



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Ambientes Cuánticos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. María Bas** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Mauricio Angel.

Caracas, Venezuela

Mayo 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Ambientes Cuánticos**”, presentado por la **Br. María Bas**, titular de la Cédula de Identidad **19.199.841**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Mauricio Angel
Tutor

Dr. Edmundo Castillo
Jurado

Dr. José G. Mijares
Jurado

A mis padres

Agradecimiento

Quiero agradecer a las personas sin las cuales este trabajo no hubiese sido posible. En primer lugar a mis padres, Francisco y Olga, por acompañarme y brindarme su apoyo, cariño y confianza en cada momento de mi vida, este trabajo es para ustedes. A mi hermana, María Isabel, por todo lo que compartimos y la confianza que depositamos la una en la otra, demostrándome día a día ser mi mejor amiga. A Javier, por tu amor incondicional, por acompañarme en este viaje en el que vamos madurando juntos. A mi tutor, el profesor Mauricio Angel, por compartir sus conocimientos, por su guía, pero sobre todo por su paciencia. A todos mis profesores durante la carrera, no sólo por los conocimientos que me impartieron sino por dejar huella en mí, creando una gran admiración, respeto y aprecio por ellos.

A todas estas personas, mis más profundas y sentidas palabras de agradecimiento.

María Bas

Caracas-Venezuela

Mayo, 2011.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Teoría de Categorías	3
1. Conceptos Básicos	3
2. Funtores y Equivalencias de funtores	6
Capítulo 2. Teoría de Deformación	10
1. Categoría de Artin	10
2. Funtores de Deformación	11
Capítulo 3. Teoría de Campos	15
1. Fibrados, conexiones y curvatura	15
2. Teoría de Campos	20
Capítulo 4. Ambientes Cuánticos	24
1. El funtor QFT	24
2. Aplicación a una álgebra de BV	26
3. TQFT	29
Bibliografía	31

Introducción

Una teoría de campos clásica, describe matemáticamente el comportamiento de una partícula en el espacio, asociándole estructuras algebraicas y geométricas y un conjunto de aplicaciones entre ellas que permitan conocer la posición de la partícula en un determinado momento. El problema de estas teorías es que no se cumplen a nivel cuántico, por lo que existen diferentes métodos de cuantización, los cuales nos permiten obtener una teoría de campos cuánticos, la cual describa el fenómeno físico pero ahora a este nivel.

Una teoría de campos cuánticos consta básicamente de un G -fibrado y una acción funcional, S , que actúa sobre los campos del fibrado, donde G es un grupo de Lie y el espacio base es una variedad Riemanniana, además existe una noción de vacío y asociado a estos datos los observables de la teoría. En general, los campos y los observables dependen de la métrica, cuando esto no es así decimos que la teoría es una teoría topológica de campos cuánticos.

En este trabajo estudiaremos la noción de ambiente cuántico que introducen J. Park, J. Terilla y T. Tradler, en su artículo “Quantum backgrounds and QFT”, el cual se define como una estructura algebraica que satisface ciertas propiedades, pero que es definida independientemente de una teoría de campos cuantizada. También se define una categoría cuyos objetos son ambientes cuánticos y sus aplicaciones, ciertos morfismos entre ellos. Todo esto para construir un funtor al que denominan el funtor QFT , el cual satisface, entre otras propiedades, que es un funtor de deformación en el sentido de M. Schlessinger en su artículo “Functors of Artin rings”. Por último se muestra que es posible asociarle un ambiente cuántico a cualquier álgebra de Batalin-Vilkovisky, la cual es relevante debido a que mediante el método de cuantización BRST, la teoría cuantizada tiene estructura de álgebra de BV, lo que nos permite entonces decir que todas las teorías de campos cuánticas obtenidas mediante el método BRST, están en la categoría de ambientes cuánticos.

