Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

ESTUDIO DE LA ACCIÓN DE MAXWELL MÁS UN TÉRMINO TOPOLÓGICO EN D = 4+1

Trabajo Especial de Grado presentado por
Br. Johnny José Istúriz Correa
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. Dr. Pío José Arias

Mayo-2015

Caracas-Venezuela

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

ESTUDIO DE LA ACCIÓN DE MAXWELL MÁS UN TÉRMINO TOPOLÓGICO EN D = 4+1

Trabajo Especial de Grado presentado por
Br. Johnny José Istúriz Correa
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. Dr. Pío José Arias

Mayo-2015

Caracas-Venezuela

24 de mayo de 2015

Consejo de la Escuela de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

Estimados miembros del Consejo de Escuela

Reciban un cordial saludo. Conforme a lo establecido en el artículo 13 de la "Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV" les remito tres ejemplares de la monografía de TEG del estudiante **Br. Johnny José Istúriz Correa**, CI: **1234567**, titulado **ESTUDIO DE LA ACCIÓN DE MAXWELL MÁS UN TÉRMINO TOPOLÓGICO EN D = 4+1**, los cuales he revisado y considero listos para la evaluación por parte de un jurado.

Agradeciendo la consideración que sirvan prestar a la presente, me despido atentamente,

Prof. Dr. Pío José Arias
3141593
Tutor
UCV

Dedicatoria

A Dios Todopoderoso, a Albin Abel, a Johlianni y a mis padres:

Definitivamente, este trabajo no se podría, haber realizado, sin el concurso, apoyo, colaboración y aporte de las personas que me brindaron su ayuda, solidaridad y amistad, en los momentos cruciales de mi formación humana, espiritual y académica. Ofrezco mi gratitud a Dios El Padre, a Dios El Hijo y a Dios El Espíritu Santo, en primer término, quienes después, de 15 años fuera del claustro universitario motivaron y estimularon mi contenido interior en los tiempos de crisis. Les doy las gracias por haberme dado salud y aguante, para permitirme lograr las metas propuestas, y también por su bondad infinita e inmerecida. Deseo de todo corazón dedicarles este pequeño esfuerzo a mi nieto Albin Abel, quien apenas comienza a vivir y por quien abrigo la esperanza, de que en la vida del mundo futuro, encuentre la ruta del conocimiento y la verdad. A mi hija Johlianni, quien se encuentra en la flor de la vida y con un horizonte por delante lleno de oportunidades y bienestar. A mis padres: Oscar Istúriz Benavente, quien vive en los brasos de Cristo, esperando su llamado y regreso; y a Justina Correa de Istúriz, quien me ha apoyado y dado consejos oportunos y sabios, y además a vivido conmigo momentos difíciles, como los del deslabe en el Estado Vargas en los años 1999 y 2005, asi como tantos otros del cual sólo Dios Uno y Trino tiene memoria; a mis padres les dedico este trabajo; a ellos, quienes no tuvieron oportunidades de estudios y abandonaron -montaña adentro- a sus progenitores y caseríos, para brindarle a sus hijos oportunidades y bienestar.

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Un antiguo proverbio chino dice: «Cuando bebas agua, acuérdate de la fuente», y otro muy apropiado para la ocación nos recuerda: «Regala un pescado a un hombre y le darás alimento para un día, enséñarle a pescar y lo alimentarás para siempre»; y este ha sido mi caso, con referencia especial al Dr. Pío José Arias, a quien le debo, hacer justicia, en esta parte de mi TEG. A esta gran persona de sólida formación académica y de valores humanos le agradezco, como efectivamente lo hago el haber sido mi principal fuente bibliográfica, por un lado; y por otro, le estoy agradecido por haberme corregido, y enseñado la recta interlección de lo que debe ser un profesional universitario, gracias al Dr. Pío Arias por su tolerancia y su amistad y debo reconocer, que nunca nos negó el conocimiento, nos habrió las puertas de su casa en la Ciudad de Maracay y en su oficina de la universidad. También agradezco a la UCV y a la Facultad de Ciencias, a su invalorable capital humano: profesorado, personal administrativo y obrero.

RESUMEN

En este trabajo se aborda el estudio de una teoría en 5 dimensiones espacio-temporales. Se hace el análisis canónico, siguiendo el método de Dirac. Acto seguido pasamos al análisis cinemático de dicha teoría para escribir las ecuaciones cinemáticas de movimiento de forma concisa y compacta, a continuación procedemos a deducir las cantidades conservadas, producto del Teorema de Noether y posterior a ello, continuamos con el cálculo de la dimensionalidad de los campos. Para realizar todo esto, se considera el Hamiltoniano de la acción asociado al Lagrangiano de la acción S; al que se aplica el formalismo matemático de los corchetes de Poisson. Se hace el estudio de las transformaciones canónicas, así como de las cantidades conservadas, derivadas de la consideración del Teorema de Noether, tal como se anunció hace un momento. Realizado esto se procede a escribir la acción extendida de la teoría abordada. Como se recordará en otras ocaciones, el Hamiltoniano asociado a la acción, nos vincula a la mecánica cuántica, através de las variables relevantes del problema considerado en el estudio de dicha cinemática.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción General al TEG

El presente trabajo es el fruto de la experiencia adquirida en los cursos avanzados, así como en los cursos de las asignaturas electivas, en las áreas de mecánica y teoría de campo, que se imparten en nuestra licenciatura. De hecho aplicamos ésos conocimientos para el análisis de un modelo físico.

Estudiamos la cinemática del modelo y le hicimos el análisis Hamiltoniano siguiendo el formalismo del método de Dirac.[1.]

El modelo a estudiar corresponde a un Lagrangiano tipo Maxwell, al cual le agregamos un término de carácter topológico en 4+1 dimensiones espacio-temporales. Este modelo tiene las mismas invariancias de calibre del modelo Maxwell y describe una excitacin masa.

El término topológico es tal que si tratamos de acoplarlo a una métrica externa; ésta no aparece en el Lagrangiano. De esta forma al hallar el tensor de energía-momentum, haciendo variaciones en

[1]Dirac P.A.M., Lectures on Quantum Mechanics

la métrica, el resultado será nulo De hecho en la acción propuesta se observa que modificando el tensor de energía-momentum asociado a la invariancia bajo traslaciones, se puede obtener otro tensor simétrico, cuyas cargas conservadas son las mismas, y que se conoce como tensor de Belifante.

Este tensor al ser evaluado sobre las ecuaciones de movimiento, es igual al del término de Maxwell. En otras palabras la contribución del término topológico desaparece. En este trabajo analizaremos el modelo de Maxwell más un término topológico ya descrito. Hacemos un análisis cinemático donde obtendremos las ecuaciones de movimiento, así como el espectro de partículas descrito.

Veremos cuales son las corrientes conservadas asociadas a las invariancias bajo el grupo de Poincaré y en particular se obtiene el tensor de Belifante, donde se pierde la apariencia del término topológico.

Este modelo corresponde a un modelo de Lagrangiano singular por lo q ue aplicaremos el formalismo de Dirac para el análisis Hamiltoniano. Se obtendran las transformaciones de calibre y luego al final conextamos la acción extendida con la acción original. La introducción al formalismo Hamiltoniano para sistemas regulares y singulares se hace en el capítulo 2, en los capítulos 3 y 4 se hacen los análisis descritos al modelo que se estudia. Finalmente se dan las conclusiones en el capítulo 5.

Capítulo 2

Formalismo Hamiltoniano en Sistemas Regulares y Singulares

2.1. Introducción

En este capítulo abordaremos la descripción y el estudio básico de la transición de un sistema, en el espacio de configuraciones al espacio de fases. En la primera parte nos ocuparemos de desarrollar la teoría necesaria; con ayuda del lenguaje matemático que se emplea. Haremos la descripción del formalismo canónico (Hamiltoniano) para sistemas regulares y singulares. Continuando con nuestra explicación presentaremos a continuación la nomenclatura que usaremos en cada caso.

En el caso de que estemos trabajando con un número finito de grados de libertad, el índice i denota los índices discretos que toma la variable dinámica, y cuando se suma, se hace bajo el simbolo de $\sum$, la variable generalizada o dinámica se denota en este caso como $q^i(t)$. El Lagrangiano que describe el sistema físico en questión es: $\mathtt{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$, al pasar luego del espacio de configuración al espacio de fase tenemos el Hamiltoniano $\mathtt{H}(q^i, p_i, t)$ y la acción viene definida como la integral en el tiempo del Lagrangiano. En el caso de estar trabajando con un número infinitos grados de libertad, el índice i pasa a ser suplido o reemplazado por un índice contínuo $\vec{x}$, el simbolo de $\sum$, es reemplazado por la $\int d^D\vec{x}$. Diremos que la dimensión es $D = d + 1$, lo que significa d dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal. La variable dinámica es $Q_a(t, \vec{x})$, la cual toma valores diferentes del índice contínuo $\vec{x}$ en el espacio, el sub-índice a es para indicar la posibilidad de que existan varias $Q(x, t)$. El Lagrangiano es una función de las $Q(t, \vec{x})$. Un funcional es una función cuyos argumentos son también funciones, $\mathtt{L}(Q_a, \dot{Q}_a, \partial_i Q_a)$. Al pasar del espacio de configuarción al espacio de fase tenemos el Hamiltoniano $\mathtt{H}(Q_a, \pi_a)$. La acción viene expresada como la integral en el tiempo de la integral dimensional de la Densidad Lagrangiana L o también se puede decir que la acción es la integral temporo-espacial de la Densidad Lagrangiana; es decir:

$$S = \int dt \int d^d x L \tag{2.1}$$

$$S = \int d^D x L \tag{2.2}$$

donde: $L = \mathbf{L}(Q_a, \dot{Q}_a, \partial_i Q_a)$ El que se cumpla el principio de Hailton de mínima acción, implica hacer algunos cálculos muy importantes. Estos ajustes; es decir unas correciones, que se efectúan sobre la acción, que da origen a nuestro estudio, la cual describe una trayectoria entre dos puntos del espacio de fases. El camino a seguir por S debe ser mínimo entre esos dos puntos de dicho espacio. Los ajustes y correciones descansan sobre el hecho, de que, al resolver las ecuaciones de Lagrange para el sistema planteado no es posible despejar todas la velocidades y aceleraciones, si esto fuese posible; es decir despejar por ejemplo las velocidades, entonces intregraríamos a éstas y obtendríamos resuelto la dinámica del sistema. Al no poder despejar todas las velocidades, sino algunas, entonces surjen unos vínculos que dependen de las variables principales y dinámicas del objeto en estudio. En la segunda parte, presentamos el instrumento o herramienta (Procedimiento de Dirac)[1] que nos permitirá conocer la evolución en el tiempo de la acción S; asi como algunos parámetros de importancia, que nos ayudará a completar el estudio propuesto; es decir aprenderemos a manejar, el lenguaje; en Teoría de Campo Cuántica, que a su vez tiene la ventaja de vincularnos a través de **H**, con la Mecánica Cuántica ordinaria.

