



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Estudio de las cocadenas casiconmutativas en conjuntos cúbicos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Samuel Flores** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Angel Mauricio.

Caracas, Venezuela
Octubre del 2010.

Agradecimientos

En el **Plano Divino** quiero agradecer:

A **יהוה** (Jehová) Por ser mi Dios y el ser espiritual más grande del cosmos que me ha acompañado todos estos años, espero pronto la vindicación de su Soberanía. Sin Él no hubiera podido culminar matemáticas... nunca podre saber todo acerca de su creación.

En el **Plano no divino** quiero agradecer a las siguientes personas:

Ph.D *Azocar Bates* Sus libros matemáticos, entusiasmo, enfoque, carisma y accesabilidad, es un maestro y su influencia ha sido notable en mi personalidad matemática.

Ph.D *Edmundo Castillo* Libros matemáticos, su personalidad matemática, seriedad, sencillas, humanitismo, conversaciones y observaciones tuvieron una profunda influencia en mi estadia en la Facultad de Ciencias de la Escuela de Matemáticas.

Ph.D *Glaysar Castro* Siempre ha sido un apoyo institucional y vocacional ante mis profundas inquietudes en el campo de la matemática.

Dr. *Nelson Merentes* Libros matemáticos, sus seminarios los cuales disfrute mucho y el enfoque que tiene ha contribuido a tener otra visión de la matemática.

Dr *Mauricio* Sus cursos, personalidad matemática, sus reflexiones sociales y academicas y su compormiso con la institucionalidad junto con su visión holística de la matemática ha tenido una influencia visible en mi personalidad matemática.

Ph.D *Cristina Betz* Su apoyo institucional ha sido un factor clave en el ingreso a la Facultad de Ciencias de la UCV, las conversaciones académicas y reflexiones han influido en mi persona.

Ms.C *Benito Chaudary* La visión espiritual, seriedad, compromiso, empatía, sus libros matemáticos y el siempre tener espacio para discutir un tema matemático fuera del contexto tradicionalista ha contribuido de manera notable en mi formación matemática.

Dr. *Jose Antonio* Ha sido el punto focal durante el cual he podido dedicar mucho tiempo y energía en temas de profundidad en el campo de las matemáticas fue uno de los pocos que abrió un espacio incluyendo su oficina para el debate de ideas académicas durante mi permanencia en la Facultad de Matemáticas no hay duda que su enfoque físico ha contribuido a tener una visión más del inexplorable pero rico mundo de las matemáticas, relamente disfrute muchísimo esos seminarios que tenían un alto sentido de clandestinidad.

Ph.D *Francisco Tovar* Su enfoque, interés en mi persona, experiencia sus cursos han contribuido en mi formación académica matemática.

Ph.D *Rafael Orellana* Excelente persona, matemático e investigador, sus seminarios breves pero sustanciosos esto es debido a que su tiempo es infimamente corto y su apoyo incondicional ha dejado en mi una profunda huella del compromiso que debe tener uno en matemáticas.

Prof. *Acosta* Sus continuos seminarios de temas diversos de las matematicas de distintos niveles de profundidad como un todo sin duda dejaron mi mente muchas interrogantes aunque es un seminario un tanto cerrado pero de verdad es muy bueno me ha servido muchisimo en mi formación como matemático.

Ph.D *Guia* Su personalidad matemática, sus intervenciones en los seminaros que asisti donde el Prof Acosta tambien estaba las interrogantes que se presentaban, las revisiones periodicas de textos de distinta naturaleza pero de un topico matemático específico me han ayudado mucho en mi comprensión matemática, hay que mencionar que siempre estuvieron abiertos a mis ideas cosa que realmente estoy muy agradecido.

Ph.D $\rho\alpha\epsilon\Delta$ Cuando llego a este punto se me incrementa la dificultad se que existen profesores muy buenos de matemáticas pero hay otros que son Maestros en matemáticas y este profesor pertenece a está categoría, su genialidad y originalidad dejaran siempre una huella imborable en mi mente, me enseño a tener seriedad por la matemática para el dar cursos de temas avanzados era solo un pasatiempo no habia duda que tenia un amplio conocimiento, su enfoque en trabajar topicos matemáticos actuales era fabuloso, su personalidad en el campo humano es excelente y sus consejos eran muy oportunos, claro cabe destacar que era a veces exceptico a algunos de ellos, su seminario era genial veias temas de atualidad y mencionados por prestigiosos e importantes representantes del campo de la matemática actual, sus exposiciones eran claras, lamento que no continuara su seminario hasta el día de hoy. Su paciencia e interes y trabajo continuo en diversos topicos de las matematicas sin duda fueron cosas que me cautivaron mucho mas por la matemática.

Ph.D *Guevara Jordan* Su interes en formar bien siempre fue algo que me llamo la atención, sus reflexiones académicas y personales contribuyeron en mi a ampliar más la visión que antes poseia.

Ph.D *Orlando Giovanni* su apoyo incondicional e interes en un topico partíncular de mi profundo interes siempre fue agradable, sus reflexiones y analisis muy pertinente y su personalidad matamática extraordinaria sin duda es una influencia más en mi personalidad como matemático.

Ph.D *Rafael Martin* Sus seminarios y el abrir un espacio de su ocupada agenda academica para discutir ideas academicas interesantes es si duda un aprendizaje significativo en mi personalidad matemática he disfrutado mucho sus ideas y desarrollos academicos.

Ph.D *Ricardo Rios* Cuando se trata de observación de mi proceso de formación no puedo dejar de mencionar al Prof Ricardo sus análisis hacia mi persona y a nivel academico me hacen darle gracias por su gesto se que fue otro profesor como los antes mencionados que aprendi algo de su personalidad matemática.

Dr. *Manuel Maia* El profesor Maia fue uno con los cuales intercambie algunas ideas y sobre todo preguntas de su área de estudio, su colaboración prestada en el Lab de

Computo Científico, sus notas de latex y su flexibilidad influyeron en mi persona.

Ms C Ines Nuez Profesora que me abrio un espacio para aprender combinatoria área fascinante no hay duda que me dio una oportunidad para aprender se que aprendi mucho de ella, claro no siempre estaba de acuerdo con sus análisis sean academicos o personales pero lo que no puedo olvidar es que colabore mucho en mi formación cuando estuvo en la Facultad de Ciencias.

Ph.D Carlos Finol Ha sido un profesor muy formal en su topico de estudio su personalidad matemática, seriedad, comentarios y notas que me obsequio de temas de mi interes fueron un gran aporte en mi formación.

Dr. Tomas Guardia Sus cursos, personalidad matemática, trato afable y analisis desde puntos de vista me permitio tener más visión academica.

Ph.D Mercedes Arrijas Cuando se trata de conocer más en profundidad el campo de las finazas o la probabilidad la experiencia de la profesora Mercedes Arrija es muy valiosa, siempre ha estado abierta a una consulta de interes personal referidas a estas areas que son sumamente interesantes.

Dr. Marisela Dominguez Agradescos los cursos impartidos en mi formación, claro aunque tenemos enfoques completamente diferentes sin duda aprendi de su enfoque.

Ph.D José Luis Sanchez Siempre ha estado abierto a la discusión de temas que no están vinculados a su área de estudio, la literatura matemática prestada y su continuo afan por el equilibrio en los enfoques matemáticos lo hacen digno mencionarlo en este modesto trabajo.

Dr. Méndez Elio La reflexiones de diversos temas tanto sociales como académicas fueron de su parte muy enriquecedoras, compartir un espacio para discusión de temas matemáticos relacionados con la Geometría sin duda fueron importantes en mi formación.

Dr. Méndez Gisela No hay duda que su enfoque de la teoría de conjuntos y la lógica difusa con sus variantes más su entusiasmo por topicos en matemáticas me hacen mencionarla no hay duda que aprendi mucho de ella.

Ph.D Miranda Guillermo Fue el primero que me hizo concientizar con respecto a la matemática, se que no estuve siempre de acuerdo a sus enfoques, pero agradezco en gran manera sus consejos, tiempo y dedicación necesaria para comprender matemática.

Ph.D Crespín Daniel Sus análisis de variados temas y sus particulares investigaciones lo hacen digno de mencionarlo, siempre tuvo un espacio para la pregunta de topicos particulares y el tomar en cuenta otros enfoques sin duda me permitio aprender tanto de su personalidad matemática como de sus seminarios dictados en la Universidad.

Ph.D Alvarez Francisca Su entusiasmo hacia el álgebra influyo mucho en mi persona.

Ph.D Dalmagro Fermín Su cursos, rigurosidad y análisis academicos fueron una influencia en mi persona.

Ph.D Gasch Jesús Sus conversaciones, preguntas en su área de estudio y la investigación modesta de un tópico de análisis funcional me cautivo mucho más por la matemática.

Ph.D Iribarren Ileana No hay duda que cuando se trata de entender a un nivel básico la medida y la probabilidad da un gran aporte en ello, sus análisis son muy profundos y motivan a estudiar más para comprender con respecto a esa área de notable dificultad,

además sus conversaciones tanto en su oficina como en el cafetin sin duda contribuyo a mi enfoque.

Ph.D *Reyes Arturo* No es lo mismo escuchar opiniones académicas, cursos acerca del Prof Reyes y su genialidad matemática como que experimentarlos en seminarios, cuando uno conversa con el Prof Reyes acerca de temás matemáticos se da cuenta de que a uno le falta muchísimo por aprender, su personalidad abierta y su trato humano lo hacen digno de mencionar, no hay duda que es un catedrático, la manera como ve la topología es fascinante y como la explica es mágica.

Ph.D *Urbina Wilfredo* Conversaciones breves pero significativas, preguntas.

Ph.D *Olivares María Margarita* Sus cursos, personalidad y su apoyo, su carisma humano ha sido una influencia para mi.

Ph.D *Rafael Sanchez* Por su seriedad con las Olimpiadas Matemáticas y en el campo del álgebra.

Ph.D *Paluzny Marco* Su trato humano y apoyo academico.

Ms.C *Nelson Hernandez* Por enseñarme las primeras nociones básicas de topologia general, teoría de conjuntos, topicos de cardinalidad, tiempo, trato, libros que fueron fundamentales para mi formación en matemáticas.

Tambien quiero agradecer a los Profesores de *Planta Actuales* del Departamento de Matemáticas de la UCV y de FACYT de UC.

Quiero hacer menciona especial a:

Dr. *Jose Miguel Flores* Gran Bauluarte espiritual me enseñó algo que nunca se me olvidara el amor por los libros, su apoyo incondicional aún en los momentos difciles ha sido muy valioso, le agradezco por enseñarme a temprana edad los *Santos Escritos Biblicos* y darme la oportunidad de escuchar siempre sus consejos sabios que sin duda han sido beneficiosos a mi vida. *Le Dedico* esté modesto trabajo.

Dra *Vestalia de Flores* Su incondicional apoyo, más sus conversaciones profundas de la vida sin duda han dejado una huella imborable en mi mente, muchas de las cosas que pienso y actuo se las debo a ella, su amistad superlativa siempre ha sido fundamental en mi existencia, su espiritualidad ha sido un ejemplo a seguir.

Lic *Nathalie Flores* Sus Palabra y su apoyo en momentos de dificultad.

Lic *Alejandro Ollarves* Siempre ha estado abierto a una discusión matemática, su trato humano es afable.

Lic *Hugo Villaroel* Agradezco las multiples preguntas efectuadas relativas al tema de la computación y Latex.

Ing *Darwin Solarte* Su espiritualidad y la manera de ver el cosmos hacen digno mencionarlo en este modesto trabajo, su intereses por temas científicos y su profunda vinculación con la matemática ha sido una influencia muy positiva en mi persona.

Paola Michelle Agradezco a Jah el permitirme compartir mis ideas y espacio con ella, sus conversaciones, consejos creencia y espiritualidad, sinceridad, hospitalidad, cariño empatía, seriedad, su enfoque de la vida sin duda que ha tenido una profunda influencia en mi.

Ana Maldonado Ser espiritual que ha influido en mi por su seriedad espiritual, ho hay

duda que estar cerca de ella ha sido un gran beneficio espiritual para mi, sus consejos y su apoyo ha sido muy importante en mi vida, agradezco a Jah tenerla.

Tambien quiero agradecer especialmente a 3 amigas que fueron de muchisima ayuda para mi presentación y corrección de Latex y presencia en mi presentación final las cuales son **Vicky**, **Amanda** y **Leidy** tambien agradezco a los companeros Alfonso, Maria Bass, Maria Donky, Luis, Lorenzo, Bastidas Jesús y otros que he visto pero no he saludado.

Prof *Carmen Marrero* El apoyo institucional en la Biblioteca del potgrado entrar en ese portar inconmesurable de conocimiento presente en esa biblioteca ha sido el factor más predominante en mi formación, toparme con grandes ideas y enfoques sin duda han sido mi principal elemento motivador hacia los temás matemáticos de trascendencia, no hay duda que los libros te enseñan muchas cosas y te limitan muchas cosas a la vez.

Lic *Nebetsé Jiménez* Su constante apoyo en la Biblioteca del postgrado y su carisma en la atención, reflexiones de temas academicos y extraacademicos fue muy agradable en el tiempo de estadia en la UCV.

Tambien agradezco al personal que labora actualmente en la Biblioteca Alonso Gamero por su valiosa y constante ayuda con los textos academicos suministrados, los cuales son: Renny A. Yanez V, Johana Flores B, Ramón Olivier B, Alexis Rangel, Reinaldo Conde, Tirza Rivas, Roraima Marin y lamentable el Sr. Oswaldo Lozada que no se encuentra entre ellos y tambien al personal que labora en el Laboratorio de Computo Científico los cuales son: Alexander Velasquez, Pedro Caicedo, Efrain Cerrada con los cuales comparti el espacio cuando estudiaba en el mismo.

Finalmente agradezco a Él que me ha dado la existencia para hacer todas estas cosas y a la Universidad Central de Venezuela por permitirme disfrutar del espacio durante mi estadia y a los Seminarios de: Lógica y Teoría de Conjuntos, Álgebra, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad y Estadística, Modelos Aleatorios, Fisico-Matemática, Física, los abiertos y cerrados por la riqueza de conocimiento impartido y aprendido sin duda fue valioso para mi formación matemática.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Estudio de las cocadenas casiconmutativas en conjuntos cúbicos**”, presentado por la **Br. Samuel Flores**, titular de la Cédula de Identidad **13.899.244**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Mauricio Angel
Tutor

Tomás Guardia
Jurado

Manuel Maia
Jurado

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	10
1.1. Notaciones básicas y terminología	10
1.2. Definiciones básicas	12
1.3. Variedades diferenciales	13
1.4. Conceptos de teoría de categorías	15
1.5. Grupo Fundamental	18
1.5.1. Modelo de categoría cerrada	19
2. Algebra diferencial graduada	21
2.1. Espacio vectorial, algebra, anillo, ideal y R -módulo.	21
2.2. Algebra diferencial graduada (adg)	23
2.3. Fibrado: tangente, cotangente	28
2.3.1. La sucesión de Mayer-Vietoris	32
2.4. Teorema de Stokes	33
3. Cocadenas en conjuntos simpliciales	35
3.1. Complejo simplicial	39
3.2. Conjuntos simpliciales	41
3.2.1. Conjuntos simpliciales (versión clásica)	41
3.2.2. Conjuntos simpliciales (versión moderna)	42
3.2.3. Complejos Celulares	46
3.3. Formas diferenciales	47
3.4. Algebra diferencial graduada casiconmutativa (adgq)	52
3.5. Teoría de cocadenas	55
3.5.1. Cocadenas casiconmutativas de Karoubi.	56
4. Cocadenas casiconmutativas en conjuntos cúbicos	60
4.1. Categoría $\square$	60
4.2. Categoría de los conjuntos cúbicos	68
4.3. Cocadenas casiconmutativas en conjuntos cúbicos	68

Introducción

Este trabajo está orientado al estudio de las cocadenas conmutativas en conjuntos cúbicos. Se quiere comprender las formas diferenciales para conjuntos simpliciales, introducidas por M. Karoubi y realizar una variante para su extensión en conjuntos cúbicos. Para lograr esto esquematizamos el trabajo en 4 capítulos definidos como: 1. Resultados básicos, 2. Álgebra diferencial graduada, 3. Cocadenas en conjuntos simpliciales y finalmente 4. Cocadenas casi-conmutativas en conjuntos cúbicos donde damos la formulación final de las formas diferenciales para conjuntos cúbicos. En los capítulos siguientes el lector encontrará una formulación rigurosa del programa planteado en esta introducción.

Capítulo 1

Preliminares

Las secciones de este capítulo son las siguientes. En la sección 1.1 se definen ciertas notaciones que se utilizarán en este trabajo. En la sección 1.2 damos unas definiciones básicas de topología y de geometría diferencial; en la sección 1.3 introducimos el concepto de variedad diferencial; en la sección 1.4 damos los conceptos de categorías que necesitaremos en los capítulos posteriores.

1.1. Notaciones básicas y terminología

A lo largo de este trabajo convenimos en utilizar las siguientes notaciones.