Por otra parte, en el artículo “Topological quantum field theory”, M. Atiyah introduce los axiomas que debe cumplir una teoría topológica de campos cuánticos, definida como un funtor Z de la categoría de variedades $\mathcal{M}$ de dimensión d a la categoría de espacios vectoriales $\mathcal{V}_{\text{vec}}$. E. Castillo y R. Díaz en su artículo “Homological Quantum Field Theory”, construyen el funtor $HLQFT_d$ el cual va de la categoría de d -cobordismos enriquecidos sobre M (Cob_d^M) a la categoría de espacios vectoriales. En este trabajo se verá la relación entre las teorías homológicas de campos cuánticos y los ambientes cuánticos.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primero, se definiran los conceptos básicos de categorías y funtores, junto con algunas propiedades y ejemplos. En el segundo, se definen los conceptos básicos relacionados con la teoría de deformación y los funtores de deformación, por lo que se estudian las categorías sobre los cuales están definidos y algunos ejemplos comunes. El capítulo tres, tiene un enfoque más geométrico, ya que se definen todas las estructuras geométricas necesarias para tener una teoría de campos. En el último capítulo, se define un ambiente cuántico y el funtor QFT , se construye el ambiente cuántico relacionado a una álgebra de BV y plantea un esquema que permita ver la posible relación entre las teorías homológicas de campos cuánticos y un ambiente cuántico homológico.

Capítulo 1

Teoría de Categorías

En este capítulo seguiremos las definiciones y ejemplos de [1] y [2] para establecer los términos y notaciones que se usarán a lo largo del trabajo. El capítulo está dividido en dos secciones, la primera de conceptos básicos y ejemplos, y la segunda enfocada principalmente en funtores y las propiedades de categorías vistas a través de estos.

1. Conceptos Básicos

DEFINICIÓN 1.1. Una **categoría** C consiste en una clase de objetos, denotada por $Ob(C)$, para cada par de objetos $x, y \in Ob(C)$ un conjunto de aplicaciones, denotado por $C(x, y)$, y una ley de composición, denotada por $\circ$, tal que para cada $x, y, z \in Ob(C)$, $\alpha \in C(x, y)$ y $\beta \in C(y, z)$ se tiene que $\beta \circ \alpha \in C(x, z)$. Estos datos satisfacen los siguientes axiomas:

(1) Identidad:

Para cada $x \in Ob(C)$ existe una aplicación $Id_x \in C(x, x)$ tal que para todo $y \in Ob(C)$ y $\alpha \in C(x, y)$, se tiene que $\alpha \circ Id_x = \alpha = Id_y \circ \alpha$.

(2) Asociatividad:

Para $x, y, z, w \in Ob(C)$, $\alpha \in C(x, y)$, $\beta \in C(y, z)$ y $\gamma \in C(z, w)$ se tiene que $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.

La generalidad de la definición de una categoría, nos permite construir y trabajar con casi cualquier clase de objetos. A continuación veremos algunas categorías que son ampliamente conocidas y mas adelante propiedades y relaciones entre ellas.

EJEMPLOS 1.2.

- (1) La categoría de conjuntos, usualmente denotada como $\mathcal{Set}$, donde los objetos son todos los conjuntos, las aplicaciones son funciones de conjuntos y la composición la composición usual de funciones.

- (2) La categoría de los espacios topológicos $\mathcal{T}_{op}$, donde los objetos son los espacios topológicos, las aplicaciones las funciones continuas entre ellos y la composición la composición usual.
- (3) Dada una categoría C , la **categoría opuesta** denotada por C^{op} es aquella donde $Ob(C^{op}) = Ob(C)$ y para todo $x, y \in Ob(C^{op})$ la clase de aplicaciones $C^{op}(x, y) = C(y, x)$.
- (4) La categoría de R -módulos, denotada por $R-mod$, donde los objetos son los R -módulos a izquierda, las aplicaciones son los homomorfismos entre módulos y la composición la usual.

