



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Test de Portmanteau para procesos ARMA con varianza infinita

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Yarot O. Avendaño P.** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Dr. Ricardo Rios.**

Caracas, Venezuela

Mayo 2013.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Test de Portmanteau para procesos ARMA con varianza infinita**”, presentado por el **Br. Yarot O. Avendaño P.**, titular de la Cédula de Identidad **16.033.857**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Dr. Ricardo Rios**  
**Tutor**

---

**Dra. Mairene Colina**  
**Jurado**

---

**MSc. Angie Pineda**  
**Jurado**

## Dedicatoria

A mi Papá(Oscar) que donde te encuentras siempre me has acompañado y bendecido, que logre lo que tu nos enseñaste que jamas nos rindieramos, te extraño mucho bendición, ojala estuvieras aqui para que disfrutaras de tu nieto.

A mi Hijo(Ziggy) que desde que llegaste a mi vida me has hecho el padre más feliz del mundo, Te Amo Hijo y Dios te bendiga.

## Agradecimiento

Darle gracias a Dios, por darme apoyo y fortaleza durante todo este tiempo gracias.

A mi Mamá(Miriam) y mi Hermano(Yancar) por apoyarme de forma incansable durante toda la vida.

A Lhindy por apoyarme desde que nos conocimos y por haberme dado el mejor regalo del mundo que es ser padre.

Al profesor Ricardo Ríos por tenerme paciencia y guiarme durante todo este proceso de aprendizaje de la tesis, gracias profe.

A todos los profesores que me orientaron y educaron durante toda la carrera, muchisimas gracias a todos.

A mis Amigos ellos saben quienes son, por todos los momentos de estudio y fiestas que compartimos durante la carrera, muchisimas gracias muchachos.

A los Compañeros del FONJUCV que por el poco tiempo que dure hice buenos compañeros, muchas gracias.

## Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Marco Teórico	3
1. Antecedentes	3
2. Series de Tiempo	4
3. Distribución de Pareto	6
Capítulo 2. Leyes Estables	10
1. Propiedades de una variable aleatoria estable	18
Capítulo 3. Test de Portmanteau en una distribución de Pareto	21
1. Procesos lineales con varianza infinita	21
2. Test de Portmanteau para series de tiempo estables de Pareto	25
Capítulo 4. Análisis del test de Portmanteau	31
1. Intel Data Corporation	31
2. IBM y Standard and Poor's 500	35
3. Standard and Poor's 500	46
Capítulo 5. Análisis ilustrativo del test de Portmanteau	50
Conclusión	54
Apéndice	55
Bibliografía	68

## Introducción

El presente Trabajo Especial de Grado se fundamenta en el estudio de la implementación de un Test de Portmanteau para series de tiempo ARMA(p,q), cuando el ruido sigue una ley estable de Pareto con varianza infinita.

Para poder abordar este estudio, se realizaron consultas documentales, que avalan las teorías relacionadas con el tema.

El Test de Portmanteau es un tipo de prueba de hipótesis estadística en donde la hipótesis nula de independencia de las innovaciones está bien especificada, con hipótesis alternativas más flexible que las pruebas clásicas.

Este test que consideramos, es una extensión efectiva del caso a varianza infinita del ruido de un proceso ARMA(p,q) estacionario. El test puede tener la propiedad de ser moderadamente menos potente, donde existe una amplia gama de alternativas, tal como lo constataremos en los ejemplos presentados más adelante.

En las pruebas clásicas de Yule-Walker o de los algoritmos de Durbin-Levinson, la hipótesis de la independencia del ruido blanco del proceso ARMA(p,q) estudiado bajo la premisa fundamental junto con la de la existencia del segundo momento, siendo el test la herramienta matemática más utilizada para rechazar esa hipótesis. En [3] hay una clara exposición de estas ideas. La potencia del test es calculada con la varianza teórica del ruido.

La existencia de series de tiempo con distribución de Pareto han sido detectadas en la práctica; es decir, series a las cuales se les rechaza la hipótesis nula de tener varianza finita estudiada con los residuos. Estudiadas en [1], [7], y en [14].

Recientemente se ha observado que existe un gran interés en el modelado de las series de tiempo, usando los procesos  $\text{ARMA}(p,q)$  con varianza infinita. Ejemplos de estos modelos han sido encontrados por [16], quienes trabajaron las señales telefónicas. En [6], se presentó un modelo de los precios del mercado de valores.

Este Trabajo Especial de Grado se estructuró sobre la base de la implementación de los modelos de series de tiempo en el programa R, para resolver el test de Portmanteau con varianza infinita. El cual consta de cinco capítulos, siendo que el primero de ellos se muestran los antecedentes de autores que han realizado estudios utilizando el test, se define qué es una serie de tiempo y por último se presenta la distribución de Pareto.

En el segundo capítulo, se aborda la teoría que establece la definición de las leyes estables, mostrando con ejemplos teóricos como se usan, así como también las propiedades de una variable aleatoria estable. En el capítulo tres se presenta el desarrollo del test de Portmanteau para series de tiempo, el cual sirvió de herramienta al momento de implementar el programa R. Seguidamente, en el capítulo cuatro se realiza la simulación de los resultados del test de Portmanteau con varianza finita e infinita.

Finalmente en el quinto capítulo de este Trabajo Especial de Grado, se aplica la teoría anteriormente mencionada a través de un ejemplo práctico del test de Portmanteau, lo cual permitió la aplicación específica del modelo  $\text{ARMA}(p,q)$  del test propiamente dicho sobre la base de series de tiempo y la aplicación del programa R, para resolver el test en referencia con varianza infinita.

## Marco Teórico

### 1. Antecedentes

El estudio de los Test de Portmanteau se inició con la prueba de hipótesis de Box-Pierce estudiada en [1] planteo que la distribución de las autocorrelaciones residuales en modelos de series de tiempo donde usó el estadístico de prueba  $Q_{BP}$  basándose en una sucesión  $Y_1, \dots, Y_n$  de variables aleatorias con varianzas finitas, definido por

$$(1.1) \quad Q_{BP} = n \sum_{j=1}^h \hat{\rho}^2(j)$$

siendo  $\hat{\rho}(j)$  el coeficiente de correlación muestral y  $0 < h < n$ . En [1] muestran que  $\sqrt{n}\hat{\rho}^2(j)$ ,  $j = 1, \dots, h$ , se comporta asintóticamente como v.a.i.i.d en  $\mathcal{N}(0, 1)$ ; en consecuencia,  $Q_{BP}$  se distribuye aproximadamente como una variable aleatoria chi-cuadrado con  $h$  grados de libertad. Un valor grande de  $Q_{BP}$  sugiere que las autocorrelaciones muestrales de los datos son demasiado grandes para sostener que las muestras sean una sucesión realmente independiente. En consecuencia, se rechaza la hipótesis de independencia a nivel  $\alpha$  si  $Q > \chi^2_{1-\alpha}(h)$ , donde  $\chi^2_{1-\alpha}(h)$  es el  $1 - \alpha$  cuantil de la distribución chi-cuadrado con  $h$  grados de libertad. Un refinamiento de esta prueba, formulado por Ljung-Box en 1978 mostrado en [9] donde tomo la medida de la falta de ajuste de los modelos de series de tiempo, en la que  $Q_{BP}$  es sustituida por

$$(1.2) \quad Q_{LB} = n(n+2) \sum_{j=1}^h \hat{\rho}^2(j)/(n-j)$$

cuya distribución aproxima mejor la distribución chi-cuadrado con  $h$  grados de libertad.

Luego, en 1983, Mcleod-Li formulan en [12] que los modelos ARMA(p,q) de series de tiempo para la comprobación de diagnosticos usando autocorrelaciones indican que se puede



utilizar como un test adicional para la hipótesis de independencia, ya que si los datos son i.i.d., entonces los datos al cuadrado son también i.i.d.. Se basa en el mismo estadístico utilizado para el test Ljung-Box, excepto que las autocorrelaciones muestrales de los datos son sustituidas por la autocorrelación muestral de los datos al cuadrado,  $\hat{\rho}_{ww}(h)$ , dando

$$(1.3) \quad Q_{ML} = n(n+2) \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_{ww}^2(k)/(n-k)$$

la hipótesis de independencia se rechaza al nivel  $\alpha$  si el valor observado de  $Q_{ML}$  es más grande que el  $1 - \alpha$  cuantil de la distribución  $\chi^2(h)$ .

Para el año 2002, Peña-Rodríguez propusieron en [14] un test de Portmanteau univariado de bondad de ajuste basado en la raíz  $m$ -ésima del determinante de la autocorrelación de la matriz residual de Toeplitz

$$(1.4) \quad \hat{R}_m = \begin{bmatrix} \hat{r}_0 & \hat{r}_1 & \cdots & \hat{r}_m \\ \hat{r}_{-1} & \hat{r}_0 & \cdots & \hat{r}_{m-1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{-m} & \hat{r}_{-m+1} & \cdots & \hat{r}_0 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{r}_0 = 1$  y  $\hat{r}_{-\ell} = \hat{r}_\ell$ , para todo  $\ell$ .

Luego, para el año 2006, Peña-Rodríguez sugieren en [15] modificar este ensayo tomando el logaritmo de la raíz  $(m+1)$ -ésima del determinante en la ecuación (1.4). Se proponen dos aproximaciones mediante el uso de las distribuciones Gamma y Normal en la distribución asintótica de este test y se indica que el rendimiento de ambas aproximaciones para comprobar la bondad de ajuste de los modelos lineales es similar y más potente para el tamaño de muestra más pequeña que el anterior.

## 2. Series de Tiempo

Ahora vamos a mostrar algunas definiciones relacionadas con las Series de Tiempo, inherentes al Trabajo Especial de Grado.

DEFINICIÓN 1.1. Un **proceso estocástico a tiempo continuo** es una sucesión  $(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega, T \subseteq \mathbb{R}^+)$  de variables aleatorias definidas sobre un espacio  $\Omega$ .

Un proceso estocástico es una función de dos variables:

- Para un instante de tiempo  $t$  fijo,  $\omega \in \Omega$ ,  $X_t(\omega)$  es una variable aleatoria.
- Para un  $\omega$  fijo es una función del tiempo  $X_t(\omega), t \in T$ . Esta función es llamada trayectoria del proceso.

DEFINICIÓN 1.2. Una manera sencilla de generar series de tiempo puede ser considerando una sucesión de variables aleatorias no-correlacionadas,  $w_t$  con media 0 y varianza  $\sigma_w^2$ . Las series de tiempo generadas de esta manera son usadas como modelos para ruido en aplicaciones de ingeniería, donde ellas son llamadas **ruidos blancos**, denotaremos este proceso como  $w_t \sim wn(0, \sigma_w^2)$ .

DEFINICIÓN 1.3. Una serie de tiempo **débilmente estacionaria**  $x_t$ , es un proceso con varianza finita tal que

- la función de media  $\mu_t$ , es constante y no depende del tiempo  $t$ .
- la función de covarianza,  $\gamma(s, t)$ , depende solo de las diferencias de  $s$  y  $t$ ,  $|s - t|$ .

Por consiguiente, usaremos el término **estacionariedad** para referirnos a estacionariedad débil; si un proceso es estacionario en el sentido estricto usaremos el término estrictamente estacionario.

DEFINICIÓN 1.4. Una **Serie de Tiempo** es un conjunto de observaciones  $x_t$ , cada una registrada a un tiempo específico  $t$ .

DEFINICIÓN 1.5. Un **modelo de serie de tiempo** para los datos observados  $x_t$  es una especificación de una distribución conjunta de una sucesión de variables aleatorias  $X_t$  de las cuales  $x_t$  es una realización.

DEFINICIÓN 1.6. Un **Modelo Autoregresivo de orden p (AR(p))**, es una ecuación en diferencias finitas de la forma

$$(1.5) \quad x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t$$

donde  $x_t$  es un proceso estacionario en sentido debil,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son constantes ( $\phi_p \neq 0$ ). A menos que se declare lo contrario, se supone que  $w_t$  es un ruido blanco i.i.d de media cero y varianza  $\sigma_w^2 \leq \infty$ . La media de  $x_t$  en (1.5) es cero. Si la media  $\mu$  de  $x_t$  no es cero, reemplazamos  $X_t$  por  $x_t - \mu$  en (1.5), es decir,

$$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(x_{t-p} - \mu) + w_t$$

ó escribimos

$$(1.6) \quad x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t$$

donde  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ .

**DEFINICIÓN 1.7.** El **Modelo de Promedio Movil de orden q (MA(q))** se define como

$$(1.7) \quad x_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \dots + \theta_q w_{t-q}$$

donde hay q pasos en el promedio móvil y  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  ( $\theta_q \neq 0$ ) son parámetros. El ruido  $w_t$  se supone también como un ruido blanco con varianza  $\sigma_w^2 \leq \infty$ .

### 3. Distribución de Pareto

En estadística la distribución de Pareto, formulada por el sociólogo, economista y filósofo Vilfredo Pareto, es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros, que tiene aplicación en disciplinas como la sociología, geofísica y economía.

#### Función de Densidad

Es una distribución de probabilidad que biparamétrica que tiene como función de densidad:

$$f_x(x) = \begin{cases} \alpha \frac{x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_m; X_m > 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } x < x_m, \end{cases}$$

donde  $x_m$  como un valor inicial arbitrario y  $\alpha$  es conocido como índice de Pareto.

Su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha \text{ siempre que } \alpha > 1$$

### Probabilidad Acumulada

Sea  $X$  una sucesión de variables aleatorias de la distribución de Pareto, entonces la probabilidad de que  $X$  sea mayor que un número  $x$  viene dada por:

$$P(X > x) = \begin{cases} \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \geq x_m \\ 1 & \text{si } x < x_m, \end{cases}$$

donde  $x_m$  es el valor inicial arbitrario (positivo) de  $X$ , y  $\alpha$  el índice de Pareto.

### Propiedades

- La Esperanza de una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución de Pareto con parámetro  $\alpha > 1$  es  $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1}$ . **Si  $\alpha \leq 1$ , el valor esperado no existe.**
- La varianza es  $Var(X) = \left(\frac{x_m}{\alpha - 1}\right)^2 \frac{\alpha}{\alpha - 2}$ . **Si  $\alpha \leq 2$  la varianza no existe.**
- Los momentos son  $\mu'_n = \frac{\alpha x_m^n}{\alpha - n}$ , pero el  $n$ -ésimo momento existe sólo para  $n < \alpha$ .
- La función generadora de momentos sólo está definida para valores no positivos de  $t \leq 0$  según:

$$M(t, \alpha, x_m) = \mathbb{E}(\exp^t X) = \alpha(-x_m t)^{\alpha-1} \Gamma(-\alpha, -x_m t) \text{ y } M(0, \alpha, x_m) = 1$$

### **3.1. Distribución estable de Pareto.**

Paul Lévy [8] probablemente fue el primero en iniciar la investigación de las distribuciones estables. Lévy demostró que las probabilidades de cola se aproximan a la de la distribución de Pareto de ahí el término Estable Pareto-Levy o distribución Estable de Pareto. Si la cola derecha de una distribución de Pareto es asintótica entonces, para  $x$  grandes,

$$(1.8) \quad 1 - F(x) \approx cx^{-\alpha_p}$$

donde  $F(x)$  es la función de distribución acumulada,  $\alpha_p$  es el índice de la cola y  $\alpha_p > 0$ ,  $c > 0$ .

La distribución estable de Pareto es una generalización natural de la distribución de Normal. Sin embargo, las distribuciones estables no normales tienen más masa de probabilidad en las áreas de la cola que en la normal. De hecho, las distribuciones estables no son tan normales de cola más ancha donde su varianza y la de todos los momentos más elevados son infinitos.

Más allá de la distribución normal, la distribución de Cauchy, la distribución de Lévy, y el reflejo de la distribución de Lévy, no hay expresiones de forma cerrada para las densidades generalmente estables. Las distribuciones estables de Pareto pueden ser expresadas por su función característica y la parametrización más común es:

$$(1.9) \quad E(\exp^{itX}) = \begin{cases} \exp\{i\mu t - \sigma |t|^\alpha [1 - i\beta \tan \frac{\Pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(t)]\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\{i\mu t - \sigma |t| [1 - i\beta(\frac{2}{\Pi}) \operatorname{sgn}(t) \ln |t|]\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

donde

$$(1.10) \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La distribución estable de Pareto posee cuatro parámetros: un parámetro de ubicación ( $\mu$ ), un parámetro de escala ( $\sigma$ ), un índice de asimetría ( $\beta$ ) y una medida de la altura de las zonas extremas de la cola de la distribución, el exponente característico (o índice de estabilidad)  $\alpha$ .

El exponente característico de una distribución estable de Pareto  $\alpha$  determina la probabilidad total en los extremos de las colas en la distribución y puede tomar cualquier valor en el intervalo  $0 < \alpha \leq 2$ . Cuando  $\alpha = 2$ , estamos en el caso de una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $2\sigma^2$ , como  $\alpha$  decrece desde 2 hasta 0, las áreas de la cola de la distribución estable se hicieron cada vez más anchas de lo normal. Excepto para el caso normal ( $\alpha = 2$ ), la distribución estable de Pareto tiene varianza infinita.

El parametro  $\beta$  puede tomar cualquier valor en el intervalo  $-\infty < \mu < +\infty$ . Cuando  $\beta = 0$ , la distribución es simétrica alrededor de  $\mu$ . Si  $\alpha \neq 1$ , para positivo (o negativo)  $\beta$ , la distribución está sesgada a la derecha (o a la izquierda). La dirección de la asimetría se invierte si  $\alpha = 1$ .

$\mu$  es el parámetro de ubicación y puede tomar cualquier valor en el intervalo  $-\infty < \mu \leq +\infty$ . Cuando  $1 < \alpha < 2$  la distribución estable de Pareto tiene una media dada por  $\mu$ . Para  $0 < \alpha \leq 1$  las colas son tan fuertes que incluso la media no existe. En este caso,  $\mu$  debería ser otro parámetro (la mediana, por ejemplo, cuando  $\beta = 0$ ).

El parámetro de escala  $\sigma$  puede tomar cualquier valor positivo:  $0 < \sigma < +\infty$ . Cuando  $\alpha < 2$  la varianza de una distribución estable de Pareto no existe y  $\sigma$  define la escala de la distribución, lo cual tampoco es la varianza. Por ejemplo, cuando  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$  (distribución de Cauchy)  $\sigma$  es el rango semi-intercuartílico.

