\perp - P_r)}{r}. \quad (2.40)$$

Ahora, definiendo la función masa como

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.41)$$

y usando las ecuaciones (2.4) y (2.10) se obtiene

$$\nu' = \frac{2(m + 4\pi Pr^3)}{r(r - 2m)}. \quad (2.42)$$

Luego, introduciendo en (2.34) el resultado (2.40) obtenemos

$$P'_r = -\frac{(m + 4\pi r^3 P_r)}{r(r - 2m)}(\rho + P_r) + \frac{2(P_\perp - P_r)}{r}, \quad (2.43)$$

que es la ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido anisótropo, mejor conocida como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

2.4. Fractura

El concepto de fractura fue introducido para describir una condición particular que envuelve un cambio de signo en la fuerza radial cuando el sistema es sacado fuera del equilibrio [1, 11, 10]. En particular, el término fractura se refiere al caso donde la fuerza radial está dirigida hacia el centro en la región más interna de la esfera y cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial. En caso contrario, cuando la fuerza está dirigida hacia afuera en la parte interior y cambia de dirección en las regiones más externas de la esfera, diremos que hay un inversión.

Un efecto como la fractura, debe poder describirse en términos de las aceleraciones de marea de los elementos de fluido [17]. Para realizar esta descripción, usaremos una generalización de la ecuación de la desviación geodésica para el caso en el cual las partículas no se mueven a lo largo de geodésicas.

Cada partícula de un medio es descrita por una línea de mundo dada en un sistema de coordenadas local como

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a, s), \quad (2.44)$$

donde y^a es la posición de la partícula en un instante inicial y s es el tiempo propio calculado a lo largo de la línea de mundo. Entonces

$$u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s} = \dot{x}^\alpha, \quad u^\alpha u_\alpha = 1 \quad (2.45)$$

es el vector el vector unitario tangente a la curva. Un desplazamiento infinitesimal de la partícula (variación infinitesimal de la línea de mundo) está descrito por

$$\delta x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \delta y^a, \quad (2.46)$$

$$\delta x_{;\gamma}^\alpha u^\gamma = u_{;\gamma}^\alpha \delta x^\gamma. \quad (2.47)$$

El tensor

$$P_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - u^\alpha u^\beta \quad (2.48)$$

es la proyección ortogonal al plano local perpendicular a u^α :

$$P_\beta^\alpha u^\beta = 0, \quad P_\beta^\alpha P_\gamma^\beta = P_\gamma^\alpha. \quad (2.49)$$

La proyección ortogonal del vector de desplazamiento infinitesimal δx^β ,

$$\delta_\perp x^\alpha = P_\beta^\alpha \delta x^\beta \quad (2.50)$$

es el vector posición de la partícula $y^a + \delta y^a$ relativa a la partícula y^a , y la velocidad relativa de estas partículas esta dada por

$$v^\alpha = P_\beta^\alpha (\delta_\perp x^\beta)_{;\gamma} u^\gamma. \quad (2.51)$$

El cuadri-vector aceleración de una partícula está dado por el vector tipo espacio como

$$a^\alpha = \dot{u}^\alpha = u_{;\beta}^\alpha u^\beta, \quad \dot{u}^\alpha u_\alpha = 0. \quad (2.52)$$

Se puede verificar que

$$v^\alpha = u_{;\beta}^\alpha \delta_\perp x^\beta. \quad (2.53)$$

Al igual que en la hidrodinámica clásica, se puede escribir el tensor de desplazamiento $u_{;\beta}^\alpha P^{\beta\gamma}$ como una suma de componentes irreducibles

$$u_{\alpha;\rho} P_\beta^\rho = \Omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Theta P_{\alpha\beta} \quad (2.54)$$

donde

$$\Omega_{(\alpha\beta)} = \sigma_{[\alpha\beta]} = 0, \quad \sigma_\alpha^\alpha = 0, \quad \Omega_{\alpha\beta} u^\beta = \sigma_{\alpha\beta} u^\beta = 0, \quad \Theta = u_{;\alpha}^\alpha. \quad (2.55)$$

Entonces, la transformación infinitesimal que sufre el vector de desplazamiento $\delta_\perp x$ durante un tiempo propio δs consiste de la rotación $\Omega_\beta^\alpha \delta_\perp x^\beta$, la deformación $\sigma_\beta^\alpha \delta_\perp x^\beta$ (sin rotar o cambiar de volumen) y de la expansión o contracción $\frac{1}{3} \Theta \delta_\perp x^\beta$. Por esta razón los tensores $\Omega_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ y el escalar Θ son conocidos comunmente como el tensor de rotación,

el tensor de deformación y el escalar de expansión, respectivamente. Ahora, la aceleración relativa entre dos partículas vecinas está definida como

$$A^\alpha = P_\beta^\alpha \dot{v}^\beta = P_\beta^\alpha (u_{;\mu}^\beta \delta_\perp x^\mu)_{;\gamma} u^\gamma, \quad (2.56)$$

y de la definición del tensor de Riemann

$$u_{\alpha;\beta;\delta} - u_{\alpha;\delta;\beta} = u_\rho R_{\alpha\beta\delta}^\rho, \quad (2.57)$$

se obtiene

$$A^\alpha = \left[-R_{\beta\gamma\delta}^\alpha u^\beta u^\delta + P_\beta^\alpha a_{;\gamma}^\beta - a^\alpha a_\gamma \right] \delta_\perp x^\gamma. \quad (2.58)$$

Usando (2.54) y (2.57) se demuestra [18] que (2.58) conduce a la ecuación de Raychaudhuri

$$\frac{d\Theta}{ds} \equiv u^\mu \Theta_{;\mu} = -R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + a_{;\mu}^\mu + 2(\Omega^2 - \sigma^2) - \frac{1}{3}\Theta^2, \quad (2.59)$$

donde

$$2\Omega^2 = \Omega^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}; \quad 2\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.60)$$

Suponiendo que inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio, entonces

$$\omega = \dot{\lambda} = \ddot{\lambda} = \dot{v} = 0, \quad (2.61)$$

por lo tanto, la ecuación (2.39) se escribe como (2.43). Ahora podemos definir la fuerza radial resultante sobre un elemento de fluido como

$$R \equiv \frac{dP_r}{dr} + (\rho + P_r) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right) - \frac{2}{r}(P_\perp - P_r) = 0. \quad (2.62)$$

Suponiendo que el sistema en consideración, caracterizado por una distribución de presión y densidad de energía que satisface (2.62), es sacado fuera del equilibrio por una perturbación. Aparece entonces una fuerza radial total distinta de cero, la cual, dependiendo de su distribución espacial, puede llevar a fracturas o inversiones de la fuente.

De la definición de fractura, resulta imperativo que las perturbaciones que actúan sobre el sistema saquen a éste del equilibrio. Una forma de garantizar la salida del equilibrio, consiste en suponer que bajo perturbaciones de densidad y anisotropía local, la presión radial del sistema conserva la misma dependencia radial que tenía en el equilibrio. En este caso, la ecuación (2.62) no será satisfecha después de la perturbación.

Ahora vamos a proceder con el análisis del problema en cuestión. En la ecuación (2.59) tenemos que $\Omega = 0$, debido a que estamos considerando configuraciones esféricas. El escalar de expansión podemos calcularlo con ayuda de (2.55) para obtener

$$\Theta = \frac{e^{-\nu/2}}{2(1 - \omega^2)^{1/2}} \left(\dot{\lambda} + \frac{2\omega\dot{\omega}}{1 - \omega^2} \right) + \frac{e^{-\lambda/2}}{2(1 - \omega^2)^{1/2}} \left(\omega\nu' + 2\omega' + \frac{2\omega^2\omega'}{1 - \omega^2} + \frac{4\omega}{r} \right), \quad (2.63)$$

entonces, es posible calcular directamente $d\Theta/ds$ a partir de (2.63). Después de un cálculo largo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{ds} = & \frac{e^{-\nu}}{2(1-\omega^2)} \left[\ddot{\lambda} + \frac{2\dot{\omega}^2}{1-\omega^2} + \frac{2\omega\ddot{\omega}}{1-\omega^2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} - \frac{\omega\dot{\omega}\dot{\nu}}{1-\omega^2} + \frac{6\omega^2\dot{\omega}^2}{(1-\omega^2)^2} \right] \\
& + \frac{e^{-\lambda}}{2(1-\omega^2)} \left[\omega\omega'\nu' + \omega^2\nu'' + \frac{2\omega\omega''}{1-\omega^2} - \frac{\lambda'\omega^2\nu'}{2} - \frac{\omega\omega'\lambda'}{1-\omega^2} - \frac{2\omega^2\lambda'}{r} \right. \\
& \left. + \frac{\omega^3\omega'\nu'}{1-\omega^2} + \frac{6\omega^2\omega'^2}{(1-\omega^2)^2} + \frac{4\omega^3\omega'}{r(1-\omega^2)} + \frac{4\omega\omega'}{r} - \frac{4\omega^2}{r^2} \right] \\
& + \frac{e^{-(\nu+\lambda)/2}}{2(1-\omega^2)} \left[\dot{\omega}\nu' + \frac{2\dot{\omega}'}{1-\omega^2} + \frac{4\dot{\omega}}{r} + \omega\dot{\nu}' + \omega\dot{\lambda}' - \dot{\lambda}\omega' \right. \\
& \left. - \frac{2\dot{\lambda}\omega}{r} - \dot{\lambda}\omega\nu' + \frac{6\omega\dot{\omega}\omega'}{(1-\omega^2)^2} + \frac{2\omega\dot{\omega}\omega'}{1-\omega^2} + \frac{4\omega^2\dot{\omega}}{r(1-\omega^2)} + \frac{2\omega^2\dot{\omega}'}{1-\omega^2} + \frac{6\omega^3\dot{\omega}\omega'}{(1-\omega^2)^2} \right]. \quad (2.64)
\end{aligned}$$

En el instante mismo en cual el sistema sale del equilibrio tenemos que

$$\omega \approx \dot{\nu} \approx \dot{\lambda} \approx \dot{\omega}^2 \approx 0. \quad (2.65)$$

Evalutando las ecuaciones (2.6),(2.39) y (2.64) justo en el instante en que el sistema sale del equilibrio , se puede demostrar [1]

$$R = -\frac{e^\lambda(\rho + P_r)}{e^{\nu/2}r^2} \int_0^r r^2 e^{\nu/2} \frac{d\Theta}{ds} dr. \quad (2.66)$$

Así, para que ocurra una fractura para algún valor de r (por ejemplo $r = \tilde{r}$) es necesario que $d\Theta/ds$ cambie de signo para algún punto en el intervalo de $(0, \tilde{r})$. Resulta interesante señalar el caracter no local de la fractura implícito en (2.66). En efecto, el cambio de signo en R no depende del valor de $d\Theta/ds$ en un punto, sino en toda la región por debajo de la fractura.

Capítulo 3

Ecuaciones de Estado Polítropas

Las ecuaciones de estado polítropas fueron introducidas inicialmente en el contexto de la gravedad Newtoniana con la finalidad de lidiar con una variedad de problemas en astrofísica [5, 19], su gran éxito se debe a la simplicidad de la ecuación de estado y de la ecuación principal asociada, (ecuación de Lane-Emden).