DEFINICIÓN 1.3. Sean C y C' dos categorías, decimos que C' es una **subcategoría** de C , si:

- $Ob(C') \subset Ob(C)$.
- Para todos $x, y \in Ob(C')$, $C'(x, y) \subset C(x, y)$.

DEFINICIÓN 1.4. Sean C una categoría y C' una subcategoría de C . Se dice que C' es una **subcategoría full** si para todos $x, y \in Ob(C')$,

$$C'(x, y) = C(x, y).$$

Nota: En la siguiente sección, redefiniremos los conceptos de subcategoría y subcategoría full pero usando funtores entre categorías.

EJEMPLOS 1.5.

- (1) Un grupo algebraico G es una categoría, siendo $Ob(G) = G$ y para todos $x, y \in G$, $G(x, y) = m(x, y)$ donde m es la multiplicación del grupo. Luego, G es una subcategoría de $\mathcal{S}et$ pero no es full.
- (2) La categoría $\mathcal{H}aus$ de espacios topológicos Hausdorff, es una subcategoría full de $\mathcal{T}_{op}$.

DEFINICIÓN 1.6. Sean C una categoría y $x, y \in Ob(C)$, decimos que S es la **suma directa** de x y y si existen aplicaciones $x \xrightarrow{\alpha_1} S$ y $y \xrightarrow{\alpha_2} S$ tales que para todo $z \in Ob(C)$ y todo par de aplicaciones de $x \rightarrow z$ y $y \rightarrow z$, existe una única aplicación $S \rightarrow z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha_1} & S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\alpha_2} & y \\ & \swarrow & \downarrow \\ & & z \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.7. Sea C una categoría, un **objeto cero** es un objeto con sólo una aplicación hacia y desde todos los objetos. El objeto cero de una categoría lo denotaremos como 0 . Si una categoría C tiene objeto cero y $x, y \in C$, definimos la **aplicación cero** de $x \xrightarrow{0} y$, como la aplicación única

$$x \rightarrow 0 \rightarrow y.$$

DEFINICIÓN 1.8. Sea C una categoría, decimos que C es una **categoría aditiva** si tiene objeto cero y si para cada par de objetos $x, y \in Ob(C)$, el conjunto $C(x, y)$ tiene estructura de grupo abeliano y la suma directa de x y y pertenece a $Ob(C)$.

EJEMPLO 1.9.

La categoría de los grupos libres abelianos, es una categoría aditiva.

DEFINICIÓN 1.10. Sean C una categoría aditiva, $x, y \in Ob(C)$ y $\alpha \in C(x, y)$, el **kernel** de α , denotado por $ker(\alpha)$, es un objeto en C , tal que para todas las aplicaciones $k_\alpha \in C(ker(\alpha), x)$ se tiene que $\alpha \circ k_\alpha$ es igual a la aplicación cero de $ker(\alpha)$ a y . Análogamente, decimos que el **cokernel** de α , denotado por $coker(\alpha)$, es un objeto en C , tal que para todas las aplicaciones $cok_\alpha \in C(y, coker(\alpha))$ tal que $cok_\alpha \circ \alpha$ es igual a la aplicación cero de $coker(\alpha)$ a y .

DEFINICIÓN 1.11. Una categoría C es una **categoría abeliana**, si C es aditiva y todas las aplicaciones tienen kernel y cokernel.

EJEMPLOS 1.12.

- (1) La categoría de R -módulos $R\text{-mod}$ es abeliana.
- (2) La categoría de grupos abelianos, denotada por Ab , donde los objetos son grupos abelianos y las aplicaciones los homomorfismos de grupos.

DEFINICIÓN 1.13. Sean C una categoría, $x, y, z \in Ob(C)$, $\alpha \in C(x, y)$ y $\beta \in C(y, z)$. Decimos que la extensión

$$0 \longrightarrow x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z \longrightarrow 0$$

es una **extensión exacta corta** si α es inyectiva y β es sobreyectiva.