## Capítulo 2

### Leyes Estables

En este capítulo daremos a conocer qué son las leyes estables, su definición, propiedades y ejemplos teóricos donde son aplicadas estas leyes.

Del Teorema Central del Límite (ver teorema 5.3. del apéndice). Sabemos que si  $X_1, X_2, \dots$  v.a.i.i.d,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . y  $\mathbb{E}X_i = \mu$  con  $\text{var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$  entonces

$$(S_n - n\mu)/\sigma n^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

En esta sección vamos a investigar el caso  $\mathbb{E}X_1^2 = \infty$  y dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de constantes  $a_n$  y  $b_n$  de modo que

$$(S_n - b_n)/a_n \Longrightarrow Y$$

donde  $Y$  es una variable aleatoria no degenerada, osea que la  $\text{var}(Y) > 0$ .

Comenzamos con un ejemplo. Supongamos que la variable aleatoria  $X_1$  tiene una distribución dada por

$$(2.1) \quad P(X_1 > x) = P(X_1 < -x) = x^{-\alpha}/2 \text{ para } x \geq 1$$

donde  $0 < \alpha < 2$ . La función característica de  $X_1$  viene dada por  $\varphi(t) = E(\exp(itX_1))$  luego

$$1 - \varphi(t) = \int_1^\infty (1 - \exp^{itx}) \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx + \int_{-\infty}^{-1} (1 - \exp^{itx}) \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_1^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^{\alpha+1}} dx$$

usando un cambio de variable  $tx = u, dx = u/t$  la última integral se convierte en

$$= \alpha \int_t^\infty \frac{1 - \cos(u)}{(u/t)^{\alpha+1}} \frac{du}{t} = t^\alpha \alpha \int_t^\infty \frac{1 - \cos(u)}{(u)^{\alpha+1}} du$$

Como  $u \rightarrow 0$ ,  $1 - \cos(u) \sim u^2/2$ , para  $(1 - \cos(u))/u^{\alpha+1} \sim u^{-\alpha+1}/2$  que es integrable, ya que  $\alpha < 2$  implica  $-\alpha + 1 > -1$ . Si hacemos que

$$C = \alpha \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u)}{(u)^{\alpha+1}} du < \infty$$

y observamos de (2.1) implica que  $\varphi(t) = \varphi(-t)$ , a continuación los resultados anteriores demuestran que

$$(2.2) \quad 1 - \varphi(t) \sim C|t|^\alpha \text{ con } t \rightarrow 0$$

Sean  $X_1, X_2, \dots$  v.a.i.i.d. con la distribución dada en (2.1) y sea  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

$$E(\exp(itS_n/n^{1/\alpha})) = \varphi(t/n^{1/\alpha})^n = (1 - \{1 - \varphi(t/n^{1/\alpha})\})^n$$

Cuando

$$(2.3) \quad n \rightarrow \infty, n(1 - \varphi(t/n^{1/\alpha})) \longrightarrow C|t|^\alpha,$$

lo que se deduce a partir del teorema 5.4 (ver apéndice) donde

$$E \exp(itS_n/n^{1/\alpha}) \longrightarrow \exp(-C|t|^\alpha)$$

De lo anterior se deduce que la expresión de la derecha es la función característica de  $Y$  entonces

$$(2.4) \quad S_n/n^{1/\alpha} \Longrightarrow Y$$

Para obtener nuestro resultado general, primero vamos a dar la prueba de (2.4). Si  $0 < a < b$  y  $an^{1/\alpha} > 1$  entonces

$$P(an^{1/\alpha} < X_1 < bn^{1/\alpha}) = \frac{1}{2}(a^{-\alpha} - b^{-\alpha})n^{-1}$$

luego usando el teorema 3.6.1 citado en [5]

$$N_n(a, b) \equiv |\{m \leq n : X_m/n^{1/\alpha} \in (a, b)\}| \Rightarrow \text{Poisson}(a, b)$$



donde  $\text{Poisson}(a, b)$  tiene como media  $(a^{-\alpha} - b^{-\alpha})/2$ . Luego, sea  $A \subset \mathbf{R} - (-\delta, \delta)$  y  $\delta n^{1/\alpha} > 1$  entonces

$$P(X_1/n^{1/\alpha} \in A) = n^{-1} \int_A \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx$$

para

$$N_n(A) \equiv |\{m \leq n : X_m/n^{1/\alpha} \in A\}| \Rightarrow \text{Poisson}(A)$$

donde  $\text{Poisson}(A)$  tiene como media  $\mu(A)$

$$\mu(A) = \int_A \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx < \infty$$

La familia de variables aleatorias  $\text{Poisson}(A)$  se denomina un proceso de Poisson en  $(-\infty, \infty)$  con media  $\mu$ . Observe que para cualquier  $\epsilon > 0$ ,  $\mu(\epsilon, \infty) = \epsilon^{-\alpha}/2 < \infty$ , para  $\text{Poisson}(\epsilon, \infty) < \infty$ .

A partir de este resultado observamos que el conjunto aleatorio

$$\chi_n = \{X_m/n^{1/\alpha} : 1 \leq m \leq n\}$$

puede ser acotado

Para obtener el límite de  $S_n/n^{1/\alpha}$ . Sea  $\epsilon > 0$ , y consideremos

$$I_n(\epsilon) = \{m \leq n : |X_m| > \epsilon n^{1/\alpha}\}$$

$$\hat{S}_n(\epsilon) = \sum_{m \in I_n(\epsilon)} X_m \quad \bar{S}_n(\epsilon) = S_n - \hat{S}_n(\epsilon)$$

Note que  $I_n(\epsilon)$  = los índices de los "términos grandes", es decir, aquellos índices para los cuales las variables  $X_m$  toman valor mayor que  $\epsilon n^{1/\alpha}$  en magnitud.  $\hat{S}_n(\epsilon)$  es la suma de los términos grandes, y  $\bar{S}_n(\epsilon)$  es el resto de la suma. Lo primero que haremos será mostrar si la contribución de los  $\bar{S}_n$  es pequeño si  $\epsilon$  también lo es. Donde

$$\bar{X}_m(\epsilon) = X_m 1_{(|X_m| \leq \epsilon n^{1/\alpha})}$$

La simetría  $\bar{X}_m$  implica  $E\bar{X}_m(\epsilon) = 0$ , para  $E(\bar{S}_n(\epsilon)^2) = nE\bar{X}_1(\epsilon)^2$ .

$$E\bar{X}_1(\epsilon)^2 = \int_0^\infty 2yP(|\bar{X}_1(\epsilon)| > y)dy \leq \int_0^1 2ydy + \int_1^{\epsilon n^{1/\alpha}} 2yy^{-\alpha}dy$$

$$= 1 + \frac{2}{2-\alpha} \epsilon^{2-\alpha} n^{2/\alpha-1} - \frac{2}{2-\alpha} \leq \frac{2\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} n^{2/\alpha-1}$$

donde utilizamos  $\alpha < 2$  en el cálculo de la integral y  $\alpha > 0$  en la desigualdad final.

De esto se deduce que la

$$(2.5) \quad E(\bar{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha})^2 \leq \frac{2\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

Para calcular el límite de  $\hat{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha}$ , observamos que  $|I_n(\epsilon)|$  tiene una distribución binomial con probabilidad de éxito  $p = \epsilon^{-\alpha}/n$ . Dado  $|I_n(\epsilon)| = m$ ,  $\hat{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha}$  es la suma de  $m$  variables aleatorias independientes con distribución  $F_n^\epsilon$  que es simétrica con respecto a 0 y tiene

$$1 - F_n^\epsilon(x) = P(X_1/n^{1/\alpha} \mid |X_1|/n^{1/\alpha} > \epsilon) = x^{-\alpha}/2\epsilon^{-\alpha} \text{ para } x \geq \epsilon$$

Note que esta función de distribución es la misma que la de la variable aleatoria  $X_1$ , dada en (2,4), multiplicada por  $\epsilon$ , es decir,  $\epsilon X_1$ , además si  $\varphi(t) = E \exp(itX_1)$ , entonces la distribución  $F_n^\epsilon$  tiene como función característica  $\varphi(\epsilon t)$ . Combinando las observaciones en este apartado se tiene que

$$E \exp(it\hat{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha}) = \sum_{n=0}^n \binom{n}{m} (\epsilon^{-\alpha}/n)^m (1 - \epsilon^{-\alpha}/n)^{n-m} \varphi(\epsilon t)^m$$

Luego, usando que

$$\binom{n}{m} \frac{1}{n^m} = \frac{1}{m!} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \leq \frac{1}{m!},$$

donde  $(1 - \epsilon^{-\alpha}/n)^n \leq \exp(-\epsilon^{-\alpha})$  y por el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$(2.6) \quad E(\exp(it\hat{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha}) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\epsilon^{-\alpha}) (\epsilon^{-\alpha})^m \varphi(\epsilon t)^m / m! = \exp(-\epsilon^{-\alpha} 1 - \varphi(\epsilon t))$$

usando este resultado y la igualdad (2.3) se obtiene la convergencia planteada en (2.4).

**LEMA 2.1.** *Si  $h_n(\epsilon) \rightarrow g(\epsilon)$  para cada  $\epsilon > 0$  y  $g(\epsilon) \rightarrow g(0)$  como  $\epsilon \rightarrow 0$  entonces podemos escoger  $\epsilon_n \rightarrow 0$  de modo que  $h_n(\epsilon_n) \rightarrow g(0)$ .*

Demostración: Sea  $N_m$  elegido de modo que  $|h_n(1/m) - g(1/m)| \leq 1/m$  para  $n \geq N_m$  y  $m \rightarrow N_m$  está aumentando. Sea  $\epsilon_n = 1/m$  para  $N_m \leq n < N_{m+1}$  y  $\epsilon_n = 1$  para  $n < N_1$ . Cuando

$N_m \leq n < N_{m+1}$ ,  $\epsilon_n = 1/m$  por lo que resulta de la desigualdad triangular y la definición de  $\epsilon_n$  que

$$|h_n(\epsilon_n) - g(0)| \leq |h_n(1/m) - g(1/m)| + |g(1/m) - g(0)| \leq 1/m + |g(1/m) - g(0)|$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos  $m \rightarrow \infty$  y el resultado se deduce.

Sean  $h_n(\epsilon) = E \exp(it\hat{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha})$  y  $g(\epsilon) = \exp(-\epsilon^{-\alpha}\{1 - \varphi(\epsilon t)\})$ . Luego de (2.2) se tiene que  $1 - \varphi(t) \sim C|t|^\alpha$  como  $t \rightarrow 0$  entonces

$$g(\epsilon) \rightarrow \exp(-C|t|^\alpha) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

del Lema 2.1 sabemos que podemos escoger  $\epsilon_n \rightarrow 0$  talque  $h_n(\epsilon_n) \rightarrow \exp(-C|t|^\alpha)$ . Sea  $Y$  con función característica  $\varphi(t) = E \exp(itY) = \exp(-C|t|^\alpha)$ , donde se deduce que  $\hat{S}_n(\epsilon_n)/n^{1/\alpha} \Rightarrow Y$ . Si  $\epsilon_n \rightarrow 0$  luego por (2.5) se tiene que

$$\bar{S}_n(\epsilon_n)/n^{1/\alpha} \Rightarrow 0$$

y de (2.4) se deriva del lema donde converge en ley a cero.

Una vez que damos una definición final, vamos a expresar y probar el resultado general aludido anteriormente.

**DEFINICIÓN 2.2.** L se dice que es de **variación lenta**, si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(tx)/L(x) = 1 \text{ para todo } t > 0$$

**TEOREMA 2.3.** *Supongamos que  $X_1, X_2, \dots$  son v.a.i.i.d. con una distribución que satisface*

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} P(X_1 > x)/P(|X_1| > x) = \theta \in [0, 1]$$

$$(ii) P(|X_1| > x) = x^{-\alpha} L(x),$$

donde  $\alpha < 2$  y  $L$  varía lentamente.

Sea  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $a_n = \inf\{x : P(|X_1| > x) \leq n^{-1}\}$  y  $b_n = nE(X_1 1_{(|X_1| \leq a_n)})$  entonces cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $(S_n - b_n)/a_n \Rightarrow Y$  donde  $Y$  tiene una distribución no degenerada.

OBSERVACIÓN 2.4. En el teorema anterior se muestran las condiciones necesarias para la existencia de las constantes  $a_n$  y  $b_n$  de modo que  $(S_n - b_n)/a_n \Rightarrow Y$ , donde  $Y$  es una distribución no degenerada.

Demostración: Veamos primero que la hipótesis (ii) implica que

$$(2.7) \quad nP(|X_i| > a_n) \rightarrow 1$$

para probar esto, usaremos que  $nP(|X_i| > a_n) \leq 1$  y consideremos  $\epsilon > 0$ . Sea  $x = a_n/(1 + \epsilon)$  y  $t = 1 + 2\epsilon$ , luego (ii) implica que

$$(1 + 2\epsilon)^{-\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X_1| > (1 + 2\epsilon)a_n/(1 + \epsilon))}{P(|X_1| > a_n/(1 + \epsilon))} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X_1| > a_n)}{1/n}$$

obteniendo así (2.7) pues  $\epsilon$  es arbitrario. Combinando (2.7) con (i) y con (ii) obtenemos

$$(2.8) \quad nP(X_1 > xa_n) \rightarrow \theta x^{-\alpha} \text{ para } x > 0$$

por tanto  $|m \leq n : X_m > xa_n| \Rightarrow \text{Poisson}(\theta x^{-\alpha})$ . El último resultado nos da la conclusión que  $\chi_n = \{X_m/a_n : 1 \leq m \leq n\}$  converge a un proceso de Poisson en  $(-\infty, \infty)$  con media

$$\mu(A) = \int_{A \cap (0, \infty)} \theta \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx + \int_{A \cap (-\infty, 0)} (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx$$

Ahora para resumir los puntos, vamos a  $I_n(\epsilon) = \{m \leq n : |X_m| > \epsilon a_n\}$

$$\hat{\mu}(\epsilon) = \mathbb{E}X_m 1_{(\epsilon a_n < |X_m| \leq a_n)} \quad \hat{S}_n(\epsilon) = \sum_{m \in I_n(\epsilon)} X_m$$

$$\bar{\mu}(\epsilon) = \mathbb{E}X_m 1_{(|X_m| \leq \epsilon a_n)}$$

$$\bar{S}_n(\epsilon) = (S_n - b_n) - (\hat{S}_n(\epsilon) - n\hat{\mu}(\epsilon)) = \sum_{m=1}^n \{X_m 1_{(|X_m| \leq \epsilon a_n)} - \bar{\mu}(\epsilon)\}$$

Si tomamos que  $\bar{X}_m(\epsilon) = X_m 1_{(|X_m| \leq \epsilon a_n)}$  entonces

$$\mathbb{E}(\bar{S}_n(\epsilon)/a_n)^2 = n \text{var}(\bar{X}_1(\epsilon)/a_n) \leq n\mathbb{E}(\bar{X}_1(\epsilon)/a_n)^2$$

$$\mathbb{E}(X_1(\epsilon)/a_n)^2 \leq \int_0^\epsilon 2y P(|X_1| > ya_n) dy = P(|X_1| > a_n) \int_0^\epsilon 2y \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} dy$$

usando (2.7) y (ii) concluimos

$$n\mathbb{E}(\bar{X}_1(\epsilon)/a_n)^2 \rightarrow \int_0^\epsilon 2yy^{-\alpha}dy = \frac{2}{2-\alpha}\epsilon^{2-\alpha}$$

por lo tanto

$$(2.9) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\bar{S}_n/a_n)^2 \leq \frac{2\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

intercambiando el limite y la integral y luego tomando  $\delta < 2 - \alpha$  se obtiene el siguiente lema el cual demostraremos antes de continuar con la demostración del Teorema.

LEMA 2.5. *Para cualquier  $\delta > 0$  hay un  $C$  de modo que para todo  $t \leq t_0$  y  $y \leq 1$*

$$P(|X_1| > yt)/P(|X_1| > t) \leq Cy^{-\alpha-\delta}$$

Demostración: Usando la parte (ii) del teorema se tiene que como  $t \rightarrow \infty$

$$P(|X_1| > t/2)/P(|X_1| > t) \rightarrow 2^\alpha$$

por lo que para  $t \geq t_0$  tenemos

$$P(|X_1| > t/2)/P(|X_1| > t) \leq 2^{\alpha+\delta}$$

iterando  $t/2^m < t_0$  para todo  $n \geq 1$

$$P(|X_1| > t/2^n)/P(|X_1| > t) \leq C2^{(\alpha+\delta)n},$$

donde  $C = 1/P(|X_1| > t_0)$ . Aplicando el último resultado a los  $n$  primeros números con  $1/2^n < y$  y notando que  $y \leq 1/2^{n-1}$  tenemos

$$P(|X_1| > yt)/P(|X_1| > t) \leq C2^{\alpha+\delta}y^{-\alpha-\delta}$$

lo que demuestra el lema.

Con este resultado en mano podemos continuar con la demostración del teorema 2.3.