En la formulación de Dirac, la combinación interesante de la Mecánica Cuántica con la Teoría de la Relatividad; en relación, con lo que tiene que ver, la interacción de los campos u ondas generadas por partícula dotadas de alta energía, el empleo de identidades matemáticas, conlleva a la resolución elemental, de nuestros objetivos, dirigidos a lograr un resultado y por ende, acto seguido, conseguir alcanzar las metas propuestas.

[1]Dirac P.A.M., Lectures on Quantum Mechanics

2.2. Formulación Hamiltoniana de Sistemas Regulares

Partimos de un sistema mecánico descrito por un Lagrangiano: $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ y su acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)dt. \tag{2.3}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{2.4}$$

Si definimos:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.5}$$

podemos reescribir dichas ecuaciones como:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{2.6}$$

Si tenemos el lagrangiano

$$L'$$

tal que

$$L' = L + \frac{df(\dot{q}^i, t)}{dt} \tag{2.7}$$

resulta que ambos lagrangianos nos dan origen a las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange. De hecho puede verse que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.8}$$

así

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^i}\frac{df}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\frac{df}{dt} = 0 \tag{2.9}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L'}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{2.10}$$

Dicha definición conlleva a una situación, que resulta importante a la hora de emprender el formalismo Hamiltoniano. Esta resulta ser, si de la definición del momento conjugado, p_i nos permite ó no despejar las velocidades $\dot{q}^i$ como función de las p_i, q^i, t. En este sentido, veamos la función:

$$F_i \equiv F_i(q^i, \dot{q}^i, p_i, t), \tag{2.11}$$

$$F_i \equiv p_i - \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.12}$$

Mirando la definicion de p_i, tenemos que $F_i = 0$ y queremos ver la posibilidad de que podamos obtener:

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^i, p_i, t) \tag{2.13}$$

para lo cual, segun el teorema de la función implícita, debe suceder que $det(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^j}) = det(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^j}) \neq 0$. Por esto diremos que, los sistemas para los cuales la matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^j}, \tag{2.14}$$

es singular y corresponde a sistemas singulares; en caso contrario, los denominamos regulares. Para los sistemas regulares es posible obtener $\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^i, p_i, t)$, lo que significa que

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \;\rightarrow\; \dot{q}^i = \dot{q}^i(q^i, p_i, t). \tag{2.15}$$

Puede verse que la cantidad

$$H = (p_i \dot{q}^i - L)\Big|_{p_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \tag{2.16}$$

no depende de las velocidades. De hecho, veamos la diferencial total de H

$$\begin{aligned} dH &= [dp_i \dot{q}^i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt]\Big|_{p_i = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}^i}} \\ &= dp_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

asi

$$H = H(q^i, p_i, t), \tag{2.18}$$

y además

$$\frac{\partial q_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial L}{dq^i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.21}$$

Estas expresiones nos dicen como evolucionan las variables q^i, y p_i, y relacionan las derivadas respecto a t de H y L. Además constituyen un sistema de ecuaciones de primer orden. A las ecuaciones (2.19) y (2.20) se les conoce como las ecuaciones de Hamilton. H corresponde a la transformación de Legendre del Lagrangiano L; tomando a las $\dot{q}^i$ como variables activas. En este sentido la función

$$F(q^i, \dot{q}^i, p_i, t) \;\equiv\; p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i, t), \tag{2.22}$$

es maximizada cuando

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.23}$$

y la posibilidad de tener

$$H(q^i, p_i, t) = [p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i, t)]\Big|_{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \tag{2.24}$$

lo garantiza la condición sobre el determinante Hessiano

$$det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \dot{q}^i}) \neq 0 \tag{2.25}$$

La transformada de H respecto a p_i nos llevaría aL. Es importante notar que las ecuaciones de Hamilton aparecen como producto de aplicar el principio de mínima acción para (q^i, p_i) en la acción escrita como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [(p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i, t) dt)] \tag{2.26}$$

Veamos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt(\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q_i) \tag{2.27}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt[\delta p_i (\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p}{}_i) + \delta q^i (-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i})] + p_i \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2} \tag{2.28}$$

de donde

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.29}$$

Una consecuencia importante de las ecuaciones de Hamilton, es que si L no depende explícitamente de t, entonces H es una constante de movimiento. De hecho

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}^i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.30}$$

y sabemos que

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

asi cuando

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \tag{2.31}$$

Corchetes de Poisson

Para dos funciones $F = F(p_i, q^i, t); \quad G = G(p_i, q^i, t)$, definimos la operación:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \{F(q^i, p_i, t), G(q^i, p_i, t)\} \\ &\equiv \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \end{aligned} \tag{2.32}$$

que llamamos el corchete de Poissón entre F, y G; esta operación satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= -\{G, F\} \\ \{F_1 + F_2, G\} &= \{F_1, G\} + \{F_2, G\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_1 F_2, G\} &= F_1\{F_2, G\} + \{F_1, G\}F_2 \\ \{F, c\} &= 0, \quad c = ctte \end{aligned}$$

$$\{F\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} \ = \ 0 \quad (2.33)$$

A esta última propiedad se le conoce como identidad de Jacobi. Los corchetes entre las variables fundamentales (q^i, p_i) serán

$$\left.\begin{array}{r}\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \\ \{q^i, q^j\} = 0 \\ \{p_i, p_j\} = 0\end{array}\right\} \quad (2.34)$$

Una consecuencia importante de la definición de los corchetes de Poisson[2] es que para: $F = F(q^i, p_j, t)$, sucede que

$$\{F, q_i\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad \{F, p_i\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}. \quad (2.35)$$

También puede verse que

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.36)$$

donde H es el Hamiltoniano. Podemos escribir entonces, las ecuaciones de Hamilton como

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}; \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (2.37)$$

En otra dirección para una constante de movimiento, sucede que: $\{u, H\} = -\frac{\partial u}{\partial t}$, pues $\frac{du}{dt} = 0$. En particular para una constante que no depende explícitamente del tiempo, sucede que $\{u, H\} = 0$. De igual forma el corchete de dos constantes de movimiento, que

[2]Weinberg S., The Quantum Theory of Fields, Vol. I

no dependan explícitamente de t, también será una constante de movimiento, como consecuencia de la identidad de Jacobi.

$$\{H, \{u, v\}\} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad si \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{2.38}$$

2.3. Transformaciones Canónicas

En el formalismo Lagrangiano, existe la posibilidad de hacer cambios de coordenadas: $q^i \rightarrow Q^i(q^i, t)$, para tener en muchos casos una descripción conveniente de un sistema mecánico. Pensando en el formalismo Hamiltoniano podemos pensar en cambios en el espacio de fases $(q^i, p_i) \rightarrow (Q^i, P_i)$, con

$$Q^i = Q^i(q^i, p_i, t), \quad P_i = P_i(q^i, p_i, t) \tag{2.39}$$

y pedimos que este nuevo conjunto de variables, ademas de ser invertible, sea canónico, en el sentido que exista una función K tal que

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \tag{2.40}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i} \tag{2.41}$$

Estas ecuaciones deben surgir del principio de mínima acción[3] aplicado a

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}^i - K(Q^i, P_i, t) dt) \tag{2.42}$$

[3]Weinberg S., The Quantum Theory of Fields, Vol. I

Al igual que surgen las ecuaciones de Hamilton a partir de la acción S; Si queremos que ambas situaciones ocurran podemos relacionar ambas acciones como

$$\lambda(p_i\dot{q}^i - H) + \frac{dF}{dt} = P_i\dot{Q}^i - K \tag{2.43}$$

El factor λ lo tomamos igual a 1. En el caso de que λ sea distinto de 1, diremos que la transformación canónica es extendida y cuando λ es igual a 1, le llamaremos transformación canónica solamente. A la función F se le conoce como función generatriz de la transformación canónica.

Miremos el caso de una transformación canónica donde F es función de q^i, Q^i; es decir $F = F(q^i, Q^i, t)$. Una inspección directa de (2.43),nos lleva a

$$P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}, \qquad p_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \qquad K = H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{2.44}$$

De $p^i = -\frac{\partial F_1}{\partial q^i}$, obtenemos $Q^i = Q^i(q^i, p_i, t)$, que al sustituir en $P^i = \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}$, llegamos a $P_i = P_i(q^i, p_i, t)$, esto junto con la invertibilidad del cambio nos permite obtener $Q^i = Q^i(q^i, p_i, t)$.Usando $P^i = \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}$, podemos tomar a Q_i,como variable activa y hacer una transformación de Legendre en F_1 definiendo

$$F_2(q^i, P_i, t) = (Q^i P_i - F_1)\Big|_{p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}} \tag{2.45}$$

Análogamente podríamos tomar q^i como variable activa con

$$-p^i = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}$$

hacer una transformada de Legendre, obteniendo

$$F_3(Q^i, p_i, t) = (-q^i p_i - F_1)\Big|_{-p_1=\frac{\partial F_1}{\partial q^i}} \tag{2.46}$$

Finalmente podríamos hacer una doble transformación de Legendre y obtener

$$F_4(p_i, P_i, t) = (Q^i P_i - q^i p_i - F_1)\Big|_{p_1=\frac{\partial F_1}{\partial q^i}}\Big|_{p_1=\frac{\partial F_1}{\partial q^i}} \tag{2.47}$$

En cada situación, la relación $(p_i\dot{q}^i - H) + \frac{dF}{dt} = P_i\dot{Q}^i - K$, queda como:

$$\dot{q}^i p_i - H - \frac{dF_2}{dt}(q^i, P_i, t) = -Q^i \dot{P}_i - K \tag{2.48}$$

$$-q^i \dot{p}_i - H - \frac{dF_3}{dt}(Q^i, p_i, t) = \dot{Q}^i P_i - K \tag{2.49}$$

$$-q^i \dot{p}_i - H - \frac{dF_4}{dt}(p_i, P^i, t) = -Q^i \dot{P}_i - K \tag{2.50}$$

Por lo que en cada caso, hay un conjunto de ecuaciones equivalentes a (2.44)

$$P^i = \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}, \qquad Q^i = -\frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \qquad K = H - \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

que permite obtener el cambio.

