



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Aplicación del Cálculo Estocástico en el revelado de los puntos especulares de la superficie del mar

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela por el **Br. Julián Rojas**
Millán

Tutor: Dra. Mairene Colina.

Caracas, Venezuela

Febrero 2011.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Aplicación del Cálculo Estocástico en el revelado de los puntos especulares de la superficie del mar**”, presentado por el **Br. Julián Rojas Millán**, titular de la Cédula de Identidad **16.719.348**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mairene Colina
Tutora

Dr. José Rafael León
Jurado

MSc. José Benito Hernández
Jurado

21 de mayo de 2011

*A Chare, mi abuela, por enseñarme que contar con los dedos era el primer
paso.*

A Linda Arvelo, por ayudarme a seguir contando en la universidad.

A Jocelyn León, porque si no la pongo acá no vivo para contarlo.

Agradecimientos

Para acabar primero con lo obvio: gracias por su paciencia. Sé que hice de esa virtud un recurso no renovable.

Agradezco los rulos de mi tutora la Dra. Mairene Colina, porque estuvieron allí para no dejarme caer desde que comencé la carrera.

Al Laboratorio de Computación Gráfica y Geometría Aplicada, mi adición al café se la debo a Uds. A sus coordinadores el Dr. Marco Paluzsny y el Dr. Francisco Tovar por la oportunidad que me brindaron de aprender dentro las mejores instalaciones de la facultad. A los profesores miembros y ex-miembros Jocer Franquiz, Gabriel Arcos, Jonnathan Otero, Adriana Padrón, Tomás Guardia, Eduardo Roa, Carlos Gonzales y a los futuros egresados Evelyn León y Arquímedes Gonzalez por las eternas horas de charla en el almuerzo. Echar carro no será los mismo sin Uds. Sí, echar carro era lo mejor que hacíamos. Acéptenlo.

Comparto la misma gratitud con cada uno de los profesores que conocí durante la carrera, pero con especial aprecio a la Dra. Zenaida Castillo, Dra. Yamileth Quintana y el Dr. Juan Guevara, su influencia en mí es palpable.

Agradezco a quienes ya puedo llamar colegas: Jocelyn León, Adrián Hernandez, Alessandra Fariñas, Carlos Moreno y Luigo Verdino. Podré olvidar derivar, integrar, invertir matrices, sumar, restar, pero jamás olvidaré que si no es mía o de mi compañero entonces la cochina debe morir. Es algo fundamental en la vida. A Félix Nieto, por todos los proyectos que tenemos por delante. A Mariana García y a Gabriel Rodríguez; aún no entiendo que ocurrió para que fueran una pareja tan importante para mí, pero no puedo imaginarme mi presente sin Uds. Ni mi futuro.

Debo agradecer a Valentina Colmenarez, Sandra Sabatini y Nerio Aguirre. No sé si lean esto, pero Caracas habría sido insípida de no haberlos conocido.

Quiero plasmar mi agradecimiento a Inéz Añes, a su madre, a su amorosa hermana, a toda la familia Contreras, por mostrarme que familia es cualquier

persona que desee serlo. También a mis tíos Alexander Sanzonetti, Marisela Millán, Gladys Millán y Nelson Lazcano por su torrente inagotable de apoyo. Estoy muy contento porque sé que por mucho que lo intente no podré agradecerse los, y eso es suficiente motivo para continuar trabajando en lo que amo.

A mi hermana mayor Kenia Rojas, próxima biólogo, por darme esa ventaja de 4 años en venir al mundo.

A mi padre Jesús Rojas por su incansable apoyo, por su incondicional amor, por su inquebrantable ejemplo.

A Yudith Millán, mi madre, por todas las veces que ha tenido que parirme.

Y por último, debo agradecer a la Ciudad Universitaria, a la Escuela de Matemática, a la Facultad de Ciencias, a la Universidad Central de Venezuela, por enseñarme que vencer a las sombras es un trabajo de todos los días.

A todos, muchas gracias.

Índice general

Introducción	8
1. Introducción a la Computación Gráfica	11
1.1. Línea de revelado en tiempo real	11
1.2. Modelo de Iluminación y Métodos de Sombreado	14
1.2.1. Modelo de Iluminación Phong	14
1.2.2. Métodos de sombreado o interpolación	17
1.3. Despliegue de la superficie del mar	20
1.3.1. Modelo Gestner para superficie del mar	21
1.3.2. Puntos especulares sobre la superficie del mar	22
2. Nociones de Cálculo Estocástico	24
2.1. Teoría Elemental de Probabilidades	24
2.2. Vector Aleatorio	26
2.3. Procesos Estocásticos	28
2.3.1. Proceso Gaussiano y Proceso de Poisson	30
2.3.2. Proceso de Wiener o Movimiento Browniano	32
2.3.3. Hoja Browniana	33
2.4. Integral Estocástica	34
2.4.1. Integral Estocástica de Ito	36
2.4.2. Integral estocástica de Ito (Extensión por aproximación)	37
2.4.3. Extensión de la integral estocástica de Ito a la Hoja Browniana	39
3. Representación Espectral de un Proceso Estocástico y Fórmula de Rice	41
3.1. Teorema Bochner - Khinchin y Representación Espectral de un Proceso Estocástico	41

3.1.1.	Teorema Bochner - Khinchin	42
3.1.2.	Representación Espectral de un Proceso Estocástico . .	45
3.2.	Fórmula de Rice	45
3.2.1.	Número de cruces de una función continua	46
3.2.2.	Conteo de Kac	46
3.2.3.	Teoremas de Kolmogorov e Ylvisaker	47
3.2.4.	Fórmula de Área	48
3.2.5.	Fórmula de Rice	50
4.	Funcionales de Nivel	52
4.1.	Introducción a Funcionales de Nivel	52
4.2.	Puntos Especulares en dos dimensiones	53
5.	Implementación	57
5.1.	WAFO	57
5.2.	Simulación del mar y cálculo de puntos especulares	58
5.3.	Resultados	62
5.4.	Consideraciones finales	63
	Bibliografía	66

Introducción

La simulación de fenómenos físicos es uno de los mayores objetivos de la computación, bien sea para calcular ecuaciones cuya solución no estaría a nuestro alcance a mano desnuda, o como por ejemplo dentro de la computación gráfica, visualizar el comportamiento de dicho fenómeno con algún fin. En este particular, la computación gráfica ha enfrentado el problema de despliegue del entorno marino y la superficie del mismo desde principios de 1980, fue a partir de esta época cuando las computadoras comenzaron a permitir la implementación de la teoría existente, la cual a todas luces era mucho más antigua.

En general, el despliegue tanto del entorno como la superficie del mar se divide en dos áreas: la óptica relacionada y la interacción física con los objetos sobre o sumergidos en ella (incluyendo otros fluidos). En lo que respecta a la superficie del mar existen diversos métodos para representar el movimiento y los efectos ópticos presentes, todos los cuales tienen base en la teoría oceanográfica que se comenzó a estudiar desde 1940 con fines prácticos (vale decir que las primeras consideraciones al respecto se remontan a mediados del siglo XIX). Entre los efectos más relevantes se encuentran la refracción, reflexión y destellos. Estos últimos son denominados también puntos especulares, son aquellos puntos donde la reflexión de la fuente de luz sobre la superficie es máxima, tomando en cuenta la posición de dicha fuente y la intensidad de la luz. Estos puntos producen un efecto de brillo muy característico de la superficie del mar.

Combinado con técnicas de mapeo de texturas, el brillo especular se logra utilizando imágenes generadas por algoritmos basados en teoría estadística. Sin embargo la misma no está relacionada directamente con los últimos estudios de oceanografía dentro del marco del Cálculo Estocástico.

Dentro del campo de la computación gráfica la primera descripción del mar fue hecha por Fournier y Reeves [1], quienes modelaron la línea de costa utilizando un modelo de superficie llamado Modelo Gertsner. En esos términos Darwin Peachy [2] presentó una variación del método utilizando otras bases más allá de las sinusoidales (centro del estudio de Fournier y Reeves).

Desde el punto de vista de oceanografía los primeros resultados relevantes para la computación gráfica fueron presentados por S.Q. Duntley en 1963.

La teoría de Cálculo Estocástico desarrollada por Ito permite una mejor representación de los fenómenos relacionados al mar. En particular la Fórmula de Rice Gaussiana, la cual permite resolver la ecuación de nivel que modela la descripción más formal de los destellos. El objetivo en el presente trabajo es estudiar la teoría necesaria para lograr dicha resolución y su implementación para usos computacionales

Dispondremos las secciones del documento de la siguiente manera: en el **Capítulo 1** se respasarán las nociones básicas de Computación Gráfica necesaria, en el **Capítulo 2** se revisarán los fundamentos de Probabilidad y Cálculo Estocástico, con especial atención a la definición de Procesos Estocásticos e Integral de Ito; en el **Capítulo 3** introduciremos la teoría necesaria la comprensión y manejo de los Procesos Estocásticos, así como también la Fórmula de Rice Gaussiana, herramienta central de todo el estudio. En el **Capítulo 4** se resolverá el campo estocástico asociado a los destellos y finalmente se mostrará la aplicación desarrollada en MatLab en el **Capítulo 5**, así como también algunas consideraciones y trabajos futuros.

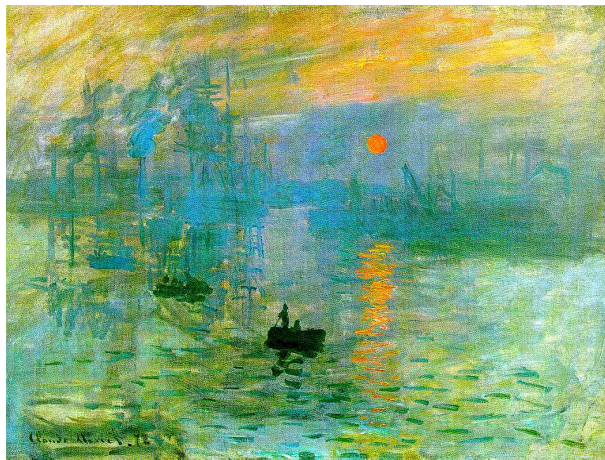


Figura 1: Impression, sunrise. Claude Monet, 1873.

Capítulo 1

Introducción a la Computación Gráfica

En el presente capítulo se repasarán de manera somera los procesos que nos permiten desplegar un objeto en una pantalla mediante un computador, así como también la manera estándar de desplegar la superficie del mar. Dichos objetos serán representados como una colección de puntos (o vértices) unidos por aristas, de tal forma que el conjunto de caras definidas por dichas aristas representan una aproximación a una variedad diferencial de orden 2. Nos referiremos a ellos como objetos poligonales o simplemente polígonos. Sin pérdida de generalidad asumiremos que cada objeto poligonal es una colección de triángulos, lo cual nos permitirá asignarle de manera unívoca e intuitiva un vector normal a cada cara. Por otra parte, la lista de vértices y aristas que conforman el polígono está contenida en un archivo de texto plano.

1.1. Línea de revelado en tiempo real

El objetivo principal al desplegar una escena es asignar un color a cada píxel que ocupa la proyección de los polígonos que la conforman en la pantalla dado un punto de vista (o cámara), tomando en cuenta para ello la forma en que incide la luz en dicho objeto. A ese proceso lo llamamos **Revelado** (*Rendering*). Existen dos formas de revelado; en primer lugar aquel en el cual el resultado se guarda en un formato de imagen (para posteriormente usarse en video por ejemplo), denominado **Revelado Fuera de Línea** (*Off-Line*

Rendering); y en segundo lugar el revelado donde el resultado se muestra en pantalla, llamado **Revelado en Tiempo Real** (*Real Time Rendering*). Ese último es el proceso que forma parte de las aplicaciones 3D usuales y también de los juegos de video. Si bien hay notables diferencias, la línea de trabajo en ambos comparte muchos principios. Examinaremos muy brevemente cada uno de estos principios en términos del revelado en tiempo real.