Sea $d \geq 1$ un entero, definimos el espacio Euclídeo d dimensional $\mathbb{R}^d$ de la forma siguiente

$$\mathbb{R}^d = \{x : x = (x_1, \dots, x_d) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i\}$$

Definimos la i -ésima función coordenada canónica de $\mathbb{R}^d$, denotada por $x_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$x_i(a) = a_i.$$

La función coordenada canónica x_1 en $\mathbb{R}$, la denotamos simplemente por x , es decir para cada $a \in \mathbb{R}$

$$x(a) = a.$$

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función, entonces tenemos que f_i es llama la i -ésima función componente de f , es decir

$$f_i = x_i \circ f.$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces denotamos la derivada de f en t por

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $1 < i < n$, entonces denotamos la derivada parcial de f con respecto a x_i en t como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + h, t_{i+1}, \dots, t_n) - f(t_1, \dots, t_n)}{h}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^d$, entonces denotamos $B_r(x)$ como la bola de radio $r > 0$ y centro x , dada por.

$$B_r(x) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq r \right\}.$$

La bola de radio $r > 0$ y centro en el origen la denotamos $B(r)$. C_r denota el cubo abierto de lado de longitud $2r$ en el origen $\mathbb{R}^d$

$$C_r = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| < r \text{ para todo } i \right\}.$$

Denotamos por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los números complejos. $\mathbb{C}^n$ denota el espacio n -dimensional, dado por

$$\mathbb{C}^n = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Si $f : A \rightarrow B$ es una función y si $C \subset B$, denotamos la imagen inversa de C por f^{-1} , dada por

$$f^{-1}(C) = \left\{ a \in A \mid f(a) \in C \right\}.$$

Si X es un espacio topológico y U un subconjunto de X , la clausura de U la denotamos por $\overline{U}$.

Si $n = (n_1, \dots, n_d)$ es una d -tupla de $\mathbb{N}^d$, denotamos

$$[n] = \sum_i n_i,$$

$$n! = \prod_{i=1}^d n_i!,$$

y

$$\frac{\partial^n}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{[n]}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_d^{n_d}}.$$

Si $n = (0, \dots, 0)$, entonces denotamos

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(f) = f.$$

Sea $A \subset \mathbb{R}^d$, decimos que A es abierto en $\mathbb{R}^d$ si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.

1.2. Definiciones básicas

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una topología en X es una familia T de subconjuntos de X que satisface:

1. El $\emptyset$ y X son miembros de T .
2. La unión de miembros de T es un miembro de T .
3. La intersección finita de miembros de T es un miembro de T .

El par (X, T) donde X es un conjunto y T una topología en X , se denomina espacio topológico y los elementos de T se denominan conjuntos abiertos de X .

Definición 1.2. Sea (X, T) un espacio topológico y $x \in X$. Un entorno U de x es un conjunto tal que existe un abierto $O \in T$ tal que $x \in O \subseteq U$.

Definición 1.3. Un espacio topológico X es de Hausdorff si para cada par de puntos $x, y \in X$, distintos, existen entornos U de x y V de y tales que $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.4. Sea X un conjunto no vacío, A un conjunto de índice, $Y \subseteq X$ y $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de subconjuntos de X . Decimos que $\{D_\alpha\}_\alpha$ es un cubrimiento para Y si $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$.

Una familia $\{F_\alpha\}_\alpha$ de subconjuntos de un espacio topológico X es localmente finita si para cada $x \in X$, existe un entorno U de x tal que $U \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para un número finito de índice α .

Definición 1.5. Sea $\{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento de un espacio topológico X . Una colección $\{V_\beta\}_\beta$ es un refinamiento de $\{U_\alpha\}_\alpha$ si para cada β , existe un α tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

Definición 1.6. Un espacio topológico Hausdorff es paracompacto si cada cubrimiento abierto $\{O_\alpha\}_\alpha$ tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Definición 1.7. Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una función biyectiva entre espacios topológicos, decimos que φ es un homeomorfismo si φ y φ^{-1} son continuas.

Definición 1.8. Sean X, Y dos espacios topológicos, decimos que X homeomorfo a Y si existe un homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$.

Definición 1.9. Sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definimos el soporte de φ como el subconjunto de X definido por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

1.3. Variedades diferenciales

Definición 1.10. Sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto, y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Decimos que f es de clase C^k en U (o simplemente f es C^k) si para todo no negativo k existen las derivadas parciales $\frac{\partial^\alpha f}{\partial r^\alpha}$ y son continuas en U para cada $[\alpha] \leq k$. En particular, f es C^0 si f es continua. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que f es diferenciable de clase C^k si cada función componente $f_i = x_i \circ f$ es de clase C^k . Decimos que f es de clase C^∞ si f es de clase C^k para todo $k \geq 0$.

Definición 1.11. Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una función continua. Decimos que f es diferenciable en $p \in M$ si para cada carta (U, φ) en M y cada carta (V, ϕ) en N con $f(p) \in V$ la aplicación

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \phi(V)$$

es diferenciable en el punto $\varphi(p)$.

Definición 1.12. Sea $n \in \mathbb{N}$ y X un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto segundo numerable. Una carta n -dimensional de X es un par (U, φ) , donde U es un abierto y conexo de X y φ es un homeomorfismo sobre su imagen abierta.

Las componentes de $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son llamadas coordenadas locales.

Definición 1.13. Sean (U, φ) , (V, ϕ) dos cartas n -dimensionales. Decimos que son compatibles si $U \cap V \neq \emptyset$ y la aplicación $\varphi \circ \phi^{-1}$ es una biyección diferenciable cuya inversa también es diferenciable.

Definición 1.14. Sean (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) dos cartas, definimos las funciones de solapamiento o transición de la forma siguiente:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

y

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

Definición 1.15. Dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son compatibles si y sólo si las funciones de solapamiento son suaves.

Definición 1.16. Sea I un conjunto de índice cualesquiera. Un atlas para X , es una colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de pares de cartas compatibles.

Definición 1.17. Sea M una variedad topológica, decimos que M es suave si tiene un atlas donde cada función de la carta es suave.

Definición 1.18. Una n -estructura diferenciable en X es una familia de n -cartas compatibles cuyos abiertos cubren a X .

Definición 1.19. Un atlas maximal respecto a una estructura diferenciable A , es una estructura diferenciable Γ que contiene a A y que es maximal respecto a esta propiedad.

Definición 1.20. Una n -variedad diferenciable es un espacio topológico X junto con un atlas maximal Γ respecto a una n -estructura diferenciable prefijada.

Ejemplo 1.21. Consideremos la esfera unitaria, dada por

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

S^n tiene un atlas que está formado por 2 cartas $(C_{\pm}, \phi_{\pm})$, donde

$$C_{\pm} = S^n \setminus \{\pm 1, 0, \dots, 0\}$$

y

$$\phi_{\pm} = (x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{\pm 1 - x_0} (x_1, \dots, x_n).$$

Teorema 1.22. Dada M una variedad diferenciable y $A \subseteq M$ un abierto y conexo, entonces A es una variedad diferenciable.

Demostración. Véase [32] □

Definición 1.23. Un espacio localmente Euclídeo X de dimensión d es un espacio topológico de Hausdorff X en donde cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^d$.

Si φ es un homeomorfismo de un conjunto abierto conexo $U \subset M$ sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, φ es llamada función coordenada, las funciones $x_i = x_i \circ \varphi$ son llamadas funciones coordenadas y el par (U, φ) (algunas veces se denota por $U = (x_1, \dots, x_d)$) es llamado sistema de coordenadas.

Un sistema de coordenadas (U, φ) es llamado sistema de coordenadas cúbico si $\varphi(U)$ es un cubo abierto cerca del origen de $\mathbb{R}^d$. Si $m \in U$ y $\varphi(m) = 0$, entonces el sistema de coordenadas cúbico está centrado en m .

Definición 1.24. Una estructura diferenciable de clase C^k ($1 \leq k \leq n$) en un espacio localmente Euclídeo X es una colección $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) : \alpha \in A\}$ de cartas locales que satisface las siguientes propiedades:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = M$.
2. $\varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}$ es C^k , para todo $\alpha, \beta \in A$.
3. La colección F es maximal con respecto a 2, es decir si (U, φ) es un sistema de coordenada tal que $\varphi \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$ y $\varphi^{-1} \circ \varphi_{\alpha}$ son de clase C^k para todo $\alpha \in A$, entonces $(U, \varphi) \in F$.

En este contexto podemos mencionar otros tipos de estructura diferenciables en espacios localmente Euclídeos denominados estructura de clase C^w o estructura analítica compleja.

Definición 1.25. Una variedad d -dimensional diferencial de clase C^k (similarmente para C^w o analítica compleja) es una par (M, F) donde M es un espacio localmente Euclídeo d -dimensional, segundo contable junto con una estructura diferenciable F de clase C^k .

Usualmente denotamos la variedad diferencial (M, F) simplemente por M . El término suave indica diferenciabilidad de clase C^∞ .

Definición 1.26. Sea $U \subset M$ abierto. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ en U (denotada $f \in C^\infty$) si $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ para cada función coordenada φ en M .

Una función continua $\psi : M \rightarrow N$ es diferenciable de clase C^∞ (denotado $\psi \in C^\infty$ o simplemente $\psi \in C^\infty$) si $g \circ \psi$ es una función C^∞ en $\psi^{-1}(\text{dominio de } g)$ para todas las funciones g definidas en conjuntos abiertos de N . Equivalentemente la función continua ψ es C^∞ si $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ es C^∞ para cada función coordenada τ en M y φ en N .

1.4. Conceptos de teoría de categorías

Definición 1.27. Una categoría C consiste en lo siguiente:

1. Una clase de objetos, denotados por $\text{Ob}(C)$.
2. Para cada par de objetos $x, y \in \text{Ob}(C)$ un conjunto de morfismos de x a y denotados por $C(x, y)$. Si $f \in C(x, y)$ entonces x es llamado el dominio de f , y es el rango de f , lo denotamos por $f : x \rightarrow y$.
3. Sean $x, y, z \in \text{Ob}(C)$ y $f \in C(x, y)$, $g \in C(y, z)$. Definamos $C(x, y) \times C(y, z) \rightarrow C(x, z)$. Si $f : x \rightarrow y$ y $g : y \rightarrow z$, entonces $g \circ f : x \rightarrow z$, llamado composición de f y g .

Los datos antes mencionados están sujetos a los siguientes axiomas:

1. Cada morfismo f es determinado únicamente, por el par ordenado $(x, y) \in \text{Ob}(C)$ tal que $f \in C(x, y)$.
2. La composición de morfismos es asociativa, es decir para cada cuádruple ordenado $x, y, z, w \in \text{Ob}(C)$ con $f \in C(x, y)$, $g \in C(y, z)$ y $h \in C(z, w)$, tal que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
3. Para cada para objeto $x \in \text{Ob}(C)$, existe el morfismo identidad $1_x \in C(x, x)$ tal que $f \circ 1_x = 1_x \circ f = f$.

Ejemplo 1.28. La categoría Top de los espacios topológicos, dada por:

$\text{Ob}(\text{Top})$ =la clase de los espacios topológicos.

Si $x, y \in \text{Ob}(\text{Top})$ denotamos por

$$\text{Top}(x, y) = \{f : x \rightarrow y \mid f \text{ es continua} \}$$

Definición 1.29. Sean C y D dos categorías. Un functor $F: C \rightarrow D$ de la categoría C a la categoría D , consiste en lo siguiente:

1. Una aplicación $F: \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$.
2. Para cada objeto $x \in C$, se le asigna un objeto $F(x)$ de D , y para cada morfismo $f \in C(x, y)$ se asigna un morfismo $F(f) \in D(F(x), F(y))$.

Los datos mencionados anteriormente están sujetos a los siguientes axiomas:

1. F preserva la composición, es decir si $x, y, z \in \text{Ob}(C)$, $f \in C(x, y)$, $g \in C(y, z)$, entonces $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.
2. F preserva identidades, es decir si $x \in \text{Ob}(C)$, tenemos que $F(1_x) = 1_{F(x)}$.

Ejemplo 1.30. El functor identidad $I: C \rightarrow C$ dado por:

1. En objetos si $x \in \text{Ob}(C)$, $I(x) = x$.
2. En morfismos si $f \in C(x, y)$, $I(f) = f$.

Definición 1.31. Sea F un functor, decimos que F es contravariante si se tiene lo siguiente:

1. Sean $x, y \in \text{Ob}(C)$. Para todo $f \in C(x, y)$ tenemos que $F(f) \in C(y, x)$.
2. Sean $x, y, z \in \text{Ob}(C)$. Si $f \in C(x, y)$ y $g \in C(y, z)$, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Ejemplo 1.32. La categoría $\text{Vect}^{\mathbb{R}}$ de los espacios vectoriales Reales, dada por:

$\text{Ob}(\text{Vect}^{\mathbb{R}})$ =la clase de los espacios vectoriales reales.

Si $V, W \in \text{Ob}(\text{Vect}^{\mathbb{R}})$ denotamos por

$$\text{Vect}^{\mathbb{R}}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ es una transformación lineal biyectiva} \}$$

Definamos en $\text{Vect}^{\mathbb{R}}$ un functor contravariante, es decir $F: \text{Vect}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Vect}^{\mathbb{R}}$ consiste en lo siguiente:

1. En objetos si $V \in \text{Ob}(\text{Vect}^{\mathbb{R}})$, $F(V) = V^* \in \text{Ob}(\text{Vect}^{\mathbb{R}})$.
2. En morfismos si $V, W \in \text{Ob}(\text{Vect}^{\mathbb{R}})$ y $f \in \text{Vect}^{\mathbb{R}}(V, W)$, $F(f) = f^*$.

En efecto sean $V, W, Z \in \text{Ob}(\text{Vect}^{\mathbb{R}})$ y $f \in \text{Vect}^{\mathbb{R}}(V, W)$, $g \in \text{Vect}^{\mathbb{R}}(W, Z)$, entonces

$$\begin{aligned} F(g \circ f) &= (g \circ f)^* \\ &= f^* \circ g^* \\ &= F(f) \circ F(g) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} F(1_V) &= 1_V^* \\ &= 1_{V^*} \\ &= 1_{F(V)} \end{aligned}$$

Por lo tanto F es un functor contravariante.

Definición 1.33. Dada una categoría C , le podemos asociar una categoría opuesta C^{op} que consta de lo siguiente:

1. Los objetos de C^{op} son los mismos objetos de C .
2. Los morfismos f^{op} de C^{op} satisfacen que para todo $f \in C(x, y)$ se tiene que $f^{op} \in C(y, x)$.

Ejemplo 1.34. La categoría Grp de grupo, dada por:

$$\text{Ob}(\text{Grp}) = \text{la clase de los grupos algebraicos.}$$

Si $G, H \in \text{Ob}(\text{Grp})$ denotamos por

$$\text{Grp}(G, H) = \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ es un monomorfismo de grupo} \}$$

Definamos la categoría opuesta de Grp , denotada por Grp^{op} .
Sea $G \equiv (G, *)$ un objeto de Grp , Grp^{op} consiste en lo siguiente:

1. $\text{Ob}(\text{Grp}^{op}) = \text{Ob}(\text{Grp})$.
2. Si $G, H \in \text{Ob}(\text{Grp})$ denotamos por

$$\text{Grp}^{op}(G, H) = \{ f^{op} : H \rightarrow G \mid f^{op} \text{ es un monomorfismo de grupo} \}$$

Definición 1.35. Sea C una categoría y $x, y \in \text{Ob}(C)$, diremos que un morfismo $f \in C(x, y)$ es un isomorfismo si existe un morfismo $g \in C(y, x)$ tal que

$$\begin{aligned} g \circ f &= 1_x \\ f \circ g &= 1_y \end{aligned}$$

Definición 1.36. Dados dos funtores $F, G: C \rightarrow D$, una transformación natural $\tau: F \rightarrow G$ es una función que asigna a cada $x \in \text{Ob}(C)$ un morfismo $\tau_x: Fx \rightarrow Gx$ de D tal que para todo $f \in C(x, y)$ el siguiente diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\tau_x} & Gx \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ Fy & \xrightarrow{\tau_y} & Gy \end{array}$$

Diremos que un morfismo ς de una categoría C es una equivalencia si para todo $x \in \text{Ob}(C)$ se tiene que ς_x es un isomorfismo

Definición 1.37. Sea C, D categorías y $F: C \rightarrow D$ un funtor, diremos que un F es una equivalencia si existe un funtor $G: D \rightarrow C$ tal que

$$\begin{aligned} G \circ F &= 1_C \\ F \circ G &= 1_D \end{aligned}$$

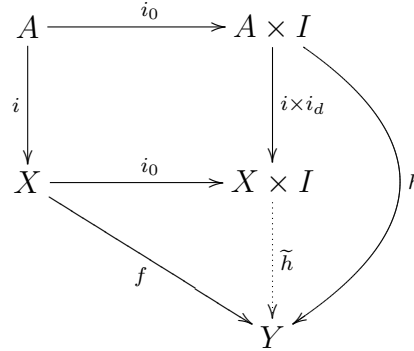
1.5. Grupo Fundamental

Sea Top_x la categoría de los espacios topológicos con un punto base $x \in X$. Los morfismos de Top_x son $f: X \rightarrow Y$ continuas entre espacios topológicos que van del punto base $x \in X$ al punto base $y = f(x) \in Y$.

Sea $\mathcal{G}$ la categoría de los grupos, los morfismos de $\mathcal{G}$ son homomorfismos de grupos.