Pueden haber casos que se salen de este esquema; donde, podrá existir una función generatriz

$$F' = F'(q^i, Q^i, P_i, P_i, t)$$

El generador de transformaciones infinitesimales

Un caso que podemos resaltar, es la transformación identidad. La función generatriz de esta transformación es de tipo F_2, descrito antes como

$$F_2(q^i, P_i) = q^i P_i$$

Las ecuaciones equivalentes a (2.44) son

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i}, \qquad Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

de donde obtenemos

$$p_i = P_i, \;\; Q^i = q^i, \;\; y \;\; K = H.$$

Tomemos ahora una transformación cercana a la identidad con función generatriz

$$G(q^i, P_i) = q^i P_i + \epsilon F(q^i, P_i) + 0(\epsilon^2) \approx q^i P_i + \epsilon F(q^i, p_i)$$

Así a primer orden tenemos

$$\begin{aligned} p_i &= P_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q^i} \\ Q^i &= q^i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial p_i} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \delta q^i &\equiv Q^i - q^i &= \epsilon \frac{\partial F}{\partial p_i} = \epsilon \{q^i, F\} \\ \delta p_i &\equiv P_i - p_i &= -\epsilon \frac{\partial F}{\partial q^i} = \epsilon \{p_i, F\} \end{aligned}$$

y en general para una función $f = f(q^i, p_i)$, el cambio infinitesimal será

$$\delta f(q^i, p_i) = \epsilon\{f(q^i, p_i), F\}$$

El cual decimos es generado por ϵF, en particular

$$\delta t \dot{q}^i(t) = q^i(t + \delta t) - q^i(t)$$

a primer orden, tambien

$$\delta t \dot{q}^i(t) = \delta t\{q^i, H\}$$

así el Hamiltoniano genera los cambios en las q^i, cuando nos trasladamos en el tiempo.

2.4. Formulación Hamiltoniana para Sistemas Singulares

Pasamos ahora al caso en que no es posible despejar todas las velocidades en función de los momenta. Esto ocurre cuando la Matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{2.51}$$

no tiene rango máximo, es decir: $det(H_{ij}) = 0$, por lo tanto el rango de dicha matriz es: $r < N$, donde N es el número de $q^{i'}s$. Reordenamos las $\dot{q}^i$ de forma que las primeras velocidades, sean las que son posible despejar. De hecho la matriz Hessiana será equivalente a una matriz con un menor rango, para el cual su determinante es distinto de cero. Aplicando el teorema de la función implícita tendremos

$$\dot{q}^I = g^I(p_i, q^i, \dot{q}^\alpha), \quad con \quad I = 1, 2, ...r;$$
$$i = 1, 2, ...N$$

$$(\alpha) = r + 1, r + 2, ..., N \tag{2.52}$$

Si sustituimos la ecuación anterior en la definición de momenta

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, 2, ...N \tag{2.53}$$

obtendremos algunas identidades y las demás seran de forma tal que la matriz

$$\partial_{\dot{q}_j}(p_A - [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}]|_{\dot{q}^i = g^i}) \tag{2.54}$$

será de rango cero, donde A corre sobre las definiciones que no corresponde a identidades. De otra forma significará que podemos despejar alguna otra velocidad. Esta posibilidad está descartada dado que ya dijimos que el rango de H_{ij}, es r. Nos quedan así m relaciones entre los p'^s y las q'^s

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0 \quad m = 1, 2, ...M \tag{2.55}$$

de estas relaciones $N - r$ son independientes, y $(M - N) + r$, son consecuencias directas de éstos.

En resumen del sistema $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ obtenemos

$$\dot{q}^I = g^I(q^i, p_i, \dot{q}^i) \tag{2.56}$$

además de los vínculos:

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0, \quad m = 1, 2, ...M \geq M' = N - r \tag{2.57}$$

El conjunto de vínculos definen un sub-espacio en el espacio de fases, cuya dimensión es $2N - (N - r) = N + r$. A esta superficie, le denominamos hipersuperficie de los vínculos primarios: Γ_1. Adicionalmente supondremos que los vínculos ϕ_m satisfacen la llamada condición de regularidad: localmente los $N - r$,vínculos linealmente independientes son tales que la matriz: $\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial q^i \partial p_i}$, tiene rango $N - r$, esto nos permitirá hacer un cambio de coordenadas en el espacio de fases donde $N - r$ coordenadas son los ϕ'_m. Asumiendo que en los vínculos hay $N - r$ linealmente independientes, consideremos la cantidad

$$H_0 = (p^i \dot{q}_i - L)\Big|_{p_i = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}^i}} \tag{2.58}$$

hacemos variaciones sobre esa cantidad:

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= (\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i)\Big|_{p_i = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}^i}} \\ &= \delta p_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i \end{aligned} \tag{2.59}$$

donde observamos que H_0 no depende explícitamente de los $\dot{q}^i$. Estas variaciones no son independientes. De hecho, deben preservar la variedad sobre Γ_1

$$\delta q^i \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} + \delta p^i \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} = 0. \tag{2.60}$$

Dado que el vector $(\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i})$; es perpendicular a la la subvariedad Γ_1, esta última expresión muestra que el vector $(\delta q^i, \delta p_i,)$, es tangente a la misma.

Si reescribimos (2.60) como $(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i})\delta p_i + (-\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i})\delta q^i = 0$, entonces teniendo en cuenta el tipo de variaciones, podemos deducir que el vector $(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i})$; corresponde a un vector arbitrario normal a Γ_1, por ejemplo: $u^m(\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i})$; asi tenemos que las ecuaciones seran

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{\partial q^i} &= +\frac{\partial H}{\partial q^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \\ \phi_m(q^i, p_i) &= 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

2.5. Procedimiento de Dirac

Resumamos lo que tenemos hasta ahora. Partimos de un lagrangiano singular

$$L = L(q^i, \dot{q}^i), \;\; i = 1, 2, ...N \tag{2.62}$$

con

$$det(H_{i,j}) = det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}) = 0 \tag{2.63}$$

y el rango de $H_{i,j}$ es r. Al usar las relaciones definitorias de los momenta

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.64}$$

podemos despejar un cierto número de velocidades

$$\dot{q}^{(I)} = g^{(I)}(q^i, p_j, \dot{q}^\alpha) \quad donde: \quad (I) = \{i, ...i_r\} \tag{2.65}$$

es una repartición de r índices de los i'^s, α; es el complemento que queda de: $\{1, ...N\}$; quedando:

$$MN - r \;\; vínculos \tag{2.66}$$

$$\phi_m(p_i, q^i) = 0 \quad m = 1, ...M \tag{2.67}$$

donde exigimos que $N - r$ de ellos sean linealmente independientes y que cumplan la condición de regularidad. El Hamiltoniano canónico:

$$H_0 = p^i \dot{q}_i - L\Big|_{p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}} \tag{2.68}$$

no depende de las $\dot{q}^i$, y las ecuaciones de Hamilton son ahora

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_\alpha}$$
$$\dot{p}^\alpha = -\frac{\partial H_0}{\partial q^\alpha} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^\alpha}$$
$$\phi_m(q^\alpha, p_\alpha) = 0 \tag{2.69}$$

Pueden verse que éstas provienen al exigir que sea estacionaria la acción[4]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i, \dot{q}^i - H_0 - u^m \phi_m) \tag{2.70}$$

con respecto a variaciones independientes en $p^i, q_i, y \ u^m$, con

$$\delta q^\alpha(t_1) = \delta q^\alpha(t_2) = 0 \tag{2.71}$$

A la hipersuperficie $\phi_m = 0$, se le llama la variedad Γ_1 de los vínculos primarios.

Corchetes de Poisson

Definimos los corchestes de Poisson como

$$\{F(q^i, p_i), G(q^i, p_i)\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{2.72}$$

y puede verse que

$$\dot{q}^i = \{q^\alpha, H\}\Big|_{\Gamma_1} \tag{2.73}$$

$$\dot{p}^i = \{p_\alpha, H\}\Big|_{\Gamma_1} \tag{2.74}$$

[4]Krasnov M.L., Makarenko G.I., Kiseliov A.I., Cálculo Variacional

con

$$H = H_0 + u^m \phi_m \tag{2.75}$$

donde hemos indicado que luego de calcular los corchetes, proyectamos sobre la variedad de los vínculos primarios. En general para un objeto que no dependa explícitamente de t

$$\frac{d}{dt}F(q^\alpha, p_\alpha) = \{F, H\}\Big|_{\Gamma_1} \tag{2.76}$$

$$= \{F, H_0\}\Big|_{\Gamma_1} + u^m\{F, \phi_m\}\Big|_{\Gamma_1} + \{F, u^m\}\phi_m\Big|_{\Gamma_1} \tag{2.77}$$

$$= (\{F, H_0\} + u^m\{F, \phi_m\})\Big|_{\Gamma_1} \tag{2.78}$$

Observamos que el tercer término de (2.77), no contribuye, dado que Γ_1, es la hipersuperficie $\phi_m = 0$. De esta forma, no tenemos problema de consistencia con el cálculo del corchete de F con los objetos desconocidos u^m. Dado las condiciones iniciales q_0^i, p_{0i} y que se satisfagan los vínculos $(\phi_m(q_0^i, p_{0i}) = 0)$, esperemos que dicha condición prevalezca sobre la trayectoria del sistema en correspondencia con las ecuaciones de movimiento (2.73) y (2.74) Asi

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\}\Big|_{\Gamma_1=0} \tag{2.79}$$

$$= (\{\phi_m, H_0\} + u^m\{\phi_m, \phi_{m'}\})\Big|_{\Gamma_1=0} \tag{2.80}$$

donde: $m' = 1, 2, ...M$. Pueden suceder las siguientes situaciones:

1. $\{\phi_m, \phi_{m'}\}$

   No tiene rango cero, por lo que permite despejar algunos $u^{m's}$

2. $\{\phi_m = 0\} \bigcap \{\phi_m, H\}$

   La hipersuperficie $\phi_m, (\Gamma_1)$ no se intercepta con la hipersuperficie $\{\phi_m, H\} = 0$, asi habrá restricciones adicionales a estos nuevos vínculos, se les denomina vínculos secundarios.