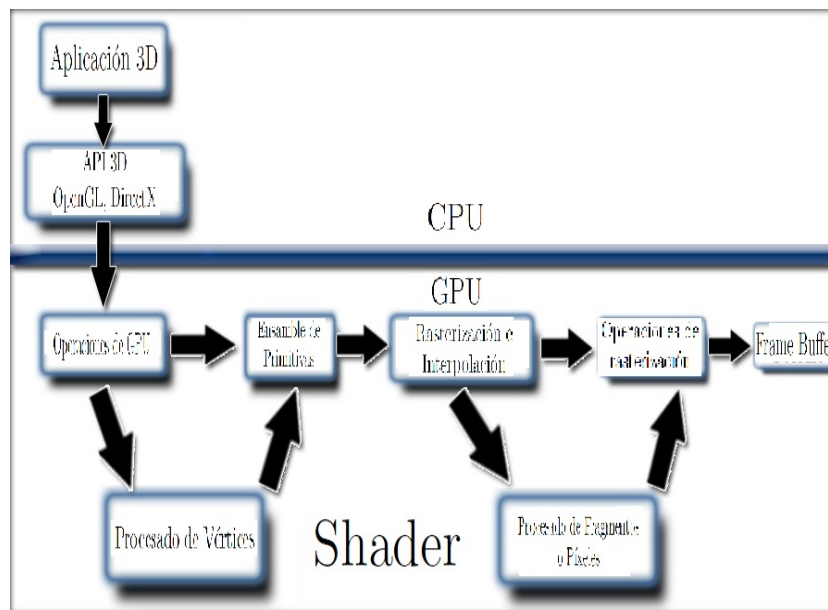


Figura 1.1: Diagrama de flujo general de la línea de revelado en tiempo real

Las fases que forman parte del proceso de revelado en tiempo real son las siguientes:

1. **Aplicación:** se refiere al programa que surte de parámetros de entrada a la rutina que luego desplegará el resultado. Por ejemplo las aplicaciones de modelación 3D y juegos de video reciben órdenes del usuario mediante controles en pantalla o mando.
2. **Transformaciones Geométricas:** toman la información de la etapa anterior para transformar la escena 3D en la proyección. Dentro de esta etapa tenemos:

- **Transformaciones de Modelos y Vistas:** se refiere al cálculo de las matrices necesarias para rotar, mover y orientar los objetos 3D en la escena de manera acorde al movimiento hecho por el usuario.
- **Sombreado o procesado por Vértices o por Fragmentos (*Vertex/Fragment Shader*):** Una vez calculadas las posiciones relativas de los objetos es necesario calcular la forma en que incide la luz en los mismos. Para ello se usan las normales de las caras que conforman al polígono, bien sea que tomemos las normales a los vértices o el resultado de interpolar dichas normales para obtener las correspondientes al interior de la cara. Un *Shader* es una pequeña rutina que hace ese cómputo directo en la tarjeta de video, lo cual permite acelerar el proceso. Vale acotar que un Shader permite hacer otros cálculos aparte de los correspondientes a la iluminación. Cuando se habla de las normales en el interior de las caras este vector puede implicar uno o más píxeles en pantalla, por lo que utilizamos el término Fragmento para referirnos en general a las operaciones envueltas sin distinción del número de píxeles en cuestión.
- **Proyección:** Una cámara determina una pirámide de visualización truncada, la cual se denomina *Frustrum*, dentro de dicha pirámide se definen el plano cercano y plano alejado de visualización. La intención es determinar la visibilidad de los polígonos dentro del frustrum para proceder a proyectarlos en pantalla. Se retiran aquellas caras que no serán visibles (por lo que no tiene sentido hacer cálculos sobre ellas), proceso denominado *Backface Culling*, posteriormente se procede a retirar las caras fuera de la pirámide de objetos parcialmente contenidos en ella, o *Clipping*, y por último se transforma el espacio 3D de la escena en las coordenadas de pantalla.
- **Rasterización:** Se procede a dibujar el polígono en pantalla. De manera somera las operaciones realizadas son: se dibujan las líneas que lo definen en la proyección, se completan los píxeles interiores a esas líneas, se determina la profundidad de cada objeto en la escena (para determinar que objetos tapen a otros) y por último se dibujan la información de las texturas asociadas.

1.2. Modelo de Iluminación y Métodos de Sombrado

Veremos a continuación con un poco más de detalle qué tipo de cálculos conforman los Vertex/Fragment Shader y las texturas. Asumiremos de manera intuitiva el hecho que la luz se comporta de manera aditiva en términos de sus componentes de color y la presencia de varias fuentes de luz.

1.2.1. Modelo de Iluminación Phong

Dado L un conjunto de luces dispuestas en una escena, y sea I un fragmento en pantalla, la intensidad de luz (luminancia) de dicho fragmento se obtiene utilizando la siguiente ecuación en cada punto p de la cara del polígono:

$$I_p = k_a i_a + i_{att} \left(\sum_{m \in L} (k_d \langle \mathbb{I}^m, \mathbb{n}_p \rangle i_d + k_s \langle \mathbb{r}_p^m, \mathbb{v} \rangle^\alpha i_s) \right).$$

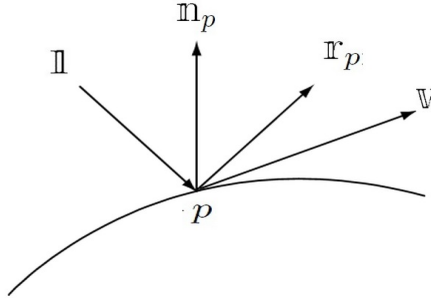


Figura 1.2: Diagrama del modelo de iluminación Phong.

La suma arriba descrita se hace para cada luz en el conjunto L . Se tiene que $\langle \mathbb{I}^m, \mathbb{n}_p \rangle$ se conoce como el término difuso y es consecuencia de la Ley de Lambert y $\langle \mathbb{r}_p^m, \mathbb{v} \rangle^\alpha$ como término especular y es consecuencia de la Ley de Snell. Examinemos en detalle los términos de esta ecuación, comenzando con los relativos a las fuentes de luz.

- i_a es la componente ambiental de la escena, la cual se suma al polígono en cuestión.

- i_d es la componente difusa de cada luz en la escena.
- i_s es la componente especular de cada luz en la escena.
- i_{att} es el componente o factor de atenuación.

Para cada luz en el conjunto L y un punto p en la superficie se definen los siguientes vectores:

- $\mathbb{l}$ como la dirección de una fuente de luz en particular al punto.
- $\mathbb{n}_p$ es la normal de la superficie en el punto.
- $\mathbb{r}_p$ es la dirección de un rayo perfectamente reflejado en p .
- $\mathbb{v}$ es la dirección del punto p a la cámara,

donde cada vector se asume normalizado y la operación entre ellos es el producto interno usual. Recordemos que la Ley de Snell dicta que en una superficie reflectante perfecta el rayo de luz incidente $\mathbb{l}$ y el rayo reflejado $\mathbb{r}_p$ tienen el mismo ángulo con respecto a la normal $\mathbb{n}_p$ en el punto p de dicha superficie.

Por último, definimos las propiedades luminosas de cada polígono en la escena:

- k_s es la constante de reflexión especular, es decir, la cantidad de luz reflejada por cada objeto.
- k_d es la constante de reflexión difusa, esto es, la cantidad de componente difusa (o lambertiana) reflejada por cada objeto. También es denominado Albedo.
- k_a es la constante de reflexión ambiental, o lo que es igual, la cantidad de reflexión de luz ambiental de cada polígono.
- α se define como la constante de brillantez, la cual es mayor en cuanto más reflectiva sea la superficie. Esto último implica que entre más reflectiva sea la superficie más pequeño son los brillos visibles en ella.

De la ecuación para I_p podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. El término difuso es independiente del punto de vista (o cámara).

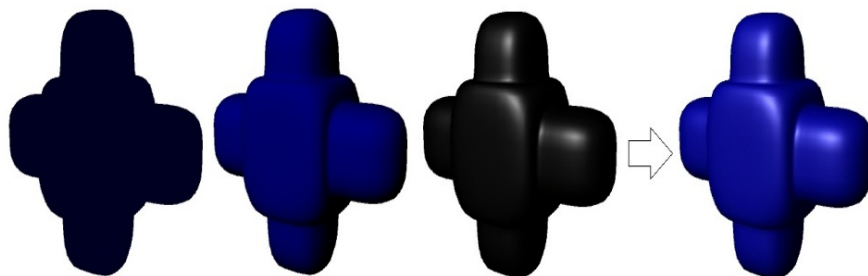


Figura 1.3: Los componentes del modelo de Iluminación Phong: ambiental, difuso, especular y la imagen resultante.

2. Asumiendo vectores normalizados, el término especular es el coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{v}$. Dicho término es mayor en tanto ambos vectores estén alineados.

Al momento de calcular color la ecuación del modelo de iluminación Phong se debe calcular para cada componente *RGB* en una imagen en particular, por lo que el término I_p se desglosa en I_p^R , I_p^G y I_p^B .

Las constantes k_d y k_s pueden ser aplicadas de manera mucho más específica. Se utiliza para ello los denominados mapas o texturas, las cuales para cada fragmento detectan el valor en la textura y lo utilizan en la ecuación del modelo de iluminación. Se procede de la siguiente manera: primero se proyecta el objeto poligonal sobre un plano, o creación de *UV*, y luego dicha proyección se superpondrá sobre los mapas para proyectarse de vuelta al objeto poligonal en el espacio tridimensional.

El modelo Phong asume superficies perfectamente reflectantes al introducir el vector $\mathbf{r}_p$, lo cual limita el modelo ya que o bien se tienen objetos de ese tipo (en los que varía la componente de brillantez) o bien objetos completamente opacos. Una forma de salvar esa desventaja es introducir el modelo de iluminación más general llamado **Modelo de iluminación Blinn - Phong**, el cual sustituye el vector $\mathbf{r}_p$ por el vector $\mathbf{h}_p$ definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}_p = \frac{\mathbf{l} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{l} + \mathbf{v}\|},$$

y luego se reemplaza $\mathbf{h}_p$ por $\mathbf{r}_p$ en el término especular.

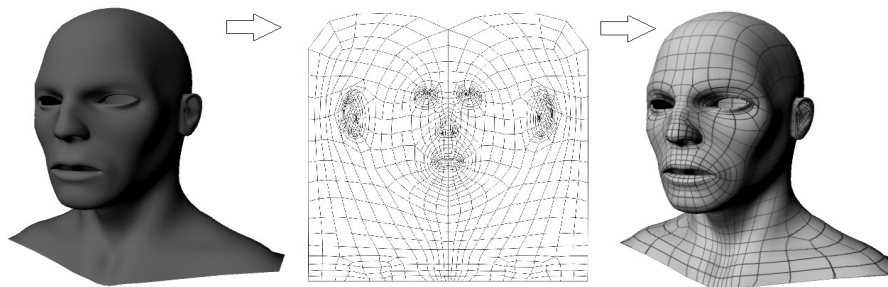


Figura 1.4: Modelo 3D con la proyección UV y el resultado de aplicar la imagen.

1.2.2. Métodos de sombreado o interpolación

Para que el modelo de iluminación sea calculado es necesario tener la normal $\mathbf{n}_p$ para cada punto p en el polígono, ya que a diferencia del resto de los vectores involucrados, la normal no está dada de manera explícita. Para ello se introducen los métodos de interpolación, los cuales aproximan la normal deseada para poder calcular la luminancia correspondiente. Estudiaremos los más comunes.

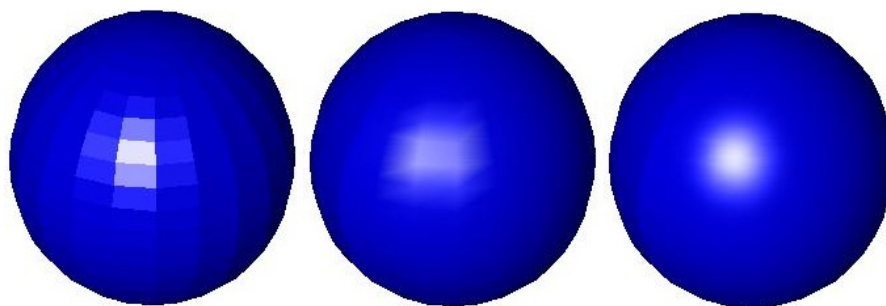


Figura 1.5: Modelos de interpolación: Plano, Gouraud y Phong.

Definición 1 *Método de sombreado Plano*

Cada cara del polígono es un triángulo, por ende se le puede asignar un vector normal $\mathbf{n}_p$ a cada uno de ellos de manera natural. El método de sombreado plano consiste en calcular la luminancia de un fragmento utilizando la misma normal $\mathbf{n}_p$ de la cara correspondiente. Es un método bastante veloz,

pero para obtener una representación suave de la iluminación se debe aumentar de manera considerable el número de caras del polígono, lo cual va en detrimento de la velocidad.

Definición 2 *Método de sombreado o interpolación Gouraud*

También denominado método de Interpolación de Intesidades. Se calcula la intensidad de luz en cada vértice utilizando el vector normal de los vértices $\mathfrak{n}_v$ de cada triángulo, dicho vector será el promedio de las normales de las caras que confluyen en el vértice. Se interpola linealmente la intensidad entre vértices a lo largo de las aristas del triángulo y por último se interpola la intensidad a lo largo de las líneas que conforman el interior del mismo (scan-line) utilizando las intensidades calculadas en el paso anterior.

Como se mencionó, la normal a un vértice es el promedio de las normales de los triángulos que confluyen en él, esto es:

$$\mathfrak{n}_v = \sum_{i=1}^m \frac{\mathfrak{n}_i}{\|\sum \mathfrak{n}_i\|}.$$

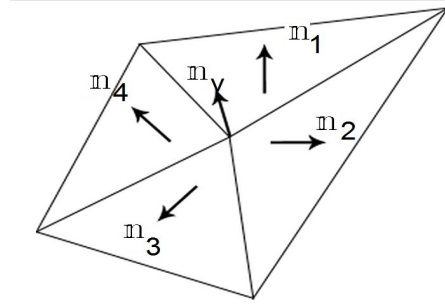


Figura 1.6: Normales en las caras y vértices.