Para calcular el límite de  $\hat{S}_n(\epsilon)$ , se observa que  $|I_n(\epsilon)| \Rightarrow Poisson(\epsilon^{-\alpha})$ . Dado  $|I_n(\epsilon)| = m$ ,  $\hat{S}_n(\epsilon)/n^{1/\alpha}$  es la suma de  $m$  variables aleatorias independientes con distribución  $F_n^\epsilon$  que satisfacen que

$$1 - F_n^\epsilon = P(X_1/a_n > x | |X_1|/a_n > \epsilon) \rightarrow \theta x^{-\alpha}/\epsilon^{-\alpha}$$

$$F_n^\epsilon(-x) = P(X_1/a_n < -x | |X_1|/a_n > \epsilon) \rightarrow (1 - \theta)|x|^{-\alpha}/\epsilon^{-\alpha}$$

para  $x \geq \epsilon$ . Si denotamos por  $\varphi_n^\epsilon(t)$  denota la función característica de  $F_n^\epsilon$ , entonces implica

$$\varphi_n^\epsilon \rightarrow \varphi^\epsilon = \int_\epsilon^\infty \exp^{itx} \epsilon^\alpha \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \exp^{itx} (1-\theta) \epsilon^\alpha \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx$$

como  $n \rightarrow \infty$ . Luego, siguiendo un procedimiento analogo realizado. Para obtener la demostración de la igualdad (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} E(\exp(it\hat{S}_n(\epsilon)/a_n)) &\rightarrow \exp(-\epsilon^{-\alpha} \{1 - \varphi^\epsilon(t)\}) \\ &= \exp\left(\int_\epsilon^\infty (\exp^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} (\exp^{itx} - 1) (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx\right) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado  $\epsilon^{-\alpha} = \int_\epsilon^\infty \alpha x^{-(\alpha+1)} dx$ . Lo cual obtenemos

$$\hat{\mu}(\epsilon) = EX_m 1_{(\epsilon a_n < |X_m| \leq a_n)}$$

observamos que (2.7) implica  $nP(xa_n < X_m \leq ya_n) \rightarrow \theta(x^{-\alpha} - y^{-\alpha})$ . Así

$$n\hat{\mu}(\epsilon)/a_n \rightarrow \int_\epsilon^1 x \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-1}^{-\epsilon} x (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} (2.10) \quad E(\exp(it\{\hat{S}_n(\epsilon) - n\hat{\mu}(\epsilon)/a_n\})) &\rightarrow \exp\left(\int_1^\infty (\exp^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\epsilon^1 (\exp^{itx} - 1 - itx) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^{-\epsilon} (\exp^{itx} - 1 - itx) (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\infty}^{-1} (\exp^{itx} - 1) (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx\right) \end{aligned}$$

La última expresión es complicada, pero  $\exp^{itx} - 1 - itx \sim -t^2 x^2/2$  ya que  $t \rightarrow 0$ , por lo que necesitamos restar el  $itx$  para hacer

$$\int_0^1 (\exp^{itx} - 1 - itx) x^{-(\alpha+1)} dx \quad \text{converge cuando } \alpha \geq 1$$

Para reducir el número de integrales de cuatro hasta dos, podemos escribir el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  de la parte izquierda de (2.9) como

$$(2.11) \quad \exp \left( itc + \int_0^\infty \left( \exp^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\infty}^0 \left( \exp^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \right)$$

donde  $c$  es constante. Combinando (2.8) y (2.9) usando el lema 2.1, obtenemos que  $(S_n - b_n)/a_n \Rightarrow Y$  ya que  $E \exp^{itY}$  se da en la ecuación (2.10).

**DEFINICIÓN 2.6.** Una variable aleatoria  $Y$  se dice que tiene una **Ley Estable** si para cada  $k > 0$  existen constantes  $a_k$  y  $b_k$  de modo que si  $Y_1, \dots, Y_k$  son i.i.d. y tienen la misma distribución que  $Y$ , entonces  $(Y_1 + \dots + Y_k - b_k)/a_k =_d Y$ .

**TEOREMA 2.7.**  *$Y$  es el límite de  $(X_1 + \dots + X_k - b_k)/a_k$  para la secuencia i.i.d. de  $X_i$  si y sólo si  $Y$  tiene una ley estable.*

Demostración: Si  $Y$  tiene una ley estable podemos tomar una sucesión  $X_1, X_2, \dots$  v.a.i.i.d. con distribución  $Y$ . Ahora consideremos

$$Z_n = (X_1 + \dots + X_n - b_n)/a_n$$

y  $S_n^j = X_{(j-1)n+1} + \dots + X_{jn}$ . Luego,

$$Z_{nk} = (S_n^1 + \dots + S_n^k - b_{nk})/a_{nk}$$

$$a_{nk} Z_{nk} = (S_n^1 - b_n + \dots + (S_n^k - b_n) + (kb_n - b_{nk}))$$

$$a_{nk} Z_{nk}/a_n = (S_n^1 - b_n)/a_n + \dots + (S_n^k - b_n)/a_n + (kb_n - b_{nk})/a_n.$$

Los  $k$  primeros términos en el lado derecho  $\Rightarrow Y_1 + \dots + Y_k$  ya que  $n \rightarrow \infty$  donde  $Y_1 + \dots + Y_k$  son independientes y tienen la misma distribución que  $Y$ , y  $Z_{nk} \Rightarrow Y$ . Tomando  $W_n = Z_{nk}$  y

$$W'_n = \frac{a_{kn}}{a_n} Z_{nk} - \frac{kb_n - b_{nk}}{a_n}$$

obteniendo así el resultado deseado.

## 1. Propiedades de una variable aleatoria estable

Algunas de las propiedades importantes de  $Y$  se enumeran a continuación. Para un análisis más extenso de variables aleatorias estables.

(1) La función característica  $\varphi(u) = \mathbb{E} \exp(iuY)$ , viene dada por

$$(2.12) \quad \varphi(u) = \begin{cases} \exp\{iut - d|u|^\alpha (1 - i\theta \operatorname{sgn}(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\{iut - d|u| (1 - i\theta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \ln |u|)\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

donde  $\operatorname{sgn}(u)$  es  $u/|u|$  si  $u \neq 0$ , y cero si no se cumple. Los parámetros  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $d^\frac{1}{\alpha} \in [0, \infty)$  y  $\theta \in [-1, 1]$  se conocen como el exponente, la ubicación, la escala y los parámetros de simetría respectivamente.

(2) Si  $\alpha = 2$  entonces  $Z \sim \text{Poisson}(\beta, 2d)$ .

(3) Si  $\theta = 0$  entonces la distribución de  $Y$  es simétrica respecto  $\beta$ . Las distribuciones simétricas estables (es decir, aquellas que son simétricas con respecto a 0) tienen función característica de la forma

$$(2.13) \quad \varphi(u) = \exp^{-d|u|^\alpha}.$$

(4) Si  $\alpha = 1$  y  $\theta = 0$  entonces  $Y$  tiene la distribución de Cauchy con densidad de probabilidad  $f(y) = (d/\pi)[d^2 + (y - \beta)^2]^{-1}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

(5) Las distribuciones simétricas estables satisfacen la propiedad de la definición 2.6 con  $a_n = n^{1/\alpha}$  y  $b_n = 0$ , ya que si las variables aleatorias  $Y, Y_1, \dots, Y_n$  tienen la función característica dada en (2.13) y son variables aleatorias independientes, entonces

$$E \exp[iu(Y_1 + \dots + Y_n)] = e^{-nd|u|^\alpha} = E \exp[iuYn^{1/\alpha}].$$

(6) Si  $F$  es la función de distribución de  $Y$  y  $\alpha \in (0, 2)$  entonces se satisface la definición (2.13) con  $p = (1 + \theta)/2$  y

$$(2.14) \quad \mathcal{C} = \begin{cases} d/(\Gamma(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2)) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 2d/\pi & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

En la siguiente proposición, proporcionaremos las condiciones suficientes bajo las cuales la suma  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j}$  existe cuando  $Y_t$  es una sucesión que satisface la definición 2.6.

**PROPOSICIÓN 2.8.** *Sea  $Y_t$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que satisfacen la definición 2.6. Si  $\varphi_j$  es una sucesión de constantes tales que*



$$(2.15) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^\delta < \infty \text{ para algun } \delta \in (0, \alpha) \cap [0, 1],$$

entonces la serie infinita,  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j}$ , converge absolutamente con probabilidad uno.

Demostración: Consideraremos primero el caso  $1 < \alpha < 2$ . Entonces por (3.3),  $\mathbb{E} |Y_1| < \infty$  y por lo tanto

$$\mathbb{E} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j Y_{t-j}| \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j| \mathbb{E} |Y_{t-j}| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j| \mathbb{E} |Y_1| < \infty.$$

Así  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j Y_{t-j}|$  es finita con probabilidad uno.

Ahora supongamos  $0 < \alpha < 1$ . Desde  $0 < \alpha < 1$ , podemos aplicar la desigualdad triangular  $|x + y|^\delta \leq |x|^\delta + |y|^\delta$  a la suma infinita  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j}$ . Haciendo uso de (3.3) a continuación, encontrará que

$$\mathbb{E} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j Y_{t-j}|^\delta \right) \leq \mathbb{E} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^\delta |Y_{t-j}|^\delta \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^\delta \mathbb{E} |Y_1|^\delta < \infty.$$

Por lo tanto  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j Y_{t-j}| < \infty$  con probabilidad uno.

**OBSERVACIÓN 2.9.** La distribución de la suma infinita  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j}$  satisface la ecuación (3.2). Específicamente

$$x^\alpha P \left( \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j} \right| > x \right) \rightarrow \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^\alpha \right) \mathcal{C}.$$

**OBSERVACIÓN 2.10.** Si  $Y_1$  tiene una distribución simétrica estable con función característica  $e^{-d|t|^\alpha}$  (y dispersión  $\mathcal{C}$  propuesta por (2.14)), entonces  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j}$  también tiene una distribución simétrica estable con dispersión  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^\alpha$ .

## Capítulo 3

### Test de Portmanteau en una distribución de Pareto

En este capítulo, estudiaremos el test de Portmanteau, utilizando la distribución de Pareto. Pero primero daremos a conocer algunas observaciones para usar el test de Portmanteau con varianza infinita.

#### 1. Procesos lineales con varianza infinita

Todas las series de tiempo que exhiben picos intensos o explosiones ocasionales de observaciones atípicas sugieren el posible uso de un modelo de varianza infinita. En esta sección vamos a restringir nuestra atención a los procesos generados por la aplicación de un filtro lineal de una sucesión v.a.i.i.d.,  $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$  cuya distribución  $F$  es de Pareto, es decir,

$$(3.1) \quad \begin{cases} x^\alpha(1 - F(x)) = x^\alpha P(Y_t > x) \rightarrow p\mathcal{C}, & \text{si } x \rightarrow \infty \\ x^\alpha F(-x) = x^\alpha P(Y_t \leq -x) \rightarrow q\mathcal{C}, & \text{si } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

donde  $0 < \alpha < 2$ ,  $0 \leq p = 1 - q \leq 1$ , y  $\mathcal{C}$  es una constante finita positiva que vamos a llamar dispersión,  $disp(Y_t)$ , de la variable aleatoria  $Y_t$ . El sistema (3.1) lo podemos reescribir como

$$(3.2) \quad x^\alpha(1 - F(x) + F(-x)) = x^\alpha P(|Y_t| > x) \rightarrow \mathcal{C}, \text{ si } x \rightarrow \infty$$

de donde

$$(3.3) \quad \begin{cases} \mathbb{E} |Y_t|^\delta = \infty & \text{si } \delta \geq \alpha \\ \mathbb{E} |Y_t|^\delta < \infty & \text{si } \delta < \alpha \end{cases}$$

la ecuación (3.3) la obtuvimos usando la función de densidad de la  $disp(Y_t)$ .

Por lo tanto  $Var(Y_t) = \infty$  para  $0 < \alpha < 2$  y  $\mathbb{E} |Y_t| < \infty$  sólo si  $1 < \alpha < 2$ . Una clase importante de distribuciones que cumplen (3.1) es la de las variables aleatorias estables no gaussianas.

DEFINICIÓN 3.1. Si definimos por

$$(3.4) \quad X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j},$$

donde (3.4) se denomina Proceso Lineal.

Si  $\varphi_j$  y  $Y_t$  satisfacen los supuestos de la proposición 2.8, este proceso existe con probabilidad uno y es estrictamente estacionario; es decir, la distribución conjunta de  $(X_1, \dots, X_k)'$  es la misma que la de  $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})'$  para todo entero  $h$  y  $k$  número natural. En particular, si los coeficientes  $\varphi_j$  se escogen de manera que  $\varphi_j = 0$  para  $j < 0$  y

$$(3.5) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j y^j = \theta(y)/\phi(y), \quad |y| \leq 1,$$

donde  $\theta(y) = 1 + \theta_1 y + \dots + \theta_q y^q$  y  $\phi(y) = 1 - \phi_1 y - \dots - \phi_p y^p \neq 0$  para  $|y| \leq 1$ , entonces es fácil demostrar que  $X_t$  como se especifica en la definición 2.6 donde se satisfacen las ecuaciones ARMA(p,q) con  $\phi(B)X_t = \theta(B)Y_t$  donde  $B$  es el operador de desplazamiento.

PROPOSICIÓN 3.2. Sea  $Y_t$  una suceción de v.a.i.i.d. con función de distribución  $F$  que satisface la definición 2.6. Entonces si  $\theta(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  son polinomios tales que  $\phi(y) \neq 0$  para  $|y| \leq 1$ , las ecuaciones en diferencias

$$(3.6) \quad \phi(B)X_t = \theta(B)Y_t,$$

tiene una solución estrictamente estacionaria,

$$(3.7) \quad X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j},$$

donde los coeficientes  $\varphi_j$  se determina por la relación (3.5). Si además  $\varphi(y)$  y  $\theta(y)$  no tienen ceros comunes, entonces el proceso (3.7) es invertible si y sólo si  $\theta(y) \neq 0$  para  $|y| \leq 1$ .

Para entender el siguiente teorema usaremos las siguientes ecuaciones

$$(3.8) \quad \rho(h) := \frac{\sum_j \psi_j \psi_{j+h}}{\sum_j \psi_j^2}, \quad h = 1, 2, \dots$$

y su estimador

$$(3.9) \quad \tilde{\rho}(h) = \sum_{t=1}^{n-h} X_t X_{t+h} / \sum_{t=1}^n X_t^2, \quad h = 1, 2, \dots,$$

TEOREMA 3.3. *Sea  $\{Y_t\}$  una sucesión i.i.d. de variables aleatorias simétricas que satisfacen (2.6) y sea  $\{X_t\}$  el proceso estrictamente estacionario,*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j},$$

donde

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| |\varphi_j|^\delta \text{ para algun } \delta \in (0, \alpha) \cap [0, 1].$$

entonces, para cualquier número entero positivo  $h$ ,

$$(3.10) \quad (n/\ln(n))^{1/n} (\tilde{\rho}(1) - \rho(1), \dots, \tilde{\rho}(h) - \rho(h))' \Rightarrow (Y_1, \dots, Y_h)',$$

donde

$$Y_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)) S_j / S_0, \quad k = 1, \dots, h,$$

y  $S_0, S_1, \dots$ , son variables aleatorias independientes estables;  $S_0$  es estable positiva con la función característica

$$(3.11) \quad \mathbb{E} \exp(iuS_0) = \exp\{-C\Gamma(1-\alpha) \cos(\pi\alpha/4) |u|^{\alpha/2} (1 - i \operatorname{sgn}(u) \tan(\pi\alpha/4))\}$$

y  $S_1, S_2, \dots$ , son i.i.d. con función característica,

$$(3.12) \quad \mathbb{E} \exp(iuS_1) = \begin{cases} \exp\{-C^2\Gamma(1-\alpha) \cos(\pi\alpha/2) |u|^\alpha & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\{-C^2\pi |u|/2\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Si  $\alpha > 1$  entonces (2.13) también es cierto cuando  $\tilde{p}(\theta)$  se sustituye por su valor medio corregido por la versión  $\hat{\rho}(h) = \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}) / \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2$ , donde  $\bar{X} = n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$ .

La consecuencia inmediata de el teorema anterior es que  $\tilde{\rho}(h) \xrightarrow{p} \rho(h)$ , más específicamente que  $\tilde{\rho}(h) - \rho(h) = O_p([n/\ln(n)]^{-1/\alpha}) = O_p(n^{-1/\beta})$  para todo  $\beta > \alpha$ . Este índice de convergencia a cero se compara favorablemente con el  $O_p(n^{-1/2})$ , para la diferencia  $\tilde{\rho}(h) - \rho(h)$  en el caso de la varianza finita.

La forma de la distribución asintótica de  $\tilde{\rho}(h)$ , puede ser un tanto simplificada. Hacemos esto porque  $Y_h$  tiene la misma distribución que

$$(3.13) \quad \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\rho(h+j) + \rho(h-j) + 2\rho(j)\rho(h)|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \frac{U}{V},$$

donde  $V (\geq 0)$  y  $U$  son variables aleatorias independientes con funciones características dadas por las ecuaciones (3.9) y (3.10) respectivamente tomando  $C = 1$ . Los percentiles de la distribución de  $U/V$  los encontramos ya sea por la simulación de copias independientes de  $U/V$  o por la integración numérica de la densidad conjunta de  $(U, V)$  sobre una región apropiada.

Cuando tomamos  $\alpha = 1$ , la densidad conjunta de  $U$  y  $V$  no la podemos escribir en forma cerrada. Para el mismo caso de  $\alpha = 1$ ,  $U$  es una variable aleatoria de Cauchy con función de densidad

$$f_U(u) = \frac{1}{2} [\pi^2/4 + u^2]^{-1}$$

la ecuación anterior la obtuvimos usando la propiedad 4 de una variable aleatoria estable, y  $V$  es una variable aleatoria no negativa estable con función de densidad,

$$f_V(v) = \frac{1}{2} v^{-3/2} \exp^{-\pi/4v}, \quad v \geq 0.$$

Por lo tanto, la función de distribución de  $U/V$  viene dada por

$$(3.14) \quad P(U/V \leq x) = \int_0^{\infty} P(U \leq xy) f_V(y) dy = \int_0^{\infty} 2^{-1/2} (\pi w)^{-3/2} [\arctan(xw) + (\pi/2)] \exp(-1/(2w)) dw.$$

donde  $U/V$  tiene la misma distribución que el producto de una variable aleatoria de Cauchy estándar, donde su función de densidad  $\pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ , y una variable aleatoria independiente distribuida como  $\chi^2(1)$ .

## 2. Test de Portmanteau para series de tiempo estables de Pareto

En esta sección, estudiaremos los test de Portmanteau para comprobar la aleatoriedad de una sucesión de variables aleatorias estables de Pareto. Consideraremos la estabilidad para los test de Portmanteau de [1] y [14], denotados por  $Q_{BP}$  y  $\hat{D}$ , respectivamente.