3. Aparecen identidades, tipo $0 = 0$

   Se descarta que aparezcan inconsistencias. Si sucede la opción 2, tendremos que ahora aparecen K nuevos vínculos $\phi_\kappa(q^i, p_i) = 0$, con: $\kappa = \{M + 1, ...M + K\}$, las cuales pedimos se mantengan sobre la trayectoria del sistema en el espacio de fases. Asi exigimos: $\dot{\phi}_\kappa = \{\phi_\kappa, H\}\Big|_{\Gamma_1 = 0}$

Esta última expresión nos conduce a alguna de las situaciones, sea: $1, 2,$ ó 3, si aparecen nuevos vínculos, los llamaremos vínculos terciarios, exigiremos de nuevo que se preserven en el tiempo, esto nos devuelve a las situaciones: $1, 2,$ ó 3, y repetiremos el proceso hasta que no aparezcan nuevos vínculos. Al final del proceso nos quedará, un conjunto de vínculos:

$$\phi_a = \{\phi_1, \phi_2, ...\phi_A\} \tag{2.81}$$

que incluyen los vínculos primarios y los vinculos secundarios, terciarios,... Llamamos Γ a la hipersuperficie, en el espacio de fases donde todos los $\phi_{a‘s}$ se satisfacen:

$$\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \{\phi_M = 0, ...\phi_A = 0\} \tag{2.82}$$

Diremos que una cantidad que se anule en Γ(pero no en todo el espacio de fases) es debilmente cero y lo denotamos como:

$$F\approx 0,\ si\ F\Big|_{\Gamma=0}. \tag{2.83}$$

Si exigimos que los $\phi_{a's}$ cumplan la condición de regularidad, tendremos por tanto:

$$F\approx 0 \Rightarrow F = \lambda^a \phi_a \tag{2.84}$$

Los vínculos satisfacen la relación de consistencia:

$$\dot{\phi}_a \approx 0 = \{\phi_a, H_0\} + u^m\{\phi_a, \phi_m\} \tag{2.85}$$

que pueden pensarse como un número (A) de ecuaciones lineales inhomogéneas en las $M(A)$, $u^{m's}$. La solución de este sistema es la suma de una solución particular mas todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$u^m = \underline{U}(q^i, p_i) + V^m(q^i, p_i) \tag{2.86}$$

con

$$V^m\{\phi_a, \phi_m\} = 0 \tag{2.87}$$

Si el rango de la matriz es constante, podemos escribir:

$$V^m = v^\sigma \mathtt{V}_\sigma^m \tag{2.88}$$

donde: $\mathtt{V}_\sigma^m$ son soluciones linealmente independientes (tantas como la dimensión del núcleo de $\{\phi_a, \phi_m\}$). Asi la solución de (2.81)es

$$u^m \approx \underline{U}^m + v^\sigma \mathtt{V}_\sigma^m \tag{2.89}$$

volviendo a la expresión de H, tendremos que

$$\begin{aligned} H &= H_0 + u^m \phi_m && (2.90)\\ &= (H + \underline{U}^m \phi_m) + v^\sigma (\mathtt{V}_\sigma^m \phi_m) && (2.91)\\ H &= H' + v^\sigma \theta_\sigma && (2.92) \end{aligned}$$

con los $\underline{U}^m$ determinados por la relación de consistencia y donde hemos definido $H' = H + \underline{U}^m \phi_m$, además de

$$\theta_\sigma = \mathtt{V}_\sigma^m \phi_m \tag{2.93}$$

que corresponde a una combinación de los vinculos primarios, cuyos multiplicadores no pudieron determinarse. Llamamos a

$$H_T \equiv H' + v^\sigma \theta_\sigma \tag{2.94}$$

el Hamiltoniano Total. Las ecuaciones de movimiento, son entonces:

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \tag{2.95}$$

queda claro que

$$H_T \approx H' \approx H \tag{2.96}$$

Una vez encontrado el conjunto total de vínculos, puede ser que hayan vínculos que ocurran como consecuencia de otros (por vía de una combinación lineal, por ejemplo). Decimos en este caso que el conjunto de vínculos es reducible. Cuando todos los vínculos sean linealmente independiente decimos que es irreducible.

2.6. Cantidades de Primera y Segunda Clase

Decimos que una cantidad u objeto $F(q^i, p_i)$, es de primera clase si su corchete de Poisson con todos los vínculos: ϕ_a es débilmente cero, en consecuencia se escribe:

$$\{F, \phi_a\} \approx 0 \tag{2.97}$$

en este caso

$$\{F, \phi_a\} = d_a^b \phi_b \tag{2.98}$$

Cuando una cantidad no es de primera clase, decimos que es de segunda clase. En este caso el corchete de F con al menos un vínculo no se anula débilmente, las consecuencias son las siguientes

1. El conchete de dos cantidades de primera clase, es también de primera clase.

   Veamos R, S son tales que: $\{R, \phi_a\} = r_a^b \phi_b; \{S, \phi_a\} = S_a^b \phi_b$

   entonces:

   $$\{\{R, S\}, \phi_a\} = \{\{R, \phi_a\}, S\} - \{\{S, \phi_a\}, R\}$$

   $$= r_a^b \{\phi_b, S\} - S_a^b \{\phi_b, R\}$$

   $$= \phi_b \{r_a^b, S\} - \phi_b \{S_a^b, R\}$$

$$= [(S_a^b r_b^c - S_b^c r_a^b) - \{S_a^c, R\} + \{r_a^c, S\}]\phi_c = t_a^c \phi_c$$

$$\{\{R, S\}, \phi_a\} \approx 0$$

2. θ_σ en H_T son de primera clase

$$\theta_\sigma = v_\sigma^m \phi_m \text{ asi}$$

$$\{\theta_\sigma, \phi_a\} = v_\sigma^m \{\phi_m, \phi_a\} + \{v_\sigma^m, \phi_a\}\phi_m \approx 0$$

$$\{\theta_\sigma, \phi_a\} = \theta_\sigma^b \phi_b \approx 0$$

3. H' en H_T es de primera clase. Como para todos los $\phi' s$, $\dot{\phi}_a \approx 0$, entonces: $\dot{\phi}_a = f_a^b \phi_a$

$$\{H', \phi_a\} = \{H_0, \phi_a\} + u^m \{\phi_m, \phi_a\} + \phi_m \{u^m, \phi_m\} \approx 0$$

asi

$$\{H', \phi_a\} \approx 0 = h_a^b \phi_b$$

2.7. Transformaciones de Calibre

Los $\theta_\sigma$generan transformaciones llamadas transformaciones de calibre[5]$\dot{\text{D}}$ada la expresión $H_T{\equiv}H^{`} + v^\sigma\theta_\sigma$resulta que no podemos conocer evolución de $q^i, p_i$ dada la arbitrariedad de los $v^{\sigma^{`}s}$ Digamos que q^i, p_i surgen de la evolución del sistema a partir de las condiciones iniciales corresponden a un mismo estado físico para distintos valores de los v$^{\sigma'}s$. Veamos la evolución de la cantidad dinámica $G(q^i, p_i) = G(t)$. Con $t = t_0$, $p_i = p_{0i}$, $q^i = q_0^i$; asi un tiempo posterior δt;

$$
\begin{aligned}
G(t_0 + \delta t) &= G(t_0) + \delta t G(t), && (2.99)\\
&= G_0 + \delta t\{G, H_T\}, && (2.100)\\
&= G_0 + \delta t[\{G, H^{`}\} + v^\sigma\{G, \theta_\sigma\} + \{G, v^\sigma\}\theta_\sigma] \\
&. && (2.101)
\end{aligned}
$$

tomemos dos valores de: $v^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma$ entonces

$$
\begin{aligned}
G_2 - G_1 &= \delta t[(v_2^\sigma - v_1^\sigma)\{G, \theta_\sigma\} + \{G, v_2^\sigma - v_1^\sigma\}\theta_\sigma] && (2.102)\\
&= \{G, \epsilon^\sigma\theta_\sigma\}{\approx}\epsilon^\sigma\{G, \theta_\sigma\} && (2.103)
\end{aligned}
$$

con

$$
\epsilon^\sigma{\equiv}\delta t(v_2^\sigma - v_1^\sigma) \qquad (2.104)
$$

podemos cambiar todas las variables que intervienen en el Hamiltoniano usando la última expresión y lo que postulamos es que el Hamiltoniano asi obtenido debe describir al mismo sistema físico.

[5]Weinberg S., The Quantum Theory of Fields, Vol. I

La transformación asi descrita es una transformación canónica infinitesimal. A esta transformación se le denomina transformación de calibre generada por los vínculos primarios. Puede verse que el corchete del Hamiltoniano de primera clase con los vínculos de primera clase, también generan transformaciones de calibre.

Consecuencias y Comentarios

1. El corchete de dos vínculos primarios de primera clase, genera transformaciones de calibre.

   Demostración: Hagamos dos transformaciones sucesivas.

   G$\underrightarrow{1}G+\{G,\epsilon_1^\sigma G_\sigma\}\underrightarrow{2}G+\{G,\epsilon_2^\sigma\theta_\sigma\}+\{G,\epsilon_1^\sigma\theta_\sigma,\epsilon_2^\sigma\theta_\sigma\}$

   si lo hacemos al revés

   $G\underrightarrow{2}\underrightarrow{1}G+\{G,\epsilon_1^\sigma,\theta_\sigma\}+\{\{G,\epsilon_2^\sigma\theta_\sigma\},\epsilon_1^\sigma\theta_\sigma\}$

   restando los cambios

   $\Delta G=\{\{G,\epsilon_1^\sigma,\theta_\sigma\},\epsilon_\sigma^2\theta_\sigma\}-\{\{G,\epsilon_2^\sigma,\theta_\sigma\},\epsilon_1^\sigma\theta_\sigma\}$

   por la identidad de Jacobi

   $\Delta G=-\{G,\{\epsilon_1^\sigma,\theta_\sigma,\epsilon_2^\sigma\theta_\sigma\}\}\approx-\epsilon_1^\sigma\epsilon_2^\sigma\{G,\{\theta_\sigma,\theta_{\sigma'}\}\}$

2. El corchete entre el Hamiltoniano de primera clase H' y el vînculo de primera clase θ_σ, genera transformaciones de calibre.