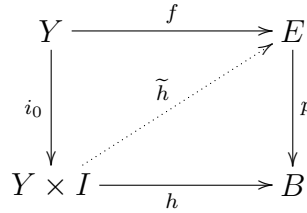
Definición 1.38. El grupo fundamental es un funtor $\Pi: Top_x \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\Pi(X, x) = \Pi_1(X, x)$ y para todo morfismo $f: X \rightarrow Y$ el funtor Π le asigna un morfismo $\Pi(f): \Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(Y, y = f(x))$.

Definición 1.39. Una función $i: A \rightarrow X$ es una cofibración si satisface la propiedad de extensión (HEP), es decir si $h \circ i_o = f \circ i$ en el diagrama siguiente



entonces existe $\tilde{h}$ tal que el diagrama anterior conmuta, donde $i_0(x) = (x, 0)$.

Definición 1.40. Sean E, B espacios topológicos. Una función sobreyectiva $p : E \rightarrow B$ es una fibración si satisface la propiedad de cubrimiento homotópico (CHP), es decir si $h \circ i_0 = p \circ f$ en el diagrama siguiente



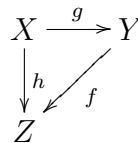
entonces existe $\tilde{h}$ tal que el diagrama anterior conmuta, donde $i_0(y) = (y, 0)$.

Definición 1.41. Sean X, Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ se llama equivalencia (homotópica) débil si induce isomorfismos $f_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ para todo $x_0 \in X$.

1.5.1. Modelo de categoría cerrada

Definición 1.42. Un modelo de categoría cerrada C es una categoría que está equipada con tres clases de morfismos, llamados cofibración, fibración y equivalencia débil, los cuales satisfacen los siguientes axiomas

1. La categoría C es cerrada bajo límites finitos y colímites.
2. Supongamos que el siguiente diagrama conmuta en C



Entonces si elegimos dos cualesquiera de f, g, h tales que sean una equivalencia débil entonces el tercero será equivalencia débil.

3. Si f es un retracto de g y g es equivalencia débil, fibración o cofibración entonces f también lo será.
4. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde i es una cofibración y p es una fibración, entonces la flecha punteada del diagrama existe si i o p es una equivalencia débil.

5. Cualquier función f puede ser factorizada
 - a) $f = p \circ i$ cuando p es una fibración y i una cofibración trivial.
 - b) $f = q \circ j$ cuando q es una fibración trivial y j una cofibración.

Capítulo 2

Álgebra diferencial graduada

El propósito de este capítulo es presentar las definiciones algebraicas y de geometría diferencial que nos permitan comprender los conceptos del álgebra diferencial graduada casi-commutativa. En la sección 2.1 definimos espacio vectorial, álgebra, anillo, ideal y R -módulo y en la sección 2.2 damos la definición algebraica del concepto de álgebra diferencial graduada. En la sección 2.3 damos la definición de fibrado tangente, cotangente y en la sección 2.4 exponemos el teorema de Stokes.

2.1. Espacio vectorial, álgebra, anillo, ideal y R -módulo.

Definición 2.1. Un espacio vectorial V sobre K consta de lo siguiente:

1. V es un grupo abeliano respecto a una operación que denotamos $+$.
2. Si $\alpha, \beta \in V$, $c \in K$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:
 - a) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$.
 - b) $(\alpha + \beta)c = \alpha c + \beta c$.
 - c) $c(d\alpha) = (cd)\alpha$.
 - d) $1_K(\alpha) = \alpha$, el elemento 1_K denota el elemento unitario de K con respecto a la multiplicación.

Los elementos de V los llamamos vectores y los elementos del cuerpo K , los denominamos escalares.

Definición 2.2. Sea K un cuerpo, un álgebra sobre un cuerpo K consiste en lo siguiente:

1. Un espacio vectorial V sobre K .

2. Una operación binaria, llamada multiplicación de vectores, que satisface los siguiente:

Para todo $c \in K$ y $\alpha, \beta, \gamma \in V$.

- a) $(c\alpha)\beta = c(\alpha\beta)$.
- b) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.
- c) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Si además tenemos que para todo α, β, γ , $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, decimos que es un álgebra asociativa sobre K .

Definición 2.3. Un anillo es una terna de objetos $(R, +, \cdot)$ que consta de lo siguiente:

1. R es un conjunto no vacío.
2. Las aplicaciones están definidas de la forma siguiente $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$.
3. $(R, +)$ es un grupo abeliano.
4. La aplicación $\cdot_R$ es asociativa, $a(bc) = (ab)c$ para todo a, b, c en R .
5. Las operaciones $+$ y $\cdot$ se distribuyen a la derecha, $(a + b)c = ac + bc$ y a izquierda $a(b + c) = ab + ac$ para todo a, b, c en R .

En lo que sigue nos referiremos a un anillo $(R, +_R, \cdot_R)$ como R . Si existe un elemento $1 \in R$ tal que para todo $a \in R$ se tiene que $a1 = 1a = a$, decimos que R es un anillo con unidad.

Un anillo R es conmutativo si para todo $a, b \in R$ se tiene que $ab = ba$. Si existe un entero positivo p tal que para todo $a \in R$ se satisface que $\underbrace{a + \dots + a}_{p\text{-veces}} = 0$, entonces decimos

que R tiene característica p . Si no existe tal entero decimos que R es de característica cero. En este trabajo utilizamos anillo conmutativos con identidad y de característica cero.

Definición 2.4. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo, un ideal I de R consta de lo siguiente:

1. I es un subconjunto no vacío de R .
2. Si $a, b \in I$ entonces $a - b \in I$.
3. Para todo $a \in R$ y $m \in I$ se tiene que $a \cdot m \in I$.

Definición 2.5. Sea R un anillo y $(M, +)$ un grupo abeliano, decimos que M es un R -módulo a izquierda si se tienen lo siguiente:

Existe una aplicación $\varphi : R \times M \rightarrow M$, $\varphi(r, m) = rm$ que satisface las siguientes propiedades.

1. Para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$, $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$.
2. Para todo $m_1, m_2 \in M$ y $r \in R$, $r(m_1 + m_2)m = rm_1 + mr_2$.
3. Para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$, $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$.

De manera análoga se define un R -módulo a derecha, a la aplicación φ se le denomina acción y decimos que R actúa en M .

Sea R un anillo, M y N R -módulos. Una aplicación $\varphi : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de R -módulos si es un homomorfismo de grupos y además se tiene que $\varphi(rm) = r\varphi(m)$, para todo $r \in R$ y $m \in M$.

Definición 2.6. Sea R un anillo, si M, N son R -módulos a izquierda, definimos la suma directa de M y N denotada por $M \oplus N$ de la forma siguiente:

$$M \oplus N = \{(x, y) | x \in M, y \in N\}.$$

En general dados R -módulos $(M_i)_{i \in I}$, definimos la suma directa de $(M_i)_{i \in I}$ como

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} | x_i \in M_i, \text{ un número finito de } x_i \text{ no son nulos}\}.$$

Por otro lado si eliminamos la condición sobre los x_i nulos en la suma directa $\bigoplus_{i \in I} M_i$, tenemos entonces un producto directo, que denotamos por $\prod_{i \in I} M_i$.

Definición 2.7. Sean M, N R -módulos y consideremos el grupo abeliano generado por $M \times N$ que denotamos (M, N) , consideremos I el subgrupo generado por todos los elementos de la forma

$$\begin{aligned} &< (m_1 + m_2, n_1) - (m_1, n_1) - (m_2, n_1); (m_1, n_1 + n_2) - (m_1, n_1) - (m_1, n_2); \\ &\quad (rm_1, n_1) - r(m_1, n_1); (m_1, rn_1) - r(m_1, n_1) > \end{aligned}$$

para todo $m_1, m_2 \in M, n_1, n_2 \in N, r \in R$, definimos el producto tensorial de M y N sobre R como

$$M \otimes N = (M, N)/I.$$

2.2. Álgebra diferencial graduada (adg)

Definición 2.8. Sea R un anillo conmutativo con identidad. Un álgebra diferencial graduada (adg) sobre R es una terna (A, m, d) formada por lo siguiente:

1. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, A^k es un R -módulo.
2. $m_A : A^k \otimes A^l \rightarrow A^{k+l}$ y $d_A : A^k \rightarrow A^{k+l}$ son homomorfismos de R -módulos.

3. m es un producto asociativo, es decir $m_A(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$ para todo $a, b, c \in A$. Si no hay lugar a confusión denotaremos el producto $m(a, b)$ por ab .
4. d satisface la siguiente regla de Leibniz, $d(ab) = d(a)b + (-1)^{\bar{a}}ad(b)$ para todo $a, b \in A$.
5. $d^2 = 0$.

Definición 2.9. Sean (A, m, d) y (B, m, d) dos álgebras diferenciales graduadas, una función $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de álgebras diferenciales graduadas si se satisface:

1. $f(m(a, b)) = m(f(a), f(b))$ para todo $a, b \in A$.
2. $d \circ f = f \circ d$.

Definición 2.10. Sean (A, m, d) y (B, m, d) dos álgebras diferenciales graduadas. Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de álgebras diferenciales, decimos que f es un isomorfismo si la aplicación inducida $f^* : H(A) \rightarrow H(B)$ es un isomorfismo en cohomología.

Definición 2.11. Sea (A, m, d) un adg. Un módulo diferencial graduado (mdg) sobre A es una terna (M, m_M, d_M) formada por lo siguiente:

1. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, M^k es un R -módulo.
2. $m_M : A^k \otimes M^l \rightarrow M^{k+l}$ y $d_M : M^k \rightarrow M^{k+l}$ son homomorfismos de R -módulos.
3. m es un producto asociativo, es decir $m(a, m(b, m)) = m(m(a, b), m)$ para todo $a, b \in A$ y $m \in M$. Si no hay lugar a confusión denotaremos el producto $m_M(a, m)$ por am .
4. d_A satisface la siguiente regla de Leibniz, $d_A(am) = d_A(a) \cdot m + (-1)^{\bar{a}}a \cdot d_M(m)$ para todo $a \in A$, $m \in M$.
5. $d_M^2 = 0$.

Definición 2.12. Sea R un anillo conmutativo con unidad, V un módulo sobre R y $r > 0$, decimos que una función $L : V^r = V \underbrace{\times \cdots \times}_r V \rightarrow R$ es multilineal si para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in V^r$ se tiene que $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ es lineal como función de cada α_i cuando los otros α_j se dejan fijos, es decir, si para cada i , $c \in R$ se cumple que

$$L(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i \dots \alpha_r) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_i \dots \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \beta_i \dots \alpha_r).$$

Una función multilineal en V^r se llama también forma r -lineal sobre V o forma multilineal de grado r sobre V , tales funciones se llaman r -tensores sobre V .

Definición 2.13. Sea $r > 0$, definimos

$$M^r(V) = \{L : V^r \rightarrow R \mid L \text{ es una función multilineal}\}.$$

Proposición 2.14. $M^r(V)$ es un R -módulo.

Demostración. Sean $L, M \in M^r(V)$, definamos la suma $L + M$ de la forma siguiente: $(L + M)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + M(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Si $c \in k$, definimos el producto cL de la forma siguiente: $(cL)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Demostremos ahora que $M^r(V)$ es un K -módulo.

En efecto, $M^r(V) \neq \emptyset$, por que $1_K \in M^r(V)$.

$$\begin{aligned} ((L + M) + N)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= (L + M)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + N(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= (L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + M(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + N(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) \\ &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + (M(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + N(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) \\ &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + (M + N)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= (L + (M + N))(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

El elemento neutro de $M^r(V)$ es el $\Theta : V^r \rightarrow K$, definida por $\Theta(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0 \in K$, debido a que:

$$\begin{aligned} (L + \Theta)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + \Theta(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + 0 \\ &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

Análogamente se hace para $(\Theta + L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

El elemento inverso de $M^r(V)$ es el $-L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, debido a que

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + (-L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) &= (-L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) + L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= 0 \\ &= \Theta(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

Sean $c_1, c_2 \in R$, $L_1, L_2 \in M^r(V)$ y $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in V^r$.

$$\begin{aligned} ((c_1 + c_2)L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= (c_1 + c_2)L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= c_1L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + c_2L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= (c_1L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + (c_2L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= (c_1L + c_2L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1(L_1 + L_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= c_1(L_1(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + L_2(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) \\
&= c_1L_1(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + c_1L_2(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\
&= (c_1L_1)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + (c_1L_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \\
&= (c_1L_1 + c_1L_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_r).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((c_1c_2)L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= (c_1c_2)L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\
&= c_1(c_2L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)) \\
&= c_1(c_2L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r).
\end{aligned}$$

$$1 \in K, (1L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 1L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

□

Definición 2.15. Sea V un módulo sobre R un anillo con unidad, sean L una función multilinear sobre V^r y M una función multilinear sobre V^s respectivamente, se define la función $L \otimes M : V^{r+s} \rightarrow R$ de la forma siguiente

$$(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}).$$

La función $L \otimes M$ se llama producto tensorial de L y M .

Proposición 2.16. Sea V un módulo sobre R un anillo con unidad, entonces $(L \otimes M)$ es una función multilinear sobre V^{r+s} .

Demostración. Sea $c \in R$, para cada i debemos probar que $(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_{r+s}) = c(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{r+s}) + (L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_{r+s})$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_{r+s}) &= L(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) \\
&= (cL(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_r)) \cdots \\
&\cdots M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) \\
&= cL(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) + \cdots \\
&\cdots + L(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) \\
&= c(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{r+s}) + \cdots \\
&\cdots + (L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_{r+s}).
\end{aligned}$$

□

Dado que $(L \otimes M)$ es una función multilinear sobre V^{r+s} , podemos utilizar la siguientes notación $(L \otimes M)(\alpha, \beta) = L(\alpha)M(\beta)$ donde $\alpha \in V^r$ y $\beta \in V^s$.

Proposición 2.17. Sea V un módulo sobre R un anillo con unidad, sean L, L_1 formas r -lineales sobre V y M, M_1 formas s -lineales sobre V y sea $c \in R$. Entonces

1. $(cL + L_1) \otimes M = c(L \otimes M) + (L_1 \otimes M)$.
2. $L \otimes (cM + M_1) = c(L \otimes M) + (L \otimes M_1)$.

Demostración. Sean $\alpha \in V^r$ y $\beta \in V^s$.

$$\begin{aligned}
 \left((cL + L_1) \otimes M \right)(\alpha, \beta) &= (cL + L_1)(\alpha)M(\beta) \\
 &= (cL(\alpha) + L_1(\alpha))M(\beta) \\
 &= cL(\alpha)M(\beta) + L_1(\alpha)M(\beta) \\
 &= c(L \otimes M)(\alpha, \beta) + (L_1 \otimes M)(\alpha, \beta). \\
 \\
 \left(L \otimes (cM + M_1) \right)(\alpha, \beta) &= L(\alpha)(cM + M_1)(\beta) \\
 &= L(\alpha)(cM(\beta) + M_1(\beta)) \\
 &= cL(\alpha)M(\beta) + L(\alpha)M_1(\beta) \\
 &= c(L \otimes M)(\alpha, \beta) + (L \otimes M_1)(\alpha, \beta).
 \end{aligned}$$

□

Definición 2.18. Sea L una forma r -lineal sobre un R -módulo V . Se dice que L es alternada si $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0$, siempre que $\alpha_i = \alpha_j$, con $i \neq j$.

Proposición 2.19. Sea L es una forma r -lineal sobre un R -módulo V . Si L es alternada, entonces $L(\alpha_1, \dots, \alpha_i \dots, \alpha_j \dots, \alpha_r) = -L(\alpha_1, \dots, \alpha_j \dots, \alpha_i \dots, \alpha_r)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 0 &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j \dots, \alpha_i + \alpha_j \dots, \alpha_r) \\
 &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_i \dots, \alpha_i \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \alpha_i \dots, \alpha_j \dots, \alpha_r) \\
 &+ L(\alpha_1, \dots, \alpha_j \dots, \alpha_i \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \alpha_j \dots, \alpha_j \dots, \alpha_r) \\
 &= 0 + L(\alpha_1, \dots, \alpha_i \dots, \alpha_j \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \alpha_j \dots, \alpha_i \dots, \alpha_r) + 0 \\
 &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_i \dots, \alpha_j \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \alpha_j \dots, \alpha_i \dots, \alpha_r).
 \end{aligned}$$

□

Definición 2.20. Sea $r \geq 0$, $\Lambda^r(V)$ es la colección de todas las formas r -lineales alternadas sobre V .

Convenimos que $\Lambda^0(V) = K$, donde K es el cuerpo y además $\Lambda^1(V)$ es el espacio dual de V . Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces se induce una aplicación $T^* : \Lambda^r(W) \rightarrow \Lambda^r(V)$ definida por

$$T^*(f)(v_1, \dots, v_r) = f(T(v_1), \dots, T(v_r))$$

y además satisface las siguientes propiedades

1. T^* es lineal.
2. T es monomorfismo si y sólo si T^* es epimorfismo.
3. T es epimorfismo si y sólo si T^* es monomorfismo.

Definición 2.21. Sean $\tau \in \Lambda^r(V)$ y $\mu \in \Lambda^s(V)$. Definimos el producto exterior denotado por $\wedge$ de τ por μ como la $(r + s)$ -forma definida de la manera siguiente

$$(\tau \wedge \mu)(v_1, \dots, v_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\rho \in S_{r+s}} (-1)^\rho \tau(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(r)}) \mu(v_{\rho(r+1)}, \dots, v_{\rho(r+s)})$$

donde S_{r+s} es el grupo de permutaciones de $r + s$ elementos.