### 2.1. Distribución asintótica de la función de autocorrelación.

Sea  $\{Y_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. estables de Pareto y  $X_t$  el proceso estrictamente estacionario definido por

$$(3.15) \quad X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j Y_{t-j}, t = 1, \dots, n,$$

donde

$$(3.16) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| |\varphi_j|^\delta < \infty, \text{ para algun } \delta \in (0, \alpha) \cap [0, 1].$$

El análogo estable de la función de autocorrelación (ACF) en el retraso  $k$  se define como

$$(3.17) \quad \rho_k = \sum_j \varphi_j \varphi_{j+k} / \sum_j \varphi_j^2, k = 1, 2, \dots,$$

El estimador de (3.17) puede ser estimado por la función de autocorrelación de la muestra de la siguiente manera:

$$(3.18) \quad r_k = \left\{ \sum_{t=1}^{n-k} X_t X_{t+k} \right\} / \sum_{t=1}^n X_t^2, k = 1, 2, \dots,$$

para  $\alpha > 0$ . Según [4], para cualquier entero positivo  $k$ , la distribución límite de funciones de autocorrelación de la muestra está dada por

$$(3.19) \quad \left[ \frac{n}{\log(n)} \right]^{1/\alpha} (r_1 - \rho_1, \dots, r_k - \rho_k)^T \rightarrow (Y_1, \dots, Y_k)^T,$$

donde  $\Rightarrow$  denota convergencia en la distribución y

$$(3.20) \quad Y_h = \sum_{j=1}^{\infty} (\rho_{k+j} + \rho_{k-j} - 2\rho_j \rho_k) \frac{S_j}{S_0}, h = 1, \dots, k,$$

donde  $S_0, S_1, \dots$  son variables independientes estables;  $S_0$  es positivo con  $S_0 \sim Y_{\alpha/2}(C_{\alpha/2}^{-2/\alpha}, 1, 0)$  donde  $Y_{\alpha/2}$  es una  $N(0, 1)$ , y la  $S_j$  son  $Y_{\alpha}(C_{\alpha}^{-1/\alpha}, 0, 0)$  lo cual  $Y_{\alpha}$  es una  $\chi^2$ , y

$$C_{\alpha} = \begin{cases} (1 - \alpha)/(\Gamma(2 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2)) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 2/\pi & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

Bajo la hipótesis nula de que  $X_t$  es una sucesión de v.a.i.i.d. estables de Pareto, tenemos  $\rho_0 = 1$  y  $\rho_k = 0$  para  $k \geq 1$  por lo que la distribución límite muestral ACF, puede simplificar aún más la siguiente ecuación:

$$(3.21) \quad \left[ \frac{n}{\log(n)} \right]^{1/\alpha} (r_1, \dots, r_k)^T \rightarrow (W_1, \dots, W_k)^T,$$

donde  $W_h$  está dada por

$$(3.22) \quad W_h = \frac{S_h}{S_0}, h = 1, \dots, k.$$

Tengamos en cuenta que, para  $\alpha > 1$ , también podemos utilizar la función media-corregida para la autocorrelación de la muestra en el retardo  $k$ , denotado como  $\tilde{r}_k$ , que se da por

$$(3.23) \quad \tilde{r}_k = \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) / \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2, k = 1, 2, \dots$$

en [4] se indica que la distribución límite de  $\tilde{r}_k$  es la misma que el de  $r_k$ .

## 2.2. Distribución asintótica de la función de autocorrelación parcial.

La función de autocorrelación parcial en el retardo  $k$  se define como la estimación de la muestra del  $k$ -ésimo elemento de la solución de Yule-Walker [3] a un proceso AR. La función de autocorrelación parcial (PACF) también puede ser calculada usando el algoritmo de Durbin-Levinson [3].

Sea  $\pi_k$  la PACF en el retardo  $k$ , y  $\pi_{(m)} = (\pi_1, \dots, \pi_m)^T$ . Según el algoritmo de Durbin-Levinson [3], el vector  $\pi_{(m)}$  puede expresarse como una función de  $\mathbf{r}_{(m)}$ ,  $\pi_{(m)} = \psi(\mathbf{r}_{(m)})$ , con el  $k$ -ésimo elemento propuesta por

$$(3.24) \quad \pi_k = \psi(\mathbf{r}_{(k)}) = \frac{r_k - \mathbf{r}_{(k-1)}^T \mathbf{R}_{(k-1)}^{-1} \mathbf{r}_{(k-1)}^*}{1 - \mathbf{r}_{(k-1)}^T \mathbf{R}_{(k-1)}^{-1} \mathbf{r}_{(k-1)}}$$

donde  $\mathbf{r}_{(p)} = (r_1, \dots, r_p)^T$  es el  $p \times 1$  vector de función de autocorrelación,  $\mathbf{R}_{(p)} = (r_{|i-j|})_{p \times p}$  es la  $p \times p$  matrix de autocorrelación y  $\mathbf{r}_{(k)}^* = (r_k, \dots, r_1)^T$ .

Bajo la hipótesis nula de que los  $X_t$  son independientes, las funciones de autocorrelación son todas cero, y de acuerdo con [2] que nos explica el uso del orden de la probabilidad,

$$r_h = O_p \left( \left[ \frac{n}{\log(n)} \right]^{-1/\alpha} \right), h = 1, 2, \dots$$

por lo tanto,

$$\mathbf{R}_{(k)} = \mathbf{1}_k + O_p \left( \left[ \frac{n}{\log(n)} \right]^{-1/\alpha} \right),$$

donde  $\mathbf{1}_k$  es un  $k \times k$  matriz de identidad. Por la ecuación (3.20)

$$(3.25) \quad \pi_{(m)} = \mathbf{r}_{(m)} + O_p \left( \left[ \frac{n}{\log(n)} \right]^{-2/\alpha} \right)$$

usando la ecuación (3.17), se tiene que

$$(3.26) \quad \left[ \frac{n}{\log(n)} \right]^{1/\alpha} (\pi_1, \dots, \pi_m)^T \rightarrow (W_1, \dots, W_m)^T.$$



### 2.3. Distribuciones asintóticas de $Q_{BP}$ y el test $\tilde{D}$ .

Bajo la suposición de que  $1 < \alpha < 2$ , derivado de la distribución límite de  $Q_{BP}$  de [1], basado en el valor medio corregido de las funciones de autocorrelación. Su resultado se da por

$$(3.27) \quad Q_{BP}(m) = \left( \frac{n}{\log(n)} \right)^{2/\alpha} \sum_{j=1}^m \tilde{r}_j^2 \rightarrow W_1^2 + \dots + W_m^2,$$

donde  $W_k : k = 1, \dots, m$  se definen en la ecuación (3.18). Donde tenemos  $0 < \alpha \leq 1$ , la distribución límite de la ecuación (3.23) sigue dando la misma si sustituimos  $\tilde{r}_k$  por  $r_k$ .

Consideremos el siguiente test  $\hat{D}$  de [14]. En el caso estable, podemos definir el estadístico del test,

$$(3.28) \quad \hat{D}(m) = \left( \frac{n}{\log(n)} \right)^{2/\alpha} (1 - |\mathbf{R}_{(m)}|^{1/m}).$$

utilizando los resultados de 2.1 y 2.2, y siguiendo los argumentos en [11] sobre la matrix de autocorrelación, es posible obtener la distribución asintótica de la ecuación (3.28) en el siguiente Teorema.

TEOREMA 3.4.  $\hat{D}(m)$  en la ecuación (3.28) se distribuye asintóticamente como

$$\sum_{i=1}^m \frac{m+1-i}{m} W_i^2,$$

donde  $\{W_i : i = 1, \dots, m\}$  se define en la ecuación (3.18).

Demostración: Primero, usando la descomposición del determinante de la matrix de autocorrelación  $\mathbf{R}_{(m)}$ , [11] mostraron que  $|\mathbf{R}_{(m)}|^{1/m}$  es una función de autocorrelación parcial de los primeros  $m$  datos. Específicamente,

$$(3.29) \quad |\mathbf{R}_{(m)}|^{1/m} = \prod_{i=1}^m (1 - \pi_i^2)^{(m+1-i)/m}$$

Supongamos, bajo la hipótesis nula de que  $\hat{D}$  se distribuye asintóticamente como  $\mathcal{X}^2$ . Aplicando el  $\delta$ -método a  $g(x) = \log(1 - x)$ , resulta que  $-(n/\log(n))^{2/\alpha} \log(|\mathbf{R}_{(m)}|^{1/m})$  se

distribuye asintóticamente como  $\mathcal{X}^2$ . A partir de la ecuación (3.25), se puede tener

$$(3.30) \quad -\left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} \log(|\mathbf{R}_m|^{1/m}) = -\left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} \sum_{i=1}^m \frac{m-i+1}{m} \log(1-\pi_i^2)$$

Ahora suponemos que

$$(3.31) \quad \left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} (\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_m^2)^T \Rightarrow Y$$

al aplicar el  $\delta$ -método multivariado a

$$g(\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_m^2) = -\sum_{i=1}^m \frac{m-i+1}{m} \log(1-\pi_i^2),$$

resulta que

$$(3.32) \quad -\sum_{i=1}^m \frac{m-i+1}{m} \log(1-\pi_i^2) \Rightarrow \left(1, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) Y.$$

Por el Teorema de Cramer-Wold, resulta que

$$(3.33) \quad \left(1, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \left(\left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} \pi_1^2, \dots, \left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} \pi_m^2\right) \Rightarrow \left(1, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) Y$$

Ahora, bajo la hipótesis nula de que  $X_t$  son una sucesión de variables aleatorias i.i.d. estables de Pareto, tenemos  $\rho_0 = 1$  y  $\rho_k = 0$  para  $k \geq 1$  donde la distribución límite de ACF la podemos simplificar como:

$$(3.34) \quad \left[\frac{n}{\log(n)}\right]^{1/\alpha} (r_1, \dots, r_k)^T \Rightarrow (W_1, \dots, W_k)^T,$$

donde  $W_h$  estan dadas por:

$$(3.35) \quad W_h = \frac{S_h}{S_0}, h = 1, \dots, k.$$

Notemos que para  $\alpha > 1$ , tambien utilizamos la función de autocorrelación, corregida por la media aritmética en el retardo k, denotado por  $\tilde{r}_k$ , que está dada por

$$(3.36) \quad \tilde{r}_k = \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) / \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2, k = 1, 2, \dots$$

Usando la ecuación (3.17), tenemos

$$(3.37) \quad \left[\frac{n}{\log(n)}\right]^{1/\alpha} (\pi_1, \dots, \pi_m)^T \Rightarrow (W_1, \dots, W_m)^T.$$

resulta que

$$(3.38) \quad \left(1, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \left( \left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} \pi_1^2, \dots, \left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{2/\alpha} \pi_m^2 \right) \Rightarrow W_1^2 + \frac{m-1}{m} W_2^2, \dots, \frac{1}{m} W_m^2.$$

Finalmente, de las ecuaciones (3.29) y (3.34),

$$(3.39) \quad \left(1, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) Y \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{m+1-i}{m} W_i^2,$$

y desde la ecuación (3.27), tenemos

$$\hat{D} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{m+1-i}{m} W_i^2.$$

## Capítulo 4

### Análisis del test de Portmanteau

En este capítulo presentaremos tres ejemplos prácticos que hacen el uso del test de Portmanteau donde compararemos sus p-valores utilizando las distribuciones asintóticas y estables.

#### 1. Intel Data Corporation

Consideraremos los rendimientos mensuales del registro de valores de la empresa Intel Data Corporation desde Enero de 1973 hasta Diciembre del 2003 con una serie de tamaño  $n = 372$  citados de [17].

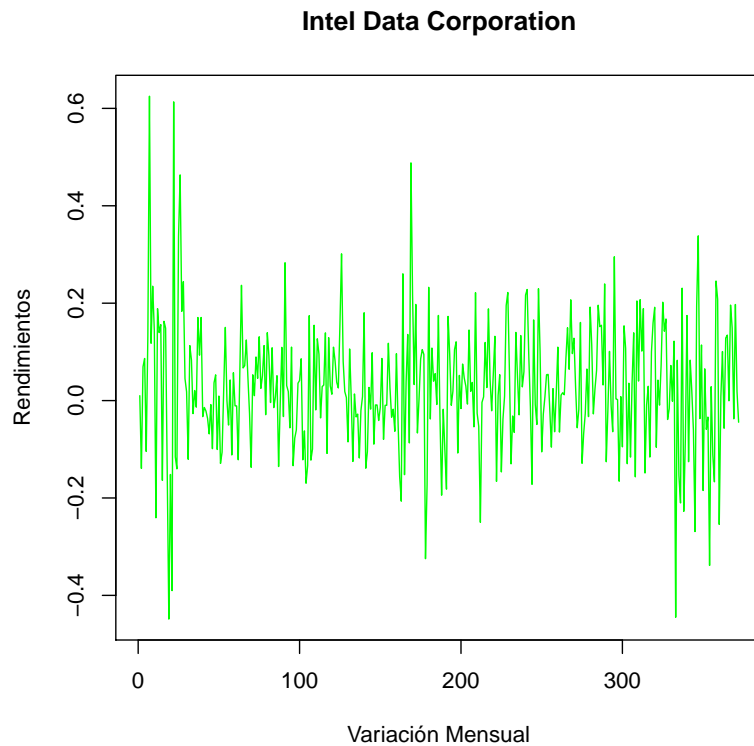


FIGURA 4.1. Comportamiento de los rendimientos

La figura 4.1, nos muestra como fue el comportamiento de los rendimientos mensuales, donde existen ciertas variaciones que nos indican que puede haber varianza infinita. Claro existen ciertos puntos que nos indican que existe cierta variación alta donde los rendimientos aumentaron su precio, así como tambien hubo cierta perdida grande de su valor.

Antes de hacer uso y el analisis del test de Portmanteau debemos seleccionar una hipótesis nula la cual es donde basaremos el analisis de este ejemplo.

La hipótesis nula seleccionada

**$H_0$  : los datos son independientes identicamente distribuidos con varianza finita**

y como hipótesis alternativa a

**$H_A$  : los datos no se distribuyen de forma independiente y no tienen varianza finita**

Para realizar el estudio de este primer ejemplo tomamos los retardos de 5,10,15,20,25,30, donde lo aplicamos a los rendimientos utilizando las distribuciones asintotica (DA) y estable.

<i>Test</i>	<i>Metodos</i>	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 15$	$\rho = 20$	$\rho = 25$	$\rho = 30$
$Q_{BP}$	Normal-DA	0.457	<b>0.156</b>	<b>0.081</b>	0.242	0.238	0.370
$Q_{BP}$	Estable-DA	0.985	0.729	0.829	0.824	0.862	0.825
$Q_{LB}$	Normal-DA	0.449	<b>0.144</b>	<b>0.068</b>	0.211	<b>0.197</b>	0.310
$Q_{LB}$	Estable-DA	0.984	0.712	0.810	0.796	0.829	0.773
$\hat{D}$	Normal-DA	0.513	0.263	<b>0.184</b>	<b>0.173</b>	<b>0.177</b>	0.203
$\hat{D}$	Estable-DA	0.945	0.886	0.842	0.806	0.815	0.771

CUADRO 1. P-valores usando los Test de Box-Pierce, Ljung-box y Peña-Rodríguez en los Rendimientos Mensuales de la Intel Data Corporation

En el Cuadro 1, utilizando el test de Box-Pierce ( $Q_{BP}$ ), para el caso estable en todos los retardos escogidos nos indica que la hipótesis nula se acepta. Ahora para el caso normal en los retardos 10 y 15 aceptamos la hipótesis alternativa.

Utilizando el test de Ljung-Box ( $Q_{LB}$ ), para el caso estable sucede lo mismo que en el caso estable del test anterior. Para el caso normal para los retardos 10 y 15 debemos rechazar la hipótesis nula.

Para el test de Peña-Rodríguez ( $\hat{D}$ ) para el caso estable en todos los retardos señalados aceptamos la hipótesis nula. Para el caso normal en los retardos 15, 20 y 25 la hipótesis nula debe ser rechazada.

Esto lo obtenemos de tomar el nivel de significancia adecuado, ya que los test se distribuyen igual que una  $\chi^2$ .

En la siguiente figura mostraremos como estan distribuidos los datos al aplicarle la distribución estable.

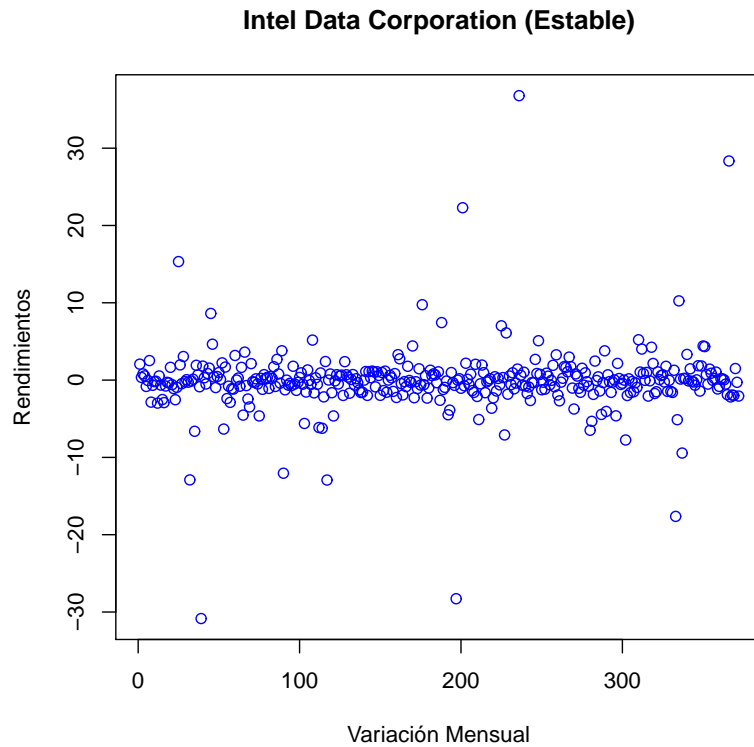


FIGURA 4.2. Comportamiento de los Rendimientos

En la figura 4.2, al tomar  $\alpha = 1.2$  la gran mayoría de los datos se estabilizán en una franja a exesión de algunos datos atípicos que nos pueden explicar que hubo una subida de los precios en ese momento, ahora al aumentar el  $\alpha$  los datos se van dispersando pero siempre permanecen en una franja a exesión de los datos atípicos que cada vez que se aumenta el  $\alpha$  se alejan más.

En la siguiente figura mostramos la Esperanza y la Varianza de los datos de la Intel Data Corporation.