La teoría está basada en la ecuación de estado politropa, la cual en el caso Newtoniano esta dada por

$$P = K \rho_0^\gamma \equiv K \rho_0^{1+1/n}, \quad (3.1)$$

donde ρ_0 denota la densidad de masa bariónica. Las constantes K y γ son conocidas como la constante politropa y el exponente politropo, respectivamente. En lugar de γ también es comunmente usado el índice politropo n , que esta definido como

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (3.2)$$

La ecuación de estado politropa puede se usada para modelar dos tipos de situaciones diferentes:

1. Cuando la constante politropa K está fija y puede ser calculada por medio de constantes naturales. Este es el caso de un gas completamente degenerado de electrones en el límite no relativista y el límite relativista.
2. Cuando K es un parámetro libre, como por ejemplo, en el caso de un gas ideal con presión de radiación.

Sin embargo, en algunos casos, el objeto bajo estudio puede ser lo suficientemente compacto como para requerir el uso de la relatividad general. En esta teoría ya han sido introducidas formalmente las ecuaciones de estado politropas [7, 8], obteniéndose dos posibles versiones de la ecuación de estado que conducen al mismo límite Newtoniano.

Usualmente, tanto en el régimen Newtoniano como en el relativista general, el fluido bajo estudio es considerado dotado con presiones isotropas. Sin embargo, motivado al hecho de que la anisotropía local en la presiones puede ser causada por una gran variedad

de fenomenos físicos que pueden ser encontrados en objetos compactos, como por ejemplo los intensos campos magnéticos observados en enanas blancas y estrellas de neutrones, la teoría de los polítropos ha sido extendida en dos trabajos recientes [2, 3] con la finalidad de incluir configuraciones con anisotropía local en las presiones.

3.1. Polítropo newtoniano para materia isótropa

Consideremos una distribución de fluido esféricamente simétrica con isotropía en la presión y que además se encuentra en equilibrio hidrostático. Si denotamos a la presión y la masa contenida en una esfera de radio r como P y m , respectivamente, entonces se deben cumplir las siguientes ecuaciones

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho_0, \quad (3.3)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0, \quad (3.4)$$

donde la primera es la ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido perfecto y la segunda nos da la variación de la masa con respecto a r . Resulta útil escribir la ecuación (3.3) como

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho_0, \quad (3.5)$$

donde Φ representa el potencial gravitacional, el cual cumple con la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho_0. \quad (3.6)$$

Con la relación polítropa (3.1) (independientemente si K es un parámetro libre o una constante con un valor fijo), (3.5) puede ser escrita como

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho_0^{\gamma-2} \frac{d\rho_0}{dr}. \quad (3.7)$$

Si $\gamma \neq 1$, podemos integrar (3.7) para obtener

$$\rho_0 = \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n, \quad (3.8)$$

donde se eligió la constante de integración tal que $\Phi = 0$ en la superficie ($\rho_0 = 0$). El caso $\gamma = 1$ corresponde al modelo de un gas ideal isotérmico, el cual no será considerado en este trabajo, por lo que de ahora en adelante siempre se considerará $\gamma \neq 1$ (para un mayor detalle ver [19, 18]).

Introduciendo (3.8) en la ecuación de Poisson (3.6), se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para Φ :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (3.9)$$

Se definen las variables adimensionales z , w como

$$z = Ar, \quad A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\Phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_{0c}^{\frac{n-1}{n}},$$

$$w = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \right)^{1/n}, \quad (3.10)$$

donde el subíndice c indica que la variable se está evaluando en el centro y la relación entre ρ_0 y Φ es tomada de (3.8). En el centro ($r=0$) tenemos que $z=0$, $\Phi = \Phi_c$, $\rho_0 = \rho_{0c}$, y por lo tanto $w = 1$. Entonces (3.9) se puede escribir como

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = 0 \quad (3.11)$$

que constituye la ecuación de Lane-Emden. Estaremos interesados únicamente en soluciones que sean finitas en el centro $z=0$, por lo que se deben cumplir las condiciones de contorno $w(0) = 1$ y $w'(0) = 0$. Si conocemos una solución $w(z)$ de (3.11) que cumpla con dichas condiciones, entonces de (3.10) se obtiene

$$\rho_0(r) = \rho_{0c} w^n, \quad \rho_{0c} = \left[\frac{-\Phi_c}{(n+1)K} \right]^n, \quad (3.12)$$

y de (3.1)

$$P(r) = P_c w^{n+1}, \quad (3.13)$$

donde $P_c = K \rho_{0c}^\gamma$.

Solo existen tres soluciones analíticas a la ecuación de Lane-Emden. El primer caso es

$$n = 0 : \quad w(z) = 1 - \frac{1}{6} z^2, \quad (3.14)$$

que corresponde a una esfera de gas homogénea, ya que $\rho_0 = \rho_{0c} w^n$ y por lo tanto la densidad es constante para $n=0$. Los otros dos casos son

$$n = 1 : \quad w(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad (3.15)$$

$$n = 5 : \quad w(z) = \frac{1}{(1 + z^2/3)^{1/2}}. \quad (3.16)$$

La superficie del polítopo de índice n está definida por el valor $z = z_n$, en donde $\rho_0 = 0$ y por lo tanto $w = 0$. Es fácil observar que para los casos $n=0$ y $n=1$ se tiene un valor finito de z_n , mientras que el caso $n=5$ es un modelo con un radio infinito. Se puede demostrar

que para $n < 5$ el radio del modelo polítropo es finito y para $n \geq 5$ tendrá un radio infinito.

Antes de proceder a explicar la construcción de modelos polítropos, resulta útil derivar algunas relaciones. De (3.4) y (3.12) se obtiene

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho_0 r^2 dr = 4\pi\rho_{0c} \int_0^r w^n r^2 dr = 4\pi\rho_{0c} A^3 \int_0^z w^n z^2 dz, \quad (3.17)$$

que por medio de la ecuación de Lane-Emden puede ser integrada para obtener

$$m(r) = 4\pi\rho_{0c} r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right), \quad (3.18)$$

y para el caso especial de la superficie

$$M = 4\pi\rho_{0c} R^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n}. \quad (3.19)$$

Por último si introducimos la densidad media $\bar{\rho}_0 = 3M/(4\pi R^3)$, se encuentra que

$$\frac{\bar{\rho}_0}{\rho_{0c}} = \left(-\frac{3}{z} \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n}. \quad (3.20)$$

Ahora se tienen todos los medios para comenzar a construir los modelos estelares polítropos.

3.1.1. Modelos estelares polítropos con K como parámetro libre

Se supone que los valores de n , M y R están dados. Entonces conocido n , una solución numérica de la ecuación de Lane-Emden (3.11) nos proporciona las funciones $w(z)$, $w'(z)$ y los valores de z_n y de $-z_n/(3dw/dz)_n$. Si ahora usamos M y R para determinar la densidad media $\bar{\rho}_0$, (3.20) otorga el valor de ρ_{0c} . Por otra parte, conocemos la constante $A = z/r = z_n/R$ que nos permite pasar de la variable adimensional z a la variable r . Con ρ_{0c} y A se puede determinar K de (3.19) y obtenemos la distribución de presión por medio de (3.13). Ahora, la masa local m podemos obtenerla por medio (3.18). La estructura mecánica del sistema ha sido determinada por completo.

3.1.2. Presión de radiación y el polítropo $n=3$

Un ejemplo típico para un modelo polítropo con K como parámetro libre es el gas ideal con presión de radiación, el cual cumple con la siguiente ecuación de estado

$$P = \frac{\Re}{\mu} \rho_0 T + \frac{a}{3} T^4, \quad (3.21)$$

donde μ es el peso molecular adimensional, $\Re$ es la constante de los gases y a es la constante de densidad de radiación. Se define ahora la variable β como

$$\beta = \frac{P_{gas}}{P}, \quad 1 - \beta = \frac{P_{rad}}{P} = \frac{aT^4}{3P} \quad (3.22)$$

donde P_{gas} y P_{rad} representan la presión debida al gas en consideración y la presión debida a la radiación, respectivamente. Suponiendo $\beta = constante$ para toda la estrella, se obtiene una relación de la forma $T^4 \sim P$, que introduciéndola en (3.21) conlleva a

$$P = \left(\frac{3\Re^4}{a\mu^4} \right)^{1/3} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \rho_0^{4/3}. \quad (3.23)$$

Esto constituye en efecto una relación politropa con $n=3$ para valores constantes de β . Aquí la constante politropa K es un parámetro libre, ya que β pertenece al intervalo $[0,1]$.

3.1.3. Modelos estelares politropos con K fija

Veremos ahora como construir un modelo con índice n para un valor dado ρ_{0c} . Las funciones $w(z)$ y $w'(z)$ pueden ser consideradas conocidas por integración de la ecuación de Lane-Emden. Por lo tanto $\rho_0 = \rho_{0c}w^n$ es conocida como una función de z . De acuerdo con (3.10) la relación entre r y z es

$$\left(\frac{r}{z} \right)^2 = \frac{1}{4\pi G} (n+1) K \rho_{0c}^{\frac{1-n}{n}}. \quad (3.24)$$

Esto puede usarse para determinar la densidad de masa (bariónica) en función de r , donde el radio del modelo es $R = z_n/A$ y el valor de z_n es conocido por la integración. Por medio de (3.24) se obtiene

$$R \sim \rho_{0c}^{\frac{1-n}{2n}}. \quad (3.25)$$

Siempre que $n > 1$, el radio R se vuelve cada vez mas pequeño a medida que aumenta ρ_{0c} . Por otro lado, la masa M del modelo varia con ρ_{0c} de acuerdo con (3.19) como $M \sim \rho_{0c} R^3$

$$M = C_1 \rho_{0c}^{\frac{3-n}{2n}}, \quad C_1 = 4\pi \left(-\frac{w'}{z} \right)_{z_n} z_n^3 \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{3/2} K^{3/2}. \quad (3.26)$$

Eliminando ρ_{0c} de (3.25) y (3.26) se deduce la siguiente relación entre la masa y el radio

$$R \sim M^{\frac{1-n}{3-n}}. \quad (3.27)$$

Resulta evidente que por medio de la integración, la masa local m es conocida por medio de (3.18), por lo que nuevamente ya hemos determinado toda la estructura mecánica del sistema.

3.1.4. El gas completamente degenerado de electrones y los modelos politropos $n=3/2$, $n=3$.

Para un gas completamente degenerado de electrones se tiene que la presión está dada por

$$P_e = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_f} p^3 \frac{p/(m_e c)}{[1 + p^2/(m_e^2 c^2)]^{1/2}} dp, \quad (3.28)$$

donde m_e es la masa de un electrón, c es la velocidad de la luz, h es la constante de Planck y p_f es el momento para el cual, por debajo de esté, todas las celdas del espacio fases están llenas. Definiendo las siguientes variables

$$\eta = p/(m_e c), \quad x = p_F/(m_e c), \quad (3.29)$$

se puede escribir (3.28) como

$$P_e = \frac{8\pi c^5 m_e^4}{3h^3} \int_0^x \frac{\eta^4 d\eta}{(1 + \eta^2)^{1/2}}. \quad (3.30)$$

Vamos a analizar ahora dos casos límites de (3.30):

- Cuando $x \ll 1$, que representa el caso no relativista, donde se obtiene

$$P_e = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{\rho_0}{\mu_e}\right)^{5/3}, \quad (3.31)$$

- Cuando $x \gg 1$, que representa el caso ultra relativista, obteniéndose

$$P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{\rho_0}{\mu_e}\right)^{4/3}, \quad (3.32)$$

donde m_u es la unidad de masa atómica y μ_e es el peso atómico adimensional. Se tiene que las expresiones (3.31) y (3.32) son relaciones polítopas con $n = 3/2$ y $n = 3$, respectivamente. Además para ambos casos la constante polítropa K esta fija.