2.3. Fibrado: tangente, cotangente

Definición 2.22. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$, denotamos $F(M, p)$ conjunto de aplicaciones diferenciales de un entorno de p en M con valores en el cuerpo K .

Si $f, g \in F(M, p)$ y $c \in K$, entonces

1. $cf + g \in F(M, p)$
2. $fg \in F(M, p)$

esto nos permite dar a $F(M, p)$ una estructura de álgebra.

Definición 2.23. Sea K un cuerpo, M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un vector tangente a M en p es una aplicación $v : F(M, p) \rightarrow K$ que satisface las siguientes propiedades Si $f, g \in F(M, p)$ y $c \in K$, entonces

1. $v(cf + g) = cv(f) + v(g)$
2. $v(fg) = v(f)v(g)$

Denotamos por $T_p(M)$ al conjunto de todos los vectores tangentes a M en p . Si definimos la siguientes operación

$$(cv_1 + v_2)(f) = cv_1(f) + v_2(f)$$

entonces $T_p(M)$ es un espacio vectorial sobre K .

Definición 2.24. Sea M un variedad diferenciable, definimos

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

y la aplicación $\pi : TM \rightarrow M$ definida por si $v \in T_p M$, entonces $\pi(v) = p$.

Definición 2.25. Sea M una variedad diferencial. El fibrado tangente a M es la terna

$$(TM, \pi, M).$$

Definición 2.26. Sea M una variedad diferenciable. Un campo vectorial sobre M es una sección diferencial del fibrado tangente (TM, π, M) .

Definición 2.27. Sea $r \geq 0$ y M un variedad diferenciable, definimos

$$\Lambda^r(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p M)$$

y la aplicación $\pi : \Lambda^r(M) \rightarrow M$ definida por si $v \in \Lambda^r(T_p M)$, entonces $\pi(v) = p$.

Definición 2.28. Sea M una variedad diferencial. El fibrado cotangente a M es la terna

$$(\Lambda^r(M), \pi, M).$$

$(\Lambda^r(M), \pi, M)$ es un fibrado diferenciable de fibra $\Lambda^r(T_p M)$

Definición 2.29. Una r -forma diferenciable w es una sección de fibrado $(\Lambda^r(M), \pi, M)$, es decir si $\mathcal{X}$ es un campo vectorial sobre M y $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(M)$, entonces para todo $p \in M$ se tiene que

$$w(X_1, \dots, X_r) \in F(M, p),$$

donde

$$w(X_1, \dots, X_r)(p) = w(p)(X_1(p), \dots, X_r(p))$$

Definición 2.30. Sea $r \geq 0$ y M una variedad diferencial, definimos $\Omega^r(M)$ al espacio vectorial de las r -formas diferenciales de M .

Además tenemos que $\Omega^0(M) = F(M, K)$ como el conjunto de funciones diferenciales de M en K y si $\alpha \in \Omega^r(M)$, $\beta \in \Omega^s(M)$, entonces $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{r+s}(M)$.

Teorema 2.31. Sea M una variedad diferenciable, existe una única aplicación lineal $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ que satisface lo siguientes:

1. Si $f \in \Omega^0(M)$, entonces $d(f) = df$ el diferencial de f .
2. Si $w_1 \in \Omega^r(M)$ y $w_2 \in \Omega^s(M)$, entonces

$$d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^{rs} w_1 \wedge dw_2.$$

está aplicación mencionada anteriormente se denomina derivada exterior.

Demostración. Vease la demostración en el F. Warner [9]. $\square$

Definición 2.32. Sea $w \in \Omega^r(M)$, decimos que w es cerrada si $dw = 0$.

Definición 2.33. Sea $w \in \Omega^r(M)$, decimos que w es exacta si existe $\tau \in \Omega^{r-1}(M)$ tal que $d\tau = w$.

Definición 2.34. Un complejo diferencial A es una sucesión de transformaciones lineales entre espacios vectoriales sobre un cuerpo K i.e

$$A = \dots \xrightarrow{d_{n-1}} A^n \xrightarrow{d_n} A^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A^{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \dots$$

tal que se satisface el siguientes axioma

$$d_n \circ d_{n-1} = 0$$

para todo n .

Definición 2.35. El n -ésimo grupo de cohomología de A se define de la forma siguientes:

$$H^n(A) = \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n-1}}$$

El n -ésimo grupo de cohomología de A es un espacio vectorial sobre K .

Definición 2.36. Sea A un complejo de cadenas, decimos que A es exacto en A^n cuando $\text{Ker } d_n = \text{Im } d_{n-1}$ para todo n , en cuyo caso $H^n(A) = 0$.

Definición 2.37. Dados A y B dos complejos de cadenas diferenciables. Una transformación de cadenas $F : A \rightarrow B$ es una familia de transformaciones lineales $\{f_n : A^n \rightarrow B^n\}$ tal que el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A = \dots & \xrightarrow{d_{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d_n} & A^{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A^{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \dots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_{n+2} \\ B = \dots & \xrightarrow{b_{n-1}} & B^n & \xrightarrow{b_n} & B^{n+1} & \xrightarrow{b_{n+1}} & B^{n+2} \xrightarrow{b_{n+2}} \dots \end{array}$$

conmuta.

Definición 2.38. Sean A y B dos complejos diferenciales, $F = \{f_n : A^n \rightarrow B^n\}_{n \geq 0}$ y $G = \{g_n : A^n \rightarrow B^n\}_{n \geq 0}$ dos transformaciones de cadena. Una homotopía de cadenas entre F y G es una familia de transformaciones lineales $\{h_n : A^{n+1} \rightarrow B^n\}_{n \geq 0}$ tales que se satisface:

$$f_n - g_n = \pm(h_n \circ d_n - b_{n-1} \circ d_{n-1})$$

para todo $n \geq 0$ i.e.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A = \dots & \xrightarrow{d_{n-2}} & A^{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d_n} & A^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots \\
 & & \downarrow f_{n-1} & \swarrow h_{n-1} & \downarrow f_n & \swarrow h_n & \downarrow f_{n+1} \\
 B = \dots & \xrightarrow{b_{n-2}} & B^{n-1} & \xrightarrow{b_{n-1}} & B^n & \xrightarrow{b_n} & B^{n+1} \xrightarrow{b_{n+1}} \dots \\
 & & \downarrow g_{n-1} & \swarrow h_{n-1} & \downarrow g_n & \swarrow h_n & \downarrow g_{n+1}
 \end{array}$$

En este caso se dice que F y G son homotópicas y además si A, B son complejos diferenciales y $F = \{f_n : A^n \rightarrow B^n\}_{n \geq 0}$ una transformación de cadenas, entonces para cada n se obtiene un homomorfismo de espacios vectoriales

$$f_n^* : H^n(A) \rightarrow H^n(B)$$

definido de la manera siguientes

$$f_n^*([a]) = [f_n(a)]$$

Proposición 2.39. Si F, G son dos transformaciones de cadenas homotópicas, entonces para todo n ,

$$f_n^* = g_n^*.$$

Demostración. Sea $[x] \in H^n(A)$ tal que $x \in \text{Im}(d_{n-1})$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (f_n - g_n)(x) &= \pm (h_n \circ d_n - b_{n-1} \circ d_{n-1})(z) \\
 &= \pm \left((h_n \circ d_n)(x) - (b_{n-1} \circ d_{n-1})(x) \right) \\
 &= \pm (h_n(0) - (b_{n-1} \circ d_{n-1})(x)) \\
 &= \pm (b_{n-1} \circ h_{n-1})(x) \\
 &= (b_{n-1}(\pm h_{n-1})(x)) \in \text{Im}(b_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_n^*([x]) = [f_n(x)] = [g_n(x)] = g_n^*([x])$$

i.e

$$f_n^* = g_n^*.$$

□

Definición 2.40. Sean A, B y C complejos diferenciales y F, G transformaciones de cadenas se dira que la composición

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es una sucesion exacta corta de transformaciones de cadenas si en el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A^{n-1} & \xrightarrow{a_{n-1}} & A^n & \xrightarrow{a_n} & A^{n+1} & \xrightarrow{a_{n+1}} & A^{n+2} \\
 \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_{n+2} \\
 B^{n-1} & \xrightarrow{b_{n-1}} & B^n & \xrightarrow{b_n} & B^{n+1} & \xrightarrow{b_{n+1}} & B^{n+2} \\
 \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_{n+2} \\
 C^{n-1} & \xrightarrow{c_{n-1}} & C^n & \xrightarrow{c_n} & C^{n+1} & \xrightarrow{c_{n+1}} & C^{n+2} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

cada columna es un complejo exacto.

Teorema 2.41. Si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C \longrightarrow 0$$

es una sucesion exacta corta de transformaciones de cadenas, entonces existe un homomorfismo

$$\Delta_n : H^{n-1}(C) \rightarrow H^n(A)$$

tal que

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}^*} H^{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}^*} H^{n-1}(C) \xrightarrow{\Delta_n} H^n(A) \xrightarrow{f_n^*} H^n(B) \xrightarrow{g_n^*} H^n(C) \cdots \longrightarrow$$

es una sucesion exacta.

Demostración. La demostración se puede ver en M. Spivak [18]. □

2.3.1. La sucesión de Mayer-Vietoris

La sucesión de Mayer-Vietoris permite calcular la cohomología de la unión de dos conjuntos abiertos.

Definición 2.42. Sean U, V conjuntos abiertos tales que $M = U \amalg V$, entonces existe una sucesión de inclusiones

$$M \longleftarrow U \coprod V \begin{matrix} \xleftarrow{i_0} \\ \xleftarrow{i_1} \end{matrix} U \cap V$$

donde $U \coprod V$ es la unión disjunta de U y V y $i_0 : U \cap V \hookrightarrow U$ y $i_1 : U \cap V \hookrightarrow V$ son inclusiones respectivamente.

Aplicando el functor contravariante Ω^* se obtiene la siguiente sucesiones de restricciones de formas:

$$\Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \begin{matrix} \xrightarrow{i_0^*} \\ \xrightarrow{i_1^*} \end{matrix} \Omega^*(U \cap V)$$

la restricción de la forma a la subvariedad está dada por la imagen sobre el pullback inducida por la inclusión. Cuando tomamos las diferencias de las dos ultimas funciones, nosotros obtenemos la sucesión de Mayer-Vietoris la cual está dada por:

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

$$(w, \tau) \longmapsto \tau - w$$

Proposición 2.43. Sea M una variedad diferencial, si M es conexa entonces

$$H_D^0(M) = \mathbb{R}$$

Demostración. La demostración se puede ver en R. Bott [24]. □

2.4. Teorema de Stokes

Sean $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que una integral de Riemann de una función diferenciable f con soporte compacto está dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f |dx_1, \dots, dx_n| = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f \Delta x_1 \cdots \Delta x_n.$$

Definición 2.44. Se define la integral de una n -forma con soporte compacto

$$w = f dx_1 \cdots dx_n$$

como la integral de Riemann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f |dx_1 \cdots dx_n|.$$

Si π es una permutación de $\{1, \dots, n\}$, entonces

$$\int_f |dx_{\pi(1)} \cdots dx_{\pi(n)}| = (\text{sgn } \pi) \int_f |dx_1 \cdots dx_n|.$$

Cuando definimos la integral de una n -forma en $\mathbb{R}^n$ lo hacemos tomando en cuenta la dependencia de las coordenadas $x_1, \dots, x_n$. Además un cambio de coordenadas está dado por un difeomorfismo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con coordenadas $y_1, \dots, y_n$ y $x_1, \dots, x_n$ dado por

$$x_i = x_i \circ T(y_1, \dots, y_n) = T_i(y_1, \dots, y_n).$$

Definición 2.45. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, decimos que T preserva orientación si el determinante del Jacobiano $J(T)$ es siempre positivo.

Definición 2.46. Sea M una variedad diferenciable con atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$, decimos que el atlas es orientado si todas las funciones de transición $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ preservan la orientación, la variedad M es orientable si tiene un atlas orientado.

Teorema 2.47. Si w es una $(n-1)$ -forma con soporte compacto en una variedad orientada M de dimensión n y si la frontera de M , ∂M induce una orientación, entonces

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w.$$

Capítulo 3

Cocadenas en conjuntos simpliciales

En este capítulo desarrollamos los conceptos necesarios para entender el concepto de cocadena casiconmutativa de Karoubi, es por ello que se presenta la siguiente exposición para hacer este capítulo lo más autocontenido posible. En la sección 3.1 introducimos el concepto de complejo simplicial. En la sección 3.2 se estudia la definición de conjunto simplicial. En la sección 3.3 definimos las formas diferenciales sobre $\mathbb{R}^n$. En la sección 3.4 damos la definiciones de álgebra diferencial graduada casi conmutativa. Culminamos en la sección 3.5 dando la definiciones de teoría de cocadenas.

Definición 3.1. Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, definamos las siguientes funciones

$$\bar{\partial}_n : [n] \longrightarrow [n+1]$$

y

$$\bar{\zeta}_n : [n+1] \longrightarrow [n]$$

dadas por

$$\bar{\partial}_n(m) = \begin{cases} m & \text{si } m < n \\ m+1 & \text{si } m \geq n \end{cases}$$

$$\bar{\zeta}_n(m) = \begin{cases} m & \text{si } m \leq n \\ m-1 & \text{si } m > n \end{cases}$$

Proposición 3.2. Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, entonces

- $\bar{\partial}_n \bar{\partial}_m = \bar{\partial}_{m-1} \bar{\partial}_n$ si $n < m$.
- $\bar{\zeta}_n \bar{\zeta}_m = \bar{\zeta}_{m+1} \bar{\zeta}_n$ si $n \leq m$.
- $\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m = \bar{\zeta}_{m-1} \bar{\partial}_n$ si $n < m$.
- $\bar{\partial}_m \bar{\zeta}_m = \bar{\partial}_{m+1} \bar{\zeta}_m = 1$.

$$\blacksquare \bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m = \bar{\zeta}_m \bar{\partial}_{n-1} \text{ si } n > m + 1.$$

Demostración. $\blacksquare \bar{\partial}_n \bar{\partial}_m = \bar{\partial}_{m-1} \bar{\partial}_n \text{ si } n < m.$

Caso 1: $s < n$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n \bar{\partial}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\partial}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s) = s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\partial}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\partial}_{m-1}(s) = s. \end{aligned}$$

Caso 2: $s < n, s \geq m$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n \bar{\partial}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\partial}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s+1) = s+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\partial}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\partial}_{m-1}(s) = s+1. \end{aligned}$$

Caso 3: $s \geq n, s < m$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n \bar{\partial}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\partial}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s) = s+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\partial}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\partial}_{m-1}(s+1) = s+1. \end{aligned}$$

Caso 4: $s \geq n, s \geq m-1$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n \bar{\partial}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\partial}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s+1) \\ &= (s+1)+1 = s+2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\partial}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\partial}_{m-1}(s+1) \\ &= (s+1)+1 = s+2. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \bar{\zeta}_n \bar{\zeta}_m = \bar{\zeta}_{m+1} \bar{\zeta}_n \text{ si } n \leq m.$$

Caso 1: $s \leq n$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\zeta}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\zeta}_n(s) = s.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m+1} \bar{\zeta}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m+1}(\bar{\zeta}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m+1}(s) = s.\end{aligned}$$

Caso 2: $s \leq n, s > m$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\zeta}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\zeta}_n(s-1) = s-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m+1} \bar{\zeta}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m+1}(\bar{\zeta}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m+1}(s) = s-1.\end{aligned}$$

Caso 3: $s > n, s \leq m$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\zeta}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\zeta}_n(s) = s-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m+1} \bar{\zeta}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m+1}(\bar{\zeta}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m+1}(s-1) = s-1.\end{aligned}$$

Caso 4: $s > n, s > m$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\zeta}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\zeta}_n(s-1) \\ &= (s-1)-1 = s-2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m+1} \bar{\zeta}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m+1}(\bar{\zeta}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m+1}(s-1) \\ &= (s-1)-1 = s-2.\end{aligned}$$

■ $\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m = \bar{\zeta}_{m-1} \bar{\partial}_n$ si $n < m$.