Demostración: Hagamos dos psasos por caminos distintos y comparemos la variable en: $t + \delta t$.

$$F(t+\delta t) = F(t) + \delta t\{F, H_T\}$$

hagamos ahora una transformación de calibre

$$\mathrm{F(t+}\delta t)\underrightarrow{tc}F(t+\delta t) + \{F(t), \epsilon^\sigma\theta_\sigma\} + \underbrace{\delta t\{\{F, H_T\}, \epsilon^\sigma\theta_\sigma\}}_{F_{12}}$$

hacemos el camino al revés

$$F(t)\underrightarrow{tc}F(t)+\{F,\epsilon^\sigma\theta_\sigma\}\rightarrow F(t+\delta t)+\{F,\epsilon^\sigma\theta_\sigma\}+\underbrace{\delta t\{\{F,\epsilon^\sigma\theta_\sigma\},H_T\}}_{F_{21}}$$

asi $F_{12} - F_{21}$ *debe ser una transformación de calibre*

$$\Delta F = \delta t[\{\{F, H_T\}, \epsilon^\sigma\theta_\sigma\} - \{\{F, \epsilon^\sigma\theta_\sigma\}, H_T\}]$$

por la identidad de Jacobi

$$= \delta t\{\{\epsilon^\sigma\theta_\sigma, H_T\}, F\}$$

$$\approx \delta t[-\epsilon^\sigma\{F, \{\theta_\sigma, H'\}\} - \epsilon^\sigma\epsilon^{\sigma'}F\{\theta_\sigma\theta_{\sigma'}\}]$$

3. Pueden haber vínculos secundarios de primera clase, que generan transformaciones de calibre.

Cuando aplicamos las relaciones de consistencia aparecen términos como $\{H', \phi_m\}$ y $\{\phi_a, \phi_m\}$. Vimos que $\{H', \phi_\sigma\}$ es de primera clase, asi como $\{\phi_\sigma, \phi_{\sigma'}\}$, de modo que entre los vínculos secundarios podrían, haber vínculos de primera clase. Estos pueden generar transformaciones de calibre.

No es directo demostrar que los vínculos secundarios de primera clase generen transformaciones de calibre. Lo que se hace es que se conviene que es así.

Si separamos todos los vínculos primarios de primera clase θ_σ, más todos los vínculos secundarios de primera clase y tenemos en cuenta que éstos últimos podrían generar transformaciones de calibre, pudiésemos considerar la forma Hamiltoniana más general, a ello temdríamos que adicionarle, es decir a H_T los vínculos secundarios de primera clase con coeficientes arbitrarios. Tenemos así, la cantidad de primera clase más general

$$H_E = H' + \lambda^{\underline{a}}\theta_{\underline{a}} \tag{2.105}$$

donde $\underline{a}$ corre por todos los vínculos de primera clase primarios y secundarios. A H_E se le llama Hamiltoniano Extendido[6]Ės claro que

$$H_E \approx H' \approx H_T \approx H_0 \tag{2.106}$$

Estos Hamiltonianos difieren entre sí salvo por una constante, que tiene que ver precisamente con los vínculos primarios, proyectados

[6]Dirac P.A.M., Lectures on Quantum Mechanics

sobre la hipersuprficie Γ_1. Por otro lado, cuando surgen vńculos secundarios, aplicamos los corchetes de Dirac, que se definan

$$\{F,G\}^* = \{F,G\} - \{F,\psi_A\}C^{AB}\{\psi_B,B\} \qquad (2.107)$$

donde ψ_A,ψ_B forman parte de una matriz, definida como

$$C_{AB}\equiv\{\psi_A,\psi_B\} \qquad (2.108)$$

esta matriz es no singular, cuya inversa es

$$(C_{AB})^{-1}\equiv C^{AB}$$

de modo que

$$C^{AB}C_{BC} = C^{AB}\{\psi_B,\psi_C\} = \delta^A_C \qquad (2.109)$$

La operación (2.107) entre F y G cumple

$$\{F,G\}^* = -\{G,F\}^* \;\; (antisimetri\acute{a}) \qquad (2.110)$$
$$\{F,G+H\}^* = \{F,G\}^* + \{F,H\}^* \;\; (bilinealidad) \qquad (2.111)$$
$$\{FG,H\}^* = F\{G,H\}^* + \{F,H\}^*G \qquad (2.112)$$
$$\{F,G\}^*,H\}^* + \{\{H,F\}^*,G\}^* + \{\{G,H\}^*,F\}^* = 0 \qquad (2.113)$$

la ecuación (2.113) se conoce como identidad de Jacobi.

Esta definición esta motivada en el hecho de que la cantidad

$$F'\equiv F - \{F,\psi_A\}C^{AB}\psi_B \qquad (2.114)$$

tiene corchete debilmente cero, con los vínculos de segunda clase. De hecho

$$\{F', \psi_C\} = \{F, \psi_C\} - \{\{F, \psi_A\}C^{AB}\psi_B, \psi_C\} \approx 0 \quad (2.115)$$

Vemos que $F' \approx F$. Si sustituimos todas las variables por su nueva definición, al realizar los corchetes, observamos que

$$\{F, G\}^* \approx \{F', G'\} \approx \{F', G\} \approx \{F, G'\} \quad (2.116)$$

Unas consecuencias de la definición del corchete de Dirac son:

1. El corchete de Dirac con un vínculo de segunda clase es nulo (no debilmente, fuertemente).

   Demostración:

   $\{\mathrm{F},\psi_A\}^* = \{F, \psi_A\} - \{F, \psi_C\}C^{CD}\{\psi_D, \psi_a\}$

   $= \{F, \psi_A\} - \{F, \psi_C\}C^{CD}C_{DA} = 0$

   Tenemos que los vínculos de segunda clase se convierten en identidades y pueden sustituirse antes o después de realizar cualquiera de los corchetes.

2. Si F es de primera clase y G es cualquier otra función:

$\{F, G\}^* \approx \{F, G\}$

Demostración:

$\{\text{F,G}\}^* = \{F, G\} - \{F, \psi_A\} C^{AB} \{\psi_B, G\}$

$= \{F, G\} - d_A^b \phi_b C^{AB} \{\psi_B, G\}$

$\approx \{F, G\}$

Asi las transformaciones de calibre se definen idénticamente vía corchetes de Dirac o de Poissón.

Las ecuaciones de movimiento siguen inalteradas dado que el Hamiltoniano Extendido es de primera clase

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}^* \approx \{F, H_E\} \tag{2.117}$$

La teoría queda como una teoría con solo vínculos de primera clase.

Capítulo 3

La Acción de Maxwell con un término topológico en D=4+1

3.1. Introducción

En este capítulo consideramos la acción Maxwell con un término topológico en 4+1 dimensiones, así como aspectos de carácter cinemático y dinámico. La acción a considerar es

$$S = \int d^5x[-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\mu F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma}] \tag{3.1}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.2}$$

Esta acción tiene dos términos; uno que corresponde al término de Maxwell usual y el otro que tiene carácter topológico. Decimos que es un término topológico, por que al acoplar con una métrica este término no depende de ella. En este sentido el elemento de volumen se escribirá como

$$d^5(x)\rightarrow\sqrt{-g}d^5x \tag{3.3}$$

donde

$$g = detg_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

en este contexto la densidad de Levi-Civita externa, se acopla como $\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}$; por lo que

$$d^5x\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\rightarrow\sqrt{-g}d^5x\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} = d^5x\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \tag{3.5}$$

de esta forma la variación de este término, $d^5x\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\mu F^{\nu\lambda}F_{\rho\sigma}$, respecto a la métrica, es nula. En otra dirección, la acción S, es invariante salvo términos de borde, bajo las transformaciones de calibre $\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda$ y a su vez es explícitamente covariante bajo transformaciones del grupo Poincaré [1].

Para ver las unidades de los campos y las constantes, que aparecen en la acción, podemos tomar dos posturas. En una de ellas consideramos que el campo de calibre[2] A_μ tiene unidades como las derivadas, tal como sucede en 3+1 dimensiones.

En este caso $[A_\mu] = L^{-1}(\hbar = 1, c = 1)$. Como $[S] = [\hbar] = L^0$, esta L se refiere a longitud entonces

$$\begin{aligned} [L] &= L^{-5} \\ [g^2]^{-1}[F^2_{\mu\nu}] &= L^{-5} \end{aligned} \tag{3.6}$$

y entonces si

$$[A_\mu] = L^{-1}\Rightarrow[g^2] = L; [\kappa] = L^0.$$

[1]Clases de Teoría de Campo Clásica
[2]ídem

La otra postura corresponde a considerar que las ecuaciones de Maxwell se escriben de igual forma en cualquier dimensión espacio-tiempo. Así por ejemplo si tomamos una carga puntual en el espacio de dimensión d (espacial), donde se cumple que la Ley de Gauss $\partial_i E^i = \rho.$; deducimos que $[\rho] = [q]L^{-d}$ y por tanto: $[\vec{E}] = [q]L^{-d+1}$. Si usamos la definición de $\vec{E}$ como la fuerza por unidad de carga; $\vec{F} = q\vec{E}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= L^{-2} \\ &= [q][\vec{E}] \\ &= [q]^2 L^{-d+1} \Rightarrow [q] = L^{\frac{d-3}{2}} \\ &= [\vec{E}] = L^{-\frac{d+1}{2}} \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Asi en un espacio-tiempo de dimensión $d+1$, el potencial vector A_μ tendrá unidades

$$\begin{aligned} [A_\mu] &= L[\vec{E}] \\ &= L^{\frac{1-d}{2}} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

En nuestro caso, como $d = 4$ nos dice que

$$\begin{aligned} [A_\mu] &= L^{-\frac{3}{2}} \\ [g]^2 &= L^0; [\kappa] = L^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Como $[q] = L^{\frac{1}{2}}$, es interesante notar que: $[qA_\mu] = L^{-1}$, lo cual es cierto en cualquier dimension espacial. Así ambas posturas estarían conectadas en una redefinición de escala en los campos. Para obtener las ecuaciones de movimiento, tomamos variaciones[3] in-

[3] Krasnov M.L., Makarenko G.I., Kiseliov A.I., Cálculo Variacional

dependientes sobre el campo A_μ y pedimos que la acción S, sea estacionaria, asi

$$\delta S = \int d^5x[-\frac{1}{4g^2}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \delta(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\frac{\kappa}{3}A_\mu(\partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma))] \quad (3.10)$$

escribiendo toda forma:

$$AB\partial C = A\partial(BC) - A(\partial B)C \quad (3.11)$$

$$\delta S = \int d^5x[-\frac{1}{4g^2}\partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}(\delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma + A_\mu \partial_\nu \delta A_\lambda \partial_\rho A_\sigma + A_\mu \partial_\nu A_\lambda \partial_\rho \delta A_\sigma)] \quad (3.12)$$

$$\delta S = \int d^5x[-\frac{1}{g^2}\partial_\mu(\delta A_\nu F^{\mu\nu}) + \frac{1}{g^2}\delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} (\delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma + 2\partial_\nu(A_\mu \delta A_\lambda \partial_\rho A_\sigma) - 2\delta A_\lambda \partial_\nu A_\mu \partial_\rho A_\sigma)] \quad (3.13)$$

$$\delta S = \frac{1}{g^2}\int d^5x \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \kappa \int d^5x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\ \delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma + terminos\ de\ borde \quad (3.14)$$

Los teḿinos de borde, se anulan, si los campos tienen las condiciones de borde apropiadas. Así con las condiciones de borde en la frontera, tenemos:

$$\delta S = \int d^5x[\delta A_\mu(\frac{1}{g^2}\partial_\nu F^{\mu\nu} + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}(\partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma))] \quad (3.15)$$

y por tanto

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g^2}\partial_\nu F^{\nu\mu} + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma = 0 \qquad (3.16)$$

que constituyen las ecuaciones de movimiento de este modelo. Puede verse rápidamente que las ecuaciones de movimiento son invariantes de calibre, bajo la forma $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$.