DEFINICIÓN 1.14. Sean C una categoría, $A, B, C \in Ob(C)$, $\alpha \in C(A, C)$ y $\beta \in C(B, C)$, se define el **producto fibrado** de A en B sobre C , como el objeto:

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : \alpha(a) = \beta(b)\}.$$

2. Funtores y Equivalencias de funtores

Sean C y C' dos categorías, lo natural ahora es definir una aplicación que nos permita ir de una a otra, por lo que introduciremos el concepto de functor, veremos algunos ejemplos y unas propiedades de ellos, con las cuales caracterizaremos a las categorías.

DEFINICIÓN 1.15. Dadas dos categorías C_1 y C_2 , un **functor covariante** $F : C_1 \longrightarrow C_2$ es un par $F = (F_0, F_1)$, donde $F_0 : Ob(C_1) \longrightarrow Ob(C_2)$ es una aplicación entre las clases de objetos y para todos $x, y \in Ob(C_1)$, $F_1 : C_1(x, y) \longrightarrow C_2(F_0(x), F_0(y))$ es una aplicación entre los conjuntos de aplicaciones, tal que:

- Para todo $x \in Ob(C_1)$, se tiene que $F_1(Id_x) = Id_{F_0(x)}$.
- Para todos $x, y, z \in Ob(C_1)$, $\alpha \in C_1(x, y)$ y $\beta \in C_1(y, z)$, tenemos que $F_1(\beta \circ \alpha) = F_1(\beta) \circ F_1(\alpha)$.

Dadas dos categorías C_1 y C_2 , un **functor contravariante** $F : C_1 \longrightarrow C_2$ es un functor covariante definido $F : C_1 \longrightarrow C_2^{OP}$.

NOTA: En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, nos referiremos al funtor $F = (F_0, F_1)$ simplemente como F y asumiremos que es covariante.

EJEMPLOS 1.16.

- (1) El funtor $\mathcal{P} : \mathcal{Set} \rightarrow \mathcal{Set}$, tal que a cada conjunto A lo manda a partes de A , $\mathcal{P}(A)$, y a cada aplicación $\alpha \in \mathcal{Set}(A, B)$ la manda a $\mathcal{Set}(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B))$.
- (2) Dada una categoría C y $x \in \text{Ob}(C)$ definimos el funtor $F_x : C \rightarrow \mathcal{Set}$ dado en objetos por: $\forall y \in \text{Ob}(C), F_x(y) = C(x, y)$, y en aplicaciones por: $\forall \alpha \in C(y, z)$,

$$\begin{aligned} F_x(\alpha) : F_x(y) &\longrightarrow F_x(z) \\ C(x, y) &\longrightarrow C(x, z) \\ \beta &\mapsto \alpha \circ \beta \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.17. De la definición (1.15) podemos ver que si C_1 y C_2 dos categorías, $F : C_1 \rightarrow C_2$ y además $\text{Ob}(C_1) \subset \text{Ob}(C_2)$ entonces C_1 es una subcategoría de C_2 .

DEFINICIÓN 1.18. Sean C, C' dos categorías y $F = (F_0, F_1) : C' \rightarrow C$, decimos que F es un **funtor fiel** si F_0 y F_1 son inyectivas, y decimos que es un **funtor full** si además F_1 es sobreyectiva.

La inyectividad de F_0 nos permite relacionar de manera única los objetos de C' con objetos en C , permitiendo ver a los objetos de C' como una subclase de objetos en C . La inyectividad de F_1 nos relaciona de manera única las aplicaciones en C' con aplicaciones en C , y la biyectividad nos dice que todas las aplicaciones en C para objetos provenientes de C' , provienen de aplicaciones en C' .

DEFINICIÓN 1.19. Sean C y C' dos categorías y $F : C' \rightarrow C$, decimos que C' es una **subcategoría full y fiel** de C , si F es un funtor full y fiel.

EJEMPLOS 1.20.

- (1) La categoría $\mathcal{Haus}$ es una subcategoría full y fiel de $\mathcal{Set}$.