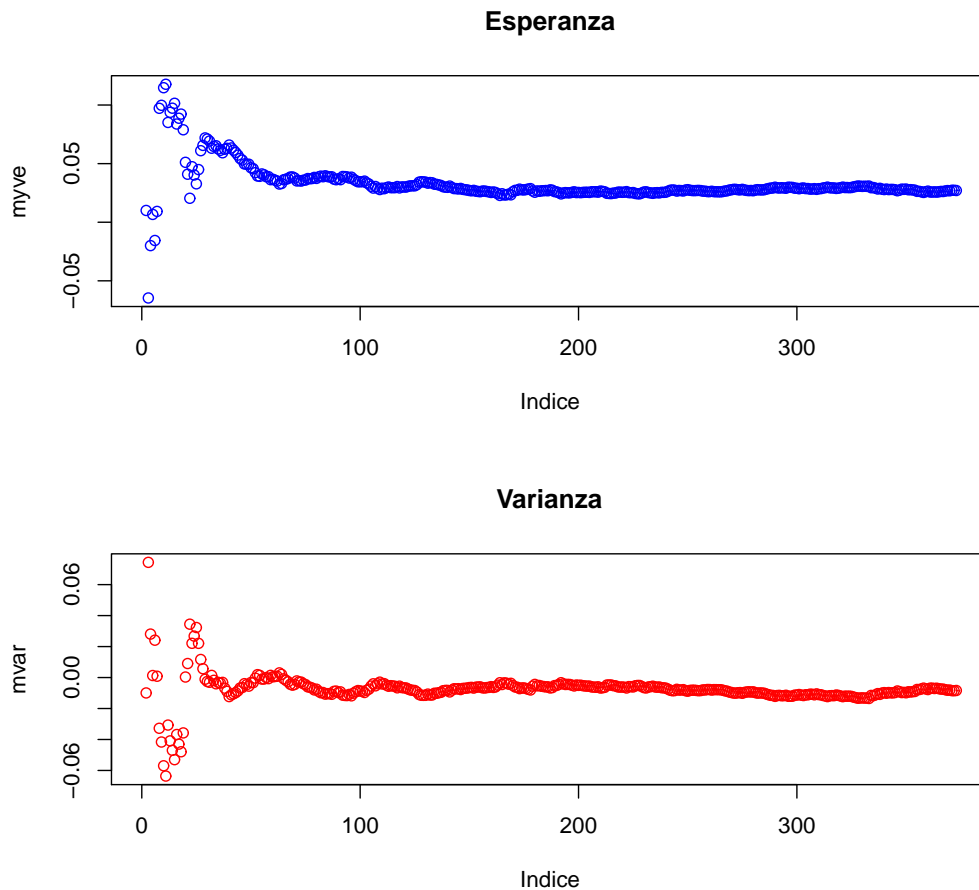


FIGURA 4.3. Esperanza y Varianza de los Rendimientos

La figura 4.3, nos indica que existe homocedasticidad en los datos al calcular su esperanza y varianza, lo que quiere decir que la varianza de los errores es constante. Osea la variable se mantiene a lo largo de las observaciones no de todas pero si de la mayoría. Lo que nos dice que los datos tienen varianza finita.

## 2. IBM y Standard and Poor's 500

Ahora para este ejemplo, podemos considerar la colocación de una  $var(k)$  donde  $k = 1, 2, 3$  para los modelos de las declaraciones mensuales de los registros de las acciones de IBM y Standard and Poor's 500 desde Enero de 1926 hasta Diciembre de 1999 tomado de [17].



FIGURA 4.4. Distribución de las Acciones

En la figura 4.4, se comparan las acciones de IBM y Standard and Poor's 500, donde se muestran que la gran mayoría de los datos accionarios estan distribuidos en la parte central de la figura, a exesión de algunos datos atípicos que son de gran interés para el estudio.



Para hacer uso de los test de Portmanteau debemos tomar como hipótesis nula

**$H_0$  : los datos son independientes identicamente distribuidos con varianza finita**

y como hipótesis alternativa a

**$H_A$  : los datos no se distribuyen de forma independiente y no tienen varianza finita**

Para este ejemplo vamos a trabajar aumentando el autoregresivo hasta grado 3, así poder compararlos.

Caso  $k = 1$  (autoregresivo de orden 1)

Aplicamos un modelo autoregresivo de orden 1 a los datos por mínimos cuadrados que hace la selección de la complejidad de el criterio de Akaike(AIC).

<i>ar</i>	<i>IBM</i>	<i>SP500</i>
<i>IBM</i>	0.019195	0.10616
<i>SP500</i>	-0.005419	0.08019

CUADRO 2. Estimación del autorregresivo AR del modelo ajustado con  $k=1$

En el Cuadro 2, nos dice el valor del autorregresivo de ambas empresas durante todo el tiempo de estudio de las acciones, durante este tiempo cuando se compararon las dos hubo un momento en que las acciones perdieron valor y luego hubo una alza que nos arroja un uso significativo del modelo.

<i>var.pred</i>	<i>IBM</i>	<i>SP500</i>
<i>IBM</i>	44.80	23.86
<i>SP500</i>	23.86	31.67

CUADRO 3. Varianza de predicción de la serie de tiempo con  $k=1$

En el Cuadro 3, la varianza de predicción nos muestra los valores atípicos de el estudio de las acciones en las dos empresas para compararlos dando que no existe mucha diferencia entre las dos empresas.

En el siguiente cuadro mostramos los p-valores para el caso  $k=1$ .

$Test$	$Metodos$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 15$	$\rho = 20$	$\rho = 25$	$\rho = 30$
$Q_{BP}$	Normal-DA	0.00142	0.00566	0.06891	0.00163	0.00035	0.00100
$Q_{BP}$	Estable-DA	0.02127	0.05987	0.33001	0.02580	0.00943	0.02053
$Q_{LB}$	Normal-DA	0.00131	0.00502	0.06177	0.00115	0.00020	0.00056
$Q_{LB}$	Estable-DA	0.02028	0.05505	0.30936	0.01999	0.00632	0.01333
$\hat{D}$	Normal-DA	0.01006	0.00507	0.00960	0.00638	0.00369	0.00294
$\hat{D}$	Estable-DA	0.16977	0.18989	0.26078	0.18238	0.10384	0.07416

CUADRO 4. P-valores con  $k=1$  usando los Test de Box-Pierce Ljung-Box y Peña-Rodríguez en los Registros de las acciones de IBM y Standard and Poor's 500 desde Enero de 1926 hasta Diciembre de 1999

En el Cuadro 4, comparamos los p-valores del modelo usando  $k=1$  tomando  $\alpha = 1.9$ , donde nos indican que para el Test de Box-Pierce ( $Q_{BP}$ ) tanto estable como no estable la hipótesis nula se rechaza, igual sucede al utilizar el test Ljung-Box ( $Q_{LB}$ ), ya al usar el Test de Peña-Rodríguez ( $\hat{D}$ ) al ser no estable los p-valores nos dicen que se rechaza la hipótesis nula pero al aplicar la estabilidad los p-valores nos dicen que tambien se debe rechazar la hipótesis nula y tomar como cierta la hipótesis alternativa como verdadera, ya que existen valores atípicos de la serie.

En la siguiente figura mostramos como se distribuyen los datos con  $k = 1$  al aplicarle la distribución estable.

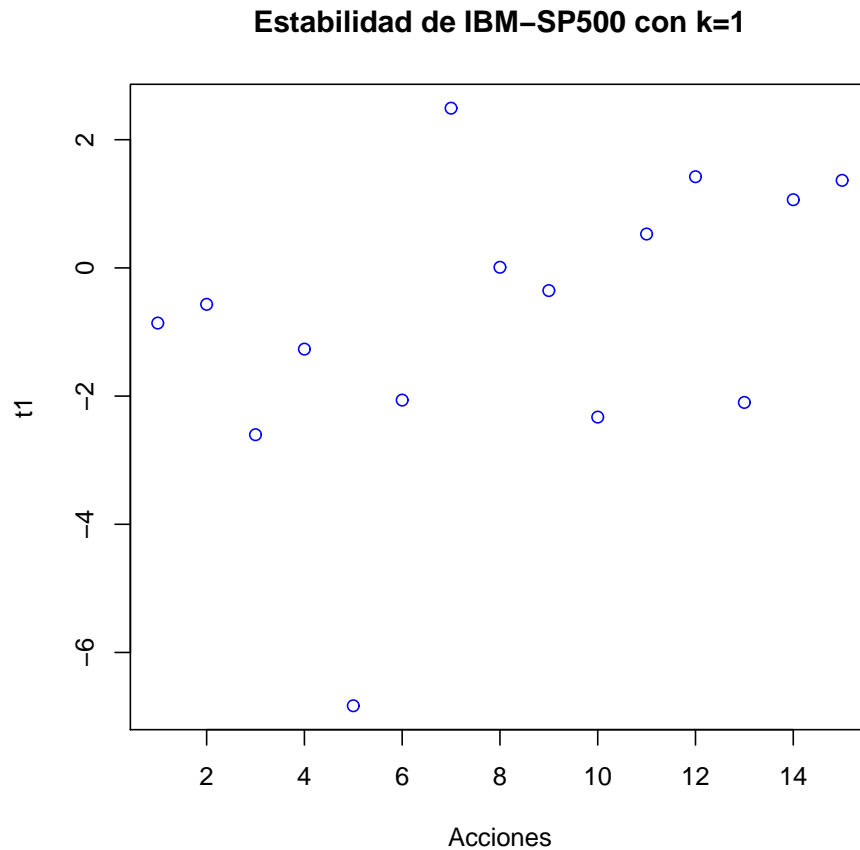


FIGURA 4.5. Estabilidad de los Datos de IBM y SP500 con  $k=1$

En la figura 4.5, se muestran los datos atípicos seleccionados a mi consideración el programa los escogió por ser los de mayor importancia claro estos datos muestran que las acciones se mantuvieron estables tanto en los meses en que sus precios bajaron así como en los que los precios aumentaron dándole mayor importancia a estos.

Caso  $k = 2$  (autoregresivo de orden 2)

Para este caso cambiamos el orden del autorregresivo usando el método de los mínimos cuadrados.

<i>ar</i>	<i>IBM</i>	<i>SP500</i>
<i>IBM</i>	0.09122	-0.1514
<i>SP500</i>	0.04467	-0.0551

CUADRO 5. Estimación del autorregresivo AR del modelo ajustado con  $k=2$

En el Cuadro 5, el valor del autorregresivo de ambas empresas no varia mucho en comparación con al autorregresivo de orden 1, para este modelo al principio funciono muy bien luego en cierto tiempo al compararlas tendieron a perder valor.

<i>var.pred</i>	<i>IBM</i>	<i>SP500</i>
<i>IBM</i>	44.39	23.70
<i>SP500</i>	23.70	31.61

CUADRO 6. Varianza de predicción de la serie de tiempo con  $k=2$

En el Cuadro 6, nos muestra que los valores atípicos de las dos empresas donde comparando con el modelo anterior no existe mucha variación en las acciones.

En el siguiente cuadro mostramos los p-valores para el caso  $k=2$ .

$Test$	$Metodos$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 15$	$\rho = 20$	$\rho = 25$	$\rho = 30$
$Q_{BP}$	Normal-DA	0.00553	0.02279	0.18319	0.00983	0.00197	0.00547
$Q_{BP}$	Estable-DA	0.02127	0.05987	0.33001	0.02580	0.00943	0.02053
$Q_{LB}$	Normal-DA	0.00519	0.02064	0.16859	0.00737	0.00123	0.00329
$Q_{LB}$	Estable-DA	0.02028	0.05505	0.30936	0.01999	0.00632	0.01333
$\hat{D}$	Normal-DA	0.04647	0.02910	0.04688	0.03091	0.01701	0.01272
$\hat{D}$	Estable-DA	0.16977	0.18989	0.26078	0.18238	0.10384	0.07416

CUADRO 7. P-valores con  $k=2$  usando los Test de Box-Pierce, Ljung-Box y Peña-Rodríguez en los Registros de las acciones de IBM y Standard and Poor's 500 desde Enero de 1926 hasta Diciembre de 1999

Para el Cuadro 7, al comparar los Test, para el caso del Box-Pierce ( $Q_{BP}$ ) tanto estable como no estable nos muestran que la hipótesis nula es falsa, igual sucede al usar Ljung-Box ( $Q_{LB}$ ), pero al usar el Test de Peña-Rodríguez ( $\hat{D}$ ) se cumple que la hipótesis nula la debemos rechazar pero, igual sucede para el caso estable donde debemos rechazar la hipótesis nula como sucedio igual en el caso para  $k=1$ .

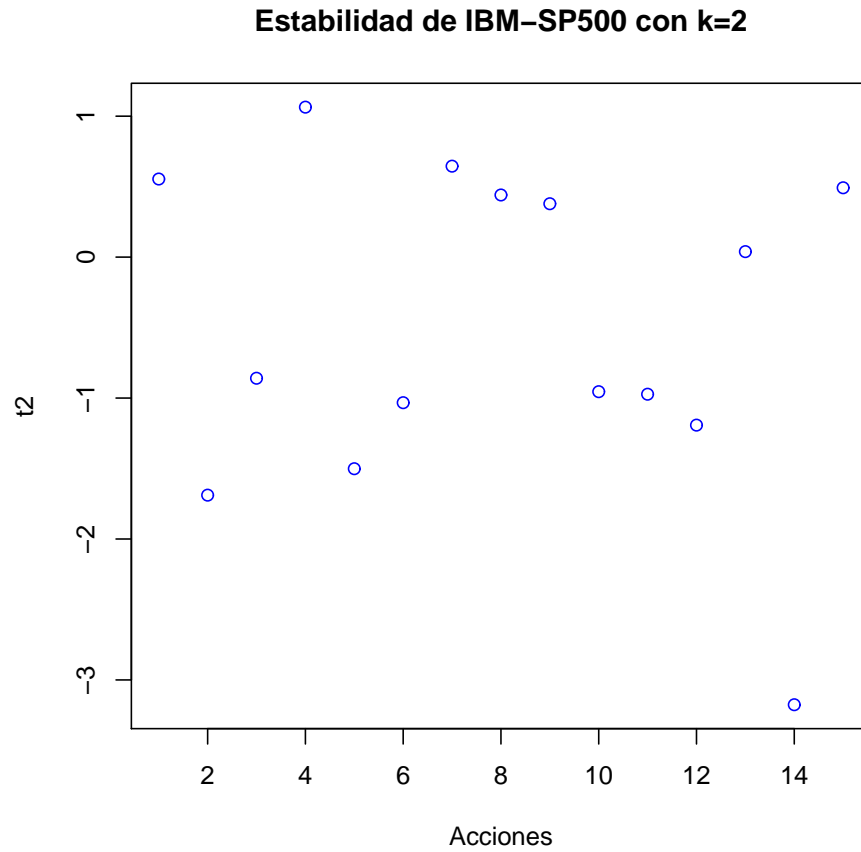


FIGURA 4.6. Estabilidad de los Datos de IBM y SP500 con  $k=2$

En la figura 4.6, se muestra como estan distribuidos los datos de las acciones para el modelo de  $k = 2$ , donde los datos son estables mostrando su mayor valor mes en los años de estudio, claro no existe mucha diferencia entre este modelo  $k = 2$  con el modelo anterior.

Caso  $k = 3$  (autorregresivo de orden 3)

Ahora calculamos el último caso cambiando el orden del autorregresivo usando el método de los mínimos cuadrados.

<i>ar</i>	<i>IBM</i>	<i>SP500</i>
<i>IBM</i>	0.035851	-0.1093
<i>SP500</i>	-0.008115	-0.1061

CUADRO 8. Estimación del autorregresivo AR del modelo ajustado con  $k=3$

En el Cuadro 8, nos indica el valor del autorregresivo de ambas empresas durante el tiempo de estudio de las acciones, en este tiempo donde se compararon las dos y en un tiempo las acciones de IBM aumentaron para luego bajar su valor, pero para la Standard and Poor's 500 las acciones estuvieron a la baja en todo momento claro eso es para este modelo.

<i>var.pred</i>	<i>IBM</i>	<i>SP500</i>
<i>IBM</i>	44.02	23.36
<i>SP500</i>	23.36	31.21

CUADRO 9. Varianza de predicción de la serie de tiempo con  $k=3$

Para el Cuadro 9, la varianza de predicción nos da los valores atípicos del modelo para  $k = 3$  donde las acciones da las no muestran mucha diferencia con los demás modelos propuestos.

En el siguiente cuadro mostramos los p-valores para el caso  $k=3$ .

$Test$	$Metodos$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 15$	$\rho = 20$	$\rho = 25$	$\rho = 30$
$Q_{BP}$	Normal-DA	0.02127	0.05987	0.33001	0.02580	0.00943	0.02053
$Q_{BP}$	Estable-DA	0.02127	0.05987	0.33001	0.02580	0.00943	0.02053
$Q_{LB}$	Normal-DA	0.02028	0.05505	0.30936	0.01999	0.00632	0.01333
$Q_{LB}$	Estable-DA	0.02028	0.05505	0.30936	0.01999	0.00632	0.01333
$\hat{D}$	Normal-DA	0.16977	0.18989	0.26078	0.18238	0.10384	0.07416
$\hat{D}$	Estable-DA	0.16977	0.18989	0.26078	0.18238	0.10384	0.07416

CUADRO 10. P-valores con  $k=3$  usando los Test de Box-Pierce, Ljung-Box y Peña-Rodríguez en los Registros de las acciones de IBM y Standard and Poor's 500 desde Enero de 1926 hasta Diciembre de 1999

En el Cuadro 10, tomamos el modelo para  $k = 3$  donde los p-valores indican que para el Box-Pierce ( $Q_{BP}$ ) en el caso no estable nos indican que se debe rechazar la hipótesis nula, para el caso estable los retardos  $m = 5, 10, 20, 25, 30$  nos dicen que rechasemos la hipótesis nula pero el retardo para  $m = 15$  nos indica una observación atípica del modelo usando este Test. Para el test de Ljung-Box ( $Q_{LB}$ ) sucede el mismo caso tanto para los estables como los no estables. Para el Test de Peña-Rodríguez  $\hat{D}$  sucede que se debe rechazar la hipótesis nula tanto para el caso estable como no estable pero en el retardo  $m = 30$  existe un dato atípico que nos comprueba que la hipótesis alternativa debe ser aceptada.