Además, las interpolaciones son lineales a lo largo de las aristas y scan-lines, esto es:

$$I_a = I_1 - (I_1 - I_2) \frac{y_1 - y_s}{y_1 - y_2}.$$

$$I_b = I_1 - (I_1 - I_3) \frac{y_1 - y_s}{y_1 - y_3}.$$

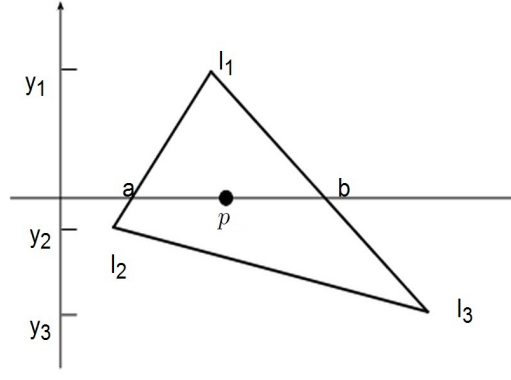


Figura 1.7: Diagrama del método de interpolación Gouraud.

$$I_p = I_b - (I_b - I_a) \frac{y_b - y_p}{x_b - x_a}.$$

Definición 3 *Método de sombreado o interpolación Phong*

Este método también recibe el nombre de método de Interpolación de Normales. Phong propone interpolar linealmente las normales a lo largo de una arista o un scan-line, posteriormente se calcula la intensidad en cada punto correspondiente a las normales obtenidas. En el caso de normales en aristas dichas normales se interpolan utilizando las normales a los vértices como puntos extremos de la interpolación, posteriormente el resultado de esta interpolación es utilizado para interpolar nuevamente normales a lo largo de scan-lines.

La interpolación es lineal a lo largo de las aristas:

$$\mathbf{n}_t = t\mathbf{n}_1 + (1 - t)\mathbf{n}_0 \quad t \in (0, 1).$$

Y definimos el vector normal asociado

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{n}_t}{\|\mathbf{n}_t\|}.$$

A lo largo de cada scan-lines se tiene:

$$\mathbf{n}_a = t\mathbf{n}_1 + (1 - t)\mathbf{n}_2.$$

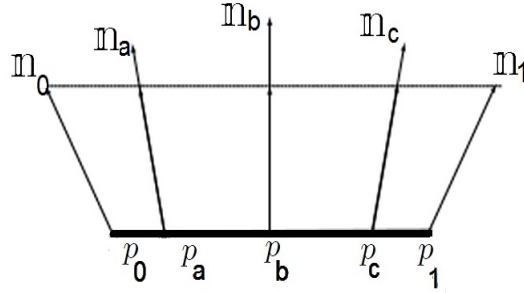


Figura 1.8: Interpolación lineal de normales a lo largo de una arista.

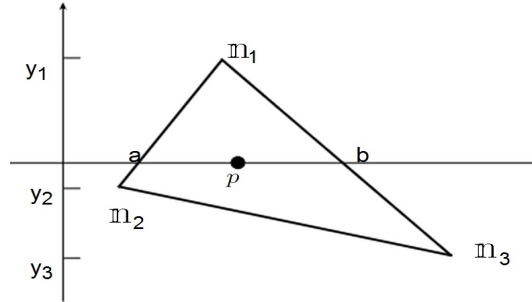


Figura 1.9: Diagrama modelo de interpolación Phong. Se interpolan vértices a los largo de aristas y posteriormente a lo largo de scanlines

$$\mathbf{n}_b = t\mathbf{n}_1 + (1 - t)\mathbf{n}_3.$$

$$\mathbf{n}_p = t\mathbf{n}_a + (1 - t)\mathbf{n}_b,$$

con $t \in (0, 1)$ en todos los casos. Estas normales igualmente deben ser vectores unitarios.

1.3. Despliegue de la superficie del mar

Para representar el mar en una imagen generada por computador utilizamos un plano con suficiente vértices, en los cuales aplicaremos el modelo de mar que estudiaremos a continuación.

1.3.1. Modelo Gestner para superficie del mar

Introducido aproximadamente 200 años atrás (y posteriormente en 1986 en el contexto de computación gráfica), el **Modelo Gestner** consiste en variar la posición de cada vértice en el plano en términos de un movimiento circular. Sea $\mathbf{x}_0 \equiv (x_0, z_0)$ y $y_0 = 0$ la altura en el instante de tiempo $t = 0$, se tiene entonces que cuando una onda de amplitud A , longitud λ y frecuencia θ pasa por el punto este es desplazado según la siguiente relación:

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - (\mathbb{k}/k)A \sin(\langle \mathbf{x}_0, \mathbb{k} \rangle - \theta t),$
- $y = A \cos(\langle \mathbf{x}_0, \mathbb{k} \rangle - \theta t),$

donde $\mathbb{k}$ es un vector columna denominado vector de onda, el cual apunta en la dirección en la cual se está haciendo la sumatoria, y tiene magnitud k definida de esta forma:

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Para representar el movimiento del mar en un número mayor de direcciones se generaliza el modelo anterior. Dado un conjunto de vectores de onda $\mathbb{k}_i$, con amplitudes A_i , frecuencias θ_i y fases σ_i con $i = 1, \dots, N$ se tiene:

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \sum_{i=1}^N (\mathbb{k}_i/k_i) A_i \sin(\langle \mathbf{x}_0, \mathbb{k}_i \rangle - \theta_i t + \sigma_i),$
- $y = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\langle \mathbf{x}_0, \mathbb{k}_i \rangle - \theta_i t + \sigma_i).$

Una representación aún más cercana al fenómeno real es aquella que utilizan variables aleatorias, a lo que denominamos mar aleatorio. Si bien el estudio de variables aleatorias se realizará con profundidad en los capítulos siguientes, el mar aleatorio consiste en la misma representación anterior salvo que amplitudes A_i , frecuencias θ_i y fases σ_i con $i = 1, \dots, N$ son variables aleatorias con ciertas condiciones. Una expresión equivalente y más compacta utiliza la noción dada por la transformada de Fourier, la cual incluye

aleatoriedad a la expresión expuesta anteriormente. Sea $h(x, t)$ la función que determina la altura de un punto (x, y) en la superficie del mar, se tiene que $h(x, t)$ se puede escribir como la suma de N funciones sinusoidales complejas $\tilde{h}$:

$$h(x, t) = \sum_{j=1}^N \tilde{h}_j(\mathbb{k}, t) e^{i(\langle \mathbb{k}, \mathbb{x} \rangle)}.$$

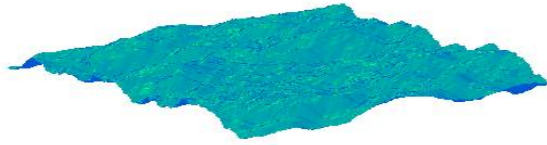


Figura 1.10: Ejemplo de mar aleatorio

1.3.2. Puntos especulares sobre la superficie del mar

Una vez definido un modelo del mar, el despliegue de los puntos especulares es consecuencia de aplicar la ecuación del Modelo de iluminación al polígono obtenido.

Como consecuencia de la ley de Snell se tiene una expresión matemática muy conocida para representar el rayo reflejado:

$$\mathbb{r}_p = \mathbb{l} - 2\mathbb{n}_p \langle \mathbb{n}_p, \mathbb{l} \rangle,$$

sin embargo podemos ser más específicos relacionando la igualdad anterior con la simulación de la superficie del mar.

El punto p en cuestión (el cual suponemos yace en la superficie del mar) se puede representar en el espacio tridimensional en función de su posición $\mathbf{x}$ en el plano xy y su altura, $h(\mathbf{x}, t)$, de la siguiente forma:

$$r(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{y}h(x, t) ,$$

donde $\mathbf{y}$ es un vector unitario ortogonal al plano xy y $t \in \mathbb{R}^+$. Sea $\epsilon(\mathbf{x}, t) \equiv \Delta h(x, t)$ la aproximación de la inclinación en puntos adyacentes, $\mathbf{n}_p$ es calculada utilizando esa cantidad de la siguiente forma:

$$\mathbf{n}_p = \frac{\mathbf{y} - \epsilon(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{1 + \epsilon(\mathbf{x}, t)^2}},$$

lo cual complementa la expresión del rayo reflejado.

Si bien el proceso de iluminación es una herramienta muy estudiada y la cual ya forma parte fundamental de la implementación en las tarjetas gráficas, lo que se desea introducir en este trabajo es una forma de determinar los puntos sin tener que evaluar todos los fragmentos, sino solo los necesarios asumiendo la representación del mar aleatoria, para así obtener un mapa especular dados el número y la distribución de los puntos especulares. De esta forma en principio se puede hacer un revelado más eficiente cuando se desea desplegar grandes extensiones de mar, pero más aún, permite dar el primer paso para simular otros efectos ópticos relacionados al mar los cuales no han sido estudiados desde el punto de vista que se presentará.

Capítulo 2

Nociones de Cálculo Estocástico

En este capítulo nos ocuparemos de exponer las nociones básicas de Cálculo Estocástico, tomando como punto de inicio la Teoría elemental de Probabilidades y Vectores Aleatorios, para luego introducir conceptos de Procesos Estocásticos, especialmente Movimiento Browniano y su generalización al plano.

2.1. Teoría Elemental de Probabilidades

Sea Ω un conjunto arbitrario no vacío al que convenientemente interpretaremos como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al conjunto Ω se le llama *Espacio Muestral*, y a un elemento perteneciente al mismo se le denominará ω . Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Ω , a la que llamaremos σ -álgebra, la cual supondremos cerrada bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables. A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama eventos o conjuntos medibles. Adicionalmente sea $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, llamada *Medida de Probabilidad Positiva*, la cual cumple los siguientes axiomas:

- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.
- Es σ -aditiva, es decir, dada una sucesión de eventos $A_1, A_2, \dots$, los cuales son disjuntos 2 a 2 entonces: $\mathcal{P}(\bigcup A_n) = \sum \mathcal{P}(A_n)$ para todo $A_i \in \mathcal{F}$.

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la denominaremos *Espacio de Probabilidad*. Si w es un evento, $\mathcal{P}(w)$ es una medida de frecuencia de observación de dicho evento durante la realización de un experimento.

Por otra parte, llamaremos *Espacio Medible* a la dupla $(\Omega, \mathcal{F})$. En particular $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es un espacio medible donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. A los elementos de la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se le llama *Borelianos* o *Conjuntos de Borel Medibles*.

Si bien hasta ahora tenemos claramente definidos los elementos de un Espacio de Probabilidad, no poseemos una forma de abstraernos del experimento al que representan. Para ellos nos valdremos del concepto de *Variable Aleatoria*. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función que asigna números reales a los elementos ω y es tal que para cualquier $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, el conjunto:

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathcal{B}\},$$

es un elemento de $\mathcal{F}$.

A X también se le denomina *Función Medible*, en este caso entre los espacios medibles $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, o simplemente $\mathcal{F}$ -medible. Sin mediar demostración afirmaremos que las variables aleatorias (o funciones medibles) son cerradas bajo las operaciones básicas de suma, diferencias, producto y cociente (cuando están bien definidas). Igualmente procesos límites de variables aleatorias (cuando existen) resultan también ser variables aleatorias.

Una variable aleatoria X también permite convertir un espacio medible $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ en un espacio de probabilidad de la siguiente manera: Sea $\mathcal{P}_X$ una función la cual a cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ le asigna $\mathcal{P}_X(\mathcal{B}) = \mathcal{P}(X^{-1}(\mathcal{B}))$. $\mathcal{P}_X$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y se le llama distribución de X . De manera complementaria se define la función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por $F(x) = \mathcal{P}(X \leq x)$ la cual es llamada función de distribución asociada a la variable aleatoria X .

Si g es una función real de variable real tal que la composición $g(X)$ es una variable aleatoria, definimos entonces la siguiente operación: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$, donde $F(x)$ es la función de distribución de X , a esta la llamamos *Esperanza* de $g(X)$. De manera particular tenemos:

- Si $g(x) = x$ se obtiene la esperanza de X denotada por $E[X]$.
- Si $g(x) = (x - E[X])^2$ entonces se obtiene la varianza de X denotada por $Var[X]$.

Todas las integrales involucradas son Riemman-Stieltjes sobre las cuales se asume su existencia.

De manera general podemos definir la *Esperanza Condicional* de una variable aleatoria integrable X , la cual a su vez es una variable aleatoria sobre la sub- σ -álgebra $G \subseteq \mathcal{F}$, y es denotada usualmente por $E[X|G]$. La misma es integrable, G -medible y para cualquier $V \in G$ satisface la igualdad:

$$\int_V E[X|G] d\mathcal{P} = \int_V X d\mathcal{P}.$$

Estas tres propiedades caracterizan de manera única (en el sentido casi seguro) a la esperanza condicional.