Desarrollando las ecuaciones de movimiento

$$\frac{1}{g^2}(\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)) + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\sigma \equiv E^\mu \quad (3.17)$$

que es claramente transversa ($\partial_\mu E^\mu = 0$). Si escogemos el calibre de Lorentz: $\partial_\mu A^\mu = 0$, tendremos

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^T && (3.18) \\ \frac{1}{g^2} A_\mu^T + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\partial_\nu A_\lambda^T \partial_\rho A_\sigma^T &= 0 && (3.19) \end{aligned}$$

así observamos que la parte lineal en A_μ "nos dice"que las excitaciones son sin masa. Podemos seguir analizando el contenido cinemático de la teoría; por ejemplo, las ecuaciones de movimiento para $\mu = 0$ si lo sustituimos en el desarrollo de (3.19) obtenemos

$$\frac{1}{g^2}(\triangle \partial^0 \partial_0 A^0 - \partial^0 \partial_0 A^0 - \partial^0 \partial_i A^i) + \kappa\varepsilon^{0ijkl}\partial_i A_j \partial_k A_l = 0 (3.20)$$

si tomamos el calibre $\partial_i A_i = 0$, entonces podemos despejar A^0 como:

$$A^0 = \kappa g^2 (-\triangle)^{-1}(\varepsilon^{oijkl}\partial_i A_j \partial_k A_l) \qquad (3.21)$$

dejando como variable dinámica a A_i, con $\partial_i A_i = 0$.

Por un lado tenemos, 4 grados de libertad en A_i, menos un vínculo en $\partial_i A_i$, lo que resulta en 3 grados de libertad; esto es consistente con el hecho de tener una excitación sin masa en 5 dimensiones.

Podemos pasar ahora a obtener las cargas conservadas asociadas a la invariancia, bajo el grupo de Poincaré. En este sentido el Teorema de Noether nos dice, que hay cantidades conservadas asociadas a esta invariancia.

3.2. Parámetros Importantes

Asociado a las traslaciones el tensor de Energía-Momentum canónico de la teoría: $T^{\mu\nu}$, que satisface $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, sobre las ecuaciones de movimiento. De igual forma asociado a las rotaciones espacio-temporales tenemos el tensor de Densidad de Momento Angular: $M^{\mu\nu\lambda}$, el cual satisface $\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0$, sobre las ecuaciones de movimiento.

Se sabe que a partir de $T^{\mu\nu}$, podemos construir el tensor simétrico de Belifante: $\theta_B^{\mu\nu}$. Este tensor es conservado y sus cargas son las mismas del $T^{\mu\nu}$, ademas podemos construir un tensor de Densidad de Momento Angular: $M_B^{\mu\nu\lambda}$, utilizando el tensor: $\theta_B^{\mu\nu}$, el cual es conservado y sus cargas son las mismas que el de $M^{\mu\nu\lambda}$

Las cargas conservadas asociadas, al $T^{\mu\nu}$ y al $\theta_B^{\mu\nu}$, en el caso de traslaciones es

$$P^{\mu} = \int d^4 x T^{o\mu} = \int d^4 x \theta_B^{o\mu}$$

y en el caso de rotaciones, las cargas asociadas al $M^{\mu\nu\lambda}$ y al $M_B^{\mu\nu\lambda}$ es

$$J^{\mu\nu} = \int d^4 x M^{o\mu\nu} = \int d^4 x M_B^{o\mu\nu}$$

El Tensor de Energía-Momentum, viene dado por la siguiente expresión:

$$T_c^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\partial^\nu A_\alpha \tag{3.22}$$

haciendo uso de la ecuación (3.1) obteniendo directamente

$$\begin{aligned} T_c^{\mu\nu} &= \frac{1}{g^2}F^{\mu\alpha}\partial^\nu A_\alpha - \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma\beta\theta}A_\gamma F_{\beta\theta}\partial^\nu A_\alpha \\ &-\eta^{\mu\nu}\frac{1}{2g^2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\rho\sigma\gamma\beta\theta}A_\rho F_{\sigma\gamma}F_{\beta\theta}\eta^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.23}$$

A partir de $T^{\mu\nu}$, construimos otro, tensor simétrico, adicionandole la divergencia de un término, de la forma:

$$\theta^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu X^{\lambda\mu\nu} \tag{3.24}$$

con $X^{\lambda\mu\nu}$ un tensor que satisface $X^{\lambda\mu\nu} = -X^{\mu\lambda\nu}$ y de forma que $\partial_\mu(\partial_\lambda X^{\lambda\mu\nu}) = 0$ y por tanto

$$\partial_\mu \theta_B^{\mu\nu} = 0 \tag{3.25}$$

Estas expresiones aparecen; como consecuencias del efecto bajo transformaciones de Lorentz infinitesimales sobre los campos A_μ, con $A^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} + \omega^{\nu}_{\mu}$ de donde por definición tenemos

$$\begin{aligned}\Delta A_{\sigma} &= \omega^{\rho}_{\sigma} A_{\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\delta^{\mu}_{\sigma}\eta^{\rho\sigma} - \delta^{\nu}_{\sigma}\eta^{\rho\mu})A_{\rho} \\ &\equiv \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}A_{\rho} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $(S^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}A_{\rho}$ se conocen como las matrices de spin. A continuación desarrollamos el tensor: $X^{\lambda\mu\nu}$

$$X^{\lambda\mu\nu} = -[\frac{\partial L}{\partial\partial_{\lambda}A_{\sigma}}(S^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\sigma}}(S^{\lambda\nu})^{\rho}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial\partial_{\nu}A_{\sigma}}(S^{\lambda\mu})^{\rho}_{\sigma}]A_{\rho} \quad (3.27)$$

donde para facilitar los cálculos hemos llamado

$$X^{\lambda\mu\nu} = -[^{\lambda\mu\nu} - ^{\mu\lambda\nu} - ^{\nu\lambda\mu}] \quad (3.28)$$

de modo que

$$\begin{aligned} ^{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{g^2}(F^{\lambda\nu}A^{\mu} - F^{\lambda\mu}A^{\nu}) + \frac{\kappa}{3}(\varepsilon^{\lambda\mu\gamma\beta\theta}A^{\nu} - \varepsilon^{\lambda\nu\gamma\beta\theta}A^{\mu})A_{\gamma}F_{\beta\theta} \\ ^{\mu\lambda\nu} &= \frac{1}{g^2}(F^{\mu\lambda}A^{\nu} - F^{\mu\nu}A^{\lambda}) - \frac{\kappa}{3}(\varepsilon^{\mu\lambda\gamma\beta\theta}A^{\nu} - \varepsilon^{\mu\nu\gamma\beta\theta}A^{\lambda})A_{\gamma}F_{\beta\theta} \\ -^{\mu\lambda\nu} &= \frac{1}{g^2}(F^{\nu\lambda}A^{\mu} - F^{\nu\mu}A^{\lambda}) - \frac{\kappa}{3}(\varepsilon^{\nu\lambda\gamma\beta\theta}A^{\mu} - \varepsilon^{\nu\mu\gamma\beta\theta}A^{\lambda})A_{\gamma}F_{\beta\theta} \end{aligned}$$

en consecuencia nuestro tensor $X^{\lambda\mu\nu}$ queda expresado asi

$$X^{\lambda\mu\nu} = -\frac{2}{g^2}F^{\mu\lambda}A^{\nu} + \frac{2\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\lambda\gamma\beta\theta}A^{\nu}A_{\gamma}F_{\beta\theta} \quad (3.29)$$

y la divergencia del mismo, en el segundo término de (3.24) es

$$\frac{1}{2}\partial_{\lambda}\mathtt{X}^{\lambda\mu\nu} = -\partial_{\lambda}(\frac{1}{g^2}F^{\mu\lambda}A^{\nu} - \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\lambda\gamma\beta\theta}A^{\nu}A_{\gamma}F_{\beta\theta}) \quad (3.30)$$

a esta cantidad le adicionamos el Tensor Energía-Momentum, expresado en la ecuación (3.22), de modo que a esta suma, llamamos $\Theta_B^{\mu\nu}$, y se le conoce como Tensor de Belifante[4]

$$\Theta_B^{\mu\nu} = \mathtt{T}_c^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda \mathtt{X}^{\lambda\mu\nu} \tag{3.31}$$

Haciendo uso de las ecuaciones de movimiento, llegamos al resultado

$$\Theta_B^{\mu\nu} = -\frac{1}{g^2}F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu - \frac{1}{4g^2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} \tag{3.32}$$

Ahora podemos obtener el Tensor Momentum Angular $M_B^{\mu\alpha\beta}$ en función del Tensor Belifante así, despejando $\mathtt{T}_c^{\mu\nu}$ de la ecuación (3.31), tenemos

$$T_c^{\mu\nu} = \Theta_B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\lambda \mathtt{X}^{\lambda\mu\nu} \tag{3.33}$$

a continuación escribimos $M^{\mu\alpha\beta}$ como

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - X^\beta T^{\mu\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu A_\rho}(iS^{\alpha\beta})_\rho^\sigma A_\sigma \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha(\Theta_B^{\mu\beta} - \frac{1}{2}\partial_\lambda \mathtt{X}^{\lambda\mu\beta}) - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu A_\rho}(iS^{\alpha\beta})_\rho^\sigma A_\sigma \\ -x^\beta(\Theta_B^{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\lambda \mathtt{X}^{\lambda\mu\alpha}) \end{aligned} \tag{3.35}$$

acto seguido hacemos uso de (3.28) y de su propiedad antisimétrica, por tanto tenemos

$$\mathtt{X}^{\lambda\mu\nu} =^{\mu\lambda\nu} +^{\nu\lambda\mu} -^{\lambda\mu\nu}$$

con

[4]Weinberg S., The Quantum Theory of Fields, Vol. I

$$^{\mu\lambda\nu} = -^{\mu\nu\lambda}$$

donde $^{\mu\lambda\nu}$, es el segundo elemento de la ecuación (3.35); es decir la matriz de spín. Operando sobre dicha ecuación (3.35) y ordenando términos allí; obtenemos