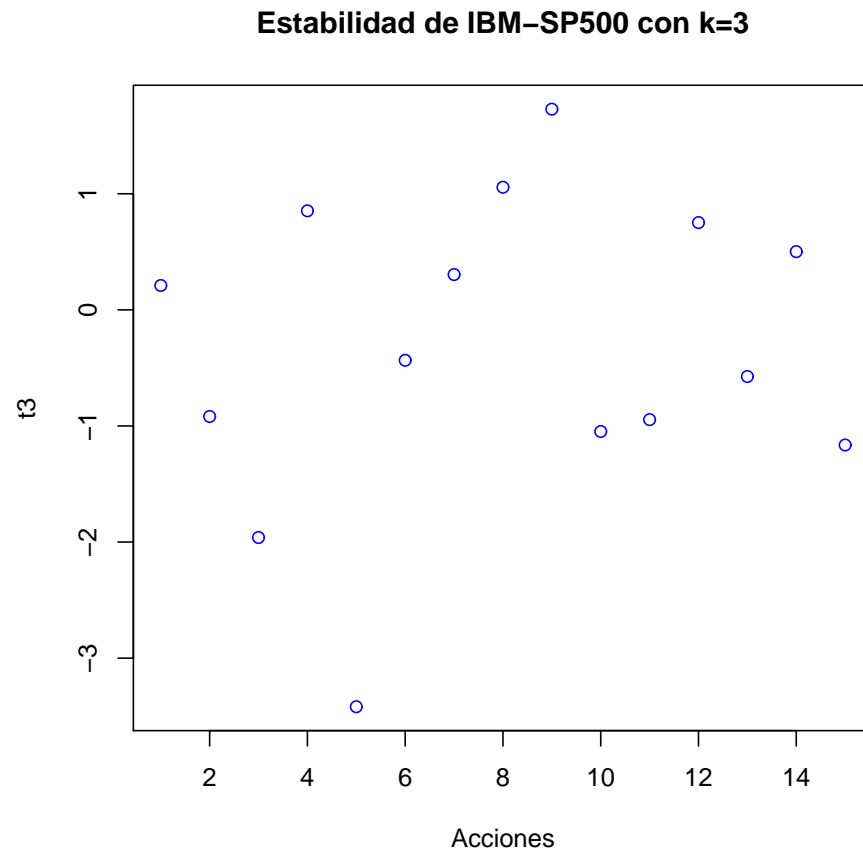


FIGURA 4.7. Estabilidad de los Datos de IBM y SP500 con  $k=3$

En la figura 4.7, representa como se distribuyen los datos de las acciones donde estan representadas por los meses donde hubo mayor variación para el modelo de  $k = 3$ .

En la siguiente figura mostramos la esperanza y varianza de las acciones de IBM y Standard and Poor's 500.

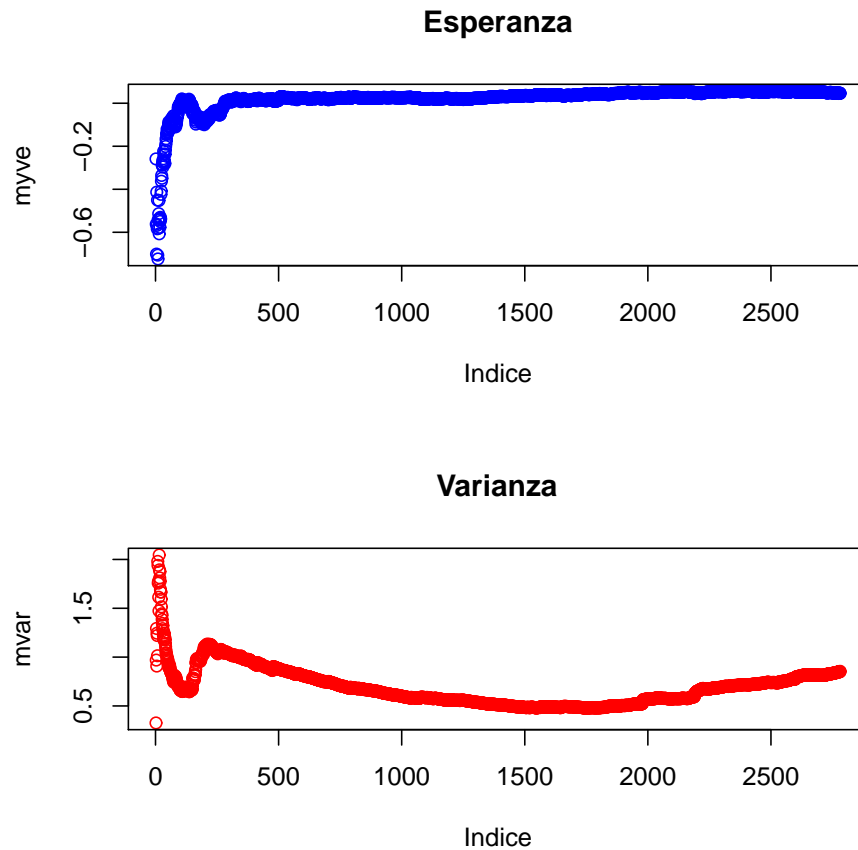


FIGURA 4.8. Esperanza y Varianza de las Acciones de IBM y Standard and Poor's 500

La figura de la esperanza nos indica que existe homocedasticidad en los datos esto quiere de decir que puede existe varianza infinita en las acciones. Ahora la figura de la varianza nos muestra que es constante en todos los datos pero en ellos no existe homocedasticidad ya que en cierto punto los datos pierden la constancia, lo que puede indicarnos que tiene varianza finita.

### 3. Standard and Poor's 500

En este ejemplo se considera el índice de acciones de la Standard and Poor's desde el 2 de Enero de 1999 al 29 de Diciembre del 2006 que se obtuvo del Servicio de Wharton Research Data. Esto resulta en una serie con una longitud de  $n = 2011$  tomado de [13].

En el siguiente grafico se muestra como están distribuidos los datos de las acciones de Standard and Poor's 500.

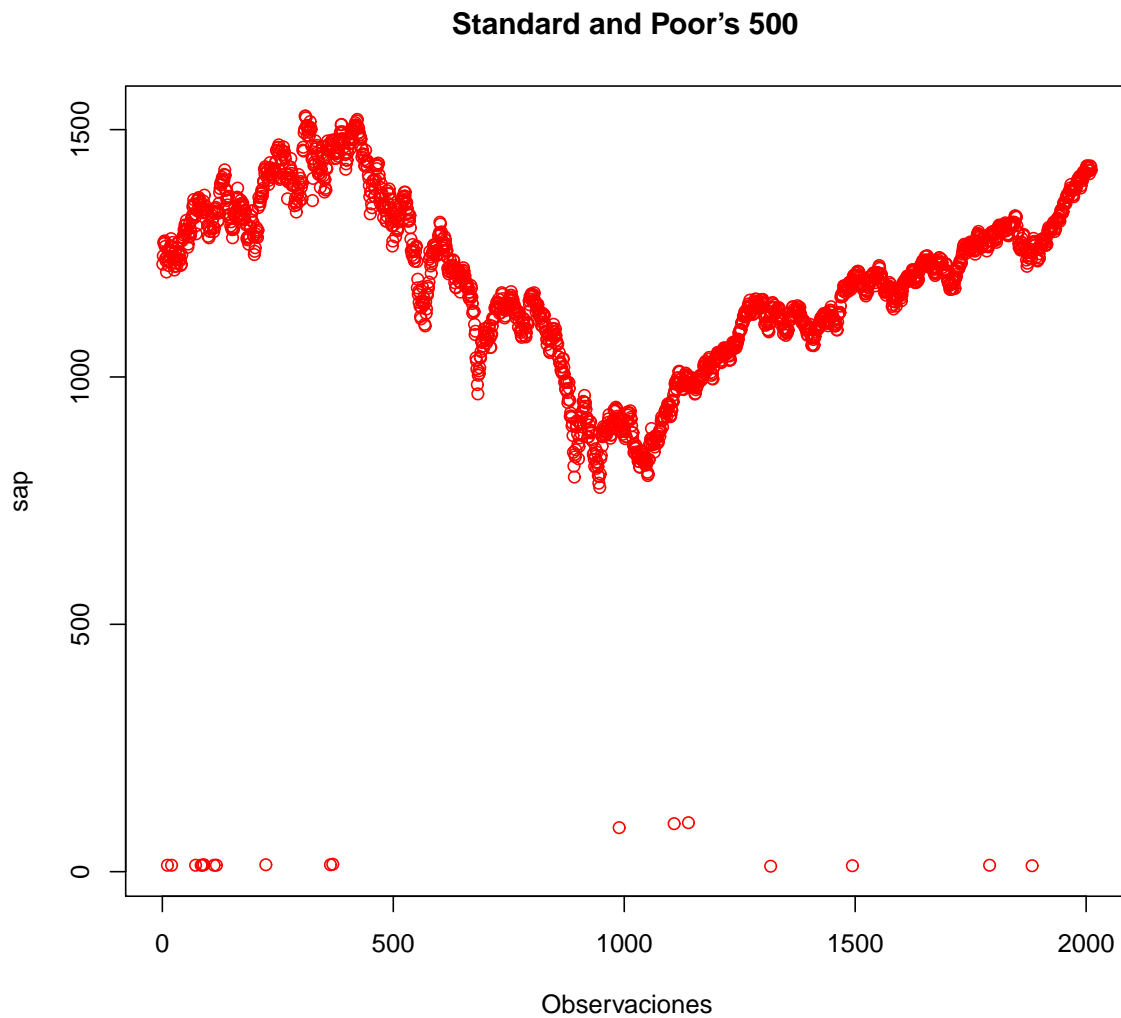


FIGURA 4.9. Acciones de la Standard and Poor's 500

Para hacer al analisis de este ejemplo tomaremos como hipótesis nula

**$H_0$  : los datos son independientes identicamente distribuidos con varianza finita**

y como hipótesis alternativa a

**$H_A$  : los datos no se distribuyen de forma independiente y no tienen varianza finita**

donde usando el siguiente cuadro mostramos los p-valores de los datos lo cual compararemos a ver si se rechazan o no lo las hipótesis.

<i>Test</i>	<i>Metodos</i>	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 15$	$\rho = 20$	$\rho = 25$	$\rho = 30$
$Q_{BP}$	Normal-DA	NA	NA	<b>0.0000116</b>	<b>0.0000399</b>	<b>0.00000817</b>	<b>0.00000204</b>
$Q_{BP}$	Estable-DA	0.820	0.797	0.670	0.843	0.866	0.962
$Q_{LB}$	Normal-DA	NA	NA	<b>0.0000109</b>	<b>0.0000367</b>	<b>0.00000712</b>	<b>0.00000167</b>
$Q_{LB}$	Estable-DA	0.820	0.795	0.666	0.839	0.861	0.960
$\hat{D}$	Normal-DA	NA	NA	NA	<b>0.0000177</b>	<b>0.0000115</b>	<b>0.00000619</b>
$\hat{D}$	Estable-DA	0.667	0.717	0.680	0.728	0.785	0.845

CUADRO 11. Cuadro de P-valores usando los Test de Box-Pierce, Ljung-Box y Peña-Rodríguez en los Registros de las acciones de Standard and Poor's 500 desde el 2 de Enero de 1999 al 29 de Diciembre del 2006

En el cuadro 11, utilizando el test de Box-Pierce ( $Q_{BP}$ ), los retardos 5 y 10 para el caso normal no ofrecen información para así comparar, para los retardos restantes aceptamos la hipótesis nula ya que es la más acertada. Para el caso estable aceptamos la hipótesis nula en todos los retardos estudiados.

Para el test de Ljung-Box  $Q_{LB}$  y el test de Peña-Rodríguez  $\hat{D}$  sucede igual que en el test anterior La hipótesis nula debe ser aceptada en los mismos retardos antes señalados.

En el siguiente grafico mostramos como se distribuyen los datos luego de aplicarle la distribución estable.

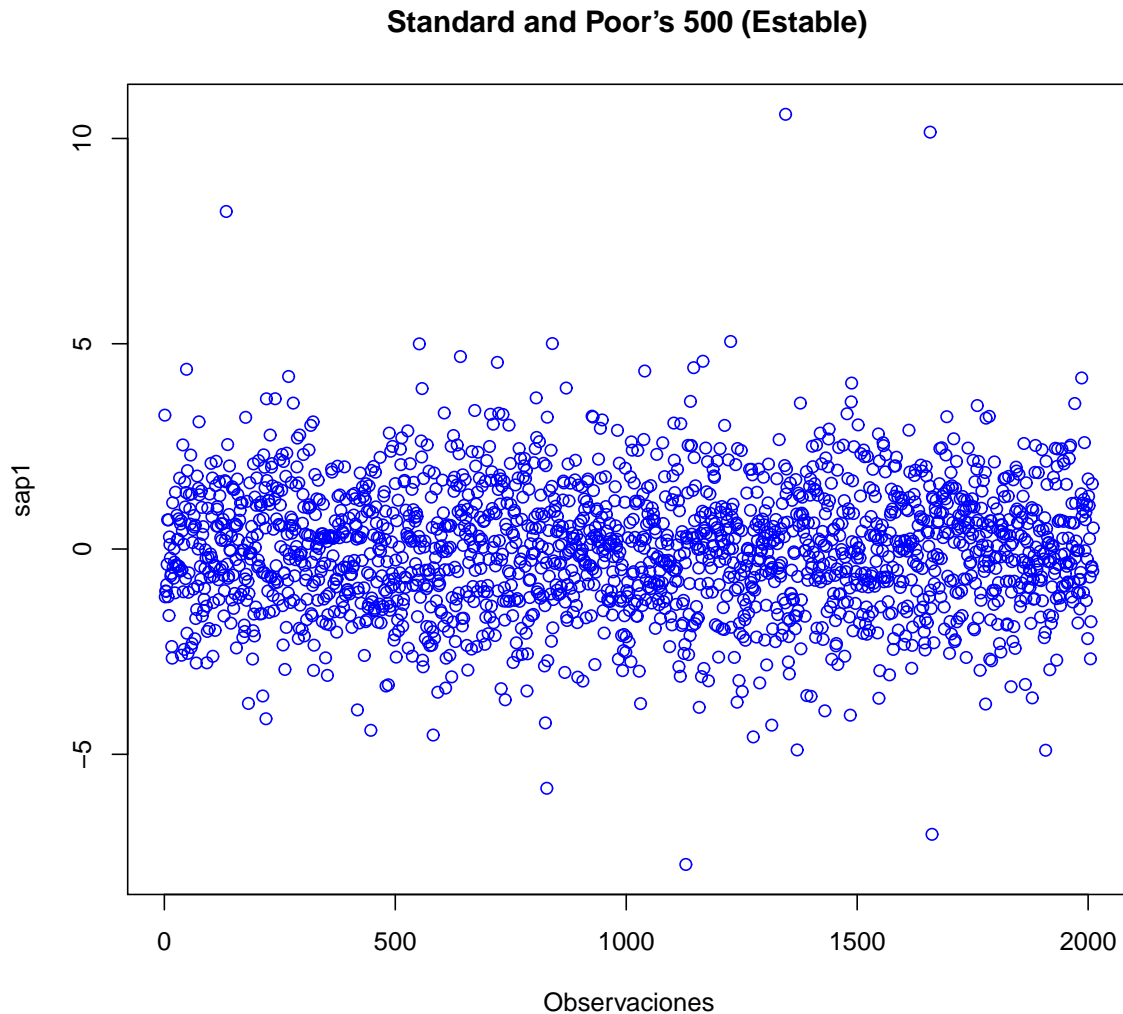


FIGURA 4.10. Estabilidad de las Acciones de la Standard and Poor's 500

En la figura 4.10, nos muestra que los datos al aplicarle la distribución estable donde la gran mayoría de los datos se sitúan en una franja central mostrando que algunos datos son atípicos ya que se salen del rango de estudio donde la distribución no los toma en cuenta.

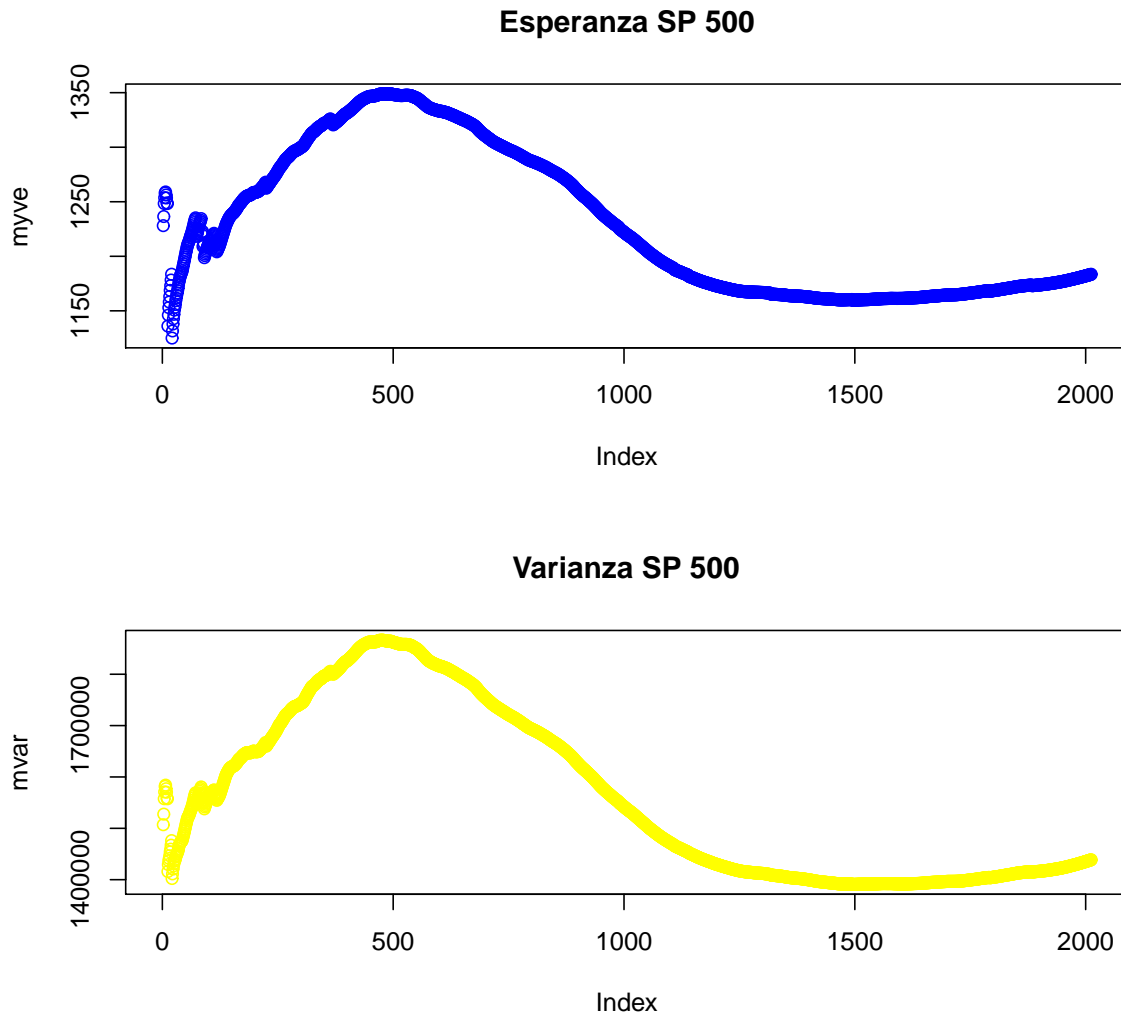


FIGURA 4.11. Esperanza y Varianza de las Acciones de la Standard and Poor's 500

En la figura 4.11, nos muestra que tanto para la esperanza y la varianza cuando las acciones llegan a las 500 muestras han tenido un ascenso marcado, ya al pasar de 500 a las 1000 muestras las acciones tienen un fuerte descenso ya en los datos faltantes las acciones se estabilizan hasta que en cierta muestra las acciones comienzan a aumentar, lo que nos indica que hay ciertos datos que aceptan hipótesis de varianza finita.