En particular tomaremos en cuenta las siguientes propiedades:

- Si X es G -medible entonces X misma cumple con la definición de esperanza condicional y por lo tanto $E[X|G] = X$.
- Si X es independiente de G entonces la esperanza condicional $E[X|G]$ es la constante $E[X]$.

2.2. Vector Aleatorio

Definición 4 Llamamos **Vector Aleatorio** a la n -tupla $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ donde $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Definición 5 **Función de distribución conjunta** La función de distribución $F = F_{X_1, \dots, X_n}$ de un vector aleatorio $(X_1, \dots, X_n)$ está definida por:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X_1, \dots, X_n}(x) \\ &= \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}) \\ &= \mathcal{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n). \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si la distribución de un vector $\mathbf{X}$ tiene *densidad* f_X , se puede representar la función de distribución F_X de $\mathbf{X}$ como

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, \dots, y_n) dy_1, \dots, dy_n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

donde la densidad es una función que satisface

$$f_X(x) \geq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1, \dots, y_n) dy_1, \dots, y_n = 1.$$

Por otra parte, denominamos *densidades marginales* a las funciones de densidad asociadas a cada una de sus componentes X_i y tuplas (X_i, X_j) , (X_i, X_j, X_k) etc, siempre y cuando el vector $\mathbf{X}$ tenga densidad f_X .

Definición 6 *La esperanza o media de un vector aleatorio $\mathbf{X}$ está dada por*

$$\mu_X = E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n]) = (\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n}).$$

La matriz de **Covarianza** de $\mathbf{X}$ está definida como

$$\sum_X = (Cov(X_i, X_j) : i, j = 1, \dots, n),$$

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = E(X_i X_j) - \mu_{X_i} \mu_{X_j},$$

es la covarianza de X_i y X_j . Nótese que la $Cov(X_i, X_j) = Var(X_i) := \sigma_{X_i}^2$.

Definición 7 Vector Gaussiano. Un vector gaussiano o normal $(X_1, \dots, X_n)$ es una n -tupla de variables aleatorias normales cuya función de distribución está dada por:

$$\mathcal{P}[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k] = \frac{1}{(2\pi |\sum_k|)^{k/2}} \int_{F_1} \dots \int_{F_k} e^{-(x - \mu_k) \sum_k^{-1} (x - \mu_k)^t} dx,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ es un vector columna y $\mu_k = (E[X_{t_1}], \dots, E[X_{t_k}])$, $\sigma_{i,j} = \sum (t_i, t_j)$, $i, j = 1, \dots, k$ y una matriz definida no negativa $\sum_k = (\sigma_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$.

Definición 8 Independencia. Si para toda colección de índices $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ y enteros $1 \leq k \leq n$ y todo subconjunto $B_1, \dots, B_n$ de $\mathbb{R}$ el conjunto de variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ cumple:

$$P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in B_{i_k}) = P(X_{i_1} \in B_{i_1}) \dots P(X_{i_k} \in B_{i_k}),$$

se dice que las X_i son variables aleatorias independientes. En otras palabras $X_1 \in B_1, \dots, X_{i_k} \in B_1$ son independientes.

Las variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ son independientes si y solo si su función de distribución conjunta puede escribirse como sigue:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1(x_1)} \dots F_{X_n(x_n)},$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Si F admite una densidad entonces dado un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ con densidad f_X entonces $X_1, \dots, X_n$ son independientes si y solo si

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n),$$

$$\text{para } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

2.3. Procesos Estocásticos

Definición 9 Un Proceso estocástico a tiempo continuo es una familia $(X_t, t \in I) = (X_t(\omega), t \in I, \omega \in \Omega, I \subseteq \mathbb{R})$.

Un proceso estocástico es una función de dos variables:

- Para un instante de tiempo t fijo, $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria.
- Para un ω fijo $X_t(\omega)$ es una función del tiempo para todo $t \in I$. Esta función es llamada trayectoria del proceso.

Un proceso estocástico $X = (X_t, t \in I)$ puede ser considerado como la colección de vectores aleatorios $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ para $t_1, \dots, t_n \in I$ y $n \geq 1$. Para cada uno de ellos podemos determinar la esperanza y la matriz de covarianza.

Definición 10 La **función de esperanza** de un proceso $X = (X_t, t \in I)$ está dada por

$$\mu_X(t) = \mu_{X_t} = E[X_t], t \in I.$$

La **función de covarianza** de X esta dada por

$$\sum_X(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))] \quad t, s \in I.$$

La **funcion de varianza** de X esta dada por

$$\sigma^2(t) = \sum_X(t, t) = \text{Var}(X_t), t \in I.$$

Definición 11 Las distribuciones finito-dimensionales de un proceso estocástico $X = (X_t, t \in I)$ son las distribuciones de los vectores finito-dimensionales $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, para todo $t_1, \dots, t_n \in I$ y $n \geq 1$.

Dos procesos definidos en el mismo espacio de probabilidad son *iguales en ley* si satisfacen que sus distribuciones finito dimensionales son iguales.

Entre algunas de las propiedades que puede tener un proceso está la de ser estacionario, esto es, un proceso cuyas características son invariantes respecto a traslaciones en el tiempo, formalmente:

Definición 12 Un proceso $X_t, t \in I$ es **estacionario** si $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_m+h})$ para todo h y todo $(t_1 \dots t_m) \in I^m$.

Por otra parte, sea $X = (X_t, t \in I)$ un proceso estocástico y $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, se dice que X tiene incrementos estacionarios si ellos son iguales en distribucion, esto es

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}.$$

Para todo $t, s \in I$ y h con $t + h, s + h \in I$.

Tambien puede resultar de interés observar si hay independencia del proceso de los incrementos generados a partir del proceso X , lo cual se define como sigue:

Definición 13 *Se dice que X tiene incrementos independientes si para cada colección de índices $t_i \in I$ con $t_1 \dots t_n$ y $n \geq 1$,*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son variables aleatorias mutuamente independientes.

Existen una gran variedad de procesos que resultan interesantes. A continuación definiremos dos de los más relevantes en el mundo de las aplicaciones.

2.3.1. Proceso Gaussiano y Proceso de Poisson

Definición 14 *Un proceso estocástico $X_t, t \in I$ es llamado **Gaussiano** si sus distribuciones finito dimensionales son gaussianas, es decir, si para cada seleccion de $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ el vector aleatorio $Z = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in \mathbb{R}^k$ tiene distribucion normal multivariada.*

Podemos decir entonces que un proceso gaussiano está completamente descrito una vez que se conoce su función de media y su función de covarianza.

Definición 15 (*Proceso Gaussiano Estacionario*) *El proceso gaussiano es estacionario si*

- $\mu_X(t + h) = \mu_X(t)$.
- $\sum(t + h, s + h) = \sum(t, s)$.

Nótese que $\mu_X(t) = \mu_X(0)$ para todo $t \in I$, entonces la función de media es constante.

Sin perdida de generalidad sea $X_t, t \geq 0$ un proceso gaussiano estacionario y centrado, se dice que X es estacionario si y solo si $\sum(t, s) = \gamma(|t - s|)$,

para alguna función γ . (Nótese que en caso de no ser centrado el proceso en cuestión podemos reemplazar X_t por $X_t - E[X_t]$).

Otro ejemplo de procesos aleatorio es el siguiente.

Definición 16 Sea $N(t)$ el número de eventos que existen en el intervalo de tiempo $[0, t]$. La sucesión de eventos descrita se dice de Poisson de radio λ , $\lambda > 0$ si se cumplen las siguientes condiciones:

- $N(0) = 0$.
- El número de eventos ocurridos en intervalos de tiempos disjuntos son independientes.
- La distribución de los eventos ocurridos en un intervalo de tiempo solo depende del tamaño del intervalo.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}\{N(h)=1\}}{h} = \lambda$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}\{N(h) \geq 2\}}{h} = 0$.

Donde la distribución de la probabilidad $\mathcal{P}$ corresponde a la distribución de Poisson de parámetro λ , $\lambda > 0$, para un conjunto de índices $i = 0, 1 \dots$ está dada por:

$$\mathcal{P}_i = \{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Un ejemplo importante de Proceso Gaussiano, por sus implicaciones teóricas y prácticas es el denominado Proceso de Wiener o Movimiento Browniano. El mismo tiene origen en la descripción del movimiento azaroso que describen las partículas sobre superficies de fluidos, por ejemplo, el movimiento del polen sobre la superficie del agua (originalmente descrito por Robert Brown a mediados del siglo XIX). A pesar de ese origen tan específico, las aplicaciones del Movimiento Browniano son bastante amplias y disímiles, abarcan desde estudios económicos hasta simulaciones físicas. A continuación detallaremos sus características más importantes.

2.3.2. Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

Definición 17 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y $(W(t), t \geq 0)$ un proceso estocástico definido sobre el mismo, decimos que $(W(t), t \geq 0)$ es un **Proceso de Wiener** o Movimiento Browniano si satisface las siguientes condiciones:

- $W_0 = W(0, \omega) = 0$ para casi todo ω .
- El proceso $\{W(t, \omega) : t > 0\}$ es Gaussiano sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ y para cualquier t y h con $t + h > 0$, $W(t + h, \omega) - W(t, \omega)$ tiene media 0 y varianza $|h|$.
- W tiene trayectorias continuas.

De manera equivalente podemos describir movimiento Browniano en virtud de las propiedades de un proceso Gaussiano.

Definición 18 Al proceso Gaussiano centrado $\{W_t : t > 0\}$ con función de covarianza $\sum(t, s) = t \wedge s = \min(t, s)$ se le llama **Movimiento Browniano Estándar**.

Sin mediar demostración listaremos las propiedades del Movimiento Browniano a Proceso de Wiener:

- $E[W_t] = 0$.
- $E[(W_t)^2] = t$ si $t > 0$.
- $E[W_t W_s] = (s \wedge t)$.
- $E[(W_t - W_s)^2] = (t - s)$ si $t \geq s$.

Aun cuando las trayectorias muestrales del movimiento Browniano son continuas, no son diferenciables en ningún punto, sin embargo se puede demostrar que es posible construir la derivada de un movimiento Browniano como un proceso estocástico generalizado, dicho proceso sería un proceso gaussiano con esperanza nula y varianza infinita e independiente con respecto a sí mismo en diferentes instantes de tiempo, lo que se conoce con el nombre de *ruido blanco*.

La trayectoria del movimiento Browniano no tiene variación acotada sobre cualquier intervalo finito $[0, T]$, $T \in \mathbb{R}$, lo que permite intuir su irregularidad. En otros términos:

$$\sup \sum |W_{t_i}(w) - W_{t_{i-1}}(w)| = \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones $\tau : 0 = t_0 \dots t_n = T$ de $[0, T]$.

2.3.3. Hoja Browniana

El movimiento browniano se extiende de manera natural al plano. Estudiaremos brevemente dicha extensión y sus propiedades.

Definición 19 Sea W una medida definida sobre $\mathbb{R}^{2+}$ tal que a cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2+})$ le asigna una variable aleatoria normal de media cero y varianza $\lambda(A)$; donde λ es la medida de Lebesgue. Sea $R_{st} = (0, s] \times (0, t]$ y definimos $W_{st} = W(R_{st})$. El proceso $W = \{W_{st} : (s, t) \in \mathbb{R}^{2+}\}$ es llamado **Hoja Browniana** y es tal que W_{st} es una variable aleatoria $N(0, \lambda(R_{st}))$ con función de covarianza definida por

$$E(W_{st}W_{s't'}) = (s \wedge s')(t \wedge t').$$

Si $A = (u, v] \times (s, t]$ entonces los incrementos de W sobre A están definidos por:

$$W(A) = W_{st} - W_{ut} - W_{sv} + W_{uv}.$$

La hoja browniana verifica las siguientes propiedades:

- Si $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ entonces $W(\omega_1)$ y $W(\omega_2)$ son independientes.
- Se anula sobre los ejes $W_{0s} = W_{s0} = 0, 0 < s, t < \infty$
- La función de trayectorias $W_{st}(\omega)$ es continua en (s, t) con probabilidad 1.

Por otra parte, es necesario definir la **Hoja Browniana Compleja**, la cual se utilizará más adelante. Para ello utilizaremos la definición anterior y nos limitaremos a dar su Esperanza y Varianza.

Definición 20 Sean $W_1(s, t)$ y $W_2(s, t)$ dos hojas brownianas independientes, se define la Hoja Browniana Compleja de la siguiente forma:

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1(s, t) + iW_2(s, t)).$$

Se tiene por definición que:

- $E[W(s, t)] = E[W_1(s, t) + iW_2(s, t)] = E[W_1(s, t)] + iE[W_2(s, t)] = 0.$
- $Var[W(s, t)] = E[|W(s, t)|^2] = \frac{1}{2}(st + st) = st.$

2.4. Integral Estocástica

Debido a que las trayectorias del Movimiento Browniano no son diferenciables y no tienen variación acotada no es posible que sean integrables en el sentido Lebesgue, por lo que es necesario la definición de una nueva integral de la forma

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega),$$

que en todo caso en la presencia de regularidad corresponde con la integral usual.