Caso 1: $s < n$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s) = s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m-1}(s) = s\end{aligned}$$

Caso 2: $s > m$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s-1) \\ &= (s-1) + 1 = s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m-1}(s+1) \\ &= (s+1) - 1 = s\end{aligned}$$

Caso 3: $s \geq n$, $s < m$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s) = s+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{m-1} \bar{\partial}_n(s) &= \bar{\zeta}_{m-1}(\bar{\partial}_n(s)) \\ &= \bar{\zeta}_{m-1}(s+1) = s+1.\end{aligned}$$

$$\blacksquare \bar{\partial}_m \bar{\zeta}_m = \bar{\partial}_{m+1} \bar{\zeta}_m = 1.$$

Caso 1: $s < m$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_m \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_m(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_m(s) = s.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{m+1} \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_{m+1}(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_{m+1}(s) = s.\end{aligned}$$

Caso 2: $s \geq m$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_m \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_m(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_m(s-1) \\ &= (s-1) + 1 = s.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{m+1} \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_{m+1}(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_{m+1}(s-1) \\ &= (s-1) + 1 = s.\end{aligned}$$

$$\blacksquare \bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m = \bar{\zeta}_m \bar{\partial}_{n-1} \text{ si } n > m+1.$$

Caso 1: $s > n$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s-1) \\ &= (s-1) + 1 = s.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_m \bar{\partial}_{n-1}(s) &= \bar{\zeta}_m(\bar{\partial}_{n-1}(s)) \\ &= \bar{\zeta}_m(s+1) \\ &= (s+1) - 1 = s.\end{aligned}$$

Caso 2: $s < n$, $s > m$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s-1) = s-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_m \bar{\partial}_{n-1}(s) &= \bar{\zeta}_m(\bar{\partial}_{n-1}(s)) \\ &= \bar{\zeta}_m(s) = s-1.\end{aligned}$$

Caso 3: $s \geq n$, $s < m$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n \bar{\zeta}_m(s) &= \bar{\partial}_n(\bar{\zeta}_m(s)) \\ &= \bar{\partial}_n(s) = s+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_m \bar{\partial}_{n-1}(s) &= \bar{\zeta}_m(\bar{\partial}_{n-1}(s)) \\ &= \bar{\zeta}_m(s) = s+1.\end{aligned}$$

□

3.1. Complejo simplicial

Definición 3.3. Un complejo simplicial, denotado por K , está dado por lo siguiente:

1. Un conjunto de vértices $V(K)$.
2. Una familia de subconjuntos finitos no vacíos de $V(K)$ llamados símlices y denotados por $S(K)$.
3. Los símlices satisfacen la condición de que si $\sigma \in S(K)$ es un símlice y $\tau \subset \sigma$, $\tau \neq \emptyset$, entonces τ es un símlice, denominamos a τ la cara del símlice σ .

Si $\sigma \in S(K)$ tiene $p+1$ elementos, decimos que es un p -símlice. El conjunto de todos los símlices lo denotamos por K_p , la dimensión de K es el mayor entero p tal que K_p es no vacío.

Ilustremos la definición anterior.

Sea K el complejo simplicial dado por $V(K) = \{1, \dots, 14\}$, $S(K) = \{\{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}\}, \{13, 14\}\{2, 3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{11, 12, 13\}\}$, la representación geométrica de este complejo simplicial se la en la figura siguiente.

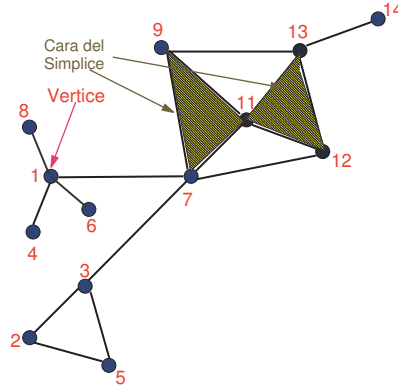


Figura 3.1: Complejo simplicial de dimensión 2.

Los complejos simpliciales son una generalización combinatoria natural de grafos no dirigidos, es decir tenemos un conjunto de vértices $V(K)$ de complejo simplicial, donde cada símplece es especificado como una lista $\sigma = \langle v_{i_0}, \dots, v_{i_p} \rangle$ con $v_{i_0} < \dots < v_{i_n}$ de un conjunto de vértices $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_p}\}$, la k -ésima con $0 \leq k \leq p$ cara del símplece la definimos cuando en el símplece σ omitimos el vértice v_{i_k} .

Para ilustrar nuevamente estas definiciones vamos a recurrir al ejemplo anterior, determinemos la 3-cara del símplece.

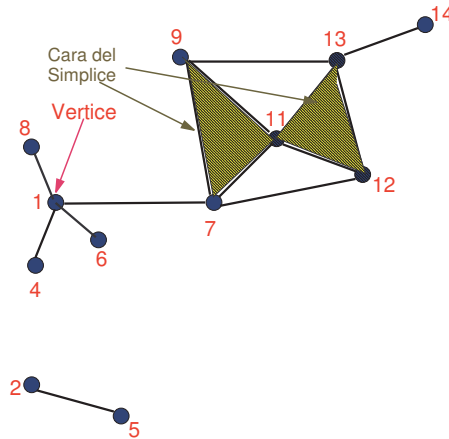


Figura 3.2: 3-cara de un símplece.

3.2. Conjuntos simpliciales

3.2.1. Conjuntos simpliciales (versión clásica)

Definición 3.4. Un conjunto simplicial $X = (X_n)_n$ es un conjunto graduado indexado en $\mathbb{Z}^+$, junto con dos funciones $d_i : X_d \rightarrow X_{d-1}$, $s_i : X_d \rightarrow X_{d+1}$ que satisface las siguientes identidades:

1. $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ si $i < j$.
2. $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i < j$.
3. $d_i s_j = s_{j-1} d_i$ si $i < j$.
4. $d_i s_j = 1$ si $i = j, j + 1$.
5. $d_i s_j = s_j d_{i-1}$ si $i > j + 1$.

Los elementos de X_n , son llamados n -símplices. Las funciones d_i, s_i son llamados operadores de cara y degeneración.

Definición 3.5. Una funcion simplicial $f : X \rightarrow Y$ es una función de conjuntos de grado cero que conmuta con los operadores de cara y degeneración, es decir f consiste en $f_q : X_q \rightarrow Y_q$ tal que satisface los siguientes axiomas:

1. $f_q d_i = d_i f_{q+1}$.
2. $f_q s_i = d_i f_{q-1}$.

Definición 3.6. Sea $n \geq 0$, definamos

$$\Delta_n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

Definición 3.7. La realización geométrica de un conjunto simplicial X , denotada por $|X|$ es un espacio topológico con el conjunto subyacente $\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_n) / R$ donde R es la relacion de equivalencia débil que identifica puntos $(s, x) \in \Delta_n \times X_n$ y $(t, y) \in \Delta_m \times X_m$ si

$$y = X(f)x, \quad y = X(f)x,$$

Para alguna función no decreciente $f : [m] \rightarrow [n]$.

3.2.2. Conjuntos simpliciales (versión moderna)

Definición 3.8. La categoría de los conjuntos simpliciales Δ^* está formada por lo siguiente:

1. Los objetos de Δ^* son los conjuntos $[n] = \{0, 1, \dots, n\}, n \geq 0$.
2. Los morfismos de Δ^* son funciones monótonas $\mu : [m] \rightarrow [n]$, es decir $\mu(i) \leq \mu(j)$ siempre que $i < j$.
Definamos los siguientes morfismos $\partial_i^m : [m-1] \rightarrow [m]$, $s_i^m : [m+1] \rightarrow [m]$, $0 \leq i \leq m$ de la siguiente manera:

- $\partial_i^m(j) = j$ si $j < i$, $\partial_i^m(j) = j+1$ si $j \geq i$.
- $s_i^m(j) = j$ si $j \leq i$, $s_i^m(j) = j-1$ si $j > i$.

Proposición 3.9. Sea Δ^* la categoría de los conjuntos simpliciales, entonces todo morfismo inyectivo $\alpha \in \Delta^*([m], [n])$ tiene una expresión

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \dots \circ \partial_{j_m}^{m+1}$$

la cual es única y satisface la relación $j_n > \dots > j_{m+1}$.

Demostración. Supongamos que $[m]$ y $[n]$ los podemos representar con un conjunto de índice de enteros, digamos $\{i_h\}_{h=1}^m$ para $[m]$ y $\{j_l\}_{l=1}^n$ para $[n]$, respectivamente. Por hipótesis tenemos que para cualquier morfismo inyectivo α , su imagen $\alpha([m])$ elige un conjunto de índice de $[n]$ que satisface la condición de no tener dos imágenes en el codominio que provengan de un elemento del dominio. Elijamos el conjunto de índice de la forma siguiente, todos aquellos que no pertenecen a la $\alpha([m])$, pero pertenecen a $[n]$, es decir $[n] - \alpha([m])$ donde el signo menos indica la diferencia entre conjuntos. Llamemos a este conjunto de índice elegidos de esta forma $\{j_t\}_{t=n}^{m+1}$ y que además satisfacen el siguiente orden $j_n > j_{n-1} > \dots > j_{m+1}$.

Ahora bien α lo podemos factorizar con los índice elegidos de la manera siguiente:

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \partial_{j_{n-1}}^{n-1} \dots \circ \partial_{j_m}^{m+1}.$$

Probemos ahora que esta factorización de α es única. Supongamos que tenemos dos descomposiciones distintas de α , es decir

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \partial_{j_{n-1}}^{n-1} \dots \circ \partial_{j_m}^{m+1}, \tag{3.1}$$

y

$$\alpha = \beta_{j_n}^n \circ \beta_{j_{n-1}}^{n-1} \dots \circ \beta_{j_m}^{m+1}. \tag{3.2}$$

Entonces igualando (3.1) y (3.2) obtenemos que

$$\partial_{j_n}^n \circ \partial_{j_{n-1}}^{n-1} \dots \circ \partial_{j_m}^{m+1} = \beta_{j_n}^n \circ \beta_{j_{n-1}}^{n-1} \dots \circ \beta_{j_m}^{m+1} \tag{3.3}$$

Para todo $x \in [m]$ tenemos que

$$\partial_{j_n}^n \circ \partial_{j_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ \partial_{j_m}^{m+1}(x) = \beta_{j_n}^n \circ \beta_{j_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ \beta_{j_m}^{m+1}(x) \quad (3.4)$$

Como las funciones ∂ y β son inyectivas porque α es inyectiva tenemos que

$$\partial_{j_n}^n(x) = \beta_{j_n}^n(x), \quad (3.5)$$

es decir que

$$\partial_{j_n}^n = \beta_{j_n}^n. \quad (3.6)$$

esto constituye un contradicción con el hecho de que $\partial_{j_n}^n$ y $\beta_{j_n}^n$ son funciones inyectivas distintas. $\square$

Proposición 3.10. Todo morfismo sobreyectivo $\alpha \in \Delta^*([m], [n])$ tiene una expresión

$$\alpha = s_{j_n}^n \circ \cdots \circ s_{j_m}^{m-1}$$

la cual es única y satisface la relación $j_n < \cdots < j_{m-1}$.

Demostración. Supongamos que $[m]$ y $[n]$ lo podemos representar con un conjunto de índice de enteros, digamos $\{i_h\}_{h=1}^m$ para $[m]$ y $\{j_l\}_{l=1}^n$ para $[n]$ respectivamente. Por hipótesis tenemos que α es un morfismo sobreyectivo. En su imagen $\alpha([m])$ están un conjunto de índice de $[n]$ que satisfacen la condición de que para toda imagen presente en el codominio existe un elemento del dominio.

Supongamos sin pérdida de generalidad que para cada índice j_l del conjunto $\alpha([n])$ se eligen un conjunto de índice en el dominio, llamados $\{i_t\}_{t=n}^{m-1}$ y que además satisfacen el siguiente orden $i_n < i_{n-1} < \cdots < i_{m-1}$.

Ahora bien α lo podemos factorizar con los índice elegidos de la manera siguiente:

$$\alpha = s_{i_n}^n \circ s_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}.$$

Probemos ahora que está factorización de α es única. Supongamos que tenemos dos descomposiciones distintas de α , es decir

$$\alpha = s_{i_n}^n \circ s_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}. \quad (3.7)$$

$$\alpha = w_{i_n}^n \circ w_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ w_{i_m}^{m-1}. \quad (3.8)$$

Entonces igualando (3.7) y (3.8) obtenemos

Para todo $x \in [m]$ tenemos que

$$s_{i_n}^n \circ s_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}(x) = w_{i_n}^n \circ w_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ w_{i_m}^{m-1}(x) \quad (3.9)$$

consideremos la funciones $s_{i_m}^{m-1}, w_{i_m}^{m-1} : [m] \rightarrow [m-1]$. Dado que α es un morfismo sobreyectivo tenemos que tanto $s_{i_m}^{m-1}$ como $w_{i_m}^{m-1}$ son morfismos sobreyectivos.

Dado que $s_{i_m}^{m-1}$ y $w_{i_m}^{m-1}$ son sobreyectivos, existen unos índice i_{m-1} y i'_{m-1} en $[m]$ tales que $i_{m-1} = s_{i_m}^{m-1}(x)$ e $i'_{m-1} = w_{i_m}^{m-1}(x)$.

Ahora tenemos lo siguiente:

$$s_{i_n}^n \circ s_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ s_{i_{m-1}}^{m-2}(i_{m-1}) = w_{i_n}^n \circ w_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ w_{i_{m-1}}^{m-2}(i'_{m-1}). \quad (3.10)$$

Continuando de manera recursiva con este procedimiento tenemos que $s_{i_n}^n = w_{i_n}^n$. Es decir estás funciones son inyectivas y esto constituye una contradicción. $\square$

Teorema 3.11. Todo morfismo $\alpha \in \Delta^*([m], [n])$ puede ser factorizado de forma única como

$$\alpha = \beta \circ \psi,$$

donde β es inyectivo y ψ es sobreyectivo.

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

Caso 1: Si $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ es un morfismo inyectivo. Entonces por la proposición (3.9) lo podemos factorizar de manera única como

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \cdots \circ \partial_{j_m}^{m+1}$$

Como el morfismo identidad $1_{[m+1]}$ es sobreyectivo tenemos que

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \cdots \circ \partial_{j_m}^{m+1} \circ 1_{[m+1]}$$

Sea $\beta = \partial_{j_n}^n \circ \cdots \circ \partial_{j_m}^{m+1}$ y $\psi = 1_{[m+1]}$, entonces

$$\alpha = \beta \circ \psi.$$

Caso 2: Si $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ es un morfismo sobreyectivo, entonces por la proposición (3.10) lo podemos factorizar de manera única como

$$\alpha = s_{i_n}^n \circ \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}$$

Como el morfismo identidad $1_{[m-1]}$ es inyectivo tenemos que

$$\alpha = 1_{[m-1]} \circ s_{i_n}^n \circ \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}$$

Sea $\beta = 1_{[m-1]}$ y $\psi = s_{i_n}^n \circ \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}$. Entonces

$$\alpha = \beta \circ \psi.$$

Caso 3: Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha : [k] \rightarrow [k]$ con $0 \leq k \leq m$ un morfismo que no es la identidad y que tampoco es inyectivo ni sobreyectivo. Ahora bien α lo podemos factorizar de la siguiente manera $\alpha = \partial_i^m \circ s_j^m$, donde los índices i y j , se eligen de la manera siguiente: para la elección del índice i perteneciente a su imagen $\alpha([k])$ se hace tomando en cuenta que en su preimagen del conjunto de partida $[k]$, no existe un elemento, llamémoslo n tal

que $\alpha(i) = n$. Por otro lado la elección del índice j perteneciente al conjunto de partida $[k]$, se hace cuando tomamos en consideración aquellos índice en el conjunto de partida $[k]$ en los cuales la inyectividad falla, basta elegir uno de ellos. Sea $\beta = \partial_i^m$ y $\psi = s_j^m$, entonces $\alpha = \beta \circ \psi$.

Probemos ahora que está factorización de α es única supongamos que tenemos dos descomposiciones distintas de α , es decir

$$\alpha = \beta_0 \circ \psi_0. \quad (3.11)$$

$$\alpha = \beta_1 \circ \psi_1. \quad (3.12)$$

Entonces igualando (3.11) y (3.14) obtenemos que.

$$\beta_0 \circ \psi_0 = \beta_1 \circ \psi_1. \quad (3.13)$$

Para todo $x \in [k]$ tenemos que

$$\beta_0 \circ \psi_0(x) = \beta_1 \circ \psi_1(x). \quad (3.14)$$

como ψ_0, ψ_1 son morfismos sobreyectivos diferentes, tenemos que existen dos índices i_0, i_1 , en el conjunto de partida $[k]$ tales que $i_0 = \psi_0(x)$ y $i_1 = \psi_1(x)$. Ahora bien tenemos la siguiente situación

$$\beta_0(i_0) = \beta_1(i_1). \quad (3.15)$$

Dado que β_0, β_1 son morfismos inyectivos, tenemos que $i_0 = i_1$, es decir $\psi_0(x) = \psi_1(x)$ para todo x , esto nos indica que $\psi_0 = \psi_1$ esto es una contradicción. $\square$

Corolario 3.12. Todo morfismo $\alpha \in \Delta^*([m], [n])$ puede ser factorizado de forma única como

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \partial_{j_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ \partial_{i_m}^{m+1} \circ s_{i_n}^n \circ \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}$$

donde $j_n < \cdots < j_{m-1}$ y $i_n > \cdots > i_{m+1}$.

Demostración. Por el teorema (3.11) sabemos que α puede ser factorizado de manera única de la forma siguiente: $\alpha = \beta \circ \psi$, donde β es un morfismo inyectivo y ψ es un morfismo sobreyectivo, por la proposición (3.9) tenemos que β se puede factorizar de manera única de la forma siguiente: $\beta = \partial_{j_n}^n \circ \cdots \circ \partial_{j_m}^{m+1}$. Análogamente por la proposición (3.10) tenemos que ψ se puede factorizar de manera única de la siguiente forma $\psi = s_{i_n}^n \circ s_{i_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}$. Entonces α queda factorizado de la manera siguiente

$$\alpha = \partial_{j_n}^n \circ \partial_{j_{n-1}}^{n-1} \cdots \circ \partial_{i_m}^{m+1} \circ s_{i_n}^n \circ \cdots \circ s_{i_m}^{m-1}$$

con $j_n < \cdots < j_{m-1}$ y $i_n > \cdots > i_{m+1}$, $\square$

Las proposiciones, corolario y teoremas dados en la sección anterior nos permiten dar la siguiente conclusión. Un functor F de la categoría Δ^* a otra categoría está completamente determinado cuando los objetos imagen $F([m])$ y los morfismos imagen $F(\partial_i^m)$ y $F(s_i^m)$ son dados.