3.1.5. Límite de masa de Chandrasekhar

Consideremos el caso de un gas de electrones no relativista completamente degenerado. Con $n = 3/2$, (3.27) conduce a $R \sim M^{-1/3}$ y al sorprendente resultado de que a mayor masa el radio es mas pequeño. Pero a medida que aumenta la densidad, los electrones se volverán gradualmente mas relativistas, por lo que la ecuación de estado (3.31) debe ser reemplazada por la ecuación (3.32).

Un modelo estelar sencillo de materia degenerada puede ser creado uniendo suavemente dos regiones: un núcleo (relativista) polítropo con $n = 3$, rodeado por una envoltura (no relativista) polítropa con $n = 3/2$. En efecto, Chandrasekhar construyó su primer modelo para enanas blancas de esta forma. Vamos a analizar como varía este modelo idealizado a medida que aumenta la masa M . Para pequeños valores de M , todo el modelo será no relativista. El núcleo relativista ocurrirá para $\rho_{0c} \sim > 10^6 g \text{ cm}^{-3}$ y gradualmente cubrirá partes mas grandes del modelo a medida que se incrementa ρ_{0c} . Por lo tanto, se esperaría que el modelo finalmente se aproximara a un estado en el que toda su masa es relativista, entonces el polítropo de índice $n = 3$ describirá apropiadamente todo el modelo; sin embargo existe una dificultad.

De la ecuación (3.26) se obtiene que la masa no varía con la densidad en el centro para un polítropo de índice $n = 3$ si K está fija. En este caso, (3.26) conduce a

$$M = 4\pi \left(-\frac{w'}{z} \right)_{z_3} z_3^3 \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2}. \quad (3.33)$$

Esté es el único valor de masa posible para un polítropo relativista degenerado y es conocido como la masa de Chandrasekhar, que luego de insertar los valores numéricos se obtiene

$$M_{ch} = \frac{5,836}{\mu_e^2} M_\odot. \quad (3.34)$$

Por ende, se puede esperar que nuestro modelo construido uniendo una envoltura con $n = 3/2$ a un núcleo con $n = 3$ tenga un valor límite de masa $M = M_{ch}$, a medida que aumenta ρ_{0c} . En efecto, hasta la fecha no se ha encontrado ninguna enana blanca que supere este límite de masa.

3.2. Polítropo newtoniano para la materia anisótropa

Consideremos nuevamente una distribución esféricamente simétrica, pero ahora con anisotropía local en las presiones. En este caso la ecuación de equilibrio hidrostático se puede escribir como

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \rho_0 + \frac{2}{r} (P_\perp - P_r), \quad (3.35)$$

este es el límite Newtoniano de la ecuación (2.43).

Ahora, asumiendo una ecuación polítropa para la presión radial P_r [2], la ecuación (3.5) se puede escribir como

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho_0^{\gamma-2} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{2}{r} \frac{\Delta}{\rho_0}, \quad (3.36)$$

donde $\Delta \equiv P_\perp - P_r$.

Para el caso $\gamma \neq 1$, se puede integrar formalmente la ecuación anterior entre cualquier valor interior r y la superficie de radio $r = r_\Sigma = \text{constante}$, obteniéndose

$$\rho_0 = \left[\frac{(\Phi - F)}{-K(n+1)} \right]^n, \quad (3.37)$$

donde

$$F(r) = 2 \int_{r_\Sigma}^r \frac{\Delta}{r \rho_0} dr. \quad (3.38)$$

Definiendo las variables

$$z = \alpha r, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} [-(\Phi_c - F_c)]^{n-1},$$

$$w = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \right)^{1/n} = \frac{\Phi - F}{\Phi_c - F_c}, \quad (3.39)$$

e introduciendo (3.37)-(3.39) en la ecuación de Poisson (3.6), se puede escribir la ecuación de Lane-Emden extendida como

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dX}{dz} + (X - Y)^n = 0, \quad (3.40)$$

donde

$$X = w + Y \quad (3.41)$$

y

$$Y = \frac{F}{\Phi_c - F_c}. \quad (3.42)$$

Con la finalidad de proceder mas adelante con el modelado de objetos compactos, se requiere que la forma de la anisotropía local (Δ) sea especificada. Esta información, por supuesto, dependerá del problema físico en consideración.

3.2.1. Modelando polítropos newtonianos anisótropos

Aquí adoptaremos la versión no relativista del modelo heurístico propuesto por L. Herrera y colaboradores [14], el cual nos permitirá obtener unas soluciones para la materia anisótropa (obtenidas por L. Herrera y W. Barreto en [2]), a partir de soluciones conocidas para la materia isótropa; éste es

$$\Delta = Cf(r)\rho_0 r^N, \quad (3.43)$$

donde C es un parámetro que mide la anisotropía; la función f y el número N se especifican para cada modelo en particular. El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Consideraremos que la dependencia funcional de $\rho_0 = \rho_0(r)$ del modelo anisótropo es la misma de la solución isótropa.
2. Tomaremos

$$fr^{N-1} = \frac{d\Phi}{dr}, \quad (3.44)$$

la cual se asume únicamente porque nos permite escribir la ecuación (3.35) de la siguiente forma

$$\frac{dP_r}{dr} = -h \frac{d\Phi}{dr} \rho_0, \quad (3.45)$$

donde $h \equiv 1 - 2C$. Por simplicidad vamos a suponer también que h es constante para toda la esfera, lo cual no implica que sean constantes las presiones.

Entonces, por medio de (3.44) resulta sencillo verificar que la ecuación (3.40) se reduce a

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + hw^n = 0, \quad (3.46)$$

donde se deben aplicar las siguientes condiciones de contorno

$$w(0) = 1, \quad \frac{dw}{dz}(0) = 0. \quad (3.47)$$

Por último es importante mencionar que la construcción de los modelos es totalmente análoga a la de la sección anterior.

3.3. El politrópico relativista general para la materia isótropa

Con la finalidad de extender la teoría de los politropos al contexto de la relatividad, la ecuación (3.3) se debe reemplazar con la ecuación de TOV (2.43) para el caso particular en el que $P_r = P_\perp = P$

$$P' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P) = -\frac{(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}(\rho + P). \quad (3.48)$$

Tampoco será posible seguir haciendo uso de la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional, ya que este no puede ser definido en el contexto de esta teoría, por lo que en lugar de (3.6) se usará la ecuación

$$m' = 4\pi r^2 \rho, \quad (3.49)$$

la cual se puede deducir por medio de la ecuación (2.3) y de la definición de función masa (2.41).

Cuando se considera la ecuación de estado politrópica, dentro de la relatividad general, aparecen dos posibles ecuaciones de estado, que conducen a la misma ecuación (3.1) en el límite Newtoniano. El primer caso consiste en plantear una relación entre la presión y la densidad de masa bariónica como en (3.1), y el segundo caso cuando la presión está relacionada con la densidad de energía, donde debemos reemplazar ρ_0 por ρ en la ecuación de estado politrópica (3.1).

3.3.1. Caso I

En este caso se conserva la ecuación de estado politrópica original, (3.1), ver [8]. Ahora, la primera y segunda ley de la termodinámica se pueden escribir como

$$d\left(\frac{\rho + P}{\mathcal{N}}\right) - \frac{dP}{\mathcal{N}} = T d\left(\frac{\sigma}{\mathcal{N}}\right), \quad (3.50)$$

donde T denota la temperatura, σ es la entropía por unidad de volumen propio, y $\mathcal{N}$ es la densidad de partículas, por lo que

$$\rho_0 = \mathcal{N}m_0, \quad (3.51)$$

donde m_0 es la masa en reposo de una partícula. Entonces para un proceso adiabático se tiene

$$d\left(\frac{\rho}{\mathcal{N}}\right) + Pd\left(\frac{1}{\mathcal{N}}\right) = 0, \quad (3.52)$$

que junto con (3.1) se escribe como

$$K\rho_0^{\gamma-2} = \frac{d(\rho/\rho_0)}{d\rho_0}. \quad (3.53)$$

Si $\gamma \neq 1$, (3.53) puede ser integrada para obtener

$$\rho = C\rho_0 + nP, \quad (3.54)$$

donde C es la constante de integración. En el límite no relativista se debe cumplir $\rho \rightarrow \rho_0$, y por lo tanto $C = 1$. Por lo que la ecuación de estado pol tro a conduce a

$$\rho = \rho_0 + nP. \quad (3.55)$$

Ahora, vamos a introducir las siguientes variables adimensionales:

$$\alpha = \frac{P_c}{\rho_c}, \quad \xi = rA, \quad A^2 = 4\pi\rho_c/\alpha(n+1), \quad (3.56)$$

$$\Psi_0^n = \rho_0/\rho_{0c}, \quad v(\xi) = m(r)A^3/(4\pi\rho_c). \quad (3.57)$$

Entonces, las ecuaciones (3.48) y (3.49) se escriben como

$$\xi^2 \frac{d\Psi_0}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1 - n\alpha) + (n+1)\alpha\Psi_0} \right] + v + \alpha\xi^3\Psi_0^{n+1} = 0, \quad (3.58)$$

y

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\Psi_0^n(1 - n\alpha + n\alpha\Psi_0). \quad (3.59)$$

La superficie de la esfera está definida por $\xi = \xi_n$ tal que $\Psi_0(\xi_n) = 0$ y se aplican las siguientes condiciones de contorno:

$$\Psi_0(0) = 1, \quad v(0) = 0. \quad (3.60)$$

Las ecuaciones (3.58) y (3.59), corresponden a la generalización de la ecuación de Lane-Emden para este caso. Con la finalidad de determinar toda la estructura mecánica del sistema resulta útil derivar las siguientes relaciones:

De (3.1), (3.55) y (3.57) obtenemos

$$P = K\rho_{0c}^{1+1/n}\Psi_0^{n+1} \quad (3.61)$$

y

$$\rho = \rho_{0c} \Psi_0^n (1 + nK \rho_{0c}^{1/n} \Psi_0), \quad (3.62)$$

de (2.41), (3.56) y (3.57) tenemos

$$e^\lambda = (1 - 2(n+1)\alpha v/\xi)^{-1}. \quad (3.63)$$

Luego, por medio de (3.61) y (3.62), la ecuación (3.48) puede ser escrita de la siguiente forma

$$2(n+1)\beta d\Psi_0 + d\nu[1 + \beta\Psi_0(n+1)] = 0, \quad (3.64)$$

donde el parámetro $\beta \equiv K \rho_{0c}^{1/n}$ está relacionado con α por

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - n\alpha}. \quad (3.65)$$

La ecuación (3.64) puede ser integrada para obtener

$$e^\nu = \frac{C}{[1 + (n+1)\beta\Psi_0]^2}, \quad (3.66)$$

donde C es la constante de integración. Ahora, usando el hecho de que en el centro $\Psi_0 = 1$, podemos escribir (3.66) como

$$e^\nu = e^{\nu_c} \frac{[1 + (n+1)\beta]^2}{[1 + (n+1)\beta\Psi_0]^2}. \quad (3.67)$$

Entonces, usando (2.19) y el hecho de que la presión se hace cero en la superficie, se obtiene

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) [1 + (n+1)\beta\Psi_0]^{-2}. \quad (3.68)$$

De esta forma las funciones ρ , P y las componentes de la métrica e^ν , e^λ son conocidas por medio de la integración de las ecuaciones (3.58) y (3.59). Finalmente, en el límite Newtoniano ($c \rightarrow \infty$) la densidad de energía en el centro es mucho mayor que la presión en el centro, lo que implica $\alpha \rightarrow 0$. Por ende, se demuestra que el sistema de ecuaciones (3.58)-(3.59) conduce a

$$\frac{d^2\Psi_0}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\Psi_0}{d\xi} + \Psi_0^n = 0, \quad (3.69)$$

que es la ecuación clásica de Lane-Emden.