## Capítulo 5

### Análisis ilustrativo del test de Portmanteau

En este capítulo presentaremos la parte práctica de todo lo expuesto en los capítulos anteriores, donde haremos uso del test de Portmanteau con varianza infinita.

Consideraremos las declaraciones mensuales simples del CRSP desde Enero de 1926 hasta Diciembre de 1997 donde usamos una serie de  $N = 864$  tomados de [13] y [17].

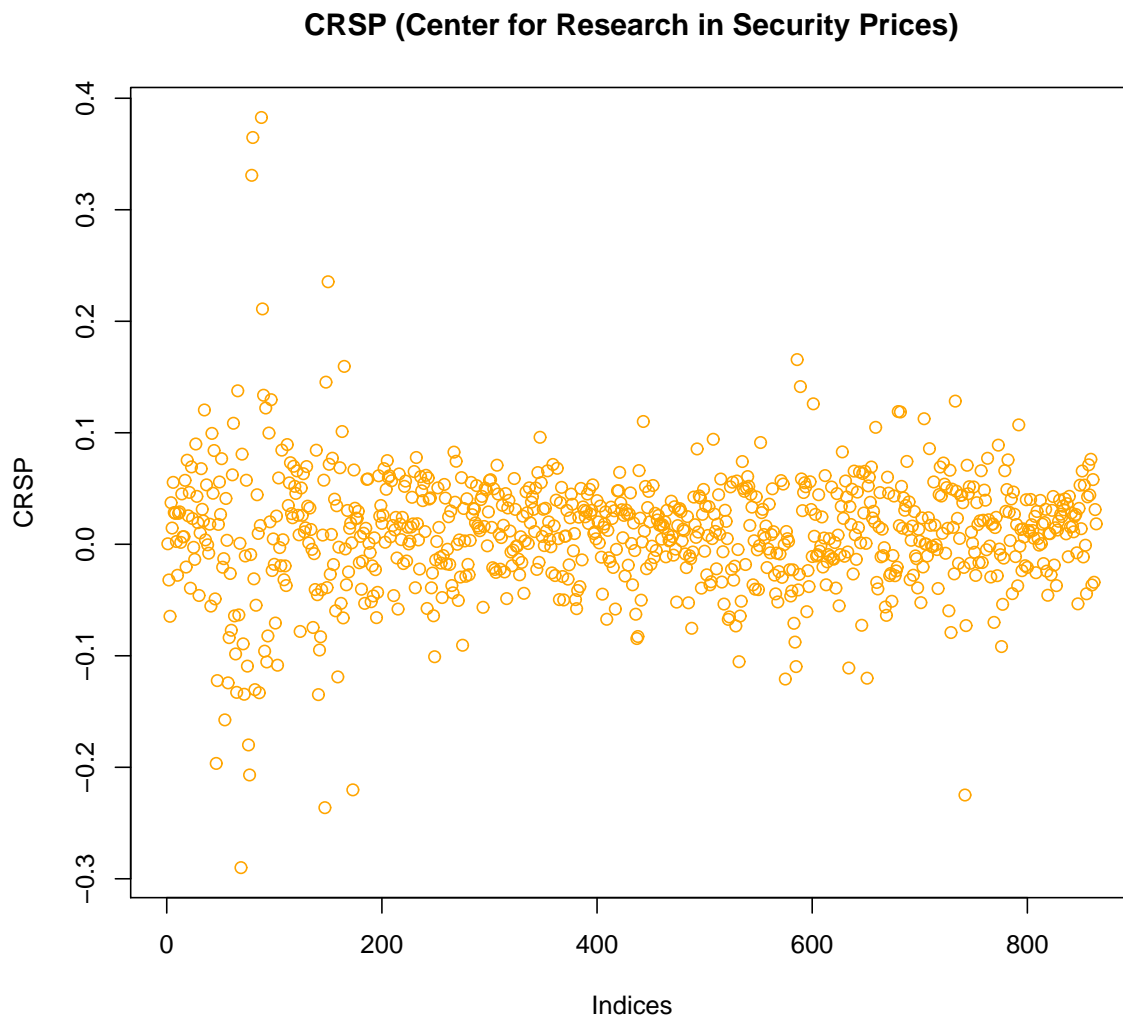


FIGURA 5.1. Gráfica de las Declaraciones Mensuales del índice de CRSP

Donde para el analisis de ejemplo tomaremos como hipótesis nula a

**$H_0$  : los datos son independientes identicamente distribuidos con varianza infinita**

y como la hipótesis alternativa a

**$H_A$  : los datos no se distribuyen de forma independiente y no tienen varianza infinita**

<i>Test</i>	<i>Metodos</i>	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 30$
$Q_{BP}$	Normal-DA	0.049796306	0.002509011	0.003073340
$Q_{BP}$	Estable-DA	0.2163080	0.5202569	0.5875264
$Q_{LB}$	Normal-DA	0.047376040	0.002032229	0.002286158
$Q_{LB}$	Estable-DA	0.2091730	0.5030665	0.5587248
$\hat{D}$	Normal-DA	0.16859404	0.05003861	0.01030248
$\hat{D}$	Estable-DA	0.4188991	0.4873653	0.4929209

CUADRO 1. P-valores obtenidos usando los Test de Box-Pierce, Ljung-Box y Peña-Rodríguez en las Declaraciones mensuales del índice de CRSP desde Enero de 1926 hasta Diciembre de 1997

En el Cuadro 1 realizamos un análisis usando un autorregresivo de orden 5 ( $AR_5$ ) donde comparamos los p-valores que hemos obtenido para los test  $\hat{D}$ ,  $Q_{BP}$  y  $Q_{LB}$  tanto para los casos estables, como para los casos normales tomando como retardos  $m = 10, 20, 30$ .

Como era de esperar el test de  $Q_{BP}$  casi concuerda con el test de  $Q_{LB}$ . Es interesante que cuando  $m = 10$  todas las pruebas tienen similares p-valores, pero cuando  $m = 20$  ó  $m = 30$  los p-valores de los test basados en la distribución normal son mucho más pequeños, por un factor alrededor de 10, que es la prueba mas correcta basada en la distribución estable.



En general parece que el uso de los Test usando la distribución normal nos indica que las innovaciones producen p-valores que son demasiado pequeños en comparación con los generados por una distribución estable.

En el siguiente figura mostramos como estan distribuidos los datos al aplicarle la Distribución Estable.

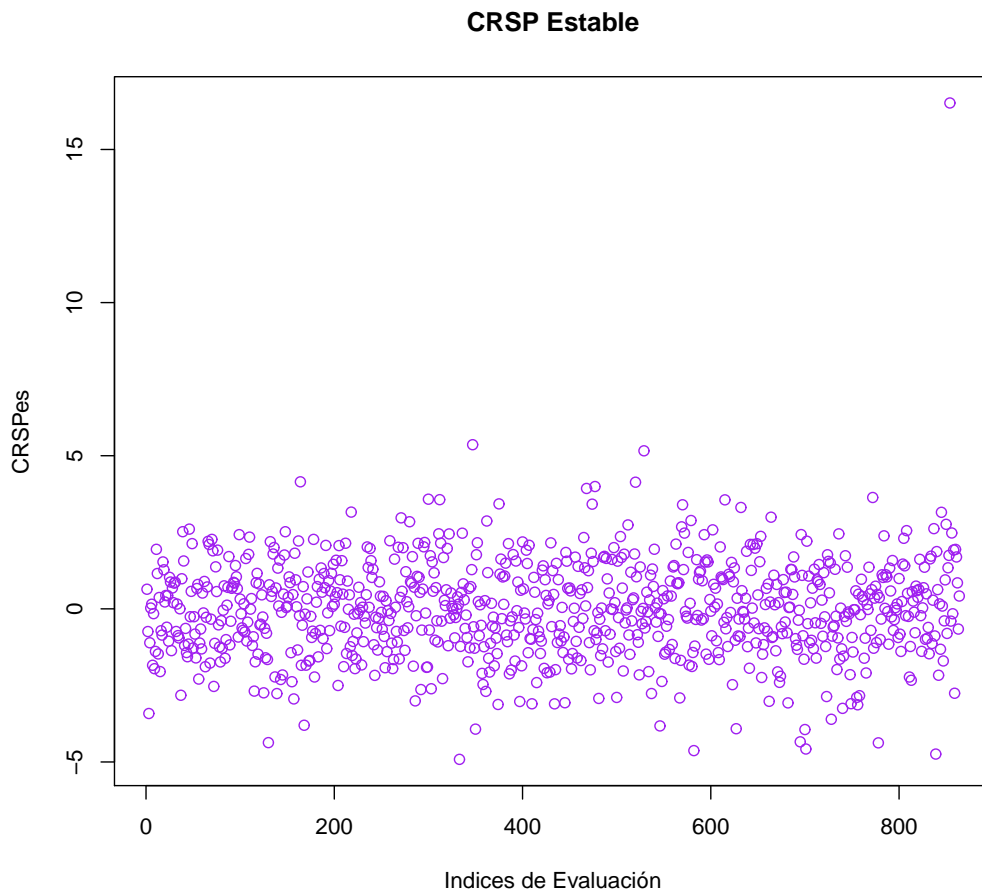


FIGURA 5.2. Estabilidad de los Datos de CRSP

En la Figura 5.2, se aplicó la distribución estable donde tomamos como constantes  $a_n = 1,9$  y  $b_n = 0$  lo cual nos indica que los datos sufren una leve variación en los primeros datos de la serie que logran estabilizarse en su recorrido ya al final de los datos se consigue un dato atípico fuera del rango de estudio.

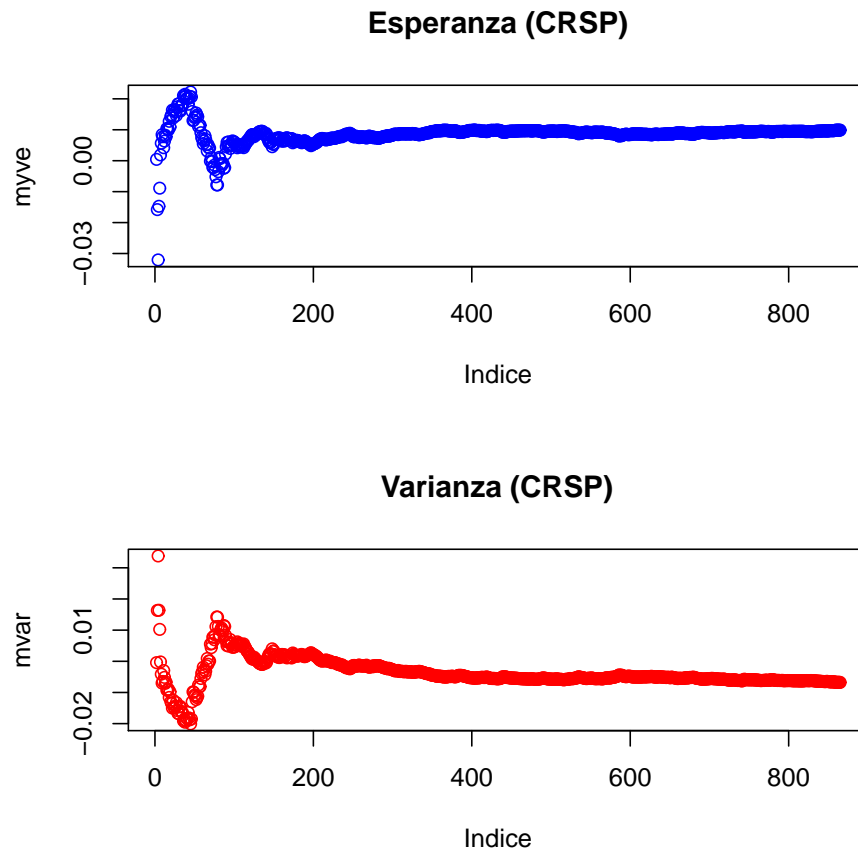


FIGURA 5.3. Esperanza y Varianza de los Datos de CRSP

La Figura 5.3 se muestran la esperanza y la varianza donde nos indican que existe un modelo de Homocedasticidad ya que en ellas se mantienen a lo largo de las observaciones lo cual nos indica que la esperanza y la varianza son constantes, lo cual nos ayuda a concluir que los datos poseen varianza infinita.

## Conclusión

En primer lugar el estudio del test de Portmanteau resultó, ser una herramienta muy útil en el estudio de los modelos ARMA(p,q) con varianza infinita.

En este trabajo especial de grado podemos observar, como se comportan los modelos con varianza finita y con varianza infinita. Por cuanto los ejemplos antes mencionados nos lleva a pensar que el uso de este test es muy acertado para estos modelos estadísticos.

Además hemos concluido que los resultados obtenidos a través de los modelos aplicados no dejan de ser de gran utilidad para observar el comportamiento de los rendimientos o acciones de una empresa, que se ajustan a los modelos estudiados a lo largo de este trabajo especial de grado.

Por lo tanto, es de vital importancia que los proximos en estudiar el test de Portmanteau profundicen la investigación, ya que este tema es de gran importancia para ser establecido dentro del sistema de una organización empresarial.

## Apéndice

### Función Característica

Si  $X$  es una variable aleatoria se define su función característica por

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX))$$

La última fórmula requiere tomar el valor esperado de una variable aleatoria compleja. Si  $Z$  es un valor complejo se define  $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(ReZ) + i\mathbb{E}(ImZ)$  donde  $Re(a + ib) = a$  es la parte real y  $Im(a + ib) = b$  es la parte imaginaria. Algunas propiedades son inmediatas:

$$(1) \quad \varphi(0) = 1$$

$$(2) \quad \varphi(-t) = \mathbb{E}(\cos(-tX) + i\sin(-tX)) = \overline{\varphi(t)}, \text{ donde } \bar{z} \text{ denota el conjugado complejo de } z, \overline{a + ib} = a - ib$$

$$(3) \quad |\varphi(t)| = |\mathbb{E} \exp^{itX}| \leq \mathbb{E} |\exp^{itX}| = 1$$

Por aquí  $|z|$  denota el módulo de un número complejo  $z$ ,  $|a + ib| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ .

$$(4) \quad |\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |\mathbb{E}(\exp^{i(t+h)X} - \exp^{itX})| \leq \mathbb{E} |\exp^{i(t+h)X} - \exp^{itX}| = \mathbb{E} |\exp^{ihX} - 1|$$

ya que  $|zw| = |z| \cdot |w|$ . La última esperanza tiende a 0 como  $h \rightarrow 0$  por el teorema de convergencia acotada, por lo que  $\varphi(t)$  es uniformemente continua en  $(-\infty, \infty)$ .

$$(5) \quad \mathbb{E}(\exp^{it(aX+b)}) = \exp^{itb} \mathbb{E}(\exp^{i(ta)X}) = \exp^{itb} \varphi(at)$$

- (6) Si  $X_1$  y  $X_2$  son independientes y tienen funciones características  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  entonces  $X + Y$  tienen función característica  $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ .

Demostración:  $\mathbb{E}(\exp^{it(X_1+X_2)}) = \mathbb{E}(\exp^{itX_1} \exp^{itX_2}) = \mathbb{E}(\exp^{itX_1})\mathbb{E}(\exp^{itX_2})$ .

TEOREMA 5.1.  $\mathbb{E}X = \mu$  y  $\mathbb{E}|X|^2 = \sigma^2 < \infty$  entonces  $\varphi(t) = 1 + it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2)$ .

TEOREMA 5.2. Si  $a_j \rightarrow \infty$  y  $a_j c_j \rightarrow \lambda$  entonces  $(1 + c_j)^{a_j} \rightarrow \exp^\lambda$ .

### Teorema Central del Límite

TEOREMA 5.3. Sea  $X_1, X_2, \dots$ , son i.i.d, con  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ ,  $\text{var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ . Si  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  entonces

$$(S_n - n\mu)/\sigma n^{1/2} \Rightarrow \chi$$

donde  $\chi$  tiene distribución normal estandar.

Demostración: Considerando  $X'_i = X_i - \mu$ , basta para demostrar el resultado cuando  $\mu = 0$ . Por (1.1)  $\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp(itX_1)) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2)$  por consiguiente  $\mathbb{E}(\exp(itS_n/\sigma n^{1/2})) = (1 - \frac{t^2}{2n} + o(n^{-1}))^n$ . Por (1.2) debe quedar claro que la ultima expresión  $\rightarrow \exp(-t^2/2)$  es  $n \rightarrow \infty$ , por el teorema de la continuidad se completa la demostración.

Sin embargo, la demostración es necesaria extenderla al caso complejo para así completar la demostración.

TEOREMA 5.4. Si  $c_n \rightarrow c \in \mathbb{C}$  entonces  $(1 + c_n/n)^n \rightarrow \exp^c$ .

Para probar el teorema primero probaremos dos lemas.