Definición 3.13. Sea C una categoría. Podemos definir un functor contravariante $X : \Delta \rightarrow C$ de la siguiente forma:

- $\{X_m = X([m])\}_{m \in \mathbb{N}}$ una colección de objetos de C .
- La colección de morfismos $\{X(\partial_i^m) : X_m \rightarrow X_{m-1}\}_{m \geq 1, 0 \leq i \leq m}$ y $\{X(s_i^m) : X_m \rightarrow X_{m+1}\}_{m \geq 0, 0 \leq i \leq m}$, que satisface las siguientes relaciones
 1. $X(\partial_i^m) \circ X(\partial_j^m) = X(\partial_j^m) \circ X(\partial_{i+1}^m), i \geq j.$
 2. $X(s_i^m) \circ X(s_j^m) = X(s_{j+1}^m) \circ X(s_i^m), j \geq i.$
 3. $X(\partial_i^m) \circ X(s_j^m) = 1, i = j, j + 1.$
 4. $X(\partial_i^m) \circ X(s_j^m) = X(s_{j-1}^m) \circ X(\partial_i^m), j > i.$
 5. $X(\partial_i^m) \circ X(s_j^m) = X(s_j^m) \circ X(\partial_{i-1}^m), i > j + 1.$

Este functor contravariante X se le denomina objeto simplicial en la categoría C .

Definición 3.14. Sea set la categoría de los conjuntos. Un conjunto simplicial es un objeto simplicial en la categoría set i.e un functor contravariante $X : \Delta^* \rightarrow set$.

Denotamos la categoría de los conjuntos simpliciales como $sset$

3.2.3. Complejos Celulares

Definición 3.15. Una estructura de CW complejo en X está dada por lo siguiente:

1. Un espacio topológico, X que en algunos casos es Hausdorff.
2. Una sucesión de subespacios cerrados $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$ que satisfacen los siguientes axiomas:
 - a) X^0 tiene la topología discreta, es decir $X^0 \subseteq \mathcal{P}(X)$.
 - b) Para todo $n > 0$, X^n es obtenido de X^{n-1} por la adjunción de una colección de n -celdas e_λ^n con $\lambda \in \Lambda$ tales que $\dots$
 - c) X es una unión de los subespacios X^i para todo $i \geq 0$, es decir $X = \bigcup_{i \geq 0} X^i$.
 - d) El espacio X y los subespacios X^q todos tienen la topología débil. Es decir un subconjunto A es cerrado si $A \cap \bar{e}_\lambda^n$ es cerrado para todas las n -celdas e_λ^n , $n \geq 0$.

Los subconjunto X^n son llamados n -esqueletos y los puntos de X^0 son llamados vértices o 0-celdas.

Un CW complejo es finito o infinito si el número de celdas es finito o infinito.

3.3. Formas diferenciales

Sean $x_1, \dots, x_n$ coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^n$. Definimos Ω^* como el álgebra sobre $\mathbb{R}$ generada por $dx_1, \dots, dx_n$ con las relaciones siguientes:

1. $(dx_i)^2 = 0$,
2. $dx_i dx_j = -dx_j dx_i, i \neq j$.

Como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, Ω^* tiene una base

$$1, dx_i, \underbrace{dx_i dx_j}_{i < j}, \underbrace{dx_i dx_j dx_k}_{i < j < k}, \dots, \underbrace{dx_1 \cdots dx_n}_{1 < \cdots < n}.$$

Definición 3.16. Las formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ son los elementos de la forma siguiente

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\} \otimes \Omega^*.$$

Si w es una forma, entonces w la podemos escribir de forma única como

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_n} f_{i_1 \dots i_q} di_1 \cdots di_q,$$

donde los coeficientes $f_{i_1 \dots i_q}$ son funciones de clase C^∞ . Cuando nos referimos a una forma utilizaremos la siguiente notación $w = \sum_I f_I dx_I$.

El álgebra $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ es graduada, donde $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ consiste en q -formas en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 3.17. Una 1-forma definida en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo:

$$w = \sum_{i=1}^n f_i dx_i = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n,$$

donde las funciones $f_1, \dots, f_n : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Si éstas son de clase C^k decimos que la 1-forma es de clase C^k .

Tomando en cuenta lo anterior tenemos que la expresión

$$w = (x + y)dx + xydy.$$

es una 1-forma de $\mathbb{R}^2$ de clase C^∞ .

Ejemplo 3.18. Una 2-forma definida en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo:

$$w = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j,$$

donde las funciones $f_{ij} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ son funciones diferenciables, si estás son de clase C^k decimos que la 2-forma es de clase C^k .

Tomando en cuenta lo anterior tenemos que la expresión

$$w = x^2 dx dy + x dy dz$$

es una 2-forma de $\mathbb{R}^3$ de clase C^∞ .

Ejemplo 3.19. Una 3-forma definida en $\mathbb{R}^4$ es una expresión del tipo:

$$w = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq 4} f_{i_1 i_2 i_3} dx_{i_1} dx_{i_2} dx_{i_3}$$

donde las funciones $f_{i_1 i_2 i_3} : U \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, si estás son de clase C^k decimos que la 3-forma es de clase C^k .

Tomando en cuenta lo anterior tenemos que la expresión

$$w = (x_1^2 \sin(x_2) + x_3) dx_1 dx_3 dx_4 + x_2 x_4 dx_2 dx_3 dx_4$$

es una 3-forma de $\mathbb{R}^4$ de clase C^∞ .

Definición 3.20. El operador diferencial $d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ está definido de la forma siguiente:

1. Si $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, entonces $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
2. Si $w = \sum f_I dx_I$, entonces $dw = \sum df_I dx_I$.

Al operador d lo denominamos diferencial exterior.

Ejemplo 3.21. Sea w la 1-forma en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$w = \underbrace{(x_1 + 2x_2)}_{g_1} dx_1 + \underbrace{3x_1 x_2}_{g_2} dx_2 + \underbrace{x_3^2}_{g_3} dx_3.$$

El diferencial de w será una 2-forma. En efecto

$$\begin{aligned} dw &= dg_1 dx_1 + dg_2 dx_2 + dg_3 dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 + 2x_2) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 + 2x_2) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1 + 2x_2) dx_3 \right) dx_1 \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} 3x_1 x_2 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} 3x_1 x_2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} 3x_1 x_2 dx_3 \right) dx_2 \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_3^2 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_3^2 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} x_3^2 dx_3 \right) dx_3 \\ &= (dx_1 + 2dx_2 + 0) dx_1 + (3x_2 dx_1 + 3x_1 dx_2 + 0) dx_2 + (0 + 0 + 2x_3 dx_3) dx_3 \\ &= dx_1 dx_1 + 2dx_2 dx_1 + 3x_2 dx_1 dx_2 + 3x_1 dx_2 dx_2 + 2x_3 dx_3 dx_3 \\ &= 0 - 2dx_1 dx_2 + 3x_2 dx_1 dx_2 + 0 + 0 \\ &= (3x_2 - 2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Definición 3.22. Sean τ, ω dos formas diferenciales. Definimos el producto wedge y lo denotamos $\tau \wedge \omega$ de la forma siguiente, si $\tau = \sum f_I dx_I$ y $\omega = \sum g_J dx_J$, entonces

$$\tau \wedge \omega = \sum f_I g_J dx_I dx_J.$$

Proposición 3.23. Sean $w, \tau \in \Omega^*(X)$, d es una antiderivación, es decir

$$d(w \wedge \tau) = (d\tau) \wedge w + (-1)^{\deg \tau} \tau \wedge dw.$$

Demostración. Es suficiente probarlo para monomios, y luego extenderlo por linealidad. Sean τ, ω dos formas diferenciales, es decir $\tau = f_I dx_I$, $\omega = g_J dx_J$. Ahora

$$\begin{aligned} d(w \wedge \tau) &= d(f_I g_J dx_I dx_J) \\ &= d(f_I g_J) dx_I dx_J \\ &= [(df_I)g_J + f_I(dg_J)] dx_I dx_J \\ &= (df_I)g_J dx_I dx_J + f_I(dg_J) dx_I dx_J \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J + (df_I)g_J dx_I dx_J \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J + g_J(df_I) dx_I dx_J \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J + g_J(df_I)(-dx_J dx_I) \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J - g_J(df_I) dx_J dx_I \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J - g_J dx_J (df_I) dx_I \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J - g_J dx_J (df_I) dx_I \\ &= f_I(dg_J) dx_I dx_J + (-1)^{\deg \tau} g_J dx_J (df_I) dx_I \\ &= (d\tau) \wedge w + (-1)^{\deg \tau} \tau \wedge dw. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.24. $d^2 = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(df) \\
&= d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\
&= \sum_j \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \\
&= \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} (dx_j)^2 + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right) \\
&\quad + \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (dx_i)^2 \\
&= \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} (dx_j)^2 + \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right) \\
&\quad + \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (dx_i)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Si w es una forma $w = f_I dx_I$, entonces $d^2 w = d(dw) = d(f_I dx_I) = 0$.

Sean $x_1, \dots, x_m$ y $y_1, \dots, y_n$ las coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Una función suave $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ induce una función pullback f^* de la forma siguiente:

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Podemos extender este pullback a todas las formas $f^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^m)$ que conmutan en d . La conmutatividad de d con f^* se define de manera única como

$$f^*\left(\sum g_I dy_{i_1} \cdots dy_{i_q}\right) = \sum (g_I \circ f) df_{i_1} \cdots df_{i_q}$$

donde $f_i = y_i \circ f$ es la i th componente de la función f .

Proposición 3.25. El pullback f^* en las formas conmuta con d .

Demostración. Debemos probar que $df^*(g_I dy_{i_1} \cdots dy_{i_q}) = f^*d(g_I dy_{i_1} \cdots dy_{i_q})$
En efecto.

$$\begin{aligned}
f^*d(g_I dy_{i_1} \cdots dy_{i_q}) &= f^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_I}{\partial y_i} dy_{i_1} \cdots dy_{i_q} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial g_I}{\partial y_i} \circ f \right) df_i \right) df_{i_1} \cdots df_{i_q} \\
&= d(g_I \circ f) df_{i_1} \cdots df_{i_q} \\
&= d((g_I \circ f) df_{i_1} \cdots df_{i_q}) \\
&= df^*(g_I dy_{i_1} \cdots dy_{i_q}).
\end{aligned}$$

□

Sean $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$ y $u_1, \dots, u_n$ Las nuevas coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $u_i = x_i \circ f = f^*(x_i)$. Por la regla de la cadena tenemos que si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave, entonces

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j$$

Es decir dg es independiente del sistema de coordenadas.

Sea E la categoría de los espacios Euclidianos, dada por:

$$Ob(E) = \{\mathbb{R}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Si $x, y \in Ob(E)$, denotamos por

$$E(x, y) = \{f : x \rightarrow y \mid f \text{ es suave}\}.$$

Sea Adg la categoría de las álgebras diferenciales graduadas, dada por:

$$Ob(Adg) = \text{la clase de las álgebras diferenciales graduadas.}$$

Si $x, y \in Ob(Adg)$, denotamos por

$$Adg(x, y) = \{f : x \rightarrow y \mid f \text{ es un homomorfismo de algebra diferencial graduada.}\}.$$

Definición 3.26. Se define Ω^* como el functor de E a Adg , es decir $\Omega^* : E \rightarrow Adg$.

Definición 3.27. Un complejo de Rham en $\mathbb{R}^n$ consiste en lo siguiente

1. Un álgebra $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$,
2. Un operador diferencial $d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$.

El $Ker d$ consiste en k -formas cerradas y $Img d$ consiste k -formas exactas.

Definición 3.28. Sea $k \in \mathbb{N}$. La k -ésima cohomología de Rham de X es el espacio vectorial definido por

$$H_{DR}^k(X) = \{k\text{-formas cerradas}\} / \{k\text{-formas exactas}\}.$$

Las definiciones anteriores son válidas cuando trabajamos con U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, es decir $\Omega^*(U) = \{f : C^\infty \rightarrow U\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*$. Denotamos la cohomología de Rham de U como $H_{DR}^*(U)$.

3.4. Algebra diferencial graduada casiconmutativa (adgq)

Definición 3.29. Un álgebra diferencial graduada casiconmutativa(adgq) está definida por lo siguiente:

1. Un álgebra diferencial graduada junto con un elemento unidad 1 de grado 0.
2. Un R -módulo diferencial graduado $A^{\bar{\otimes} 2}$ de $A^{\otimes 2}$ estable bajo la acción de el grupo $\mathbb{Z}/2$ que opera naturalmente sobre $A^{\otimes 2}$ y contiene $R \cdot 1 \otimes A$.

Como $A^{\bar{\otimes} 2}$ es un submódulo de $A^{\otimes 2}$ lo llamamos producto tensorial reducido, denotado por $A \bar{\otimes} A$.

Para todo i, j , el conjunto $P = \{1, \dots, n\}$, A_{ij} designa la imagen de $A^{\bar{\otimes} 2} \otimes A^{\otimes(n-2)}$ por $A^{\otimes n}$, una permutación de una de las caras del producto tensorial reducido de manera que

$$(1, 2) \mapsto (i, j).$$

Ahora bien $A^{\otimes n}$ es la intersección de todos los A_{ij} para todo i, j .

Que satisfacen los siguientes axiomas:

1. La restricción de la multiplicación $\mu : A^{\bar{\otimes} 2} \rightarrow A$ la cual es equivariante, el grupo $\mathbb{Z}/2$ opera trivialmente sobre A y por las permutaciones de sus factores sobre $A \bar{\otimes} A$.
2. El R -módulo $\mu_{12}(A^{\bar{\otimes} 3})$ está incluido en $A^{\bar{\otimes} 2}$, designamos μ_{12} el producto sobre $A^{\otimes 3}$ restringidos a uno de los primeros factores.
3. La inclusión de $A^{\bar{\otimes} n}$ en $A^{\otimes n}$ es un casi-isomorfismo.

Definición 3.30. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria. Definimos el diferencial de f de la forma siguiente:

$$(df)(k) = f(k+1) - f(k).$$

Proposición 3.31. Sean $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones arbitrarias, entonces

$$d(fg)(k) = f(k+1)(dg)(k) + g(k)(df)(k).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 d(fg)(k) &= (fg)(k+1) - (fg)(k) \\
 &= f(k+1)g(k+1) - f(k)g(k) \\
 &= f(k+1)g(k+1) - f(k+1)g(k) + f(k+1)g(k) - f(k)g(k) \\
 &= f(k+1)(g(k+1) - g(k)) + g(k)(f(k+1) - f(k)) \\
 &= f(k+1)(dg)(k) + g(k)(df)(k).
 \end{aligned}$$

□

Definición 3.32. Sean $n \in \mathbb{Z}$, $D^0(n)$ y $D^1(n)$ las álgebras diferenciales graduadas de grado cero y uno respectivamente definidas por

$$\begin{aligned}
 D^0(n) &= \left\{ f : \mathbb{Z} \rightarrow k \mid f(-\infty) = k_1, f(+\infty) = k_2, k_1, k_2 \in k \right\}, \\
 D^1(n) &= \left\{ w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid w(-\infty) = w(+\infty) = 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Definición 3.33. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $f \in D^0(n)$ definimos el diferencial

$$D^0(n) \xrightarrow{d} D^1(n)$$

de la manera siguiente

$$(df)(n) = f(n+1) - f(n).$$

Definición 3.34. Sea $D^*(n) = D^0(n) \oplus D^1(n)$ un k -módulo la cuál tiene estructura de álgebra diferencial graduada usando la fórmula de Leibniz escrita en su forma no conmutativa, como en la proposición 3.31.

Proposición 3.35. Sea $n \in \mathbb{Z}$, consideremos el siguiente diagrama

$$D^0(n) \xrightarrow{d} D^1(n) \xrightarrow{d} D^2(n)$$

entonces

$$d^2 = 0$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (d^2 f)(n) &= (ddf)(n) \\
 &= d(df)(n) \\
 &= d(f(n+1) - f(n)) \\
 &= (df)(n+1) - (df)(n) \\
 &= f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n) \\
 &= p - 2p + p = 0.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

□

Lema 3.36 (Lema de Poincare.). Sea $n \in \mathbb{Z}$, el diferencial $d : D^0(n) \rightarrow D^1(n)$ es una función sobreyectiva y el núcleo de d se reduce a funciones constantes.

Demostración. Sea

$$\text{Ker}(d) = \{f \in D^0(n) | df = 0\}.$$

Si $f \in \text{Ker}(d)$, entonces $df(n) = 0$ el diferencial $d : D^0(n) \rightarrow D^1(n)$ está definido por $df(n) = f(n+1) - f(n)$ para todo n . Tenemos que $f(n+1) = f(n)$ para todo n . La igualdad se satisface si f es una función constante.