3.3.2. Caso II

Otra posibilidad consiste en asumir que el polítopo relativista general está definido por

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad (3.70)$$

en lugar de (3.1), ver [7].

En este caso podemos obtener de (3.53) y (3.70) lo siguiente

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 - K\rho_0^{1/n})^n}. \quad (3.71)$$

Usando (3.56) y (3.70) se puede demostrar que si α es lo suficientemente pequeña, (3.71) se convierte en

$$\rho \approx \rho_0(1 + nK\rho_0^{1/n}), \quad (3.72)$$

donde solo nos quedamos con los términos lineales de α . Se debe observar que (3.53) y (3.72) son idénticas, lo que implica que ambos casos, I y II, difieren únicamente en términos de orden α^2 y mayores.

Introduciendo ahora

$$\Psi^n = \rho/\rho_c, \quad (3.73)$$

además por medio de (3.56), (3.57) se pueden escribir las ecuaciones (3.48) y (3.49) como

$$\xi^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\Psi} \right] + v + \alpha\xi^3 \Psi^{n+1} = 0, \quad (3.74)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \Psi^n. \quad (3.75)$$

Estas dos ecuaciones representan la generalización de la ecuación de Lane-Emden para este caso. Ahora, al igual que en la sub-sección anterior derivaremos algunas expresiones útiles con la finalidad de determinar la estructura mecánica del sistema.

De (3.70) y (3.73) tenemos que

$$P = K\rho_c^{1+1/n} \Psi^{n+1} \quad (3.76)$$

y

$$\rho = \rho_c \Psi^n. \quad (3.77)$$

De (2.41) obtenemos nuevamente (3.63). Luego, por medio de (3.76) y (3.77), la ecuación (3.48) se puede escribir como

$$2(n+1)\alpha d\Psi + (1 + \alpha\Psi)dv = 0, \quad (3.78)$$

la cual, siguiendo el mismo procedimiento del Caso I, puede integrarse obteniendose

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) (1 + \alpha\Psi)^{-2(n+1)}, \quad (3.79)$$

donde se ha usado las condiciones de contorno. Entonces, al igual que en el caso anterior, las funciones ρ , P y las componentes de la métrica e^ν y e^λ son conocidas por medio de la integración de las ecuaciones (3.74) y (3.75).

Resulta fácil verificar que en el límite Newtoniano ($\alpha \rightarrow 0$), el sistema de ecuaciones (3.74)-(3.75) conduce a la ecuación clásica de Lane-Emden (3.69).

Finalmente, es importante destacar que para los dos casos del polítopo relativista (caso I y caso II), las configuraciones con superficies estarán restringidas por los valores de n y α .

3.4. El polítopo relativista general para la materia anisótropa

Teniendo como objetivo extender el formalismo del polítopo relativista general para incluir la anisotropía local en las presiones, utilizaremos la ecuación de TOV (2.43), la cual se puede escribir como

$$P'_r = -\frac{(m + 4\pi r^3 P_r)}{r(r - 2m)}(\rho + P_r) + \frac{2\Delta}{r}, \quad (3.80)$$

donde $\Delta = P_r - P_\perp$. Basado en la sección anterior, tomaremos en cuenta los dos posibles casos para extender la ecuación de estado polítopa para la materia anisótropa, y obtener una ecuación tipo Lane-Emden

3.4.1. Caso I

Suponiendo que

$$P_r = K\rho_0^{1+1/n}, \quad (3.81)$$

por medio de la ecuación (3.52) se obtiene

$$\rho = \rho_0 + nP_r. \quad (3.82)$$

Repitiendo el mismo procedimiento que en el caso isótropo se tiene que (3.80) se escribe como

$$\xi^2 \frac{d\Psi_0}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1 - n\alpha) + (n+1)\alpha\Psi_0} \right] + v + \alpha \xi^3 \Psi_0^{n+1} - \frac{2\Delta \Psi_0^{-n} \xi}{P_{rc}(n+1)} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1 - n\alpha) + (n+1)\alpha\Psi_0} \right] = 0, \quad (3.83)$$

donde ahora $\alpha = P_{rc}/\rho_c$.

Por otro lado, de la ecuación (3.49) obtenemos la misma ecuación (3.59)

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \Psi_0^n (1 - n\alpha + n\alpha\Psi_0). \quad (3.84)$$

Entonces la extensión de la ecuación de Lane-Emden que incluye anisotropía local en las presiones viene dada por el sistema de ecuaciones (3.83)-(3.84).

3.4.2. Caso II

Asumiendo que

$$P_r = K\rho^{1+1/n}, \quad (3.85)$$

de la ecuación (3.52) obtenemos, al igual que en el caso isot ropo

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 - K\rho_0^{1/n})^n}. \quad (3.86)$$

Repitiendo nuevamente el mismo procedimiento que el caso isot ropo la ecuación de TOV (3.80) se escribe como

$$\xi^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1 + \alpha\Psi)} \right] + v + \alpha\xi^3 \Psi^{n+1} - \frac{2\Delta\Psi^{-n}\xi}{P_{rc}(n+1)} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\Psi} \right] = 0, \quad (3.87)$$

y de la ecuación (3.49) se obtiene nuevamente

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \Psi^n. \quad (3.88)$$

Entonces para este caso el sistema de ecuaciones (3.87)-(3.88) representan la extensión de la ecuación de Lane-Emden. Se debe mencionar que al igual que en la sección 2.2. es necesario especificar la forma de la anisotropía local (Δ), con la finalidad de resolver el sistema de ecuaciones (para ambos casos), hecho que depende del problema físico en consideración.

3.4.3. Modelando pol tro os relativistas generales anis tro os

Aquí adoptaremos la versión relativista del modelo heurístico propuesto L. Herrera y colaboradores [14], lo que nos permitirá encontrar unas soluciones para la materia anis tro a (obtenidas por L. Herrera y W. Barreto en [3]), por medio de soluciones conocidas para la materia isot ropa. Para este caso

$$\Delta = Cf(P_r, r)(\rho + P_r)r^N, \quad (3.89)$$

donde C es un parámetro que mide la anisotropía, y las función f y el número N son específicos para cada modelo. Ahora el procedimiento a seguir es el siguiente

1. Consideraremos que la dependencia radial de $\rho = \rho(r)$, del modelo anis tro o, es la misma que en la solución isot ropa.
2. Tomaremos

$$f(P_r, r)r^{N-1} = \frac{\nu'}{2}, \quad (3.90)$$

lo que nos permite escribir la ecuación (3.80) de la siguiente forma

$$\frac{dP_r}{dr} = -h(\rho + P_r)\frac{\nu'}{2}, \quad (3.91)$$

donde $h = 1 - 2C$. Por simplicidad supondremos también que h es constante para toda la esfera, lo cual no implica que sean constantes las presiones.

Entonces obtenemos para el caso I las siguientes ecuaciones

$$\xi^2 \frac{d\Psi_0}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1 - n\alpha) + (n+1)\alpha\Psi_0} \right] + h(v + \alpha\xi^3\Psi_0^{n+1}) = 0, \quad (3.92)$$

y

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\Psi_0^n(1 - n\alpha + n\alpha\Psi_0), \quad (3.93)$$

mientras que para el caso II, obtenemos

$$\xi^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\Psi} \right] + h(v + \alpha\xi^3\Psi^{n+1}) = 0, \quad (3.94)$$

y

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\Psi^n. \quad (3.95)$$

Estas ecuaciones deben ser resueltas numéricamente con sus correspondientes condiciones de contorno. Al igual que en el caso del politropo general relativista para materia isotropa, resulta útil derivar una serie de expresiones (tanto para el caso I como para el caso II) que nos permitan determinar la estructura mecanica del sistema, por medio una solución de los sistemas de ecuaciones de Lane-Emden extendidas. Consideremos primero el caso I. Entonces de (3.39), (3.81) y (3.82), podemos escribir

$$P_r = K\rho_{0c}^{1+1/n}\Psi_0^{n+1} \quad (3.96)$$

y

$$\rho = \rho_{0c}\Psi_0^n(1 + nK\rho_{0c}^{1/n}\Psi_0). \quad (3.97)$$

De (2.41), (3.56) y (3.57) tenemos

$$e^\lambda = (1 - 2(n+1)\alpha v/\xi)^{-1}. \quad (3.98)$$

Luego, por medio de (3.96) y (3.97), la ecuación (3.80) puede se escrita de la siguiente forma

$$2(n+1)\beta d\Psi_0 + h d\nu[1 + \beta\Psi_0(n+1)] = 0, \quad (3.99)$$

y entonces usando el mismo procedimiento del caso I del politropo relativista isotropo se obtiene

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) [1 + (n+1)\beta\Psi_0]^{-2/h}. \quad (3.100)$$

Nuevamente las funciones ρ , P_r y las componentes de la métrica e^ν , e^λ son conocidas por medio de la integración de las ecuaciones (3.92) y (3.93). Finalmente, en el límite Newtoniano $\alpha \rightarrow 0$ se demuestra que el sistema de ecuaciones (3.92)-(3.93) conduce a (3.46) (tomando en cuenta el cambio en la notación).

Para el caso II, seguiremos un procedimiento muy similar. De (3.73) y (3.85) tenemos que

$$P_r = K \rho_c^{1+1/n} \Psi^{n+1} \quad (3.101)$$

y

$$\rho = \rho_c \Psi^n. \quad (3.102)$$

De (2.41) obtenemos nuevamente (3.98). Luego, por medio de (3.101) y (3.102), la ecuación (3.80) se puede escribir como

$$2(n+1)\alpha d\Psi + h(1 + \alpha\Psi)d\nu = 0, \quad (3.103)$$

la cual, siguiendo el mismo procedimiento que en caso anterior, puede integrarse obteniéndose

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) (1 + \alpha\Psi)^{-2(n+1)/h}. \quad (3.104)$$

Entonces, las funciones ρ , P_r y las componentes de la métrica e^ν y e^λ son conocidas por medio de la integración de las ecuaciones (3.94) y (3.95). Además, se verifica que en el límite Newtoniano ($\alpha \rightarrow 0$), el sistema de ecuaciones (3.94)-(3.95) conduce nuevamente a la ecuación (3.46).

Por último, para éste caso las configuraciones con un radio finito estarán restringidas por los valores de n , α y h . De hecho, se demuestra [3] que $h \geq 1$ favorece a las configuraciones con radio finito mientras que $h < 1$ no.

Capítulo 4

Fractura en Modelos Polítropos

En este capítulo estudiaremos el efecto que pueden llegar a tener pequeñas perturbaciones a la densidad de energía y anisotropía local, sobre la posible aparición de fracturas (o inversiones), en los dos posibles casos (caso I y caso II) de los modelos polítropos relativistas generales anisótropos. Continuaremos haciendo uso del modelo heurístico para la función Δ planteado en el capítulo anterior. Entonces, vamos a encontrar una expresión para la fuerza radial resultante en el sistema cuando éste sale del equilibrio.

Comenzaremos aplicando el esquema perturbativo propuesto por L. Herrera [1, 10, 11] (tanto para el caso I como para el caso II). De esta forma perturbaremos la anisotropía local por medio del parámetro h y tendremos dos posibilidades para perturbar la densidad de energía. La primera de ellas es por medio de la constante polítropa K y la segunda mediante el índice polítropo n .