A continuación se procederá a la introducción de la Integral Estocástica de Ito. Nos limitaremos a desarrollar las nociones preliminares, para más detalles sobre la integral estocástica se puede consultar [6].

Definición 21 La familia $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de σ -álgebra sobre Ω es llamada **Filtración** si

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

para $s < t$.

Definición 22 Sea $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso estocástico.

- Se dice que X es un proceso medible si $X : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible con respecto a la σ -álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Esto es $X^{-1}(\mathcal{B})(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
- X es adaptado a la filtración. $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible, o lo que es equivalente $X_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}_t$, para $t \in \mathbb{R}^+$.
- La filtración definida por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a la familia $\{X_s^{-1}(B) : s \in [0, t], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Esta filtración es llamada la filtración natural del proceso estocástico X .

Si el proceso estocástico Y es adaptado a la filtración Browniana natural $\mathcal{F} = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ para todo t , diremos que Y es adaptada al movimiento Browniano. Esto significa que Y_t es una función de $W_s, s \leq t$.

Así como en Teoría de la Medida, la Integral de Ito se define primero para procesos simples y luego se extiende para procesos más generales. En este contexto se define proceso simple de la siguiente forma:

Definición 23 El proceso estocástico $C = (C_t, t \in [0, T])$ es simple si existe una partición $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ y una sucesión $(Z_i, i = 1, \dots, n)$ de variables aleatorias tales que

$$C_t = \sum_{k=1}^n Z_k \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k]}(t) + Z_n \delta_T(t),$$

donde la sucesión $(Z_i)_{i=1}^n$ está adaptado a $F_{t_i} = \sigma\{W_{t_j} : t_j \leq t_i\}$, esto es si Z_i es una función de un movimiento Browniano para tiempo t_{i-1} , y satisface $E[Z_i^2] < \infty$ para todo i y $\delta_T = 1$, si $t = T$ y cero en otro caso.

Denotaremos por $\mathcal{L}_0$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos simples.

2.4.1. Integral Estocástica de Ito

Consideraremos la clase de procesos cuyas trayectorias toman solo un número finito de valores. Sea $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ la filtración natural correspondiente.

Definición 24 *La integral estocástica de Ito para un proceso simple C sobre $[0, T]$ está dada por*

$$\int_0^T C_s dW_s := \sum_{i=0}^n C_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=0}^n Z_i \Delta_i W.$$

La integral estocástica de un proceso simple C sobre $[0, t]$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, está dada por

$$I_t(C) = \int_0^T C_s dW_s := \int_0^T C_s \mathbb{1}_{[0,t]} dW_s = \sum_{i=0}^n Z_i \Delta_i W + Z_k(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

Se enunciarán sin demostración las propiedades de la integral anteriormente definida. Para demostración ver [6] u [11].

- $E[I_t(C)] = 0$.
- La integral de Ito es cuadrado integrable y satisface la propiedad de isometría:

$$E\left(\int_0^t C_s dW_s\right)^2 = \int_0^t E[C_s^2] ds, t \in [0, T].$$

- La integral estocástica de Ito es lineal. Para constantes c_1, c_2 y procesos simples $C^{(1)}, C^{(2)}$ sobre $[0, T]$ se tiene:

$$\int_0^t [c_1 C_s^{(1)} + c_2 C_s^{(2)}] dW_s = c_1 \int_0^t C_s^{(1)} dW_s + c_2 \int_0^t C_s^{(2)} dW_s,$$

- La integral estocástica de Ito es lineal sobre intervalos adyacentes. Para $0 \leq t \leq T$ se tiene:

$$\int_0^T C_s dW_s = \int_0^t C_s dW_s + \int_t^T C_s dW_s.$$

- El proceso $I_t(C)$ tiene trayectorias continuas.

2.4.2. Integral estocástica de Ito (Extensión por aproximación)

Sea $\mathcal{L}_2 \in [0, T]$ el espacio de todos los procesos medibles:

$$\Phi = \{\varphi(t, \omega); t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega\} = \{\varphi_t(\omega)\}_{t \geq 0},$$

adaptados a $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s; s \leq t\}$ tales que

$$\|\varphi\|_{2,T}^2 = E\left[\int_0^T \varphi_s^2(\omega) ds\right] < \infty.$$

La métrica asociada a este espacio es

$$\|\varphi\|_{2,T}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (\|\varphi\|_{2,n} \wedge 1).$$

Este espacio es completo respecto a esta norma, es decir, es un espacio de Banach. Por lo tanto toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene límite en él.

Queremos darle sentido a la definición de $\int_0^T \varphi_t(\omega) dW_t$ para todo $\varphi \in \mathcal{L}_2[0, T]$, para esto recordaremos que todo proceso simple es un elemento de $\mathcal{L}_2$, entonces tenemos que $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_2$, además $\mathcal{L}_0$ es denso en $\mathcal{L}_2$ respecto a la norma asociada. Esto significa que para cualquier proceso $\varphi \in \mathcal{L}_2[0, T]$ existe una sucesión de procesos simples

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n_k} C_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde C_i son procesos simples $\mathcal{F}_t$ -medibles y cuadrado integrables, tales que $\varphi_n \uparrow \varphi$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 dW_t = 0,$$

así definimos

$$\int_0^T \varphi(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW_t,$$

la cual existe debido a que $h_n = \int_0^T \varphi_n(t) dW_t$ es una sucesión de Cauchy, puesto que $E[\int_0^T (\varphi_n(t) dW_t - \varphi_m(t) dW_t)^2] = \int_0^T E[\varphi_n(t) - \varphi_m(t)]^2 dt \rightarrow 0$. Nótese que la integral es una variable aleatoria integrable, tal que $E[I(\varphi)] = 0$, además es cuadrado integrable y se puede ver fácilmente, que la definición no depende de la sucesión, de esta manera usando la propiedad de isometría para funciones simples y el teorema de convergencia dominada tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} E[\int_0^T \varphi_n(t) dt]^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T E[(\varphi_n(t))^2] dt \\ &= \int_0^T E[(\varphi(t))^2] dt. \end{aligned}$$

luego,

$$E[\int_0^T \varphi_n(t) dW_t]^2 = \int_0^T E[(\varphi(t))^2] dt,$$

de donde se desprende la siguiente definición.

Definición 25 Sea $\varphi \in \mathcal{L}_2[0, T]$, entonces la **Integral de Ito** de φ de 0 a T está definida por

$$\int_0^T \varphi(t) dW_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW_t(\omega),$$

donde $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones simples tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[\int_0^T [\varphi - \varphi_n(t)]^2 dt] \rightarrow 0.$$

La integral así definida satisface la propiedad de isometría con respecto a la medida de Lebesgue,

$$E[(\int_0^T (\varphi) dW_t)^2] = \int_0^T E[(\varphi(t))^2] dt,$$

así como también todas las demás propiedades verificadas por la integral estocástica para procesos simples.

2.4.3. Extensión de la integral estocástica de Ito a la Hoja Browniana

Las nociones estudiadas en la sección anterior son fácilmente extendibles a la Hoja Browniana. Se estudiará dicha extensión de manera superficial en los siguientes párrafos. En esta ocasión queremos darle sentido a la siguiente notación:

$$f \cdot W_{st} = \int_{\mathbb{R}_{st}} f_{uv} dW_{uv},$$

para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^{2+}$. Al igual que en el caso unidimensional, se pretende definir la integral como un proceso estocástico, en esta oportunidad definido de esta forma $\{f \cdot W_{st} : (s, t) \in \mathbb{R}^{2+}\}$.

Sea $\mathcal{L}_0^2$ el espacio de todos los procesos $\{f_{st} : (s, t) \in \mathbb{R}^{2+}\}$, tales que f_{st} es $\mathcal{F}_{st}$ -adaptado $f_{st}(\omega)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2+}) \times F$ -medible y

$$\|f\| := E\left[\int_{\mathbb{R}^2} f_{st}^2 ds dt\right]^{1/2} < \infty.$$

Entonces $\mathcal{L}_0^2$ es un subespacio de $L^2(\mathbb{R}^{2+} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2+}) \times \mathcal{F}, dt \times dp)$. Las funciones indicadoras, es decir funciones de la forma,

$$f_{st}(\omega) = X(\omega) \mathbb{1}_{[s', t'] \times [s'', t'']}(s, t),$$

donde $X(\cdot)$ es una función acotada y $\{X(\cdot)\}$ es $\mathcal{F}_{s', t'}$ -medible, son elementos de $\mathcal{L}_0^2$. Además, se definen las funciones simples como

$$f_{st}(\omega) = \sum_i X_i(\omega) \mathbb{1}_{A_i}(s, t),$$

donde $A_i = (s_i, t_i] \times (s'_i, t'_i]$ son densos en $\mathcal{L}_0^2$.

Sea $A_i = (x_i, y_i] \times (x'_i, y'_i] \subset \mathbb{R}^{2+}$ y sea $X_i \in \mathcal{F}_{x_i, y_i}$ acotada, entonces podemos definir la integral estocástica $f \cdot W$ de la función $f_{st} = \sum_i X_i(\omega) \mathbb{1}_{A_i}(s, t)$ como

$$f \cdot W_{st} := \int_{R_{st}} f dW_{st} := \sum_i X_i(\omega) W(A_i \cap R_{st}).$$

Nótese que la definición corresponde a un proceso $\{f.W_{st} : (s, t) \in \mathbb{R}^{2+}\}$ el cual se anula en los ejes y verifica la propiedad de isometría

$$E[f.W_{st}]^2 = E\left[\int_{R_{st}} f_{uv}^2 dudv\right] = \int_{R_{st}} E[f_{uv}^2] dudv.$$

De manera natural se extiende la definición a procesos generales. Supongamos $f \in \mathcal{F}_0^2$, como las funciones simples son densas en este espacio y además $\mathcal{F}_0^2$ es cerrado entonces se tiene que existe una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ tales que

$$\|f_n - f\| \leq 2^{-n}.$$

para cada n y en consecuencia $f_n W_{st}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Hilbert cerrado. Se define entonces:

$$\|f.W_{st}\| := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n.W_{st}.$$

Para completar la definición la integral estocástica para la hoja browniana compleja son necesario los teoremas que estudiaremos en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Representación Espectral de un Proceso Estocástico y Fórmula de Rice

En este capítulo ofreceremos una representación alternativa de un Proceso Estocástico, a la que llamaremos **Representación Espectral** usando para ello conocimiento proveniente de Variable Compleja. De igual forma introduciremos la Fórmula de Rice y su versión Gaussiana.

Debemos acotar que si bien los resultados presentados a continuación son válidos para cualquier proceso estocástico débilmente estacionarios, en el contexto de este trabajo solo se consideraran procesos estocásticos gaussianos estacionarios.

3.1. Teorema Bochner - Khinchin y Representación Espectral de un Proceso Estocástico

Si bien la representación usual de un proceso contiene toda la información del mismo, es muy difícil a partir de ella obtener datos que nos permitan describir el fenómeno que simula, o en otro caso manipular los cálculos de una manera eficiente y fácil. El teorema que demostraremos en la siguiente sección nos permitirán introducir de manera natural la representación espectral de un

proceso estocástico, la cual servirá para salvar la desventajas mencionadas. La intención es relacionar el resultado del teorema con la definición de la integral con respecto a la hoja browniana compleja.

3.1.1. Teorema Bochner - Khinchin

Definición 26 Una función $r(t)$ a valores complejos en $(-\infty, \infty)$ es llamada **Positiva definida** si para cada entero $n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, y valores complejos $z_1, \dots, z_n$ se tiene

$$\sum_{j,k=1}^n r(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0.$$

En general asumimos que la suma anteriormente definida tiene como resultado un número real.

Lema 1 Sea $r(t)$ una función continua y positiva definida entonces:

1. $r(0) \geq 0$,
2. $\bar{r}(t) = r(-t)$, $|r(t)| \leq r(0)$ y en particular se tiene que $r(t)$ es una función acotada,
3. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt < \infty$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt \geq 0;$$

4. Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $e^{itx} r(t)$, como función de t , es positiva definida.

Demostración 1 Para demostrar la afirmación i) basta con sustituir $n = 1$ y $z = 1$ en la definición de positiva definida. De igual forma la afirmación iv) se prueba reemplazando z_k con $z_k e^{it_k x}$. Procederemos entonces con las afirmaciones restantes.