(2) La categoría $\mathcal{A}$ de grupos abelianos, es una subcategoría fiel pero no full de $\mathcal{S}_{ab}$.

TEOREMA 1.21 (Freyd-Mitchell). *Toda categoría abeliana es una subcategoría full y fiel de la categoría $R\text{-mod}$, para algún anillo R .*

Demostración

Ver [2] pp.150. ■

La importancia de las categorías abelianas, está en que sobre ellas es que se estudia el álgebra homológica, es decir, una teoría de homología sólo tiene sentido en una categoría abeliana y por el teorema de Freyd- Mitchell, basta estudiar álgebra homológica sobre R -módulos.

DEFINICIÓN 1.22. Sean C, C' dos categorías y F, G dos funtores contravariantes de C a C' . Una **transformación natural** para cada $x \in C$ es una familia de aplicaciones $\alpha_x \in C'(F(x), G(x))$, tal que para todo $y \in C$ y $\beta \in C(x, y)$ permite que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\alpha_x} & G(x) \\ F(\beta) \downarrow & & \downarrow G(\beta) \\ F(y) & \xrightarrow{\alpha_y} & G(y) \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.23. Sean C, C' dos categorías y F, G dos funtores contravariantes de C a C' , decimos que F y G son **equivalentes** si para todo $x \in C$ las aplicaciones α_x de la transformación natural son biyectivas.

DEFINICIÓN 1.24. Sean C y C' dos categorías, decimos que C y C' son **categorías equivalentes** si existen $F : C \rightarrow C'$ y $G : C' \rightarrow C$, tales que

$$F \circ G \sim Id_{C'} \text{ y } G \circ F \sim Id_C.$$

TEOREMA 1.25 (Lema de Yoneda). Sea C una categoría, $F : C \longrightarrow \mathcal{S}et$ un funtor arbitrario, $x \in Ob(C)$ y $F_x : C \longrightarrow \mathcal{S}et$ el funtor definido en (1.16. (2)), entonces para cada $y \in Ob(C)$ existe una transformación natural Φ^y entre F y F_x .

Demostración

Ver [1] pp. 12. ■

DEFINICIÓN 1.26. Sean C y C' dos categorías y $F : C \longrightarrow C'$, decimos que F es un **funtor representable** si la transformación natural del lema de Yoneda es una equivalencia, y en este caso se dice que x representa al funtor F .

EJEMPLOS 1.27.

- (1) Sean R una $\mathbb{K}$ -álgebra y $F : R\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{S}et$, tal que $M \in R\text{-mod} \mapsto Der_{\mathbb{K}}(R, M)$, donde $Der_{\mathbb{K}}(R, M)$ es el conjunto de las derivaciones R -lineales ¹, F es un funtor representable.
- (2) Sean C una categoría, $x, y \in C$ y $F : C \longrightarrow C(x, y)$, dado por $F : z \mapsto C(z, x) \times C(z, y)$, F es un funtor representable y $C \in Ob(C)$ es el elemento que lo representa, donde C es el producto fibrado de x y y .

¹Para mas detalles ver [4, pp.703]

Capítulo 2

Teoría de Deformación

Una deformación de una estructura, es la alteración de la estructura de tal manera que localmente sea igual trabajar en la estructura o en su deformación, para lo que es necesario utilizar una aplicación por medio de la cual se pueda ir de una estructura a otra, sin mayores restricciones.

Para trabajar con deformaciones a nivel categórico se introduce el concepto de funtor de deformación, inicialmente definido en [5], por lo que en este capítulo revisaremos los conceptos y ejemplos relacionados con la teoría de deformación y construcciones de funtores que sean funtores de deformación.

1. Categoría de Artin

En esta sección veamos la categoría sobre la cuál se definen los funtores de deformación según [5], cuales son sus objetos y algunos ejemplos.