4.1. Caso I

Tenemos que en este caso

$$P_r = K \rho_{0c}^{1+1/n} \Psi_0^{n+1}, \quad (4.1)$$

$$\rho = \rho_{0c} \Psi_0^n (1 + nK \rho_{0c}^{1/n} \Psi_0) \quad (4.2)$$

y

$$\Delta = C f(P_r, r) (\rho + P_r) r^N, \quad (4.3)$$

donde

$$f(P_r, r) r^{N-1} = \frac{\nu'}{2} = \frac{m + 4r^3 \pi P_r}{r(r - 2m)}, \quad (4.4)$$

y recordando del capítulo anterior, C era un parámetro que mide la anisotropía. Ahora, mediante (2.62), (4.3) y (4.4) se puede escribir como

$$R = \frac{dP_r}{dr} + h(\rho + P_r) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right) = 0, \quad (4.5)$$

donde $h = 1 - 2C$.

4.1.1. Perturbación vía K y h

Procedemos a perturbar la densidad de energía y la anisotropía local de nuestro sistema vía la constante polítropa K y el parámetro h , respectivamente.

$$K \longrightarrow \tilde{K} = K + \delta K, \quad (4.6)$$

$$h \longrightarrow \tilde{h} = h + \delta h. \quad (4.7)$$

Entonces tenemos que

$$\tilde{P}_r = \tilde{K} \rho_{0c}^{1+1/n} \Psi_0^{n+1} = \beta P_r \quad (4.8)$$

y

$$\tilde{\rho} = \rho_{0c} \Psi_0^n + n \tilde{K} \rho_{0c}^{1+1/n} \Psi_0^{n+1} = \rho_{0c} \Psi_0^n + n \beta \rho_{0c}^{1+1/n} \Psi_0^{n+1}, \quad (4.9)$$

donde

$$\beta = \frac{\tilde{K}}{K}. \quad (4.10)$$

Definimos también la función $\hat{\hat{R}}$ como

$$\hat{\hat{R}} = \frac{A}{4\pi\rho_c^2} \tilde{R}. \quad (4.11)$$

Entonces, por medio de (3.56), (3.57) y (4.5)-(4.11), se obtiene

$$\hat{\hat{R}} = \beta \Psi_0^n \frac{d\Psi_0}{d\xi} + \frac{\tilde{h} \Psi_0^n}{\xi^2} [(1 - n\alpha) + \alpha\beta(n+1)\Psi_0] \left(\frac{\tilde{v} + \xi^3 \beta \alpha \Psi_0^{n+1}}{1 - 2\alpha(n+1)\tilde{v}/\xi} \right), \quad (4.12)$$

donde

$$\tilde{v} = \int_0^\xi \xi^2 \Psi_0^n [(1 - n\alpha) + \beta(n+1)\alpha\Psi_0] d\xi. \quad (4.13)$$

Formalmente, tenemos que a primer orden, (4.12) se escribe como

$$\begin{aligned} \delta \hat{\hat{R}} &= \hat{\hat{R}}(\xi, 1 + \delta\beta, h + \delta h, v + \delta v) \\ &= \hat{\hat{R}}(\xi, 1, h, v) + \left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \beta} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} \delta\beta + \left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \tilde{h}} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} \delta h + \left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \tilde{v}} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} \delta v, \end{aligned}$$

y usando la ecuación (4.5), se tiene que

$$\hat{\hat{R}}(\xi, 1, h, v) = 0,$$

por ende, se cumple

$$\delta \hat{R} = \left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \beta} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} \delta \beta + \left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \tilde{v}} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} \delta v + \left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \tilde{h}} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} \delta h. \quad (4.14)$$

Usando (4.12) se obtiene

$$\left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \beta} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} = \Psi_0^n \frac{d\Psi_0}{d\xi} + \frac{h\alpha\Psi_0^{n+1} [(n+1)(v + 2\xi^3\alpha\Psi_0^{n+1}) + \xi^3\Psi_0^n(1-n\alpha)]}{\xi^2(1-2\alpha(n+1)v/\xi)} \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \tilde{v}} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} = h \frac{\Psi_0^n}{\xi^2} \left[\frac{(1-n\alpha) + \alpha(n+1)\Psi_0}{(1-2\alpha(n+1)v/\xi)^2} \right] (1 + 2\alpha^2(n+1)\xi^2\Psi_0^{n+1}), \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\hat{R}}}{\partial \tilde{h}} \right) \bigg|_{\substack{\beta=1 \\ \tilde{h}=h \\ \tilde{v}=v}} = \frac{\Psi_0^n}{\xi^2} [(1-n\alpha) + \alpha(n+1)\Psi_0] \left(\frac{v + \xi^3\alpha\Psi_0^{n+1}}{1-2\alpha(n+1)v/\xi} \right). \quad (4.17)$$

Tomando en cuenta que las variaciones sobre la masa son una consecuencia de las perturbaciones a la densidad de energía, entonces podemos escribir

$$\delta v = \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} \right) \bigg|_{\beta=1} \delta \beta. \quad (4.18)$$

Haciendo uso de (4.13) se demuestra que (4.18) conduce al siguiente resultado

$$\delta v = n\alpha \left(\int_0^\xi \xi^2 \Psi_0^{n+1} d\xi \right) \delta \beta = n\alpha F_{1K}(\xi) \delta \beta \quad (4.19)$$

con $F_{1K}(\xi)$ definido como

$$F_{1K}(\xi) \equiv \int_0^\xi \xi^2 \Psi_0^{n+1} d\xi. \quad (4.20)$$

Por último, introduciendo (4.15)-(4.17) y (4.19)-(4.20) en (4.14) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\delta \hat{R} = \Psi_0^n & \left\{ \frac{d\Psi_0}{d\xi} + \frac{h\alpha}{\xi^2(1-2\alpha(n+1)v/\xi)} \left[(n+1)(v+2\xi^3\alpha\Psi_0^{n+1})\Psi_0 + \xi^3\Psi_0^{n+1}(1-n\alpha) \right. \right. \\
& + \left. \left. \left[\frac{(1-n\alpha) + \alpha(n+1)\Psi_0}{1-2\alpha(n+1)v/\xi} \right] (1+2\alpha^2(n+1)\xi^2\Psi_0^{n+1})nF_{1K}(\xi) \right] \right\} \delta\beta \\
& + \frac{\Psi_0^n}{\xi^2} [(1-n\alpha) + \alpha(n+1)\Psi_0] \left(\frac{v + \xi^3\alpha\Psi_0^{n+1}}{1-2\alpha(n+1)v/\xi} \right) \delta h. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Para que ocurra una fractura $\delta \hat{R} = 0$ para algun ξ en el intervalo $[0, \xi_n]$, por lo que de (4.14) y (4.19)-(4.20) se obtiene que

$$\delta h = -\Gamma \delta\beta \tag{4.22}$$

donde

$$\Gamma = \left[\frac{\frac{\partial \hat{R}}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{R}}{\partial \tilde{v}} F_{1K}(\xi)}{\frac{\partial \hat{R}}{\partial h}} \right] \bigg|_{\substack{\beta = 1 \\ \tilde{v} = v \\ \tilde{h} = h}} \tag{4.23}$$

Es útil resaltar que esta definición es totalmete análoga para todos los métodos que se explicarán a continuación y por lo tanto no se volverá a discutir sobre este punto de ahora en adelante.

4.1.2. Perturbación vía n y h

Procedemos ahora a perturbar la densidad de energía y la anisotropía local de nuestro sistema vía el índice polítopo n y el parámetro h , respectivamente.

$$n \longrightarrow \tilde{n} = n + \delta n, \tag{4.24}$$

$$h \longrightarrow \tilde{h} = h + \delta h. \tag{4.25}$$

Si exigimos que la presión radial no cambie después de la perturbación, entonces

$$\tilde{P}_r = P_r. \tag{4.26}$$

Evidentemente está condición también garantiza que nuestro sistema salga del equilibrio después de la perturbación. Mediante (4.24)-(4.26) se obtiene que

$$\tilde{P}_r = P_r = k\rho_{0c}^{1+1/n}\Psi_0^{n+1} \tag{4.27}$$

y

$$\tilde{\rho} = \rho_{0c}\Psi_0^{\tilde{n}} + \tilde{n}P_r. \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.27)-(4.28) en (4.5) y siguiendo un procedimiento similar al de la sub-sección 4.1.1 llegamos al siguiente resultado

$$\hat{\hat{R}} = \Psi_0^n \frac{d\Psi_0}{d\xi} + \frac{\tilde{h}}{\xi^2} [(1 - n\alpha)\Psi_0^{\tilde{n}} + (\tilde{n} + 1)\alpha\Psi_0^{n+1}] \left(\frac{\tilde{v} + \xi^3\alpha\Psi_0^{n+1}}{(1 - 2\alpha(n+1)\tilde{v}/\xi)} \right), \quad (4.29)$$

donde

$$\tilde{v} = \int_0^\xi \xi^2 (\Psi_0^{\tilde{n}} + \tilde{n}P_r) d\xi. \quad (4.30)$$

Finalmente, siguiendo el mismo procedimiento de la sub-sección anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\hat{\hat{R}} = & \frac{h\Psi_0^n}{\xi^2(1 - 2\alpha(n+1)v/\xi)} \left[(v + \xi^3\alpha\Psi_0^{n+1})((1 - n\alpha)\ln(\Psi_0) + \alpha\Psi_0) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1 - n\alpha + (1+n)\alpha\Psi_0}{1 - 2\alpha(n+1)v/\xi} \right) (1 + 2\alpha^2\xi^2(n+1))F_{1n} \right] \delta n \\ & + \frac{\Psi_0^n}{\xi^2} [1 - n\alpha + (n+1)\alpha\Psi_0] \left(\frac{v + \xi^3\alpha\Psi_0^{n+1}}{1 - 2\alpha(n+1)v/\xi} \right) \delta h, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde

$$F_{1n} = \int_0^\xi \xi^2 \Psi_0^n [(1 - n\alpha)\ln(\Psi_0) + \alpha\Psi_0] d\xi. \quad (4.32)$$

4.2. Caso II

En este caso, como habíamos mencionado, tenemos

$$P_r = K\rho^{1+1/n} = K\rho_c^{1+1/n}\Psi^n, \quad (4.33)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 - K\rho_0^{1/n})^n} \quad (4.34)$$

y

$$\Delta = Cf(P_r, r)(\rho + P_r)r^N, \quad (4.35)$$

con

$$f(P_r, r)r^{N-1} = \frac{\nu'}{2} = \frac{m + 4r^3\pi P_r}{r(r - 2m)}. \quad (4.36)$$

Entonces tenemos que (2.62) se puede escribir nuevamente como

$$R = \frac{dP_r}{dr} + h(\rho + P_r) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right) = 0, \quad (4.37)$$

donde $h = 1 - 2C$.