Para probar ii) tomamos $n = 2$, $t_1 = t$, $t_2 = 0$, $z_1 = z$, $z_2 = \lambda$, donde λ es un número real. Se tiene entonces de la definición de positivo definido.

$$r(0)(|z|^2 + \lambda^2) + \lambda r(t)z + \lambda r(t-z)\bar{z} \geq 0.$$

Se sigue que $r(t)z + r(t-z)\bar{z} \geq 0$ para cualquier complejo z . Más aún, ya que $r(t)z + r(t-z)\bar{z} = 2\operatorname{Re}(r(-t)\bar{z}) = 2\operatorname{Re}(r(-t)\bar{z})$ para cualquier complejo z , lo cual solo es posible cuando $r(t) - \bar{r}(-t) = 0$. Sustituyendo $z = \bar{r}(t)$ se tiene:

$$r(0)|r(t)|^2 + r(0)\lambda^2 + r(0)z\lambda^2 + 2\lambda|r(t)|^2 \geq 0,$$

para todo λ real. Se sigue entonces que $|r(t)|^4 - r(0)^2|r(t)|^2 \leq 0$. Por *i*) se sabe que $r(0) \geq 0$, en el caso $r(0) = 0$ entonces se tiene de la desigualdad que $r(t) = 0$ para todo t lo cual verifica trivialmente lo requerido, en el caso $r(0) > 0$ se tiene $|r(t)|^2 < r(0)$ de donde $r(t)$ es acotada para todo t .

Para demostrar *iii*) debemos tomar en cuenta que r es continua y su integral es el límite de las sumas de Riemman. Viendo dt y ds como z_j y $\bar{z}_k$ respectivamente, se tiene de la definición:

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N \int_{-N}^N r(t-s) dt ds &\approx \sum_{i,j} r(t_i - t_j) \Delta t_i \Delta t_j \geq 0, \\ 0 &\leq \frac{1}{N} \int_{-N}^N \int_{-N}^N r(t-s) dt ds = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \left(2 - \frac{|t|}{N}\right) I_{|t| \leq 2N} dt, \end{aligned}$$

donde la igualdad proviene del cambio de variable $t-s = t'$, $t+s = s'$. Por el teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue la última integral converge a $\int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt$ por lo que se tiene el resultado y la demostración del lema.

□

Teorema 1 (*Bochner - Kinchin*) Sea $r(t)$ una función continua positiva definida. Entonces existe una única medida $\mathcal{P}$ no negativa en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = r(0)$ y

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathcal{P}(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración 2 La unicidad viene de la teoría de funciones características, probemos entonces la existencia. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $r(0) \neq 0$ y que $r(0) = 1$.

Asumiendo $r(0) \neq 0$ probamos el teorema para el caso particular

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)| dt < \infty.$$

Se tiene por la sección *ii*) del lema anterior

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)|^2 dt < \infty.$$

Definamos f como la transformada de Fourier de r como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} r(t) dt.$$

Se tiene usando las secciones *iii*) y *iv*) del lema que $f(x) \geq 0$. También se tiene por teoría de Fourier que la transformada definida $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{P})$ y

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx.$$

para casi todo t , donde la última integral es entendida en el sentido L_2 como el límite de $\int_{|x| \geq n} e^{itx} f(x) dx$. Para terminar la prueba en nuestro caso particular debemos probar que f es integrable, es decir, la última integral existe en el sentido usual de una función continua de t , lo cual aunado a la continuidad de r implica que la integral es válida para todo t en lugar de para casi todo.

Por la identidad de Parseval, para $s > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-sx^2/2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/(2s)} r(t) dt.$$

Tomando en cuenta que la función $\sqrt{s/(2\pi)} e^{-sx^2/2}$ es la transformada de Fourier de $e^{-t^2/(2s)}$, se tiene que la integral se puede reescribir como $E[r(\sqrt{s}\xi)]$, donde $\xi \approx N(0, 1)$, y debido a que r es continua y acotada, la integral converge a $r(0)$ cuando $s \downarrow 0$. Por el teorema de convergencia monótona ($f \geq 0$) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = r(0) < \infty.$$

Esto prueba el teorema para el caso particular elegido. En el caso general, para $\epsilon > 0$ definimos

$$r_\epsilon(t) := r(t)e^{-(\epsilon^2 t^2)/2} = E[r(t)e^{it\epsilon\xi}].$$

Por la sección *iv*) se verifica que r_ϵ es positiva definida.

Se tiene entonces

- $r_\epsilon(0) = 1$
- $\int_{\mathbb{R}} |r(\epsilon)| < \infty$,

por lo que existe una distribución para la cual r_ϵ es la función característica. De teoría de probabilidad se tiene que si una sucesión de funciones características converge a una función que es continua en 0, entonces esta función es también la función característica de una función de distribución. Ya que $r_\epsilon \rightarrow r$ cuando $\epsilon \downarrow 0$ de donde se demuestra el teorema.

□

3.1.2. Representación Espectral de un Proceso Estocástico

Teorema 2 Sean $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso gaussiano centrado estacionario, entonces existe un proceso gaussiano Z con incrementos independientes tal que

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda).$$

La existencia de la representación espectral es consecuencia directa del teorema de *Bochner-Kinchin* aplicado a la integral estocástica en el Capítulo 2. Ver [5] para más detalles.

3.2. Fórmula de Rice

El planteamiento de la Fórmula de Rice requiere de un conjunto bien específico de definiciones y teoremas previos a su enunciación. De manera específica haremos uso de los teoremas de Kolmogorov y Ylvisaker. Las siguientes secciones estarán dedicadas a completar esa tarea.

3.2.1. Número de cruces de una función continua

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo I . Se denotará.

1. $C_u(f, I) = C_u = \{t \in I \mid f(t) = u\}$ al conjunto de raíces de la ecuación $f(t) = u$ en el intervalo I .
2. $N_u(f, I) = N_u = \text{card}(C_u(f, I))$ el número de esas raíces, que puede ser finito o infinito, el cual se llamará número de cruces.

En el presente trabajo estudiaremos de manera específica $N_u(X, I)$ cuando $X(\cdot)$ es una trayectoria de un proceso Guassiano.

Sea $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $I = [t_1, t_2], t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Se dice que satisface la hipótesis $H_{1,u}$ si:

- g es C^1 .
- $g(t_1) \neq u, g(t_2) \neq u$.
- $M = \{t \in I \mid g(t) = u, g'(t) = 0\} = \emptyset$.

Por otra parte recordemos que si X e Y son dos espacios métricos, una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es localmente Lipschitz si para todo $t \in X$ existe un entorno V de t tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(y, x) \text{ para todo } x, y \in V,$$

donde $K > 0$ es una constante y se le conoce con la constante de Lipschitz.

3.2.2. Conteo de Kac

Lema 2 (Conteo de Kac) sea f una función que satisface la hipótesis $H_{1,u}$, entonces

$$N_u(f, I) = N_u = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_I \mathbb{1}_{\{|f(t)-u|<\delta\}} f'(t) dt.$$

Demostración 3

Como f satisface $H_{1,u}$ se tiene que f es continua en el espacio I compacto de $\mathbb{R}$, por lo que $N_u < \infty$. Supongamos que $N_u = n$.

- Si $n = 0$ la demostración es inmediata, puesto que el segundo miembro de la ecuación es idénticamente cero si δ es lo suficientemente pequeño.
- Si $n \geq 1$

Entonces:

$$C_u(f, I) = \{\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_n\},$$

donde $f'(\tau_k) \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, n$. Para δ lo suficientemente pequeño, por el *Teorema de la Función Inversa*, la imagen inversa del intervalo $(u - \delta, u + \delta)$ es la unión de exactamente n conjuntos disjuntos $J_1, J_2, \dots, J_n$ en I tales que $\tau_k \in J_k$ y $f|_{J_k}$ es inyectiva para todo $k = 1, \dots, n$ por lo tanto, un difeomorfismo.

Luego,

$$\int_{J_k} |f'(t)| dt = 2\delta,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \int_I \mathbb{1}_{|f(t)-u|<\delta} f'(t) dt &= \frac{1}{2\delta} \sum \int_{J_k} |f'(t)| dt \\ &= n. \end{aligned}$$

□

3.2.3. Teoremas de Kolmogorov e Ylvisaker

Teorema 3 (*Kolmogorov*) Sea $\varphi = \{Y_t : t \in [0, 1]\}$ un proceso estocástico que satisface: para cada par $t, t + h \in [0, 1]$,

$$\mathcal{P}\{|Y(t+h) - Y(t)| \geq \alpha(h)\} \leq \beta(h),$$

donde α, β son funciones en $[-1, 1]$, incrementado en $[0, 1]$ que verifique

- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(2^{-n}) < \infty,$
- $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \alpha(2^n) < \infty.$

Entonces, existe una versión $\chi = \{X_t : t \in [0, 1]\}$ del proceso φ tal que, las trayectorias, X_t son continuas sobre $[0, 1]$.

Teorema 4 *Ylvisaker* Sea $\{Z_t : t \in T\}$ un proceso Gaussiano indexado sobre un espacio topológico compacto separable T , teniendo trayectorias continuas y $\text{Var}(Z(t)) > 0$ para todo $t \in T$, entonces, para cada $u \in \mathbb{R}$ fijo, se tiene que

$$\mathcal{P}(E_u^Z \neq \emptyset) = 0,$$

donde $E_u^Z = \{t \in T : Z(t) = u, Z'(t) = 0\}$, es el conjunto de los extremos locales de $Z(\cdot)$ con valor igual a u .

3.2.4. Fórmula de Área

Teorema 5 (*Teorema de Sard*). Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función C^r . Si

$$r > \max(0, \dim(X) - \dim(Y)),$$

entonces los puntos críticos de f forman un conjunto de medida cero.

Teorema 6 (*Fórmula de área*) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente de Lipschitz y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $N_A^g = \{s \in A \subset \mathbb{R} : g(s) = y\}$, entonces

$$\int_A f(g(s)) |g'(s)| ds = \int_{\mathbb{R}} f(y) N_A^y dy.$$

Demostración 4

- Caso 1: $m(A) = 0$.

Si $m(A) = 0$ entonces

$$\int_A f(g(s))|g'(s)|ds = 0.$$

Como g es localmente Lipschitz entonces $m(g(A)) \leq Km(A) = 0$ lo que implica que $N_A^g(y) = 0$ y así

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)N_A^g(y)dy = 0.$$

■ Caso 2: $m(A) \neq 0$. Dividiremos este caso en dos pasos.

1. Consideremos el conjunto $A_1 = \{s \in \mathbb{R} : |g'(s)| > 0\}$ y $B_1 = A_1 \cap A$ entonces existe W_j un cubrimiento de Vitalli de B_1 , es decir $B = \bigcup V_j$ y $g|_{V_j}$ es sobreyectiva. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{B_1} f(g(s))|g'(s)|ds &= \sum \int_{V_j} f(g(s))|g'(s)|ds \\ &= \sum \int_{g(V_j)} f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{\bigcup g(V_j)}(y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{g(B_1)}(y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)N_{B_1}^g(y)dy. \end{aligned}$$

1. Consideremos ahora los conjuntos $A_1 = \{s \in \mathbb{R} : |g'(s)| = 0\}$ y $B_2 = A_2 \cap A$. Por el Teorema de Sard se tiene que $m(g(B_2)) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y)N_A^g(y)dy &= \int_{g(B_2)^c} f(y)N_A^g(y)dy \\ &= \sum \int_{\mathbb{R}} N_{g^{-1}(g(B_2)^c) \cap A}^g(y)dy \\ &= \int_{g^{-1}(g(B_2)^c) \cap A} f(g(s))|g'(s)|dy \\ &= \sum \int_{B_2^c \cap A} f(g(s))|g'(s)|ds \\ &= \int_A f(g(s))|g'(s)|ds. \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int_A f(g(s))|g'(s)|ds = \int_{\mathbb{R}} f(y)N_A^y dy.$$

□

Observación 1 Si $N_A^g(y) = 1$ entonces la Fórmula de Área no es otra cosa que un cambio de variable.

3.2.5. Fórmula de Rice

Teorema 7 (Fórmula de Rice Gaussiana) Sea $\{X_t : t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$ un proceso Gaussiano con trayectorias C^1 entonces

$$E[N_u] = \int_I E[|X'_t|/X_t = u]P_{X_t}(u)dt,$$

donde $\mathcal{P}$ es la densidad de la variable aleatoria X_t evaluada en el punto u .

Demstración 5

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $I = [0, 1]$. Sea X_t^n la aproximación poligonal diádica de X_t , se tiene entonces

$$X_t^n - X_t \xrightarrow{unif} 0,$$

y $X_t^n - X_t$ está acotado por la variable aleatoria $2\sup_{t \in I}|X_t|$. Al ser un proceso gaussiano se sabe que el supremo tiene momentos de todos los ordenes finito.

Por el *Teorema de Convergencia Dominada* se tiene que $Var(X_t^n) - Var(X_t) \rightarrow 0$.

Si n es lo suficientemente grande, $Var(X_t^n) \geq b$ para algun $b > 0$ y para todo $t \in [0, 1]$.

Para n fijo, el proceso X_t^n no tomará el valor u en la partición $j2^{-n}, j = 0, \dots, 2^n$ c.s., dado que la variable aleatoria X_t tiene densidad para todo $t \in [0, 1]$.