Por otro lado debemos probar d es sobreyectiva. Es decir para todo $w \in D^1$, existe $f \in D^0$ tal que $df = w$, para ello definamos el siguiente operador de homotopía, denotado por I ,

$$D^*(n) \xrightarrow{I} D^*(n)$$

tal que en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} D^*(n) = D^0(n) \oplus D^1(n) & \xrightarrow{d} & K \otimes D^*(n) = D^*(n) \\ \downarrow 1_{D^1(n)} & & \downarrow \varepsilon \\ K \otimes D^*(n) = D^*(n) & \xrightarrow{d} & K \otimes D^*(n) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow I \end{array}$$

conmute. Es decir

$$1_{D^1(n)} - \varepsilon = d(Iw) - I(dw)$$

La homotopía la definimos de la manera siguiente:

$$Iw(n) = \sum_{t=-\infty}^n w(t) - \sum_{t=-\infty}^{n-1} w(t).$$

Como el diferencial $d : D^0(n) \rightarrow D^1(n)$ está definido de la manera siguiente:

$$(df)(n) = f(n+1) - f(n),$$

tenemos que si

$$f(n) = d\left(\sum_{t=-\infty}^{n-1} w(t)\right).$$

Entonces como $dI : D^1(n) \rightarrow D^1(n)$, tenemos que calcular $dIw(n)$.

En efecto

$$\begin{aligned}
dIw(n) &= d\left(\sum_{t=-\infty}^n w(t) - \sum_{t=-\infty}^{n-1} w(t)\right) \\
&= d\left(\sum_{t=-\infty}^n w(t)\right) - d\left(\sum_{t=-\infty}^{n-1} w(t)\right) \\
&= f(n+1) - f(n) \\
&= w(n),
\end{aligned}$$

i.e

$$dI = 1_{D^1(n)}$$

Por otro lado como $dI : D^0(n) \rightarrow D^0(n)$, definamos la valuación

$$\varepsilon : D^1(n) \rightarrow K$$

de la manera siguiente $(\varepsilon f)(n) = f(-\infty)$. Tenemos que calcular $Idf(n)$. En efecto

$$\begin{aligned}
Idf(n) &= I\left(\sum_{t=-\infty}^{n-1} w(t)\right) \\
&= \left(\sum_{t=-\infty}^{n-1} Iw(t)\right) \\
&= \varepsilon(f(n)).
\end{aligned}$$

i.e

$$Id = \varepsilon$$

□

3.5. Teoría de cocadenas

La teoría de de cocadenas fue definida por M. Mandell en el artículo *Cochain multiplications* citado en [17].

Definición 3.37. Sea $T : Top \rightarrow Rmod$ un functor contravariante de espacios topológicos a R -módulos diferenciales graduados sobre algún anillo conmutativo R . Decimos que T es una teoría de cocadenas si satisface lo siguiente:

1. Homotopía. Si $X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil, entonces $T(X) \rightarrow T(Y)$ es un casi-isomorfismo.

2. Exactitud-Excisión. Si X es un CW complejo y $A \rightarrow X$ una inclusión de subcomplejos, entonces las funciones de la homotopía de fibra $F(T(X/A) \rightarrow T(*))$ a la homotopía de fibra $F(T(X) \rightarrow T(A))$ es un casi-isomorfismo.
3. Producto. Si $\{X_\alpha | \alpha \in S\}$ una colección de CW complejos indexados en algún conjunto S , entonces la función canonica $\coprod_\alpha X_\alpha \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$ es un casi-isomorfismo.
4. Dimensión $H^0(T(*))$ es isomorfo a k y $H^n(T(*)) = 0$ para todo $n \neq 0$.

3.5.1. Cocadenas casiconmutativas de Karoubi.

Definición 3.38. Sea $sset$ la categoría de los conjuntos simpliciales y $Mod_R^\oplus$ la categoría de los R -módulos diferenciales graduados, denotemos X, Y, X_1, X_2 objetos de $sset$.

Una teoría de cocadena casiconmutativa está dada por lo siguiente:

1. Un funtor contravariante $D^* : sset \rightarrow Mod_R^\oplus$, el cual asigna a cada conjunto simplicial X una álgebra diferencial graduada $D^*(X)$.
2. Un producto denotado por $m_{X,Y} : D^*(X) \otimes D^*(Y) \rightarrow D^*(X \times Y)$, cabe mencionar que $D^*(X) \overline{\otimes} D^*(Y)$, es un módulo diferencial graduado de $D^*(X) \otimes D^*(Y)$, que satisface los siguientes axiomas
 - a) Axioma de Mayer-Vietoris. Un diagrama cocartesiano de conjuntos simpliciales

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow i_1 \\ X_2 & \xrightarrow{i_2} & X' \end{array}$$

donde i_1 o i_2 son una cofibración que induce un diagrama cartesiano de álgebras diferenciales graduadas,

$$\begin{array}{ccc} D^*(X) & \longleftarrow & D^*(X_1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D^*(X_2) & \longleftarrow & D^*(X') \end{array}$$

- b) Axioma de homotopía y de normalización. Si P es un espacio reducido a un punto, $D^*(P)=R$.

Si I es un modelo simplicial del intervalo $[0, 1]$, la proyección de $X \times I$, induce un casi-isomorfismo entre $D^*(X)$ y $D^*(X \times I)$.

Además si X es un conjunto simplicial finito, los dos primeros axiomas implican que la cohomología de $D^*(X)$, es naturalmente isomorfa a la cohomología ordinaria con coeficientes en K .

- c) Axioma de Kunneth. El morfismo $m_{X,Y}$, define un casi-isomorfismo de módulo graduado diferencial si X o Y es un conjunto simplicial finito. Para este morfismo asociativo, existe un elemento identidad $1 \in D^0(X)$, define un morfismo de K sobre $D^*(X)$, tal que el siguiente diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc} D^*(Y) = K \otimes D^*(Y) & \longrightarrow & D^*(X \times Y) \\ \downarrow & & \parallel \\ D^*(X) \otimes D^*(X) & \longrightarrow & D^*(X \times Y) \end{array}$$

Nótese que la primera flecha horizontal, es esencialmente inducida por la proyección de $X \times Y$ sobre Y .

Si elegimos $X = Y$, en el axioma anteriormente expuesto, tenemos que el morfismo composición

$$D^*(X) \otimes D^*(X) \xrightarrow{m_{X,X}} D^*(X \times Y) \xrightarrow{\Delta^*} D^*(X)$$

donde Δ^* es la aplicación diagonal, define una estructura de álgebra diferencial graduada.

- d) Axioma de commutatividad. El siguiente diagrama es commutativo

$$\begin{array}{ccc} D^*(X) \otimes D^*(Y) & \longrightarrow & D^*(X \times Y) \\ \downarrow R & & \downarrow \sigma \\ D^*(Y) \otimes D^*(X) & \longrightarrow & D^*(Y \times X) \end{array}$$

El morfismo σ induce un cambio entre X e Y , mientras que R permuta el producto tensorial.

- e) Axioma de casi-isomorfismo. Si $X_1, \dots, X_n$ son n espacios, podemos definir un producto tensorial reducido de la forma siguiente:

$D^*(X_1) \overline{\otimes} \dots \overline{\otimes} D^*(X_n)$, como un módulo de $D^*(X_1) \otimes \dots \otimes D^*(X_n)$, obtenido como la intersección de todos los pares (i, j) de productos tensoriales reducidos $D^*(X_i) \overline{\otimes} D^*(X_j)$, y además la inclusión

$$D^*(X_1) \overline{\otimes} \dots \overline{\otimes} D^*(X_n) \longrightarrow D^*(X_1) \otimes \dots \otimes D^*(X_n)$$

es un casi-isomorfismo.

Definición 3.39. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f \in D^0(n_0)$, entonces definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \partial_n f &= f \circ \bar{\partial}_n \\ \zeta_n f &= f \circ \bar{\zeta}_n \end{aligned}$$

Definición 3.40. Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, definamos las siguientes funciones

$$h_n : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$

, y

$$\delta_n : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$

. dadas por

$$\begin{aligned} h_n(m) &= \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \delta_n(m) &= \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 3.41. El producto tensorial reducido $D^0(n_0) \overline{\otimes} D^0(n_0)$ es el módulo libre $D^0(n_0) \otimes D^0(n_0)$ generado por productos tensoriales de funciones $h_n \otimes h_m$ con $n \neq m$. Análogamente ocurre con $D^0(n_0) \overline{\otimes} D^1(n_0)$ es el módulo libre $D^0(n_0) \otimes D^1(n_0)$ generado por productos tensoriales de funciones $h_n \otimes \delta_m$ con $n \neq m$. De manera similar se tiene con $D^1(n_0) \overline{\otimes} D^0(n_0)$ y $D^1(n_0) \overline{\otimes} D^1(n_0)$.

Damos ahora una interpretación del intervalo $[0, 1]$ donde $-\infty$ cumple el rol del 0 y $+\infty$ cumple el rol del 1 que se traduce en un par de aumentaciones de $D^*(n_0)$ en k cuando evaluamos $n = \pm\infty$

La manera natural de definir el análogo algebraico del $(r+1)$ -cubo es definir el producto tensorial graduado de la forma siguiente:

$$D^*(x_0, \dots, x_r) = D^*(x_0) \otimes \dots \otimes D^*(x_r),$$

donde los elementos son las formas diferenciales en las variables x_i (más precisamente funciones definidas en $\mathbb{Z}^{r+1}$) independientes.

De manera análoga el símlice Δ_r está definido por la ecuación

$$\sum_{i=0}^r x_i = +\infty,$$

en donde los términos de una de las variables x_i es igual a $+\infty$ con la convención de que $t + (+\infty) = +\infty$, para todo t .

Capítulo 4

Cocadenas casiconmutativas en conjuntos cúbicos

En esta sección se define en 4.1 la categoría $\square$, 4.2 la categoría de los conjuntos cúbicos y finalmente en la sección 4.3 la cocadenas casi cubicas y las formas sobre conjuntos cúbicos.

4.1. Categoría $\square$

Definición 4.1. Sea $n \geq 0$, $\mathbf{1} = \{0, 1\}$ y $\mathbf{1}^n = \underbrace{\mathbf{1} \times \cdots \times \mathbf{1}}_{n\text{-veces}}$

Denotamos por $\mathbf{1}^0$ a la categoría que consiste en un sólo objeto y morfismo.

Definición 4.2. Sea $n, m \geq 0$. La categoría $\square$ consiste en lo siguiente:

1. Los objetos de $\square$ son $\mathbf{1}^n$, $\text{Ob}(\square) = \mathbf{1}^n$.
2. Los morfismos de $\square$ son los siguiente:

$$\square(\mathbf{1}^m, \mathbf{1}^n) = \{\theta : \mathbf{1}^m \rightarrow \mathbf{1}^n : \theta = d^{(i,\varepsilon)} \circ s\}$$

que satisface:

- a) Un morfismo cara denotado por $d^{(i,\varepsilon)} : \mathbf{1}^{n-1} \rightarrow \mathbf{1}^n$ definido por

$$d^{(i,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, \overbrace{\varepsilon}^i, \dots, x_{n-1})$$

con $i \in [n]$ y $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

- b) Un morfismo degeneración denotado por $s^j : \mathbf{1}^n \rightarrow \mathbf{1}^{n-1}$ definido por

$$s^j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

con $j \in [n]$.

Proposición 4.3. Sean i, j enteros positivos, entonces

1. $s^i s^j = s^{j+1} s^i, i \leq j$
2. $d^{(j, \varepsilon)} s^j = id = d^{(j+1, \varepsilon)} s^j$
3. $d^{(i, \varepsilon)} d^{(j+1, \varepsilon)} = d^{(j, \varepsilon)} d^{(i, \varepsilon)}, i \leq j$
4. $d^{(i, \varepsilon)} s^j = s^{j-1} d^{(i, \varepsilon)}, i < j$
5. $d^{(i, \varepsilon)} s^j = s^{j-1} d^{(i, \varepsilon)}, i > j$

Demostración. Antes de realizar la demostración de (a) vamos a tomar unos casos particulares con el fin de ilustrar, tomando $n = 4, i = j = 2$. Para ello consideremos el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1}^5 & \xrightarrow{s^2} & \mathbf{1}^4 \\
 s^3 \downarrow & & \downarrow s^2 \\
 \mathbf{1}^3 & \xrightarrow{s^2} & \mathbf{1}^4
 \end{array}$$

Queremos probar que

$$s^2 s^2 = s^3 s^2$$

En efecto

$$\begin{aligned}
 s^2 s^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= s^2(s^2(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ}, \underbrace{x_3}_{3^\circ}, \underbrace{x_4}_{4^\circ})) \\
 &= s^2(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{x_3}_{2'^\circ}, \underbrace{x_4}_{3'^\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{x_4}_{2''^\circ})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s^2 s^3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= s^2(s^3(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ}, \underbrace{x_3}_{3^\circ}, \underbrace{x_4}_{4^\circ})) \\
 &= s^2(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{x_2}_{2'^\circ}, \underbrace{x_4}_{3'^\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{x_4}_{2''^\circ})
 \end{aligned}$$

Por otra parte consideremos cuando $i < j$, sea $n = 4, i = 2$ y $j = 3$. Para ello consideremos el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1}^5 & \xrightarrow{s^2} & \mathbf{1}^4 \\
s^4 \downarrow & & \downarrow s^3 \\
\mathbf{1}^3 & \xrightarrow{s^2} & \mathbf{1}^4
\end{array}$$

Queremos probar que

$$s^3 s^2 = s^2 s^4$$

En efecto

$$\begin{aligned}
s^3 s^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= s^3(s^2(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ}, \underbrace{x_3}_{3^\circ}, \underbrace{x_4}_{4^\circ})) \\
&= s^3(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{x_3}_{2'^\circ}, \underbrace{x_4}_{3'^\circ}) \\
&= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{x_3}_{2''^\circ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2 s^4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= s^2(s^4(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ}, \underbrace{x_3}_{3^\circ}, \underbrace{x_4}_{4^\circ})) \\
&= s^2(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{x_2}_{2'^\circ}, \underbrace{x_3}_{3'^\circ}) \\
&= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{x_3}_{2''^\circ})
\end{aligned}$$

Ahora realicemos la prueba del ítem *a* de la proposición antes mencionada

$$s^j s^i = s^i s^{j+1}, \quad i \leq j$$

Caso 1: $i = j$

$$\begin{aligned}
s^i s^i(x_1, \dots, x_{n+1}) &= s^i(s^i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})) \\
&= s^i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\
&= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^i s^{i+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= s^i(s^{i+1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})) \\
&= s^i(x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \\
&= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Caso 2: $i < j$

$$\begin{aligned}
 s^j s^i(x_1, \dots, x_{n+1}) &= s^j(s^i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_{n+1})) \\
 &= s^j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_{n+1}) \\
 &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+2}, \dots, x_{n+1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s^i s^{j+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= s^i(s^{j+1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})) \\
 &= s^i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_{n+1}) \\
 &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+2}, \dots, x_{n+1})
 \end{aligned}$$

Antes de realizar la demostración de (b) vamos a tomar unos casos particulares con el fin de ilustrar, tomando $n = 4$, $i = 2$, $j = 3$. Para ello consideremos el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1}^2 & \xrightarrow{d^{(2,\varepsilon_1)}} & \mathbf{1}^3 \\
 d^{(2,\varepsilon_1)} \downarrow & & \downarrow d^{(3,\varepsilon_2)} \\
 \mathbf{1}^3 & \xrightarrow{d^{(2,\varepsilon_2)}} & \mathbf{1}^4
 \end{array}$$

Queremos probar que

$$d^{(3,\varepsilon_2)} d^{(2,\varepsilon_1)} = d^{(2,\varepsilon_1)} d^{(2,\varepsilon_2)}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
 d^{(3,\varepsilon_2)} d^{(2,\varepsilon_1)}(x_1, x_2) &= d^{(3,\varepsilon_2)}(d^{(2,\varepsilon_1)}(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ})) \\
 &= d^{(3,\varepsilon_2)}(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{\varepsilon_1}_{2'^\circ}, \underbrace{x_2}_{3'^\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{\varepsilon_1}_{2''^\circ}, \underbrace{\varepsilon_2}_{3''^\circ}, \underbrace{x_2}_{4''^\circ})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d^{(2,\varepsilon_1)} d^{(2,\varepsilon_2)}(x_1, x_2) &= d^{(2,\varepsilon_1)}(d^{(2,\varepsilon_2)}(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ})) \\
 &= d^{(2,\varepsilon_1)}(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{\varepsilon_2}_{2'^\circ}, \underbrace{x_2}_{3'^\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{\varepsilon_1}_{2''^\circ}, \underbrace{\varepsilon_2}_{3''^\circ}, \underbrace{x_2}_{4''^\circ})
 \end{aligned}$$

Ahora realicemos la prueba del item b de la proposición antes mencionada

$$d^{(j,\varepsilon_2)}d^{(i,\varepsilon_1)} = d^{(i,\varepsilon_2)}d^{(j-1,\varepsilon_2)}$$

Caso 1: $i = j$

$$\begin{aligned} d^{(i,\varepsilon_1)}d^{(i,\varepsilon_2)}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= d^{(i,\varepsilon_2)}(d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-2})) \\ &= d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{(i,\varepsilon_1)}d^{(i-1,\varepsilon_2)}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= d^{(i,\varepsilon_2)}(d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{n-2})) \\ &= d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

Caso 2: $i < j$

$$\begin{aligned} d^{(j,\varepsilon_2)}d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= d^{(j,\varepsilon_2)}(d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_{n-2})) \\ &= d^{(j,\varepsilon_2)}(x_1, \dots, \varepsilon_1, \dots, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{(i,\varepsilon_1)}d^{(j-1,\varepsilon_2)}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= d^{(i,\varepsilon_1)}(d^{(j-1,\varepsilon_2)}(x_1, \dots, x_{j-1}, \dots, x_{n-2})) \\ &= d^{(i,\varepsilon_1)}(x_1, \dots, x_i, \dots, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_2, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