4.2.1. Perturbación vía K y h

Perturbando nuestro sistema vía la constante politropa K y el parámetro h , tenemos que

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{(1 - \tilde{K}\rho_0^{1/n})^n}. \quad (4.38)$$

Resulta útil escribir $\tilde{\rho}$ como

$$\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho, \quad (4.39)$$

donde

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{K}} \right) \Big|_{\tilde{K}=K} \delta K. \quad (4.40)$$

Entonces usando (4.38) se demuestra que

$$\tilde{\rho} = \rho + nP_r(\beta - 1) = \rho_c \Psi^n [1 + n(\beta - 1)\alpha\Psi]. \quad (4.41)$$

Si ahora exigimos que la dependencia radial de P_r no varíe entonces

$$\tilde{P}_r = \tilde{K}\rho_c^{1+1/n}\Psi^n = \beta P_r, \quad (4.42)$$

donde hemos usado la ecuación (3.77). Sustituyendo (4.41) y (4.42) en (4.37) se obtiene

$$\tilde{\tilde{R}} = \beta \frac{d\Psi}{d\xi} + \tilde{h}(1 + \alpha\Psi[(n+1)\beta - n]) \frac{\tilde{v} + \xi^3\alpha\beta\Psi^{n+1}}{1 - 2(n+1)\alpha\tilde{v}/\xi}, \quad (4.43)$$

con

$$\tilde{v} = \int_0^\xi \xi^2 \Psi^n [1 + n(\beta - 1)\alpha\Psi]. \quad (4.44)$$

Entonces, aplicando el mismo procedimiento usado en el Caso I, se deduce

$$\delta\hat{\tilde{R}} = \Psi^n \left[\frac{d\Psi}{d\xi} + \frac{h\alpha}{\xi^2(1 - 2\alpha(n+1)v/\xi)} \left\{ \Psi(v + \xi^3\Psi^n(1 + \alpha(n+2)\Psi)) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1 + \alpha\Psi}{1 - 2\alpha(n+1)v/\xi} \right) (1 + 2(n+1)\alpha^2\xi^2\Psi^{n+1})nF_{2K} \Bigg] \delta\beta \\
& + \frac{\Psi^n}{\xi^2} \frac{(1 + \alpha\Psi)(v + \xi^3\alpha\Psi^{n+1})}{(1 - 2(n+1)\alpha v/\xi)} \delta h,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

donde F_{2K} queda escrito como

$$F_{2K} = \int_0^\xi \xi^2 \Psi^{n+1} d\xi. \tag{4.46}$$

4.2.2. Perturbación vía n y h

Al perturbar el sistema por medio del índice n y el parámetro h , de la ecuación (3.77) tenemos que

$$\tilde{\rho} = \rho_c \Psi^{\tilde{n}}, \tag{4.47}$$

y nuevamente exigiendo que la presión radial se mantenga invariante después de perturbar el sistema, tenemos que

$$\tilde{P}_r = P_r = \rho_c \Psi^{n+1}. \tag{4.48}$$

Entonces, aplicando el mismo procedimiento que hemos seguido hasta ahora, podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\delta\hat{\tilde{R}} &= \frac{h\Psi^n}{\xi^2(1 - 2(n+1)\alpha v/\xi)} \left[(v + \alpha\xi^3\Psi^{n+1}) \ln(\Psi) \right. \\
& + \left. \left(\frac{1 + \alpha\Psi}{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi} \right) (1 + 2\alpha^2(n+1)\xi^2\Psi^{n+1})F_{2n} \right] \delta n \\
& + \frac{\Psi^n}{\xi^2} (1 + \alpha) \left(\frac{v + \alpha\xi^3\Psi^{n+1}}{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi} \right) \delta h,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

donde F_{2n} está definido como

$$F_{2n} = \int_0^\xi \xi^2 \Psi^n \ln(\Psi) d\xi. \tag{4.50}$$

Finalmente, queremos concluir este capítulo, dando a conocer que existe otro posible método para perturbar nuestro sistema, el cual, presentamos en el apéndice A.

Capítulo 5

Discusión

Hemos estudiado el concepto de fractura en los dos posibles casos del polítropo relativista general anisótropo, siguiendo dos versiones del esquema perturbativo propuesto por L. Herrera. En la primera de ellas realizamos perturbaciones independientes a la densidad de energía y la anisotropía local, bajo las cuales el sistema sea dinámicamente inestable, vía la constante polítropa K y el parámetro h , respectivamente. En la segunda versión la perturbaciones a la densidad de energía y la anisotropía se realizaron por medio del índice polítropo n y el parámetro h , respectivamente.

De todos los métodos perturbativos presentados en el capítulo 4 y el que se discutirá en el apéndice A, se decidió optar por trabajar únicamente con el caso en que la densidad de energía y la anisotropía local son perturbadas por medio de la constante polítropa K y el parámetro h , respectivamente. Dejamos el análisis de los otros métodos para futuros trabajos, y discusiones.

Usamos las condiciones de frontera para el polítropo relativista general anisótropo (discutidas en el capítulo 3 en las secciones 3.3 y 3.4), que para el Caso I se escriben como

$$v(0) = 0, \Psi_0(0) = 1, \Psi_0(\xi_n) = 0 \quad (5.1)$$

y para el Caso II

$$v(0) = 0, \Psi(0) = 1, \Psi(\xi_n) = 0. \quad (5.2)$$

Procedemos a integrar numéricamente los sistemas de ecuaciones (3.83)-(3.84) y (3.87)-(3.88), por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden, obteniendo los mismos resultados presentados por L. Herrera y W. Barreto en [3]. Una vez obtenidas las soluciones numéricas para Ψ_0 y Ψ , las integrales (4.20) y (4.46) fueron calculadas mediante el método del paralelogramo. Luego, se procedió a realizar el cálculo numérico y graficación de las expresiones (4.21) y (4.45) para un amplio rango de valores de n, α y h .

En las secciones que siguen a continuación presentaremos algunos de los resultados encontrados para los dos casos del polítropo relativista general anisótropo, y realizaremos algunos comentarios y análisis de las mismas.

5.1. Caso I

Con la finalidad de estudiar el efecto que puede llegar a tener el parámetro α sobre los posibles cambios de signo en la fuerza radial resultante (fracturas o inversiones), se graficó δR en función de ξ para distintos valores fijos de n y Γ , variando α .

Encontramos, que para cada n , h y Γ existen una amplia gamma de valores de α en los que ocurren cambios de signo en la fuerza radial. En la figura 5.1 exponemos algunos de estos resultados.

En las gráficas mostradas en la figura 5.1, tenemos que existe un cambio de signo, el cual corresponde a una inversión, en la región cercana a la superficie de la distribución, en donde se puede apreciar que a medida que aumenta el α , la inversión se aproxima cada vez mas hacia la superficie y que la fuerza radial disminuye.

Por otra parte, tenemos que en las gráficas (a) y (b) ocurre otro cambio de signo para algunos valores de α , el cual corresponde a una fractura, en la región cercana al centro de la distribución. En estos casos cuando α aumenta, la fractura se aproxima cada vez mas hacia las zonas mas internas de la esfera, de manera contraria a lo mencionado en el parrafo anterior.

Luego, estudiamos como la anisotropía local del sistema puede llegar a afectar la posible aparición de inversiones o fracturas en las distribuciones de fluido para distintos valores fijos de n , α y Γ . En la figura 5.2 mostramos algunos de los resultados obtenidos.

Entre ellos podemos observar que las gáficas (a), (b) y (c) presentan un comportamiento bastante similar, pero que contrasta con el de la gráfica (d). En las tres primeras, se aprecia que para valores pequeños de h el sistema presenta fracturas que se van acercando hacia la región mas interna de la esfera a medida que h aumenta. Sin embargo, para cierto valor de h (distinto en cada gráfica), las distribuciones dejan de presentar fracturas y comienzan a aparecer inversiones cerca de la superficie. Estas inversiones tienden a acercarse hacia regiones mas internas, conforme aumenta h . Para la gráfica (d) solo observamos inversiones cerca de la superficie y que tienden a acercarse hacia el centro de la distribución a medida que h crece.

Existen algunos valores de los parámetros n , h y α , para los cuales la fuerza radial presenta un comportamiento “anómalo” como el que se observa en la figura 5.3. Aquí podemos apreciar que existen cambios de signos en la fuerza radial, sin perturbar la anisotropía local del sistema. La presencia de este fenómeno resulta extraño para el caso en que $h = 1$ debido, a que, en teoría (ver [10, 11]), no pueden existir fracturas o inversiones para distribuciones de materia isótropas sin perturbar la anisotropía local.

En la figura 5.4 podemos observar la existencia de inversiones (sin perturbar la anisotropía local) para distribuciones isótropas con distintos valores de n . En general se encontró que los cambios de signo en la fuerza radial bajo estas condiciones, aparecen

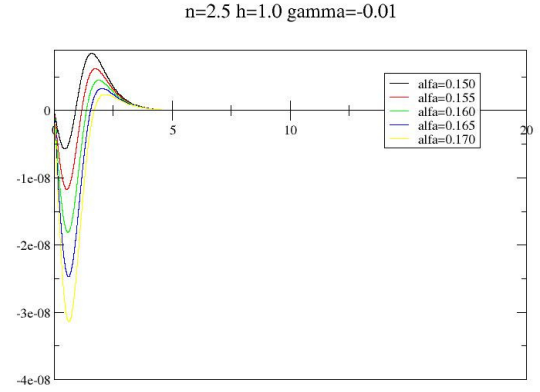
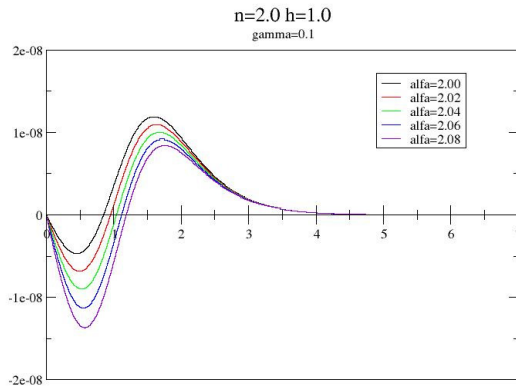
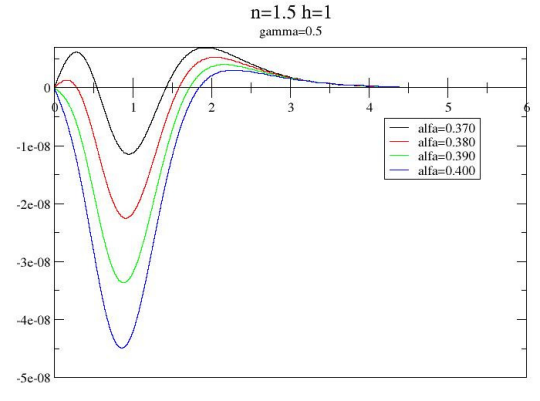
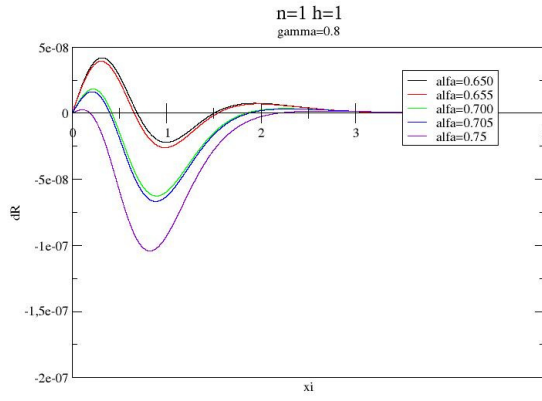
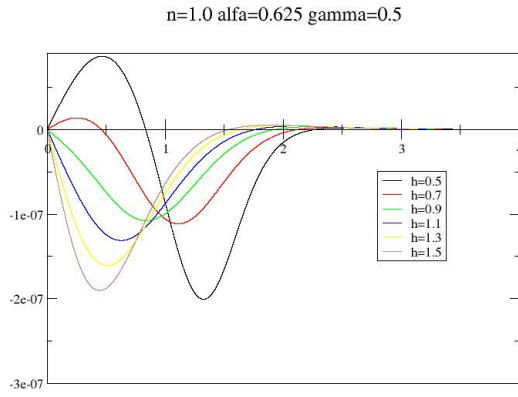
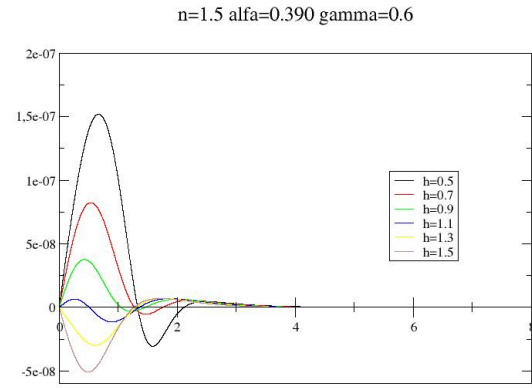


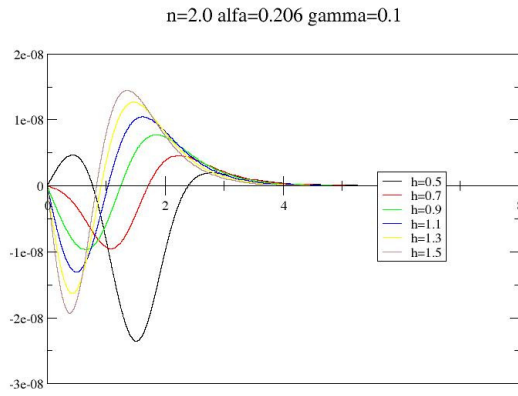
Figura 5.1: δR vs ξ (caso I) para distintos valores fijos de n y Γ para $h = 1$ y $\delta\beta = -10^{-6}$.