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}\Theta_B^{\mu\beta} - x^{\beta}\Theta_B^{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\partial_{\lambda}(x^{\alpha}X^{\lambda\mu\beta} - x^{\beta}X^{\lambda\mu\alpha}) \quad (3.36)$$
$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}\Theta_B^{\mu\beta} - x^{\beta}\Theta_B^{\mu\alpha} + \partial_{\lambda}R^{\lambda\mu\alpha\beta} \quad (3.37)$$

de donde tomamos entonces

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}\Theta_B^{\mu\beta} - x^{\beta}\Theta_B^{\mu\alpha} \quad (3.38)$$

Podemos demostrar, a partir de lo que hemos calculado, que la expresión: $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, esto podemos verlo en el apéndice II. No obstante continuando con el Tensor de Momento Angular[5] $M_B^{\mu\nu\lambda}$; tenemos que

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}T^{\mu\beta} - x^{\beta}T^{\mu\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\rho}}(S^{\alpha\beta})_{\rho}^{\sigma}A_{\sigma} \quad (3.39)$$
$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}T^{\mu\beta} - x^{\beta}T^{\mu\alpha} - \frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\rho}}(\delta_{\rho}^{\alpha}\eta^{\sigma\beta} - \delta_{\rho}^{\beta}\eta^{\sigma\alpha})A_{\sigma} \quad (3.40)$$
$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}T^{\mu\beta} - x^{\beta}T^{\mu\alpha} - (\frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\alpha}}A^{\beta} - \frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\beta}}A^{\alpha}) \quad (3.41)$$
$$\partial_{\mu}\mathtt{M}^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} - \partial_{\mu}(\frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\alpha}})A^{\beta} + \partial_{\mu}(\frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\beta}})A^{\alpha}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\alpha}}\partial_{\mu}A^{\beta} + \frac{\partial L}{\partial\partial_{\mu}A_{\beta}}\partial_{\mu}A^{\alpha} \quad (3.42)$$

Calculando aparte las derivadas parciales tenemos:

[5] Clases de Teorá Clásica de Campos

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu A_\alpha} &= \partial_\mu(-\frac{1}{g^2}F^{\mu\alpha} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma\theta}A_\rho F_{\sigma\theta}) \\
&= -\frac{1}{g^2}\partial_\mu F^{\mu\alpha} - \frac{\kappa}{6}\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma\theta}F_{\mu\rho}F_{\sigma\theta} \\
&\uparrow\downarrow \; \textit{on shell} \\
&= +\frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma\theta}F_{\mu\rho}F_{\sigma\theta} - \frac{\kappa}{6}\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma\theta}F_{\mu\rho}F_{\sigma\theta} \\
&= \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma\theta}F_{\mu\rho}F_{\sigma\theta} \\
T^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta}L - \frac{\partial L}{\partial\partial_\alpha A_\mu}\partial^\beta A_\mu \\
T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial\partial_\beta A_\mu}\partial^\alpha A_\mu - \frac{\partial L}{\partial\partial_\alpha A_\mu}\partial^\beta A_\mu
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las respectivas derivadas en

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} &= \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma\theta}(4A_\rho F^\alpha_\mu - F_{\mu\rho}A^\alpha)F_{\sigma\theta} - (\beta \leftrightarrow \alpha) \qquad (3.43) \\
&= (\frac{\kappa}{12}\varepsilon^\beta_{\mu\rho\sigma\theta}\delta^{\lambda\nu\gamma}_{\rho\mu\alpha}A^\lambda F^{\nu\gamma}F^{\sigma\theta} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^\beta_{\mu\rho\sigma\theta}A^\alpha F^{\mu\rho}F^{\sigma\theta}) - (\beta \leftrightarrow \alpha) \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

se puede demostrar que esta ecuación satisface el tensor Momento Angular[6](ver apéndice II).

En general el tensor canónico energía-momentum, no tiene simetría, lo cual nos dice que no se puede emplear como fuente de campo

[6] Clases de Teorá Clásica de Campos

gravitatorio en las ecuaciones de Einstein. por esta razón como este tensor no es único, construimos otro que sí es simétrico,; el cual es el tensor de Belinfante.

Capítulo 4

Procedimiento de Dirac

En esta sección de nuestro capítulo, aplicaremos el formalismo de Dirac, a la acción S. Partimos de la acción es

$$S = \int d^5x[-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\mu F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma}] \tag{4.1}$$

Haciendo la descomposición: $4+1$

$$S = \int d^5x[(-\frac{1}{4g^2})F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4g^2}F_{ij}F^{ij} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{0ijkl}(A_0F_{ij}F_{kl} - 4A_iF_{0j}F_{kl})]$$

$$S = \int d^5x[(\frac{1}{2g^2})F_{0i}F_{0i} - (\frac{1}{4g^2})F_{ij}F^{ij} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}A_j\dot{A}_i + \frac{\kappa}{6}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}A_0\partial_jA_i]$$

de aqui deducimos que nuestra densidad Lagrangiana es:

$$L = [(\frac{1}{2g^2})F_{0i}F_{0i} - (\frac{1}{4g^2})F_{ij}F^{ij} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}A_j\dot{A}_i + \frac{\kappa}{6}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}A_0\partial_jA_i]$$

ahora, procederemos a calcular, los momentos conjugados y ver que velocidades se puedan despejar

$$
\begin{aligned}
\pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \\
\pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{1}{g^2}F_{0i} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}A_j F_{kl} \\
\dot{A}_i &= \pi^i g^2 + \partial_i A_0 - \frac{\kappa g^2}{3}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}A_j
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

donde observamos que, solo podemos despejar las $\dot{A}_i$, ademaś tenemos un vínculo primario, que denominamos

$$
\pi^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \tag{4.3}
$$

Calculamos ahora la densidad Hamiltoniana

$$
\mathcal{H}_0 = [\pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i - L]\Big|_{\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}} \tag{4.4}
$$

$$
\mathcal{H}_0 = \frac{\pi^i \pi^i g^2}{2} - \frac{\pi^i \kappa g^2}{3}\varepsilon^{0ijkl}A_j F_{kl} + \pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{2}\kappa^2 g^2 A_{j'}F_{k'l'}A_{j'}F_{k'l'} + \frac{1}{4g^2}F_{ik}F_{ij} - \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}A_0 \partial_i A_j \tag{4.5}
$$

por tanto el Hamiltoniano:

$$
\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda\varphi \tag{4.6}
$$

Postulamos ahora los siguientes corchetes de Poisson, entre las variables dinámicas:

$$
\begin{aligned}
\{A_0(x), \pi^0(y)\}\big|_{x^0=y^0} &= \delta^4(\vec{x}-\vec{y}) \\
\{A_i(x), \pi^i(y)\}\big|_{x^0=y^0} &= \delta^4(\vec{x}-\vec{y})\delta^i_j \\
\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}\big|_{x^0=y^0} &= 0 \\
\{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\}\big|_{x^0=y^0} &= 0
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

La evolución de las funciones, que dependen de las variables del espacio de fases es

$$\dot{F}(A_\mu, \pi^\nu) = \{F(x), \mathcal{H}\}|_{\varphi=0} \tag{4.8}$$

por tanto que

$$\dot{\varphi} = \int d^4(y)[\partial_i\pi^i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}\partial_i A_j]\delta^4(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.9}$$

de modo que

$$\dot{\varphi} = \partial_i\pi^i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}\partial_i A_j \tag{4.10}$$

que corresponde a un nuevo vínculo

$$\psi = \partial_i\pi^i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}\partial_i A_j \tag{4.11}$$

Ahora preservamos este nuevo vínculo, haciendo uso de (2.79), aplicado a

$$\dot{\psi} = \{\psi(x), H\} \tag{4.12}$$

con lo cual podemos demostrar que, de mantenerse constante a lo largo de la trayectoria, entonces

$$\dot{\psi} = 0 \tag{4.13}$$

Dado que no aparecen nuevos vínculos, el proceso termina. En la preservación no se pudo determinar el valor del multiplicador asociado a φ, por lo que éste vínculo es de primera clase. El procedimiento de Dirac, "nos dice"[1] que φ genera transformaciones de calibre y tambien lo hace el corchete de φ con el Hamiltoniano; puede verse que $\{H, \varphi\} = \psi$; asi que el generador de transformaciones de calibre es

$$G = \int d^5y(\xi(y)\varphi(y) + \tilde{\xi}(y)\psi(y)) \tag{4.14}$$

su efecto sobre las variables dinámicas es

$$\delta A_0 = \xi \tag{4.15}$$

$$\delta A_i = 0 \tag{4.16}$$

$$\delta \pi^0 = 0 \tag{4.17}$$

$$\delta \pi^i = 0 \tag{4.18}$$

Procedemos a calcular las transformaciones de calibre[2] de los vínculos y los campos; que dependen a su vez de las variables canónicas. En general, la acción que describe un sistema físico, puede presentar ciertas simetrías, esto es que bajo ciertas transformaciones, la acción S, permanece invariante.