Antes de realizar la demostración de (c) vamos a tomar unos casos particulares con el fin de ilustrar, tomando $n = 4$, $j = 2$. Para ello consideremos el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1}^3 & \xrightarrow{d^{(2,\varepsilon)}} & \mathbf{1}^4 \\ & \searrow 1_3 & \downarrow s^2 \\ & & \mathbf{1}^3 \end{array}$$

Queremos probar que

$$s^2 d^{(2,\varepsilon)} = 1_3$$

En efecto

$$\begin{aligned} s^2 d^{(2,\varepsilon)}(x_1, x_2, x_3) &= s^2(d^{(2,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1_\circ}, \underbrace{x_2}_{2_\circ}, \underbrace{x_3}_{3_\circ})) \\ &= s^2(\underbrace{x_1}_{1'_\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2'_\circ}, \underbrace{x_2}_{3'_\circ}, \underbrace{x_3}_{4'_\circ}) \\ &= (\underbrace{x_1}_{1''_\circ}, \underbrace{x_2}_{2''_\circ}, \underbrace{x_3}_{3''_\circ}) \\ &= 1_3(\underbrace{x_1}_{1''_\circ}, \underbrace{x_2}_{2''_\circ}, \underbrace{x_3}_{3''_\circ}) \end{aligned}$$

Ahora bien realicemos la prueba del item *c* de la proposición antes mencionada

$$s^j d^{(j,\varepsilon)} = 1_{n-1}$$

$$\begin{aligned} s^j d^{(j,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= s^j(d^{(j,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1_\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j_\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-1)_\circ})) \\ &= s^j(\underbrace{x_1}_{1_\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{j_\circ}, \underbrace{x_j}_{j+1_\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{n_\circ}) \\ &= (\underbrace{x_1}_{1_\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j_\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-1)_\circ}) \\ &= 1_{n-1}(\underbrace{x_1}_{1_\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j_\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-1)_\circ}) \end{aligned}$$

Antes de realizar la demostración de *(d)* vamos a tomar unos casos particulares con el fin de ilustrar, tomando $n = 4$, $i = 2$ y $j = 4$. Para ello consideremos el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1}^4 & \xrightarrow{s^3} & \mathbf{1}^3 \\ d^{(2,\varepsilon)} \downarrow & & \downarrow d^{(2,\varepsilon)} \\ \mathbf{1}^3 & \xrightarrow{s^4} & \mathbf{1}^4 \end{array}$$

Queremos probar que

$$d^{(2,\varepsilon)} s^3 = s^4 d^{(2,\varepsilon)}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
 s^4 d^{(2,\varepsilon)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= s^4(d^{(2,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1\circ}, \underbrace{x_2}_{2\circ}, \underbrace{x_3}_{3\circ}, \underbrace{x_4}_{4\circ})) \\
 &= s^4(\underbrace{x_1}_{1'\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2'\circ}, \underbrace{x_2}_{3'\circ}, \underbrace{x_3}_{4'\circ}, \underbrace{x_4}_{5'\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2''\circ}, \underbrace{x_2}_{3''\circ}, \underbrace{x_4}_{4''\circ})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d^{(2,\varepsilon)} s^3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (d^{(2,\varepsilon)} s^3(\underbrace{x_1}_{1\circ}, \underbrace{x_2}_{2\circ}, \underbrace{x_3}_{3\circ}, \underbrace{x_4}_{4\circ})) \\
 &= d^{(2,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1'\circ}, \underbrace{x_2}_{2'\circ}, \underbrace{x_4}_{3'\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2''\circ}, \underbrace{x_2}_{3''\circ}, \underbrace{x_4}_{4''\circ})
 \end{aligned}$$

Ahora realicemos la prueba del item d de la proposición antes mencionada

$$s^j d^{(i,\varepsilon)} = d^{(i,\varepsilon)} s^{j-1}, \quad i < j$$

$$\begin{aligned}
 s^j d^{(i,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_n) &= s^j(d^{(i,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1\circ}, \dots, \underbrace{x_i}_{i\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j\circ}, \dots, \underbrace{x_n}_{n\circ})) \\
 &= s^j(\underbrace{x_1}_{1'\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{i'\circ}, \underbrace{x_i}_{(i+1)'\circ}, \dots, \underbrace{x_{j-1}}_{j'\circ}, \underbrace{x_j}_{(j+1)'\circ}, \dots, \underbrace{x_n}_{(n+1)'\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{i''\circ}, \underbrace{x_i}_{(i+1)''\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j''\circ}, \dots, \underbrace{x_n}_{n''\circ})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d^{(i,\varepsilon)} s^{j-1}(x_1, \dots, x_n) &= d^{(i,\varepsilon)}(s^{j-1}(\underbrace{x_1}_{1\circ}, \dots, \underbrace{x_i}_{i\circ}, \dots, \underbrace{x_{j-1}}_{j-1\circ}, \dots, \underbrace{x_n}_{n\circ})) \\
 &= d^{(i,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1'\circ}, \dots, \underbrace{x_i}_{i'\circ}, \dots, \underbrace{x_{j-2}}_{j-2\circ}, \underbrace{x_{j-1}}_{j-1\circ}, \dots, \underbrace{x_n}_{n-1\circ}) \\
 &= (\underbrace{x_1}_{1''\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{i''\circ}, \underbrace{x_i}_{(i+1)''\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j''\circ}, \dots, \underbrace{x_n}_{n''\circ})
 \end{aligned}$$

Antes de realizar la demostración de (e) vamos a tomar unos casos particulares con el fin de ilustrar, tomando el caso $n = 4$, $i = 3$ y $j = 2$. Para ello consideremos el siguientes diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1}^3 & \xrightarrow{d^{(2,\varepsilon)}} & \mathbf{1}^4 \\
s^2 \downarrow & & \downarrow s^3 \\
\mathbf{1}^3 & \xrightarrow{d^{(2,\varepsilon)}} & \mathbf{1}^4
\end{array}$$

Queremos probar que

$$s^3 d^{(2,\varepsilon)} = d^{(2,\varepsilon)} s^2$$

En efecto

$$\begin{aligned}
s^3 d^{(2,\varepsilon)}(x_1, x_2, x_3) &= s^3(d^{(2,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ}, \underbrace{x_3}_{3^\circ})) \\
&= s^3(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2'^\circ}, \underbrace{x_2}_{3'^\circ}, \underbrace{x_3}_{4'^\circ}) \\
&= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2''^\circ}, \underbrace{x_3}_{3''^\circ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^{(2,\varepsilon)} s^2(x_1, x_2, x_3) &= d^{(2,\varepsilon)}(s^2(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \underbrace{x_2}_{2^\circ}, \underbrace{x_3}_{3^\circ})) \\
&= d^{(2,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \underbrace{x_3}_{2'^\circ}) \\
&= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \underbrace{\varepsilon}_{2''^\circ}, \underbrace{x_3}_{3''^\circ})
\end{aligned}$$

Ahora bien realicemos la prueba del item e de la proposición antes mencionada

$$s^i d^{(j,\varepsilon)} = d^{(j,\varepsilon)} s^{i-1}, \quad i > j$$

$$\begin{aligned}
s^i d^{(j,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= s^i(d^{(j,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j^\circ}, \dots, \underbrace{x_i}_{i^\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{n-1^\circ})) \\
&= s^i(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{j'^\circ}, \underbrace{x_j}_{(j+1)'^\circ}, \dots, \underbrace{x_{i-1}}_{i'^\circ}, \underbrace{x_i}_{(i+1)'^\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{n'^\circ}) \\
&= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{j''^\circ}, \underbrace{x_j}_{(j+1)''^\circ}, \dots, \underbrace{x_{i-2}}_{(i-1)''^\circ}, \underbrace{x_i}_{i''^\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-1)''^\circ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^{(j,\varepsilon)} s^{i-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= d^{(j,\varepsilon)}(s^{i-1}(\underbrace{x_1}_{1^\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j^\circ}, \dots, \underbrace{x_{i-1}}_{(i-1)^\circ}, \underbrace{x_i}_{i^\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-1)^\circ})) \\
&= d^{(j,\varepsilon)}(\underbrace{x_1}_{1'^\circ}, \dots, \underbrace{x_j}_{j'^\circ}, \dots, \underbrace{x_{i-2}}_{(i-3)'^\circ}, \underbrace{x_i}_{(i-1)'^\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-2)'^\circ}) \\
&= (\underbrace{x_1}_{1''^\circ}, \dots, \underbrace{\varepsilon}_{j''^\circ}, \underbrace{x_j}_{(j+1)''^\circ}, \dots, \underbrace{x_{i-2}}_{(i-1)''^\circ}, \underbrace{x_i}_{(i)''^\circ}, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(n-1)''^\circ})
\end{aligned}$$

□

4.2. Categoría de los conjuntos cúbicos

Definición 4.4. Sea $n \geq 0$. Un conjunto cúbico X es un funtor contravariante de la categoría opuesta $\square$ a la categoría de conjuntos, es decir $X : \square^{op} \rightarrow \text{set}$ definido por

$$X(\mathbf{1}^n) = X_n$$

El conjunto X_n se llama n -celdas de X .

Definición 4.5. Sean X, Y conjuntos cúbicos. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de conjuntos cúbicos es una transformación natural de funtores.

Definición 4.6. Sea $n, m \geq 0$ la categoría de los conjuntos cúbicos denotada por $cset$ consiste en lo siguiente:

1. Los objetos de $cset$ son X^n , $\text{Ob}(cset) = X_n$.
2. Los morfismos de $cset$ son los siguientes:

$$cset(f, g) = \{h : f \rightarrow g : h \text{ es un morfismo de conjuntos cúbicos}\}$$

donde f, g son morfismos de conjuntos cúbicos.

4.3. Cocadenas casiconmutativas en conjuntos cúbicos

En este capítulo definimos un análogo a la teoría de cocadenas desarrollada por M.Mandell en su artículo *Cochain multiplications* [17], las cuales son las Cocadenas casiconmutativas definidas en conjuntos cúbicos

Definición 4.7. Sea $cset$ la categoría de los conjuntos cúbicos y Mod_K la categoría de R -módulos diferenciales graduados sobre un anillo conmutativo R . Una teoría de cocadena cuasiconmutativa está dada por lo siguiente:

1. Un functor contravariante $S_D : cset \rightarrow Mod_K$, el cual asigna a cada conjunto cúbico C un álgebra diferencial graduada $D(C)$.
2. Un producto denotado por $m_{C,D} : D(C) \times D(D) \rightarrow D(C \times D)$,
 - a) Axioma de Mayer-Vietoris. Un diagrama cocartesiano de conjuntos cúbicos

$$\begin{array}{ccc}
 C & \longrightarrow & C_1 \\
 \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 C_2 & \xrightarrow{i_2} & C'
 \end{array}$$

donde i_1, i_2 son una cofibración que induce un diagrama cartesiano de álgebras diferenciales graduadas.

$$\begin{array}{ccc}
 D(C) & \longleftarrow & D(C_1) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 D(C_2) & \longleftarrow & D(C')
 \end{array}$$

- b) Axioma de homotopía y de normalización. Si P es un espacio reducido a un punto, $D(P) = R$.
 Si I es un modelo cúbico del intervalo $[0, 1]$, la proyección de $X \times I$, induce un casi-isomorfismo entre $D(X)$ y $D(X \times I)$.
 Además Si C es un conjunto cúbico finito, los dos primeros axiomas implican que la cohomología de $D(C)$, es naturalmente isomorfa a la cohomología ordinaria con coeficientes en K .
- c) Axioma de Kunneth. El morfismo $m_{C,D}$, define un casi-isomorfismo de módulo graduado diferencial si C o D es un conjunto cúbico finito.
 Para este morfismo asociativo, existe un elemento identidad $1 \in D^0(C)$, define un morfismo de K sobre $D(C)$, tal que el siguiente diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 D(D) = K \otimes D(D) & \longrightarrow & D(C \times D) \\
 \downarrow & & \parallel \\
 D(C) \otimes D^*(C) & \longrightarrow & D(C \times D)
 \end{array}$$

notese que la primera flecha horizontal, es esencialmente inducida por la

proyección de $C \times D$ sobre D .

Si elegimos $C = D$, en el axioma anteriormente expuesto, tenemos que el morfismo composición

$$D^*(C) \otimes D(C) \xrightarrow{m_{C,C}} D(C \times D) \xrightarrow{\Delta} D(C)$$

donde Δ es la aplicación diagonal, define una estructura de álgebra diferencial graduada.

- d) Axioma de commutatividad. El siguiente diagrama es commutativo

$$\begin{array}{ccc} D(C) \overline{\otimes} D(D) & \longrightarrow & D(C \times D) \\ \downarrow \hat{R} & & \downarrow \hat{\sigma} \\ D(C) \overline{\otimes} D(C) & \longrightarrow & D(D \times C) \end{array}$$

El morfismo $\hat{\sigma}$ induce un cambio entre C e D , mientras que $\hat{R}$ permuta el producto tensorial.

- e) Axioma de casi-isomorfismo. Si $C_1, \dots, C_n$ son n espacios, podemos definir un producto tensorial reducido de la forma siguiente:
 $D(C_1) \overline{\otimes} \dots \overline{\otimes} D(C_n)$, como un módulo de $D(C_1) \otimes \dots \otimes D(C_n)$, obtenido como la intersección de todos los pares (i, j) de productos tensoriales reducidos $D(C_i) \overline{\otimes} D(C_j)$, y además la inclusión

$$D(C_1) \overline{\otimes} \dots \overline{\otimes} D(C_n) \longrightarrow D(C_1) \otimes \dots \otimes D(C_n)$$

es un casi-isomorfismo.

Definición 4.8. Sean X, Y conjuntos cúbicos, definimos el álgebra de las formas diferenciales sobre los conjuntos cúbicos de la forma siguiente

$$Mor(X, Y)$$

tales que los morfismos antes mencionados son de conjuntos cúbicos.

Bibliografía

- [1] C. Pita, *Cálculo Vectorial*, Prentice Hall 1995.
- [2] C. Henry, *Théories cohomologiques*, Invent. Math. (1976), pp. 261-271.
- [3] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press 1994.
- [4] D. Hatcher, *Algebraic Topology*, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 43. Springer 2001.
- [5] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publications Mathématiques de l'IHÉS , pp. 269–331, 1977
- [6] D. Quillen, *Rational Homotopy theory*, Ann. of Math. (2) (1969), pp. 205-295.
- [7] D. Kozlov, *Combinatorial algebraic topology*, Springer-Verlag New York 2008.
- [8] E. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill New York 1966.
- [9] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Graduate Texts in Mathematics , Springer-Verlag New York 1971.
- [10] G. Birkhoff, *A survey of modern algebra*, The Macmillan Company 1941.
- [11] J. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Addison Wesley 1974.

- [12] J. Jardine, *Cubical homotopy theory:a beginning*, preprint, 39 páginas, 2002.
- [13] I. Patchkoria, *Cubical resolutions and derived functors*, preprint, $\mathcal{X} : .\mathcal{K}\mathcal{T}/$, 20 páginas, 2009.
- [14] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Notes.
- [15] J. Dugunji, *Topology*, The University of Chicago 1968.
- [16] M. Armstrong, *Basic topology*, Springer-Verlag New York 1980.
- [17] M. Mandell, *Cochain multiplications*, Amer J Math , pp. 547-566.
- [18] M. Spivak, *Differential geometry*, vol I, Publish or Perish Inc, Berkeley 1979.
- [19] M. Karoubi, *Cochaines Quasi-commutatives en Topologie algebraique*, preprint, $\mathcal{X} : .\mathcal{A}\mathcal{T}/$, 57 páginas, 2008.
- [20] M. Karoubi, *Topologie et formes différentielles*, Leçons donnée le jeudi 5 mars 1998 Rédigée par Gilles Bailly-Mâitre, pp. 251–263.
- [21] N. Herstein, *Modern algebra*, Trillas 1996.
- [22] H-J Baues, *Algebraic Homotopy*, Cambridge studies in advanced mathematics. 15, Cambridge University Press 1989.
- [23] P. May, *Simplicial methods in algebraic topology*, The University of Chicago 1992.
- [24] R. Bott, L Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics , Springer-Verlag New York 1982.
- [25] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York 1991.

- [26] S. Matveev, M. Polyak, *Cubic complex and finite type invariants*, Geometry and Topology Monographs, Volume 4: Invariants of knots and 3-manifolds, pp. 215–233, Kyoto 2001.
- [27] I. Samuel, *Symmetric cubical sets*, preprint, $\mathcal{X} : \mathcal{AT}/$, 47 páginas, 2009.
- [28] S. Lefschetz, *Introduction to topology*, Princeton 1949.
- [29] S. Richard, *Differential geometry*, The University of Toronto, Canada 1995.
- [30] W. Massey, *Algebraic topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics , Springer-Verlag New York 1977.
- [31] W. Massey, *Singular Homology Theory*, Graduate Texts in Mathematics , Springer-Verlag New York 1980.
- [32] O. Alejandro, *Sobre la Cohomología De Rham del n -Toro*, Tesis de Grado 2006.
- [33] V. Lopatkin, *Cohomological rings of precubical sets*, preprint, $\mathcal{X} : \mathcal{AT}/$, 12 páginas, 2009.