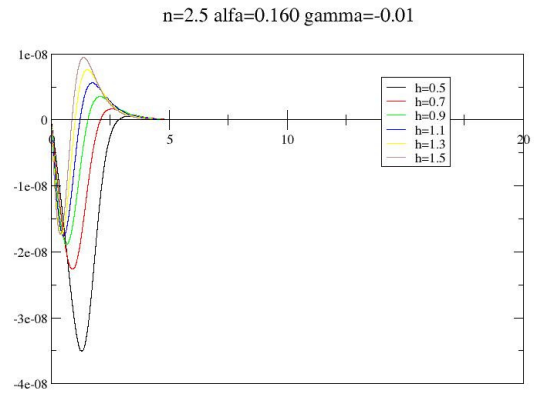
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.2: δR vs ξ (caso I) para distintos valores fijos de n , α y Γ para $\delta\beta = -10^{-6}$.

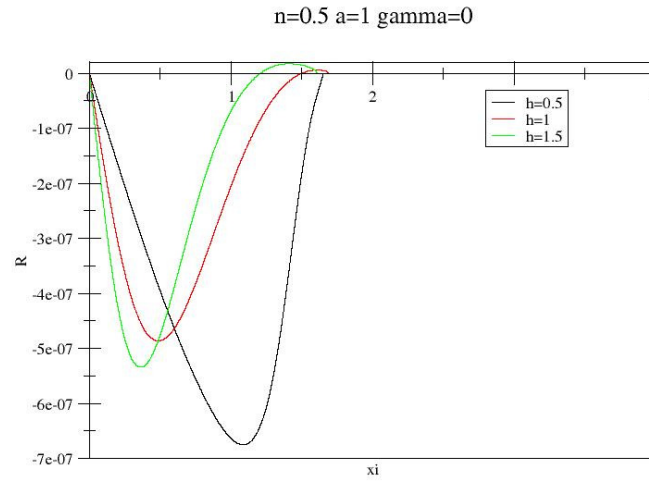


Figura 5.3: δR vs ξ (caso I) para distintos valores de h con $\delta\beta = -10^{-6}$.

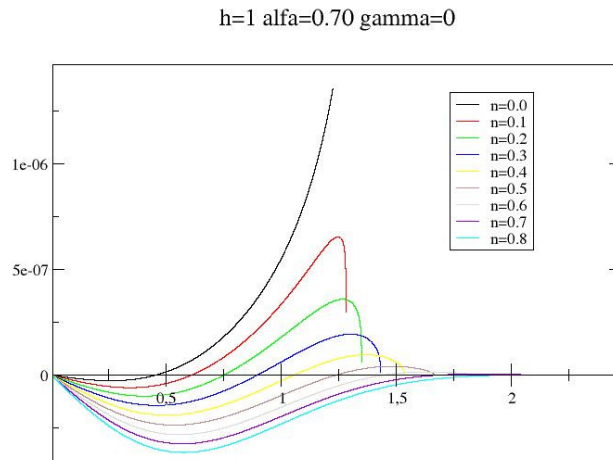


Figura 5.4: δR vs ξ (caso I) para distintos valores de n con $\delta\beta = -10^{-6}$.

para valores de $n < 1,1$.

5.2. Caso II

Al igual que la sección anterior, comenzamos estudiando el efecto que puede llegar a tener el parámetro α sobre la aparición de fracturas o inversiones para valores fijos de n , h y Γ .

En la figura 5.5 se presentan algunos de los resultados obtenidos. Nuevamente, todas las gráficas presentan inversiones cada vez mas cercanas a la superficie de la esfera a medida que aumenta α . En las gráficas (a), (b) y (c) se puede apreciar la presencia de fracturas, en la región cercana al centro de la distribución, para algunos valores de α , y además tenemos que a medida que este parámetro aumenta las fracturas aparecen para valores de r cada vez mas pequeños, y esto ocurre hasta un cierto valor de α .

En la figura 5.6 mostramos algunos de los resultados, donde se puede observar, el efecto que la anisotropía local del sistema puede llegar a tener sobre la posible aparición de inversiones o fracturas en la distribución de fluido para distintos valores fijos de n , α y Γ . El análisis de estos resultados es exactamente el mismo que se obtuvo de la figura 5.2 en la sección anterior.

Para el caso II, también obtenemos que existen algunos valores de los parámetros n , h y α , para los cuales la fuerza radial presenta un comportamiento “anómalo”, como en la figura 5.7. De igual manera que en la sección anterior, la figura 5.8 muestra la aparición de inversiones (sin perturbar la anisotropía local) en distribuciones de materia isótropas para distintos valores del índice n . Sin embargo, para este caso se encontramos que los cambios de signo en la fuerza radial aparecen para valores de $n < 0,9$.

Hemos encontrado que, para ambos casos del polítopo relativista general anisótropo, existen fracturas o inversiones para un amplio rango de valores de los parámetros n , h y α . Observamos también que el comportamiento de la fuerza radial resultante, presenta un comportamiento bastante similar, para ambos casos, al realizar variaciones en los parámetros h y α . Además, queremos resaltar, que para cada valor de n las fracturas o inversiones ocurren para un amplio rango de valores de Γ y para configuraciones que son inicialmente anisótropas. También, se puede demostrar que un intercambio en los signos de δh y $\delta \beta$, conduce a que las fracturas se conviertan en inversiones y viceversa.

Un resultado interesante, fue la presencia de fracturas (o inversiones), para ambos casos, en configuraciones isótropas sin perturbar la anisotropía local del sistema. Una posible explicación tentativa a este comportamiento “anómalo”, esta basada en uno de los últimos trabajos de L. Núñez [13], en el cual se obtiene como resultado que configuraciones localmente isótropas pueden presentar fracturas, si las fluctuaciones en la densidad de energía dependen de la coordenada radial. Resulta sencillo verificar que en los dos posibles casos (caso I y II) las fluctuaciones a la densidad cumplen con esta condición.

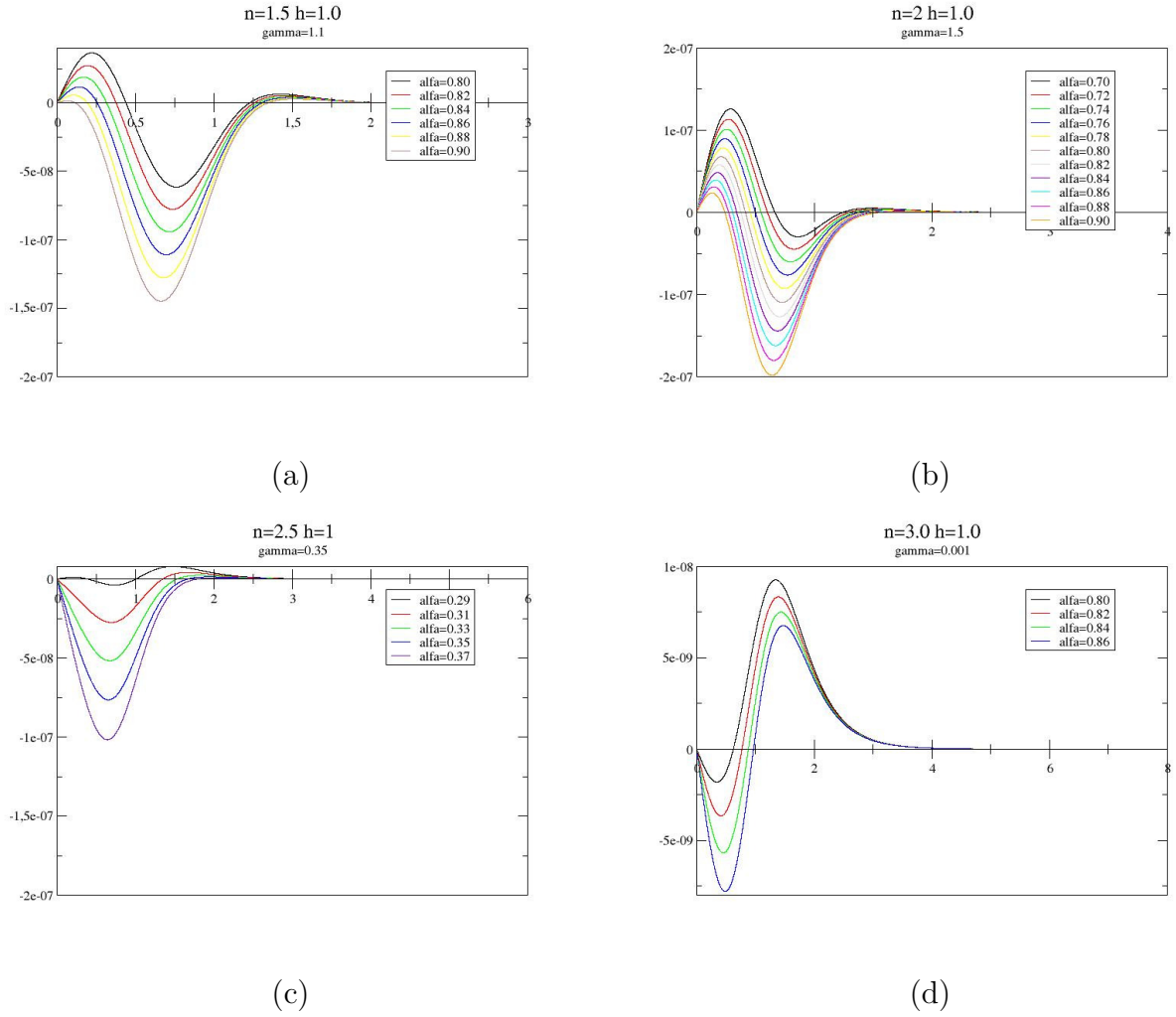
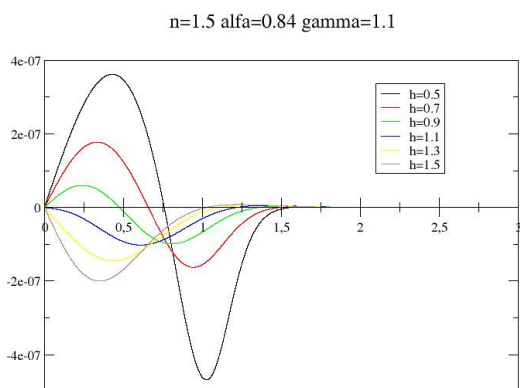
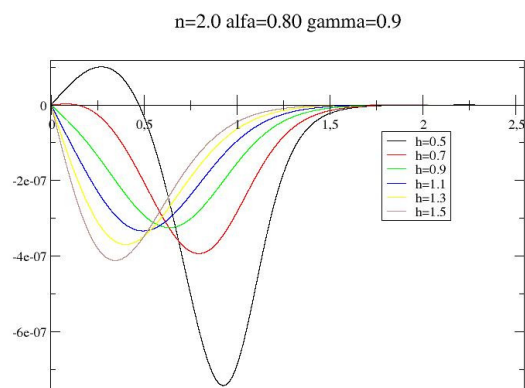


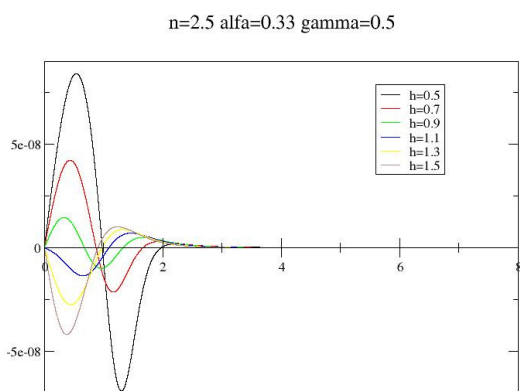
Figura 5.5: δR vs ξ (caso II) para distintos valores fijos de n y Γ para $h = 1$ y $\delta\beta = -10^{-6}$.