DEFINICIÓN 2.1. Sea R una $\mathbb{K}$ -álgebra conmutativa sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que R es una **$\mathbb{K}$ -álgebra de Artin** si toda cadena descendente

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \dots$$

de ideales en R , se vuelve estacionaria. Si R tiene un único ideal maximal se dice que R es una $\mathbb{K}$ -álgebra local de Artin.

Además, una $\mathbb{K}$ -álgebra de Artin R satisface entre otras propiedades las siguientes:

- (1) R es noetheriana, i.e. satisface la condición de cadena ascendente.
- (2) Todo ideal primo en R es un ideal maximal.
- (3) R es isomorfo a un producto $\prod_{i=1}^n R_i$ donde cada R_i es una $\mathbb{K}$ -álgebra local de Artin.
- (4) Todo ideal maximal m de R es nilpotente, i.e. $m^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

(5) Para todo $i \in \mathbb{N}$, el cociente R/m^i , con m un ideal maximal, es de dimensión finita.

EJEMPLO 2.2.

Las series formales con parámetro t , denotadas por $\mathbb{K}[[t]]$, son $\mathbb{K}$ -álgebras de Artin.

En lo que sigue, denotaremos $Art_{\mathbb{K}}$ a la categoría de las $\mathbb{K}$ -álgebras de Artin locales sobre $\mathbb{K}$, siendo las aplicaciones entre objetos homomorfismos locales, donde, para todos

- $A, A' \in Art_{\mathbb{K}}$ y
- m_A y $m_{A'}$ sus ideales maximales,

$$f : A \rightarrow A' \text{ es local si } f(m_A) \subset f(m_{A'}).$$

DEFINICIÓN 2.3. Un **funtor de Artin** es un funtor covariante $F : Art_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{S}_{\ell}$ tal que $F(\mathbb{K}) \simeq \{0\}$, donde $\{0\}$ denota al conjunto con un sólo punto.

EJEMPLO 2.4.

Si V es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, podemos ver a V como un funtor de Artin $V : Art_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{S}_{\ell}$, $V(A) = V \otimes_{\mathbb{K}} m_A$, en particular si $V = 0$ entonces tenemos el funtor trivial $0 : Art_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{S}_{\ell}$.

2. Funtores de Deformación

Recordemos que una estructura algebraica sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, consiste en un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial A junto con una familia de operaciones, denotadas por φ , sujetas a ciertas relaciones.

DEFINICIÓN 2.5. Sean (A, φ) una $\mathbb{K}$ -estructura algebraica y $R \in Ob(Art_{\mathbb{K}})$, una **deformación** de A sobre R es una R -estructura algebraica (A_R, φ_R) tal que

$$A_R/m_R A_R \cong A,$$

y las operaciones φ_R se reducen a las operaciones φ bajo la proyección canónica.

EJEMPLOS 2.6.

- (1) Sea (A, m) una $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa y $R \in \text{Ob}(\text{Art}_{\mathbb{K}})$ fijo, definimos $A_R = A \otimes_{\mathbb{K}} R$, A_R es una deformación de A denominada deformación trivial.
- (2) Sea (A, m, d) una $\mathbb{K}$ -álgebra diferencial graduada, i.e. m es asociativa, $d^2 = 0$ y m y d satisfacen la regla de Leibniz, si consideramos la deformación trivial $A_R = A \otimes R$ como álgebra, veamos cómo se escribe el diferencial deformado, ya que:

$$\begin{aligned} A_R/m_R A_R \cong A &\leftrightarrow A_R \cong A \oplus m_R A_R \\ &= A \oplus m_R(A \otimes R) \\ &= A \oplus (m_R \otimes A). \end{aligned}$$

y el diferencial,

$$\begin{aligned} d_R : \quad A_R &\rightarrow A_R \\ A \oplus (m_R \otimes A) &\rightarrow A \oplus (m_R \otimes A). \end{aligned}$$

Debido a que d_R se reduce a d bajo la proyección, entonces es de la forma

$$\boxed{d_R = d + \varphi}$$

Luego como $d_R^2 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} d_R^2 &= (d + \varphi)^2, \\ &= d^2 + d\varphi + \varphi d + \varphi\varphi, \\ &= d(\varphi) + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] \end{aligned}$$

De donde nos queda, $d(\varphi) + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0$. Esta igualdad es conocida como la ecuación de Maurer-Cartan y nos da la condición para deformar el diferencial. En este caso no deformamos la estructura de álgebra, sino sólo el diferencial.