Luego, se tiene que

$$N_u(X^n, I) = \frac{1}{2\delta} \int_I 1_{\{|f(t)-u|<\delta\}} |X_t'^n| dt.$$

Donde

$$\frac{1}{2\delta} \int_I 1_{\{|f(t)-u|<\delta\}} |X_t'^n| dt,$$

está acotada por 2^n . Tomando esperanza:

$$\begin{aligned} E[N_u(X_t^n, I)] &= E\left[\frac{1}{2\delta} \int_I 1_{\{|f(t)-u|<\delta\}} |X_t'^n| dt\right] \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_I E[1_{\{|f(t)-u|<\delta\}} |X_t'^n|] dt \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_I E[E[|X_t'^n|/X_t^n = x] 1_{\{|f(t)-u|<\delta\}}] dt \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_I \left(\int_{u-\delta}^{u+\delta} E[|X_t'^n|/X_t^n = x] \mathcal{P}_{X_t^n}(x) dx \right) dt \\ &= \int_I dt \frac{1}{2\delta} \left(\int_{u-\delta}^{u+\delta} E[|X_t'^n|/X_t^n = x] \mathcal{P}_{X_t^n}(x) dx \right), \end{aligned}$$

cuya esperanza condicional esta bien definida. Como las trayectorias $\{X_t\}$ son continuas entonces las trayectorias $\{X_t^n\}$ también lo son, lo que implica que su esperanza y varianza son funciones continuas.

$$E[N_u(X_t^n, I)] = \int_I dt \frac{1}{2\delta} \left(\int_{u-\delta}^{u+\delta} E[|X_t'^n|/X_t^n = x] \mathcal{P}_{X_t^n}(x) dx \right).$$

Ahora, si $n \rightarrow \infty$, por el teorema de *Ylvisaker* se tiene que, con probabilidad 1, no existe extremo local a nivel u . Por lo tanto

$$N_u(X_t^n, I) \uparrow N_u(X_t, I).$$

$$E[N_u(X_t^n, I)] \uparrow E[N_u(X_t, I)].$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, la esperanza y matriz de covarianza $(X_t^n, X_t'^n)$ converge uniformemente a las del par (X_t, X_t') . Se tiene entonces que:

$$E[N_u] = \int_I E[|X_t'|/X_t = u] \mathbb{P}_{X_t}(u) dt.$$

□

Capítulo 4

Funcionales de Nivel

En este capítulo estudiaremos en detalle el funcional de nivel asociado al problema de los puntos especulares, así como también su resolución. Un desarrollo más exhaustivo del tema se puede hallar en [10].

4.1. Introducción a Funcionales de Nivel

Muchos problemas relacionados a física y matemática aplicada necesitan para su solución una estimación del número, la longitud o el volumen del conjunto de nivel de una función aleatoria $X(t, \omega)$, cuando $t \in R$. En otras palabras, es necesario el cálculo del valor esperado del tamaño del siguiente conjunto:

$$\{t \in A : X(t, w) = y\}.$$

En el caso del fenómeno de los puntos especulares en el caso unidimensional, el funcional de nivel necesario se deduce de la siguiente manera:

Una fuente luminosa está colocada a una altura h_1 del origen y emite un rayo de luz que se refleja en un punto $(t', X(t'))$ de una curva, el rayo de luz reflejado sera observado a una altura h_2 del origen. Dicho punto corresponde precisamente al *punto especular*, por la ley de Snell debe satisfacer que $X'(t)' = kt'$ cuando $k = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$, y queremos conocer el número esperado de ellos. Nos interesa entonces estudiar la variable aleatoria

$$N_E^T = \{s \leq T : X'(s) = ks\},$$

donde $E \subset \mathbb{R}^2$.

A continuación estudiaremos en detalle este ejemplo para dos dimensiones.

4.2. Puntos Especulares en dos dimensiones

Consideremos el campo Gaussiano estacionario $Y(x_1, x_2)$ que describe una superficie aleatoria. Supondremos que Y tiene dos derivadas continuas. Usando el mismo razonamiento arriba expuesto diremos que existe un punto especular cuando:

- $Y_{x_1}(x_1, x_2) = kx_1$.
- $Y_{x_2}(x_1, x_2) = kx_2$.

Dónde Y_{x_i} para $i = 1, 2$ representa la derivada del campo con respecto a la primera y segunda variable. Es intuitivo definir entonces el siguiente campo:

$$Z(x_1, x_2) = \nabla Y(x_1, x_2) - k(x_1, x_2),$$

en el cual tiene un punto especular si $Z = 0$. Aplicaremos la fórmula de área al proceso Z . Si denotamos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ se obtiene para $Q \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} N_Q^Z(y) dy = \int_Q f(Z(x)) |det J_Z(x)| dx.$$

Tomando esperanzas a ambos lados de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} E\left[\int_{\mathbb{R}^2} N_Q^Z(y) dy\right] &= E\left[\int_Q f(Z(x)) |det J_Z(x)| dx\right] \\ &= \int_Q E[f(Z(x)) |det J_Z(x)| dx] \\ &= \int_Q E[f(Z(x))] E[|det J_Z(x)|] dx \end{aligned}$$

Aplicando Fubini en el lado derecho de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
E\left[\int_{\mathbb{R}^2} N_Q^Z(y) dy\right] &= \int_Q E[|det J_Z(x)|] \int_{\mathbb{R}^2} f(y) F_{Z(x)}(y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \int_Q E[f(y) F_{Z(x)}] E[|det J_Z(x)|] dx dy.
\end{aligned}$$

Por teorema de dualidad obtenemos que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ la Fórmula de Rice.

$$E[N_Q^Z(y)] = \int_Q E[|det J_Z(x)| / Z(x) = y] F_{Z(x)}(y) dx.$$

Los puntos especulares se obtienen cuando $y = 0$, por ende,

$$E[N_Q^Z(0)] = \int_Q E[|det J_Z(x)| / Z(x) = 0] F_{Z(x)}(0) dx.$$

La independencia entre las derivadas Z_x y Z_y permite escribir,

$$E[N_Q^Z(0)] = \int_Q E[|det J_Z(x)|] F_{Z(x)}(0) dx.$$

La definición de Z permite calcular el Jacobiano.

$$J_Z(x) = \begin{pmatrix} Y_{11}(x_1, x_2) - k & Y_{12}(x_1, x_2) \\ Y_{12}(x_1, x_2) & Y_{22}(x_1, x_2) - k \end{pmatrix}.$$

Donde Y_{ij} para $i, j = 1, 2$ son las derivadas parciales del campo en cuestión. Observemos que la esperanza del $|det J_Z(x)|$ no depende de (x_1, x_2) .

Para determinar $E[|det J_Z(x)|]$ es suficiente considerar el modelo de regresión:

$$Y_{22} = \alpha Y_{11} + \beta Y_{12} + \epsilon$$

donde $\epsilon \perp (Y_{11}, Y_{12})$. Los coeficientes de este modelo de regresión multivariado se obtienen mediante el método de *Mínimos Cuadrados* y vienen dados de la siguiente forma:

$$\hat{\beta} = (x^t x)^{-1} (x^t y).$$

Y los elementos de dicha igualdad están definidos de la siguiente manera.

- $\hat{\beta} = (\alpha, \beta)^t$.
- $x = (Y_{11}, Y_{12})$.
- $y = Y_{22}$.

Se sabe además que los estimadores $\hat{\beta}$ obtenidos por este método satisfacen $E[\hat{\beta}] = \beta$.

Para obtener una expresión más manejable de la solución debemos utilizar la representación espectral del campo:

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2)} \sqrt{f(\lambda_1, \lambda_2)} dW(\lambda_1, \lambda_2)$$

Que no es sino una extensión sencilla de la representación obtenida en el Capítulo 3. A partir de allí se definen los momentos espectrales:

$$m_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1^i \lambda_2^j d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Eliminando los subíndices (x_1, x_2) se obtiene

$$\begin{aligned} E[Y_{11}]^2 &= m_{20} & E[Y_{22}]^2 &= m_{02} \\ E[Y_{22}Y_{12}]^2 &= m_{31} & E[Y_{12}]^2 &= m_{11}. \end{aligned}$$

Al sustituir en los coeficientes de la regresión finalmente tenemos:

$$\alpha = \frac{m_{11}^2 - m_{20}m_{31}}{m_{20} - m_{11}m_{31}^2} \quad \beta = \frac{m_{20}m_{31} - m_{22}m_{31}}{m_{20} - m_{11}m_{31}^2}$$

y

$$\sigma^2 = m_{02} - \alpha^2 m_{02} - \beta^2 m_{11} - 2\alpha\beta m_{31},$$

donde σ^2 es la $Var[\epsilon]$. Por lo tanto.

$$\begin{aligned}
E[|det J_Z(x)|] &= \int_{\mathbb{R}^2} E[|(z_1 - k)(\alpha z_1 + \beta z_2 + \sigma \epsilon - k) - z_2^2|] F_{(Y_{11}, Y_{12})}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |(z_1 - k)| E[(\alpha z_1 + \beta z_2 + \sigma \epsilon) - \frac{z_2^2}{(z_1 - k)}] F_{(Y_{11}, Y_{12})}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \sigma |(z_1 - k)| E[\frac{1}{\sigma}(\alpha z_1 + \beta z_2 - \frac{z_2^2}{(z_1 - k)}) + \epsilon] F_{(Y_{11}, Y_{12})}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \sigma |(z_1 - k)| E[\frac{\alpha z_1(z_1 - k) + \beta z_2(z_1 - k) - z_2^2}{\sigma(z_1 - k)} + \epsilon] F_{(Y_{11}, Y_{12})}(z_1, z_2) dz_1 dz_2
\end{aligned}$$

donde

$$\gamma(z_1, z_2) := \frac{\alpha z_1(z_1 - k) + \beta z_2(z_1 - k) - z_2^2}{\sigma(z_1 - k)},$$

y $F_{(Y_{11}, Y_{12})}(z_1, z_2)$ es la densidad del vector $(Y_{11}(x_1, x_2), Y_{12}(x_1, x_2))$. Como

$$E[|N + m|] = m[2\Theta(m) - 1] + 2\varphi(m)$$

N es una variable aleatoria Gaussiana Estandar, Θ y φ denota su distribución y su densidad respectivamente. Se cumple por tanto:

$$\begin{aligned}
E[|det J_Z(x)|] &= E[|det J_Z(0)|] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |z_1 - k| [\gamma(z_1, z_2)[2\Theta(\gamma(z_1, z_2)) - 1] + 2\varphi(\gamma(z_1, z_2))] F_{(Y_{11}, Y_{12})}(z_1, z_2) dz_1 dz_2.
\end{aligned}$$

Finalmente al usar esta fórmula y el hecho de que $p_{Z(x)}(0) = F_{\nabla Y(0)}(-kx_1, kx_2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
E[N_Q^z(0)] &= E[|det J_Z(0)|] \int_Q F_{Z(x)}(0) dx \\
&= E[|det J_Z(0)|] \int_Q F_{\nabla Y(0)}(-kx_1, -kx_2) dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Es importante señalar que esta fórmula solo depende de los momentos espectrales m_{pq} del campo Y para $0 \leq p + q \leq 4$.

Capítulo 5

Implementación

En este capítulo examinaremos la aplicación mediante la cual se calculan y distribuyen los puntos especulares sobre una superficie de mar aleatoria. Para ello se utilizó MatLab como lenguaje de programación en adición con la librería WAFO, dicha librería permite hacer la simulación del mar aleatorio en la que se basan todos los calculos posteriores.

5.1. WAFO

WAFO (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography por sus siglas en inglés) es una librería de rutinas de MatLab diseñadas para el análisis estadístico y la simulación de olas aleatorias. Esta librería representa la herramienta principal utilizada en este trabajo. Las funciones que se describirán a continuación permiten definir los elementos necesarios para crear la simulación del mar aleatorio según lo estudiado en el Capítulo 1.

- **jonswap**: Calcula la densidad espectral JONSWAP dadas (como mínimo) la frecuencia angular ω , la altura significativa H_{m0} y el período de pico T_p .
- **spreading**: Funciones de esparcimiento. Para este trabajo se utilizó la función de esparcimiento $\cos^{2s}(x)$.
- **mkdspec**: Crea el espectro direccional utilizando para ello la densidad espectral y la función de esparcimiento.

- **spec2spec**: Transforma entre diferentes tipos de densidades espectrales.
- **seasim**: Crea la simulación del mar gaussiano utilizando para ello el espectro direccional y parámetros que definen el tamaño de la simulación.

Para más detalles consultar [9].