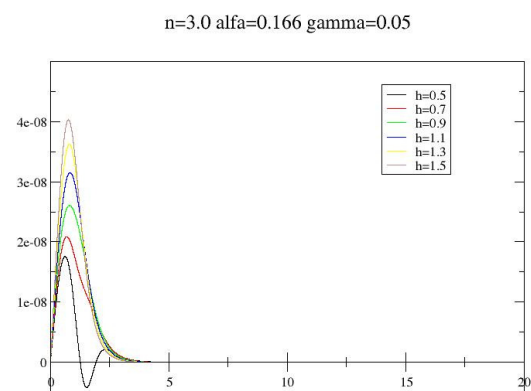
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.6: δR vs ξ (caso II) para distintos valores fijos de n , α y Γ para $\delta\beta = -10^{-6}$.

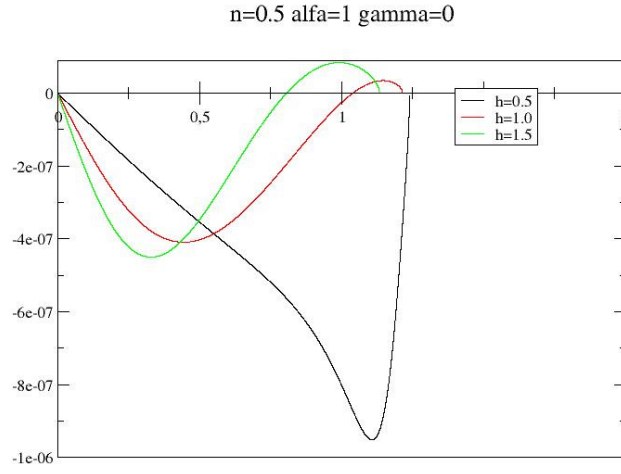


Figura 5.7: δR vs ξ (caso II) para distintos valores de h con $\delta\beta = -10^{-6}$.

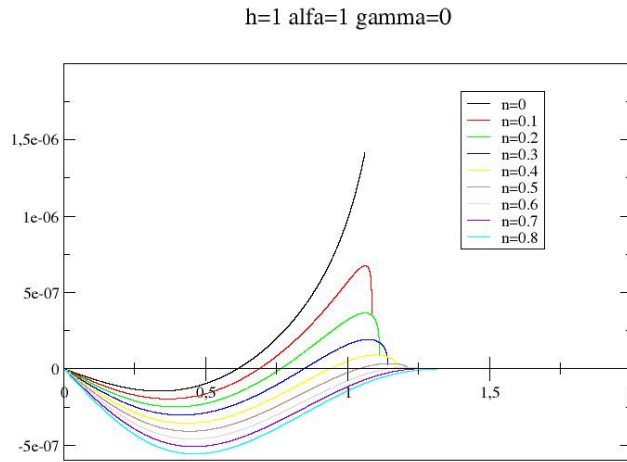


Figura 5.8: δR vs ξ (caso II) para distintos valores de n con $\delta\beta = -10^{-6}$.

En el apéndice A seguiremos un procedimiento planteado por L. Núñez [12], en el cual las fluctuaciones de la densidad de energía y la anisotropía local, son constantes para toda la esfera. Obtendremos como resultado (para ambos casos del politropo relativista general anisótropo) que las fracturas o inversiones de la fuente solo serán posibles si la densidad y la anisotropía local son perturbadas simultáneamente.

Entonces, queda para futuros trabajos lo siguiente:

1. Determinar si el comportamiento “anomalo” observado para los casos I y II, está relacionado de alguna forma con el hecho de que las perturbaciones a la densidad de energía dependan de la coordenada radial.
2. Analizar y discutir la segunda versión del esquema perturbativo, propuesto en el capítulo 4.

Finalmente, debemos resaltar que todos los resultados obtenidos en este trabajo dependen de la condición de simetría esférica. Por lo tanto, nada de lo que hemos hecho aquí, puede ser aplicado en modelos que no cumplan con este requerimiento.

Apéndice A

En este apéndice aplicaremos el procedimiento usando por L. Núñez y colaboradores en uno de sus trabajos (ver [12]), con la finalidad de encontrar una expresión de la fuerza radial resultante como consecuencia de perturbaciones a la densidad de energía y anisotropía local para los dos casos de los modelos polítrópos relativistas generales anisótropos.

Supondremos que las perturbaciones a la densidad de energía ($\delta\rho$) y anisotropía local ($\delta\Delta$) son independientes, pero las fluctuaciones en la masa y distribución de presiones radiales dependerán de las fluctuaciones a la densidad de energía, entonces

$$\rho + \delta\rho \Rightarrow \begin{cases} P_r(\rho + \delta\rho, r) \approx P_r(\rho, r) + \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \delta\rho \\ m(\rho + \delta\rho, r) = 4\pi \int_0^r (\rho + \delta\rho) \bar{r}^2 d\bar{r} \approx m(\rho, r) + \frac{4\pi}{3} r^3 \delta\rho \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

Ahora, podemos escribir la fuerza radial resultante después de la perturbación como

$$\tilde{R} \approx R(\rho, P_r, m, \Delta, r) + \frac{\partial R}{\partial \rho} \delta\rho + \frac{\partial R}{\partial P_r} \delta P_r + \frac{\partial R}{\partial m} \delta m + \frac{\partial R}{\partial \Delta} \delta\Delta \quad (\text{A.2})$$

y usando las ecuaciones (2.62) y (A.1), (A.2) se puede escribir como

$$\tilde{R} = \left(2 \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\partial R}{\partial m} \right) \delta\rho - \frac{2}{r} \delta\Delta, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial m} = \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi P_r r^2)}{(r - 2m)^2}. \quad (\text{A.4})$$

Definiendo

$$\hat{\tilde{R}} = \frac{A}{4\pi\rho_c^2}, \quad (\text{A.5})$$

se puede demostrar sin dificultad, que para el Caso I del polítrópo general relativista anisótropo obtenemos

$$\hat{\tilde{R}} = \left[\frac{2}{\xi} \left(\frac{v + \xi^3 \alpha \Psi_0^{n+1}}{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi} \right) + \frac{\xi}{3} \Psi_0^n (1 - n\alpha + (n+1)\alpha \Psi_0) \frac{(1 + 2\alpha^2(n+1)\xi^2 \Psi_0^{n+1})}{(1 - 2\alpha(n+1)v/\xi)^2} \right] \delta\epsilon$$

$$-\frac{2}{(n+1)\xi}\delta\hat{\Delta}, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\delta\epsilon = \frac{\delta\rho}{\rho_c}, \quad \delta\hat{\Delta} = \frac{\delta\Delta}{P_{rc}}. \quad (\text{A.7})$$

De igual manera podemos obtener el siguiente resultado para el Caso II

$$\hat{\tilde{R}} = \left[\frac{2}{\xi} \left(\frac{v + \xi^3 \alpha \Psi^{n+1}}{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi} \right) + \frac{\xi}{3} \Psi^n (1 + \alpha \Psi) \frac{(1 + 2\alpha^2(n+1)\xi^2 \Psi^{n+1})}{(1 - 2\alpha(n+1)v/\xi)^2} \right] \delta\epsilon$$

$$-\frac{2}{(n+1)\xi}\delta\hat{\Delta}, \quad (\text{A.8})$$

donde, recordando del capítulo anterior, las funciones Ψ_0 y Ψ son las soluciones a las ecuaciones extendidas de Lane-Emden (usando el modelo heurístico para la anisotropía local) para los casos I y II, respectivamente. Entonces de las ecuaciones (A.6) y (A.8) obtenemos que las fracturas o inversiones de la fuente solo serán posibles si tanto la densidad de energía como la anisotropía local son perturbadas.

Bibliografía

- [1] S. Goran, L. Herrera, and J. Jimenez. *II Escuela venezolana de relatividad campos y astrofisica*. Universidad de Los Andes Facultad de Ciencias Merida, Venezuela, November 1996.
 - [2] L. Herrera and W. Barreto. Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications. *Phys. Rev. D*, 87:087303, Apr 2013.
 - [3] L. Herrera and W. Barreto. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. *Phys. Rev. D*, 88:084022, Oct 2013.
 - [4] L. Herrera and N. O. Santos. Local anisotropy in self-gravitating systems. , 286:53–130, July 1997.
 - [5] S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Chicago:University of Chicago, 1939.
 - [6] R. Kippenhahn and A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
 - [7] R. F. Tooper. General Relativistic Polytropic Fluid Spheres. , 140:434, August 1964.
 - [8] R. F. Tooper. Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity. , 142:1541, November 1965.
 - [9] L. Herrera, A. Di Prisco, W. Barreto, and J. Ospino. Conformally flat polytropes for anisotropic matter. *General Relativity and Gravitation*, 46(12), 2014.
 - [10] A. Di Prisco, L. Herrera, and V. Varela. Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy. *General Relativity and Gravitation*, 29(10):1239–1256, 1997.
 - [11] L. Herrera. Cracking of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*, 165(3):206 – 210, 1992.
 - [12] H Abreu, H Hernández, and L A Núñez. Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects. *Classical and Quantum Gravity*, 24(18):4631, 2007.
 - [13] Gonzalez G., Navarro A., and Núñez L. Cracking and instability of isotropic and anisotropic relativistic spheres. 2014.
-

- [14] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi, and L. Witten. Some models of anisotropic spheres in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 22(1), 1981.
 - [15] H. Bondi. The Contraction of Gravitating Spheres. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 281:39–48, August 1964.
 - [16] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill:Kogakusha, 2., international student ed. edition, 1975.
 - [17] A. Di Prisco, E. Fuenmayor, L. Herrera, and V. Varela. Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*, 195:23–26, November 1994.
 - [18] M. Demianski. *Relativistic astrophysics / by Marek Demianski ; translated by Antoni Pol*. New York : Pergamon Press ; Polish Scientific Publishers Oxford : Warszawa, 1., english ed. edition, 1985.
 - [19] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss. *Stellar Structure and Evolution*. Berlin: Springer-Verlag, 2., ed. edition, 2012.
-