DEFINICIÓN 2.7. Sean $R, R' \in \text{Ob}(\text{Art}_{\mathbb{K}})$ y A_R y $A_{R'}$ deformaciones de una álgebra cualquiera A , tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_R & \xrightarrow{\quad} & A_{R'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_R/m_R A_R & \xrightarrow{\cong} & A \xrightarrow{\cong} A_{R'}/m_{R'} A_{R'}. \end{array}$$

Decimos que A_R y $A_{R'}$ son **deformaciones equivalentes** de A si el isomorfismo entre $A_R/m_R A_R$ y $A_{R'}/m_{R'} A_{R'}$ es la identidad.

DEFINICIÓN 2.8. Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra, definimos el **functor de deformación** de A denotado por Def_A como:

$$\begin{aligned} \text{Def}_A : \text{Art}_{\mathbb{K}} &\rightarrow \mathcal{S}et \\ R &\mapsto [A_R] \end{aligned}$$

Siendo $[A_R]$ las clases de equivalencias de las deformaciones de A , según la equivalencia de la definición (2.7).

DEFINICIÓN 2.9. Sea $\text{Art}_{\mathbb{K}}$ la categoría de las $\mathbb{K}$ -álgebras de Artin y $F : \text{Art}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{S}et$, decimos que F es un **functor de deformación** si satisface las siguientes condiciones:

- (1) $F(\mathbb{K}) = \{0\} :=$ el conjunto de un solo punto.
- (2) Para cada extensión pequeña $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$ en $\text{Art}_{\mathbb{K}}$, la aplicación inducida $\rho : F(A) \rightarrow F(B)$ es biyectiva.
- (3) Para cada par de aplicaciones $\alpha : A \rightarrow C, \beta : B \rightarrow C$ en $\text{Art}_{\mathbb{K}}$, consideremos la aplicación:

$$\eta : F(A \times_C B) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B).$$

Entonces:

- η es sobreyectiva cuando α es epimorfismo.
- η es biyectiva cuando α es epimorfismo y β es monomorfismo.

Nota: Estas condiciones se conocen como las condiciones de Schlessinger.

PROPOSICIÓN 2.10. Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra, el functor Def_A , definido en (2.8), es un functor de deformación.

Demostración

Veamos que se satisface la primera condición de Schlessinger.

Por definición $Def_A(\mathbb{K}) = [A_{\mathbb{K}}]$, además si $A_{\mathbb{K}}$ es una $\mathbb{K}$ -deformación de A se tiene que

$$A_{\mathbb{K}} \cong A_{\mathbb{K}}/m_{\mathbb{K}}A_{\mathbb{K}},$$

como $m_{\mathbb{K}} = 0$ entonces

$$A_{\mathbb{K}} \cong A_{\mathbb{K}}/m_{\mathbb{K}}A_{\mathbb{K}} \cong A,$$

por lo tanto $[A_{\mathbb{K}}] = A$, $|[A_{\mathbb{K}}]| = 1$. Con lo que queda demostrada la primera condición de funtor de deformación.

Las condiciones 2 y 3 se demuestran en [3]. ■

DEFINICIÓN 2.11. Sea L un álgebra diferencial de Lie, definimos el **funtor de Maurer-Cartan** asociado a L , como:

$$\begin{aligned} MC_L : Art_{\mathbb{K}} &\rightarrow \mathcal{Set} \\ MC_L(A) &= \{x \in L \otimes m_A | dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0\} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.12. Sea L un álgebra diferencial de Lie, el funtor MC_L , definido en (2.11), es un funtor de deformación.