5.2. Simulación del mar y cálculo de puntos especulares

Como se vio en el capítulo anterior, para obtener los puntos especulares es necesario el cálculo de los ceros de la derivada del campo aleatorio que representa el mar, más específicamente, el número de ellos. Dados los parámetros para la simulación y como consecuencia de la Fórmula de Rice Gaussiana el objetivo es obtener la esperanza del número de ceros en cada simulación. Se sabe de estadística elemental que el mejor estimador de la esperanza es el promedio. De las consideraciones anteriores se desprenden los pasos a seguir en la aplicación a crear, los cuales son:

1. Dados los parámetros para simular el mar: la frecuencia angular ω , la altura significativa $Hm0$ y el período de pico Tp , así cómo también una resolución n ; se repiten los siguientes pasos m veces.
 - Se realiza la simulación del mar y se genera la malla correspondiente.
 - Se calculan los ceros de la derivada de la malla.
 - Se suman los distintos resultados para obtener el promedio s .
2. Se utiliza un proceso de Poisson con $\lambda = s$ para obtener el número de puntos en un instante de tiempo t .
3. Utilizando una variable aleatoria uniforme se reparten los puntos en el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$.

El método utilizado se resume en calcular de antemano los promedios de ceros de la derivada dados los parámetros para la simulación. Una vez obtenida la lista de promedios los mismos son los parámetros de entrada del proceso de Poisson que distribuirá los puntos en el plano. Los promedios son calculados una sola vez y la lista de promedios es guardada en un archivo para su posterior uso, la acción que es necesario realizar cada vez que se quieran obtener puntos especulares es la distribución.

Examinemos con detalle las funciones que fueron creadas y luego la rutina principal. Comencemos con la función *ramdonsea* la cual genera la simulación del mar.

```
function [Z,X,Y]=ramdonsea(n, Hm0, Tp)

spec = jonswap([], [Hm0 Tp]);

D = spreading(101, 'cos2s', 0, [], spec.w, 1);
Sd = mkdspec(spec, D);

S1 =spec2spec(Sd, 'freq');

D1 = spreading(101, 'cos', pi/2, [15], [], 0);

SD1 = mkdspec(S1, D1);

sim = seasim(SD1, n, n, 1, 0.5, 0.5, 0.25, 2, 1);

Z=sim.Z;
X=sim.x;
Y=sim.y;
```

Las funciones internas tienen parámetros fijos para facilitar el uso de la aplicación. La función regresa 3 matrices: Z , X e Y que no son más que las coordenadas en el espacio de los puntos de la malla. Para el cálculo de los

ceros se diseñó una rutina de diferencias finitas de 1º orden llamada *finitedif* la cual se expone a continuación.

```
function [r]=finitedif(Z,x,y,tol)

n=x(2)-x(1);
M=Z/n;
[l k]=size(M);

Dx=zeros(l-2);
Dy=zeros(k-2);

    for i=2:l-1
        Dx(1:end,i-1)=M(2:end-1,i+1)-M(2:end-1,i);
    end

    for i=2:k-1
        Dy(i-1,1:end)=M(i+1,2:end-1)-M(i,2:end-1);
    end

GRA=sqrt(Dx.^2 + Dy.^2);

Z=GRA<tol;
ind=find(Z);
r=size(ind,1);
```

Donde *tol* es un vector que contiene las tolerancias necesarias para la comparación y posterior determinación de los ceros. El parámetro de retorno *r* contiene el número de ceros obtenidos. La rutina principal es como sigue:

```
clear all
clc

m=100;
s=0;
```

```

n=[256 512 1024];
Hp0=7;
Tp=11;

tol=[0.1 0.01 0.001 0.0001];

for i=1:length(n)

    for j=1:length(tol)

        for k=1:m

            [Z,x,y]=ramdonsea(n(i), Hp0, Tp);

            s= s + finitedif(Z,X,Y,tol(j));
        end

        R(i,j)=s;

    end

    s=0;

end

end

R=R/m;

```

Donde R es una matriz que contiene los distintos promedios para las diferentes resoluciones y tolerancias. Posteriormente la distribución de los puntos se realiza con la siguiente función denominada *poisson*:

```

function poisson(s)

npoints=poissrnd(s,1);

```

```
pos=rand(npoints, 2);

plot(pos(:, 1), pos(:, 2), 'r')
```

La cual se puede utilizar fuera de la rutina principal con los promedios contenidos en R . Nótese que no estamos construyendo una imagen, sino distribuyendo los puntos en el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$, por lo que en esta oportunidad no se considera la resolución en esta función. De crearse una imagen los puntos especulares deben distribuirse en una matriz A de orden $n \times n$ por lo que en ese caso la función que se diseñe debe considerar la resolución.

5.3. Resultados

La imagen 1.10 en el Capítulo 1 muestra una simulación de resolución $n = 1024$. La tabla de promedios para un total de $m = 100$ simulaciones por cada resolución y la tolerancia es la que sigue:

$n tol$	1×10^{-1}	1×10^{-2}	1×10^{-3}	1×10^{-4}
256	$3,137714 \times 10^4$	$5,2384 \times 10^2$	5,22	1×10^{-2}
512	$1,261967 \times 10^5$	$2,10707 \times 10^3$	$2,081 \times 10^1$	$1,8 \times 10^{-1}$
1024	$5,04763 \times 10^5$	$8,40959 \times 10^3$	$8,403 \times 10^1$	$8,7 \times 10^{-1}$

La primera columna representa el tamaño de la imagen a generar, la primera fila el tamaño del error considerado en la aplicación de diferencias finitas, y los resultados interiores el número de puntos resultantes de la simulación. Las aplicaciones trabajaban muy rápido en todos los casos, lo suficiente para descartar el tiempo como medida a tomar en cuenta lo cual sugiere la prestación de la técnica estudiada para ser aplicada en tarjetas de video.

La distribución para cada resolución y $tol = 1 \times 10^{-2}$ se muestra en las siguientes imágenes. Recuérdese que las imágenes están normalizadas.

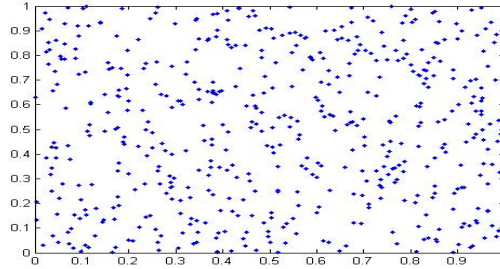


Figura 5.1: $n=256$, $\text{tol}= 0,01$, $s=523$

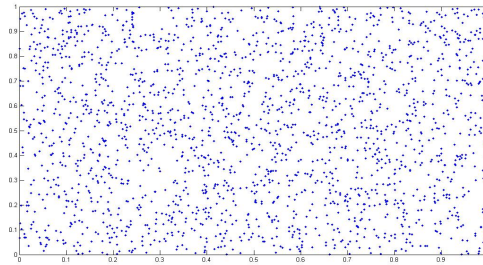


Figura 5.2: $n=512$, $\text{tol}= 0,01$, $s=2107$

5.4. Consideraciones finales

Como se mencionó más arriba, el algoritmo presentado distribuye los puntos sobre el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ ya que es la forma canónica en que el proceso de Poisson está definido. Sin embargo, el objetivo es hacer la distribución sobre una imagen para posteriormente mapearla sobre un plano en una aplicación 3D bien sea en tiempo real o no. Una modificación sencilla de la función *poisson* que cumpla tal objetivo es la siguiente:

```
function [specmap]=poisson(n,s)

npoints=poissrnd(s,1);

pos=rand(npoints, 2);

posuint=ceil(n*pos);
```

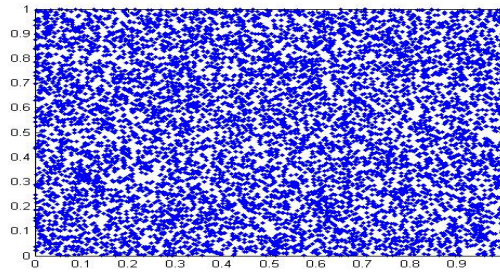


Figura 5.3: $n=1024$, $\text{tol}= 0,01$, $s=8409$

```
specmap=zeros(n);
specmap(posuint(:,1),posuint(:,2))=255;
specmap=uint8(specmap);
```

Un ejemplo del mapa obtenido es el siguiente.

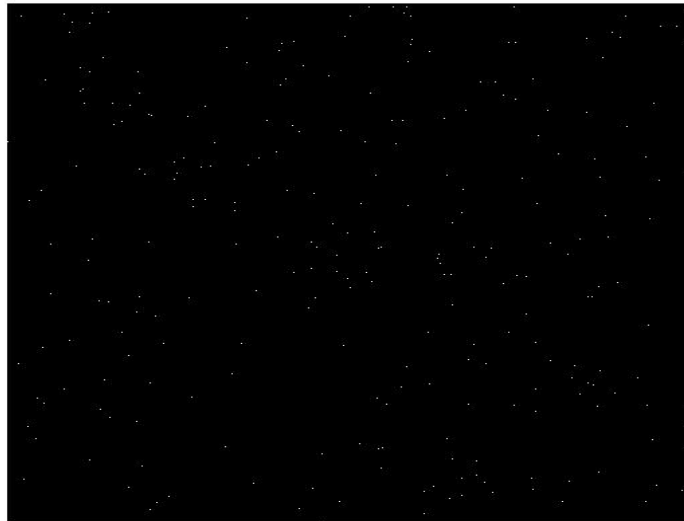


Figura 5.4: $n=256$, $\text{tol}= 0,01$, $s=523$

Como trabajo futuro se tiene utilizar las técnicas descritas acá para otros efectos ópticos relacionados con el mar, donde el más importante sería la denominada caustica, la cual si bien ha recibido un tratamiento en computación gráfica sigue siendo un verdadero reto al momento de hacer revelado en tiempo real de manera físicamente correcta.

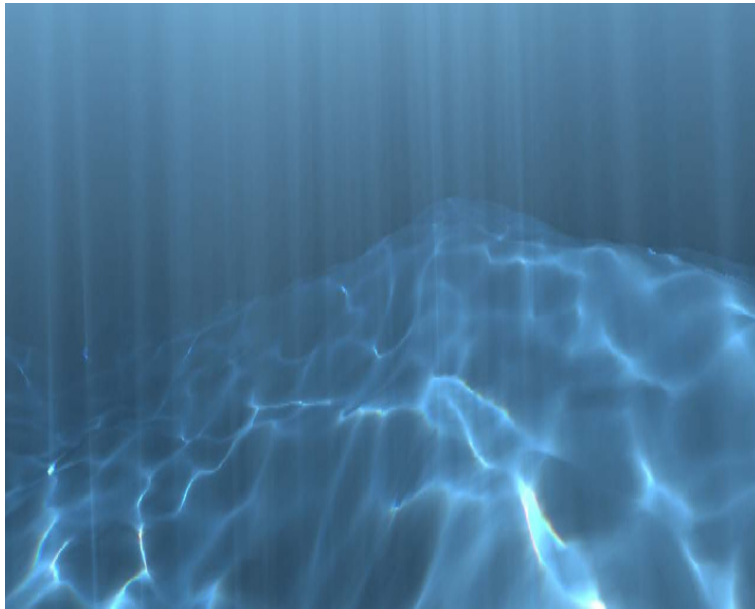


Figura 5.5: Ejemplo de caustica marina

Bibliografía

- [1] Fournier, Alain y Reeves, William T. *A Simple Model of Ocean Waves*. Computer Graphics, Vol. 20, No. 4, 1986, p 75-84.
- [2] Peachey, Darwin. *Modeling Waves and Surf*. Computer Graphics, Vol. 20, No. 4, 1986, p 65-74.
- [3] Tessendorf, Jerry et al. *Simulating Nature: Realistic and Interactive Techniques*. SIGGRAPH 2001 Course Notes. 2001, p 3-01 - 3-18.
- [4] D. Foley, James; Van Dam, Andries; Feiner, Steven K.; Hughes, John F. *Computer Graphics: Principles and Practice in C*. Addison-Wesley Professional; 2 edition (August 14, 1995).
- [5] Krylov, N.V. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Board Press, 2000. p -97.
- [6] Mikosch, T. *Elementary Stochastic Calculus*. World Scientific Publishing Co. 1998.
- [7] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley Press, 1957.
- [8] Mitchell, J. McTaggart, G. y Green, C. *Shading in Valve's Source Engine*. SIGGRAPH Course on Advanced Real-Time Rendering in 3D Graphics and Games, 2006. p 8-8.
- [9] The WAFO Group. *WAFO: A MatLab Toolbox for Analysis of Random Waves and Loads*. Lund University, 2002.
- [10] *Estudio de Funcionales de Nivel de Procesos y Campos Gaussianos*. León, José R. Notas Curso Escuela Venezolana Matemática, 2006.

- [11] *Aplicación del cálculo estocástico en el modelaje del esparcimiento de contaminantes en la superficie del agua.* Pastrán León, Jocelyn. Tesis de grado UCV, 2008.
- [12] *Estimación de la frecuencia de oscilación de la solución de ecuaciones diferenciales a través de la Fórmula de Rice y el Teorema Ergódico.* Carvajal R., Verónica. Tesis de grado UCV, 2008.
- [13] *Análisis y algoritmos para el tratamiento de datos de olas.* López Marcano, Coraiza. Tesis de grado UCV, 2009.