[1]Clases de Teoría Clásica de Campos
[2]Weinberg S., The Quantum Theory of Fields, Vol. I

La transformación completa la genera

$$\hat{G} = \int d^4[\xi(y)\varphi + \tilde{\xi}(y)\psi] \tag{4.19}$$

$$\hat{\delta}A_0 = \int d^4(y)[\{A_0, \varphi\}\xi(y) + \tilde{\xi}(y)\{A_0, \psi\}]$$

$$\hat{\delta}A_0 = \int d^4(y)\xi(y)$$

$$\hat{\delta}A_0 = \tilde{\xi} \tag{4.20}$$

$$\hat{\delta}A_i = \int d^4(y)[\{A_i, \varphi\}\xi(y) + \tilde{\xi}(y)\{A_i, \psi\}]$$

$$\hat{\delta}A_i = \int d^4(y)\partial_i\hat{\xi}(y)\delta^2(x-y)$$

$$\hat{\delta}A_i = \partial_i\hat{\xi} \tag{4.21}$$

$$\hat{\delta}\pi^0 = \int d^4(y)[\{\pi^0, \partial_i\pi^i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}\partial_i A_j\}\tilde{\xi}(y) + \{\pi^0, \pi^0\}\xi(y)]$$

$$\hat{\delta}\pi^0 = 0 \tag{4.22}$$

$$\hat{\delta}\pi^i = \frac{\kappa}{6}\int d^4y\partial_i^y\{\pi^i, \varepsilon^{0ijkl}A_i\}F_{kl}\xi(y)$$

$$\hat{\delta}\pi^i = \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}\partial_j\xi \tag{4.23}$$

4.1. La Acción S Extendida

En esta sección, vamos a escribir la acción extendida o la más generalizada, que contiene los vínculos, a la cual le pedimos que sea estacionaria[3] , en conformidad con el principio de Hamilton. A esta acción, le introducimos la transformación de los parámetros determinados anteriormente y con ello, tomaremos variaciones sobre los mismos, a fin de recuperar”la acción original del sistema estudiado.

$$S_E = \int d^5X[\dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{1}{2}g^2R^i_kR_ki - \frac{1}{4g^2}F_{ij}F_{ij} - \hat{\lambda}\psi - A_0\psi - \lambda\pi^0] \quad (4.24)$$

donde

$$R^i_k = \pi^i - \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}A_jF_{kl} \quad (4.25)$$

Ahora invocamos el principio de Hamilton[4] sobre S_E; es decir

$$\delta S_E = 0$$

$$\delta S_E = \int d^5x[(\dot{\xi} - \delta\lambda)\pi^0 - (\dot{\hat{\xi}} - \xi - \delta\hat{\xi})\psi + \partial_j(\frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}\hat{\xi}A_i) + \frac{d}{dt}(\frac{\kappa}{12}\varepsilon^{0ijkl}F_{ij}F_{kl})] \quad (4.26)$$

[3]Krasnov M.L., Makarenko G.I., Kiseliov A.I., Cálculo Variacional
[4]ídem

con condiciones apropiadas de borde, tal que

$$\int d^5x\partial_j(\frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}F_{kl}\hat{\xi}A_i) = 0,$$

$$\int d^5x(\frac{d}{dt}(\frac{\kappa}{12}\varepsilon^{0ijkl}F_{ij}F_{kl})) = 0,$$

$$\delta S_E = \int d^5x[(\dot{\xi} - \delta\lambda)\pi^0 - (\dot{\hat{\xi}} - \xi - \delta\hat{\xi})\psi] \qquad (4.27)$$

asi

$$\left.\begin{array}{c} \delta\hat{\xi} = \dot{\hat{\xi}} - \xi \\ \\ \delta\xi = \dot{\xi} \\ \\ \delta A_0 = \xi \\ \\ \delta A_i = \partial_i\hat{\xi} \\ \\ \delta\pi^0 = 0 \\ \\ \delta\pi^i = \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}\partial_j\hat{\xi} \end{array}\right\} \qquad (4.28)$$

quedando S_E :

$$S_E = \int d^5X[\dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{1}{2}g^2R^i_kR^i_k - \frac{1}{4g^2}F_{ij}F_{ij} - (\hat{\lambda} + A_0)\psi - \lambda\pi^0] \qquad (4.29)$$

con la transformacion del parametro ξ, se asume que $\hat{\xi} = 0$ entonces

$$\delta\hat{\xi} = 0, \qquad (4.30)$$

para mantener la fijacion, $\delta\xi = \ddot{\hat{\hat{\xi}}}$, en consecuencia

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \hat{\hat{\xi}} \tag{4.31}$$

$$\delta \pi^0 = 0 \tag{4.32}$$

$$\delta \pi^i = \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{oijkl} F_{jk}\partial_l \hat{\hat{\xi}} \tag{4.33}$$

por tanto S_E

$$S_E = \int d^5X[\dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{1}{2}g^2 R^i_k R^i_k - \frac{1}{4g^2}F_{ij}F_{ij} - A_0\psi - \lambda\pi^0] \tag{4.34}$$

tomando variaciones en λ, π^0, π^i

$$\frac{\delta S_E}{\delta \lambda} = 0 \to \pi^0 = 0 \tag{4.35}$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \pi^0} = \dot{A}_0 - \lambda = 0 \tag{4.36}$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \pi^i} = \dot{A}_i - g^2 R^i_k - \partial_i A_0$$

$$= F_{0i} - g^2(\pi^i - \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}A_j F_{kl}) \tag{4.37}$$

$$\pi^i = \frac{1}{g^2}F_{0i} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}A_j F_{kl} \tag{4.38}$$

$$\psi = \partial_i\pi^i - \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}\partial_i A_j$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{g^2}\partial_i F_{0i} - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{oijkl}F_{kl}F_{ij} \tag{4.39}$$

Sustituyendo todo en S_E

$$S_E = \int d^5X[\frac{1}{2g^2}F_{0i}F_{0i} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{0ijkl}\dot{A}_i A_j F_{kl} - \frac{1}{4g^2}F_{ij}F_{ij} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{0ijkl}A_0 F_{ij}F_{kl}] \tag{4.40}$$

quedando S_E

$$S_E = \int d^5X[-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\mu F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma}] \tag{4.41}$$

Capítulo 5

Conclusiones Generales del T.E.G

Se analizó cinemáticamente el modelo de Maxwell con un término topológico en 4+1 dimensiones espacio-temporales. Se observó que el espectro corresponde a una excitación sin masa. Se obtuvieron las corrientes correspondientes según se prevé el Teorema de Noether.

El tensor de energía-momentun se modificó para obtener el llamado tensor de Belifante, el cual tiene las mismas cargas conservadas que el canónico. Se observó que la contribución del término topológico desaparece, lo cual podría preverse dado que no es posible acoplarlo con una métrica externa. Se obtuvieron las corrientes derivadas con el tensor de Belifante.

El modelo estudiado es singular, por lo que se realizó el análisis Hamiltoniano siguiendo el procedimiento de Dirac. Se obtuvieron las transformaciones de calibre, las cuales modifican funcionalmente a los campos involucrados, aunque el sistema mecánico se mueva en una trayectoria canónicamente equivalente. Con esto queremos referirnos a que dicho sistema, en sus variables descritas (q,p); toma valores distintos en el camino más corto entre dos puntos del espacio de fases. Finalmente se construye la acción extendida y se conecta con la acción original.

Apéndice A

apéndice I

Convención Métrica

Uno de los más engorrosos problemas, encontrados durante la escritura acerca de la Física Relativista es la seleción de la convención métrica. Nosotros hemo adoptado el uso de la métrica: $I = g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{00}$ en el texto principal, porque la transición entre las momentas canónico no-relativista y las momentas canónica relativista parece más directo. Esta convención también coincide con el resto de las corrientes literarias vinculadas a la Relatividad General. En absoluto apego a lo desarrollado en el texto

tenemos:

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -I \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ I \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ I \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ I \end{pmatrix}$$

$$P_\mu = (-P^0, P^1, P^2, P^3)$$

$$P^\mu P_\mu = \mathbf{P}.\mathbf{P} - (P^0)^2 = -M^2$$

$$P^\mu_{op} = \frac{I}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$ds = (-dx^\mu dx_\mu)^{\frac{1}{2}}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ \equiv \ A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$-\pi^i = F^{0i} = E^i$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} = B^i$$

Apéndice B

apéndice II

La ecuación de movimiento es:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{g^2}\partial_\nu F^{\nu\mu} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma} \\ T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu A_\alpha} = -\frac{1}{g^2}F^{\mu\alpha} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\rho F_{\sigma\lambda} \end{array}\right\} \tag{B.1}$$

$$\left.\begin{array}{c} T^{\mu\nu} = (-\frac{1}{g^2} + \frac{\kappa}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\rho F_{\sigma\lambda})\partial^\nu A_\alpha + \\ -\eta^{\mu\nu}(-\frac{1}{4g^2}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\alpha\beta}A_\rho F_{\sigma\lambda}F^{\alpha\beta}) \\ \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial^\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F^\nu_\mu + \partial_\mu F^\nu_\alpha) \\ (\frac{1}{2g^2}F^{\mu\alpha} - \frac{\kappa}{6}\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma\lambda}A_\rho F_{\sigma\lambda}) = 0 \end{array}\right\} \tag{B.2}$$

porque:

$$(\partial^\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F^\nu_\mu + \partial_\mu F^\nu_\alpha) = \eta^{\nu\rho}(\partial_\rho F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\rho\mu} + \partial_\mu F^\rho_\alpha) \tag{B.3}$$

donde:

$(\partial_\rho F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\rho\mu} + \partial_\mu F^\rho_\alpha)$, es la Identidad de Jacobi del Tensor de Maxwell, en consecuencia:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{B.4}$$

Sobre el Tensor Momento Angular tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \mathtt{M}^{\mu\alpha\beta} &= \frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma\theta}(4A_\rho F_\mu^\alpha - F_{\mu\rho}A^\alpha)F_{\sigma\theta} - (\beta \leftrightarrow \alpha) && \text{(B.5)}\\
&= \frac{\kappa}{12}\delta^{\beta\alpha}_{\gamma\lambda}\varepsilon^{\mu\gamma\rho\sigma\theta}(4A_\rho F_\mu^\lambda - F_{\mu\rho}A^\lambda)F_{\sigma\theta} && \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\beta\alpha\mu\rho\sigma}(A^\theta F_{\mu\rho}F_{\sigma\theta} - A^\theta F_{\mu\rho}F_{\theta\sigma} - 3A^\theta F_{\mu\rho}F_{\rho\sigma} - A^\theta F_{\mu\rho}F_{\sigma\mu})\\
&= -\frac{\kappa}{12}\varepsilon^{\beta\alpha\mu\rho\sigma}A^\theta F_{\sigma\theta}(F_{\mu\rho} + F_{\mu\rho} - 3F_{\mu\rho} + F_{\mu\rho}) = 0 && \text{(B.7)}
\end{aligned}$$

Apéndice C

Bibliografía

Bibliografía

1.- Dirac P.A.M., Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nueva York (1964).

2.- Weinberg S., The Quantum Theory of Fields, Vol. I Cambridge University Press (1995).

3.- Krasnov M.L., Makarenko G.I., Kiseliov A.I., Cálculo Variacional, Editorial Mir Moscú.

4.- Abramowitz, Milton and Stegun Irene, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, publisher Dover, year 1964, New York, edition ninth Dover printing, tenth GPO printing isbn 0-486-61272-4