LEMA 5.5. Sean  $z_1, \dots, z_n$  y  $w_1, \dots, w_n$  son módulos de números complejos  $\leq 0$ . Entonces

$$\left| \prod_{m=1}^n z_m - \prod_{m=1}^n w_m \right| \leq \theta^{n-1} \sum_{m=1}^n |z_m - w_m|$$

Demostración: Usando inducción. El resultado es verdad para  $n = 1$ . Ahora para  $n > 1$  observe que

$$\begin{aligned} \left| \prod_{m=1}^n z_m - \prod_{m=1}^n w_m \right| &\leq \left| z_1 \prod_{m=2}^n z_m - z_1 \prod_{m=2}^n w_m \right| + \left| z_1 \prod_{m=2}^n z_m - w_1 \prod_{m=2}^n w_m \right| \leq \\ &\quad \left| \prod_{m=2}^n z_m - \prod_{m=2}^n w_m \right| + \theta^{n-1} |z_1 - w_1| \end{aligned}$$

LEMA 5.6. Si  $b$  es un número complejo con  $|b| \leq 1$  entonces  $|\exp^b - (1+b)| \leq |b|^2$ .

Demostración:  $\exp^b - (1+b) = b^2/2! + b^3/3! + b^4/4! + \dots$  por lo que si  $|b| \leq 1$  entonces  $|\exp^b - (1+b)| \leq \frac{|b|^2}{2}(1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots) = |b|^2$ .

Demostración del Teorema: Si  $z_m = (1 + c_n/n)$ ,  $w_m = \exp^{(c_n/n)}$ , y  $\gamma > |c|$ . Para todo  $n$ ,  $|c_n| < \gamma$  y  $|c_n/n| \leq 1$ , lo que se deduce de los lemas (1.5) y (1.6) que como  $n \rightarrow \infty$   $|(1 + \frac{c_n}{n})^n - \exp^{c_n}| \leq (1 + \frac{\gamma}{n})^{n-1} n |\frac{c_n}{n}|^2 \leq \exp^\gamma \frac{\gamma^2}{n} \rightarrow 0$ .

### Teorema de Cramér-Wold

TEOREMA 5.7. Sean  $\bar{X}_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk})$  y  $\bar{X} = (X_1, \dots, X_k)$  son vectores aleatorios  $k$ -dimensionales. Entonces  $\bar{X}_n$  en distribución si y sólo si

$$\sum_{i=1}^k t_i X_{ni} \xrightarrow{D} \sum_{i=1}^k t_i X_i.$$

para cada  $(t_1, \dots, t_k) \in R^k$ . Es decir, si cada combinación lineal fija las coordenadas de  $\bar{X}_n$  converge en distribución a la combinación lineal correspondiente a las coordenadas de  $\bar{X}$ .

### $\delta$ – metodo

DEFINICIÓN 5.8. Es un método para derivar una distribución de probabilidad aproximada para una función de un estimador estadístico asintóticamente normal a partir de los conocimientos de la varianza de ese estimador.

### Test de Portmanteau de $Q_{LB}$

Consideremos una serie de tiempo  $\{w_t\}$  generada por un modelo autorregresivo estacionario de medias móviles (ARMA(p,q)).

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t,$$

donde  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ ,  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ ,  $B^k w_t = w_{t-k}$ , y  $a_t$  es una sucesión i.i.d de variables aleatorias  $N(0, \sigma^2)$ . Los  $w_t$  en general, puede representar la d-ésima diferencia o alguna otra transformación adecuada de una serie no estacionaria  $\{z_t\}$ .

Después de que un modelo de esta forma ha sido ajustado a una serie  $w_1, \dots, w_n$ ; es útil para estudiar la adecuación del ajuste mediante el examen del residual  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$  y, en particular, sus autocorrelaciones

$$\hat{r}_k = \sum_{t=k+1}^n \hat{a}_t \hat{a}_{t-k} / \sum_{t=1}^n \hat{a}_t^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Box and Pierce [1] observaron que cuando el modelo es apropiado y los parámetros lo son también, entonces su ecuación

$$(5.1) \quad \tilde{Q}(r) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} r_k^2$$

donde

$$r_k = \sum_{t=k+1}^n a_t a_{t-k} / \sum_{t=1}^n a_t^2,$$

para un  $n$  grande, se distribuye como  $\chi_m^2$  dado que la distribución límite de  $r = (r_1, \dots, r_m)'$  es normal multivariada con vector de media cero,  $\text{var}(r_k) = (n-k)/\{n(n+2)\}$  y  $\text{cov}(r_k, r_l) = 0$  ( $k \neq l$ ). Usando la aproximación  $\text{var}(r_k) = 1/n$ , [1] sugirieron que la distribución de

$$(5.2) \quad Q(r) = n \sum_{k=1}^m r_k^2$$

puede ser aproximado por una  $\chi^2_{m-p-q}$  dando una prueba aproximada para la de bondad de ajuste.

Sin embargo, la principal dificultad es causada por la aproximación de (3.36) por (3.37). Un ensayo modificado basado en el criterio

$$Q_{LB}(\hat{r}) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} \hat{r}_k^2$$

donde la varianza de  $Q_{LB}(\hat{r})$  es superior al de la distribución  $\chi^2_{m-p-q}$ . [9] muestran sin embargo que la prueba modificada proporciona una aproximación sustancialmente mejorada que debe ser adecuada para los propósitos más prácticos.

### Ejemplos prácticos

Serie de Tiempo Intel Data Corporation

*nslaves* < -2

*monthintel* < -*as.ts(monthintel)*

Test box-Pierce Normal

*TBP1* = *BoxPierce(monthintel)* BP

Test Ljung-Box Normal

*TBP3* = *LjungBox(monthintel)* LB

Test Peña-Rodríguez Normal

*TBP5* = *gvtest(monthintel)* PR

Gráfico de Intel Data Corporation

*plot(monthintel, main = IntelData*

*Corporation, xlab = Rendimientos, ylab = VariacionMensual, col = green)*

*par(mfrow = c(2, 1))*

*acf(monthintel, main = AutoCorrelacionIntel, col = red, xlab = Retardos)*

*pacf(monthintel, main = AutoCorrelacionParcialIntel, col = yellow, xlab = Retardos)*



## Esperanza y Varianza de Intel Data Corporation

Esperanza

 $y[370 : 372]$  $y < -monthintel$  $n < -372$  $myve < -NULL$  $for(iin0 : n)$  $myve < -c(myve, mean(as.numeric(y[0 : i])))$  $plot(myve, main = Esperanza)$ 

Varianza

 $Y2 < -y^2$  $mvar < -NULL$  $for(iin0 : n)$  $mvar < -c(mvar, mean(as.numeric(Y2[0 : i])) - mean(as.numeric(y[0 : i])))$  $par(mfrow = c(2, 1))$  $plot(myve, main = Esperanza, xlab = Indice, col = blue)$  $plot(mvar, main = Varianza, xlab = Indice, col = red)$ 

## Serie de tiempo Intel Data Corporation Estable

 $alpha = 1,2$  $beta = 0$  $nslaves = 2$  $z = rstable(monthintel, alpha, beta)$ 

Test de Box-Pierce Estable

 $TBP1 = BoxPierce(z)$ 

Test de Ljung-Box Estable

 $TBP3 = LjungBox(z)$ 

Test de Peña-Rodríguez Estable

 $TBP5 = gvtest(z)$

Serie de Tiempo IBM y Standard and Poor's 500

Con k=1 autoregresivo de orden 1

$IBMSP500 = monthibmspln$

$FitIBMSP5001 = ar.ols(IBMSP500, aic = TRUE, intercept = F, order.max = 1)$

Test de Box-Pierce Normal

$BP1 = BoxPierce(FitIBMSP5001)$

Test de Ljung-Box Normal

$LJ1 = LjungBox(FitIBMSP5001)$

Test de Peña-Rodríguez Normal

$PR1 = gvtest(FitIBMSP5001)$

Grafico de IBM y Standard and Poor's 500 Normal

$FitIBMSP5001$

$windows()$

$plot(IBMSP500, main = IBM y Standard and Poors 500, col = purple)$

Con k=2 autoregresivo de orden 2

$FitIBMSP5002 = ar.ols(IBMSP500, aic = TRUE, intercept = F, order.max = 2)$

Test de Box-Pierce Normal

$BP1 = BoxPierce(FitIBMSP5002)$

Test de Ljung-Box Normal

$LJ1 = LjungBox(FitIBMSP5002)$

Test de Peña-Rodríguez

$PR1 = gvtest(FitIBMSP5002)$

$FitIBMSP5002$

Con k=3 autoregresivo de orden 3

$FitIBMSP5003 = ar.ols(IBMSP500, aic = TRUE, intercept = F, order.max = 3)$

Test de Box-Pierce Normal

$BP1 = BoxPierce(FitIBMSP5003)$

Test de Ljung-Box Normal

$LJ1 = LjungBox(FitIBMSP5003)$

Test de Peña-Rodríguez Normal

$PR1 = gvtest(FitIBMSP5003)$

$FitIBMSP5003$

Serie de Tiempo IBM y Standard and Poor's 500 Estable

$alpha = 1,9$

$beta = 0$

$nslaves = 2$

$conk = 1autoregresivodeorden1$

$t1 = rstable(FitIBMSP5001, alpha, beta)$

Test de Box-Pierce Estable

$BP1 = BoxPierce(t1)$

Test de Ljung-Box Estable

$LjungBoxLJ1 = LjungBox(t1)$

Test de Peña-Rodríguez Estable

$PR1 = gvtest(t1)$

Grafico de IBM y Standard and Poor's 500 Estable

$windows()$

$plot(t1, main = EstabilidaddeIBM - SP500conk = 1, xlab = Acciones, col = blue)$

$conk = 2autoregresivodeorden2$

$t2 = rstable(FitIBMSP5002, alpha, beta)$

Test de Box-Pierce Estable

$BP1 = BoxPierce(t2)$

Test de Ljung-Box Estable

$LJ1 = LjungBox(t2)$

Test de Peña-Rodríguez Estable

$PR1 = gvtest(t2)$

Grafico de IBM y Standard and Poor's 500 Estable

```

windows()
plot(t2, main = EstabilidaddeIBM - SP500, conk = 2, xlab = Acciones, col = blue)

```

```
conk = 3 autoregresivodeorden3
```

```
t3 = rstable(FitIBMSP5003, alpha, beta)
```

Test de Box-Pierce Estable

```
BP1 = BoxPierce(t3)
```

Test de Ljung-Box Estable

```
LJ1 = LjungBox(t3)
```

Test de Peña-Rodríguez Estable

```
PR1 = gvttest(t3)
```

```
windows()
```

Grafico de IBM y Standard and Poor's 500

```
plot(t3, main = EstabilidaddeIBM - SP500, conk = 3, xlab = Acciones, col = blue)
```

Esperanza y Varianza de IBM y Standard and Poor's 500

Esperanza

```
o[2777 : 2780]
```

```
o = SP500
```

```
n = 2780
```

```
myve < -NULL
```

```
for(iin0 : n)
```

```
myve < -c(myve, mean(as.numeric(o[0 : i])))
```

Varianza

```
o2 < -o^2
```

```
mvar < -NULL
```

```
for(iin0 : n)
```

```
mvar < -c(mvar, mean(as.numeric(o2[0 : i])) - mean(as.numeric(o[0 : i])))
```

```
par(mfrow = c(2, 1))
```

```
plot(myve, main = Esperanza, xlab = Indice, col = blue)
```

```
plot(mvar, main = Varianza, xlab = Indice, col = red)
```

Serie de Tiempo Standard and Poor's 500

```
sap = DATOS[, 2]
```

```
nslaves < -2
```

```
p < -SelectModel(sap, ARModel = AR, Criterion = BIC, Best = 1)
```

```
FitSap < -FitAR(sap, p, ARModel = AR)
```

```
plot(FitSap)
```

Test de Box-Pierce Normal

```
TBP1 = BoxPierce(FitSap)
```

Test de Ljung-Box Normal

```
TBP3 = LjungBox(FitSap)
```

Test de Peña-Rodríguez Normal

```
TBP5 = gvtest(FitSap)
```

Grafico Standard and Poor's 500

```
plot(sap, main = StandardandPoors500, col = red, xlab = Observaciones)
```

Serie de Tiempo Standard and Poor's 500 Estable

```
sap = DATOS[, 2]
```

```
nslaves < -2
```

```
alpha = 1,9
```

```
beta = 0
```

```
sap1 = rstable(sap, alpha, beta)
```

Test de Box-Pierce Estable

```
TBP1 = BoxPierce(u)
```

Test de Ljung-Box Estable

```
TBP3 = LjungBox(u)
```

Test de Peña-Rodríguez Estable

```
TBP5 = gvtest(u)
```

Grafico de Standard and Poor's 500 Estable

```
plot(sap1, main = StandardandPoors500(Estable), col = blue, xlab = Observaciones)
```

## Esperanza y Varianza de la Standard and Poor's 500

Esperanza

 $y < -sap$  $n < -2011$  $myve < -NULL$  $for(iin0 : n)$  $myve < -c(myve, mean(as.numeric(y[0 : i])))$ 

Varianza

 $Y2 < -y^2$  $mvar < -NULL$  $for(iin0 : n)$  $mvar < -c(mvar, mean(as.numeric(Y2[0 : i])) - mean(as.numeric(y[0 : i])))$  $par(mfrow = c(2, 1))$  $plot(myve, main = EsperanzaSP500, col = blue)$  $plot(mvar, main = VarianzaSP500, col = yellow)$ 

## Serie de Tiempo de la Simulación Final Normal

 $data(CRSP)$  $CRSP.AR5 < -arima(CRSP, c(5, 0, 0))$  $NREP < -1000$  $lags = c(10, 20, 30)$ 

Test Box-Pierce Normal

 $portest(CRSP.AR5, lags = lags, test = BoxPierce, nslaves = 8, MonteCarlo = FALSE, NREP = NREP, InfiniteVarianceQ = TRUE)$ 

Test Ljung-Box Normal

 $portest(CRSP.AR5, lags = lags, test = LjungBox, nslaves = 8, MonteCarlo = FALSE, NREP = NREP, InfiniteVarianceQ = TRUE)$ 

Test Peña-Rodríguez Normal

 $portest(CRSP.AR5, lags = lags, test = gvtest, nslaves = 8, MonteCarlo = FALSE, NREP = NREP, InfiniteVarianceQ = TRUE)$

## Grafico de la Simulación Final Normal

```
plot(CRSP, main = CRSP(Center for Research in Security Prices), col = orange, xlab =
Indices)
```

## Serie de Tiempo de la Simulación Final Estable

```
data(CRSP)
alpha = 1,9
beta = 0
CRSPes = rstable(CRSP, alpha, beta)
lags = c(10, 20, 30)
Test Box-Pierce Estable
BP1 = BoxPierce(CRSPes, lags = lags)
Test Ljung-Box Estable
LJ1 = LjungBox(CRSPes, lags = lags)
Test Peña-Rodríguez Estable
PR1 = gvtest(CRSPes, lags = lags)
Grafico Simulación Final Estable
plot(CRSPes, main = CRSPEstable, col = purple, xlab = Indices de Evaluacion)
```

## Esperanza y Varianza Simulación Final

```
Esperanza
y[859 : 864]
y < -CRSP
n < -864
myve < -NULL
for(i in 0 : n)
myve < -c(myve, mean(as.numeric(y[0 : i])))
Varianza
Y2 < -y^2
mvar < -NULL
for(i in 0 : n)
```

```

mvar <- -c(mvar, mean(as.numeric(Y2[0 : i])) - mean(as.numeric(y[0 : i])))
      par(mfrow = c(2, 1))
plot(myve, main = Esperanza(CRSP), xlab = Indice, col = blue)
plot(mvar, main = Varianza(CRSP), xlab = Indice, col = red)

```



## Bibliografía

- [1] BOX G, PIERCE D., "Distribution of Residual Autocorrelation in Autoregressive- Integrated Moving Average Time Series Models". *Journal of American Statistical Association*, 65, 1509-1526, (1970).
- [2] BROCKWELL, P.J. AND DAVIS, R.A., *Time Series: Theory and Methods*. Springer, New York Inc, New York (1991).
- [3] BROCKWELL, P.J. AND DAVIS, R.A., *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer- Verlag, New York Inc, New York (2002).
- [4] Davis, R.A. and Resnick, S., "Limit Theory for the Sample Covariance and Correlation Functions of Moving Averages". *The Annals of Statistics*, 14, 533-558, (1986).
- [5] DURRETT, D., *Probability: Theory and Examples*. International Thompson Publishing Company, USA (1996).
- [6] Fama E., "The Behavior of Stock-Market Prices". *The Journal of Business*, 38(1), 34-105, (1965).
- [7] Hosking, J.R.M., "The Multivariate Portmanteau Statistic". *Journal of American Statistical Association*, 75(371), 602-607, (1980).
- [8] Lévy P., "Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les Lois Exceptionnelles". *Bull. Soc. Math.*, 52, 49-85, (1924).
- [9] Ljung G, Box G., "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika*, 65, 297-303, (1978).
- [10] LÜTKEPOHL H, *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer- Verlag, New York Inc, New York, (2005).
- [11] MCLEOD, A.I. AND LI, W.K., "Distribution of the Residual Autocorrelation in Multivariate ARMA Time Series Models". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 43(2), 231-239, (1981).
- [12] MCLEOD, A.I. AND LI, W.K., "Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations". *Journal of Time Series Analysis* 4, 269-273, (1983).
- [13] MCLEOD, A.I. AND LI, W.K., "Portmanteau Test for ARMA models with infinite variance". *The University of Western Ontario*, (2007).
- [14] PEÑA, D. AND RODRIGUEZ, J., "A Powerful Portmanteau Test of Lack of Fit For Time Series". *Journal of American Statistical Association* 97, 601-610, (2002).
- [15] PEÑA, D. AND RODRIGUEZ, J., "The Log of the Autocorrelation Matrix for Testing Goodness of Fit in Time Series". *Journal of Statistical Inference and Planning* 136, 2706-2718, (2006).
- [16] STUCK, W. AND KLEINER, B., "Statistical Analysis of Telephone Noise". *The Bell System Technical Journal* 53, 1263-1320, (1974).

- [17] TSAY, R.S., *Analysis of Financial Time Series*. Wiley, New York, (2002).