Dada una álgebra de Lie L , definimos el funtor Def_L análogamente a como se define Def_A en (2.8).

PROPOSICIÓN 2.13. El funtor Def_L es equivalente al funtor $MC_L / \sim$, donde $MC_L(A) \sim MC_L(B)$, para A y $B \in Art_{\mathbb{K}}$, si $MC_L(A) = MC_L(B)$.

Demostración

Ver [3] pp.4. ■

Capítulo 3

Teoría de Campos

1. Fibrados, conexiones y curvatura

Recordemos que una variedad diferenciable es un par $(M, \hat{A})$ donde M es un espacio topológico de Hausdorff, 2^o numerable y localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, y $\hat{A}$ es un conjunto maximal de cartas locales.

DEFINICIÓN 3.1. Un **fibrado vectorial** es una cuaterna (M, F, E, π) , donde M es una variedad diferenciable de dimensión m (espacio base), F es un espacio vectorial de dimensión n (espacio fibra), E es una variedad diferenciable de dimensión $m + n$ (espacio techo) y $\pi : E \rightarrow M$ es una submersión sobreyectiva que satisface:

- Para cada $x \in M$ existe un abierto U tal que $\pi^{-1}(U)$ y $U \times F$ son difeomorfos.
- Para todo $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial isomorfo a F .
- Los cambios de carta son lineales en las fibras.

Nota: En general, se denota al fibrado como $\pi : E \rightarrow M$ y se denomina fibrado vectorial sobre M de fibra típica F .

EJEMPLOS 3.2.

- (1) Dada una variedad M y $p \in M$, consideramos el espacio de vectores tangentes en ese punto denotado $T_p M$, y $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$. Este se denomina fibrado tangente de M con fibra típica $T_p M$.
- (2) Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ con fibra típica F , se tiene que E^* es un fibrado vectorial con fibra típica F^* (el espacio vectorial dual de F).

En general, se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.3. Sea $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ con fibras típicas F_1 y F_2 respectivamente, entonces E_1^* , $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \otimes E_2$ y $E_1 \oplus E_2$ son fibrados vectoriales.

DEFINICIÓN 3.4. Sea (M, F, E, π) un fibrado vectorial.

- Una **sección local** o un campo local sobre un abierto $U \subset M$ es una aplicación $\sigma : U \longrightarrow E$ tal que $\pi(\sigma(m)) = m$, para todo $m \in U$.
- Una **sección global** o un campo global es una aplicación $\sigma : M \longrightarrow E$ tal que $\pi(\sigma(m)) = m$, para todo $m \in M$.

Al conjunto de todas las secciones globales sobre un fibrado lo denotaremos como $\Gamma(M, E)$.

EJEMPLOS 3.5.

- (1) Sea $E = TM$, entonces $\Gamma(M, E) =$ campos vectoriales sobre M .
- (2) Sea $E = T^*M$, entonces $\Gamma(M, E) = 1$ -formas.

Recordemos que T^*M es el dual de TM , es decir, el fibrado cotangente de M .

- (3) Sea $E = \Lambda TM$, entonces $\Gamma(M, E) =$ multicampos vectoriales sobre M .
- (4) Sea $E = \Lambda T^*M$, entonces $\Gamma(M, E) =$ formas diferenciables de M , también denotadas $\Omega(M)$.
- (5) Sea $E = TM \otimes \cdots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M$, entonces $\Gamma(M, E)$ son los tensores sobre M de tipo (p, q) .

DEFINICIÓN 3.6. Dado un espacio topológico de Hausdorff, G , y, en él, una operación interna, m_G , que le confiere estructura de grupo, se dice que (G, m_G) es un **grupo de Lie** si, y sólo si, G es una variedad diferenciable y la función $L : G \times G \longrightarrow G$, tal que para todo $(x, y) \in G \times G$, $L(x, y) = (x, y^{-1})$ es diferenciable.

EJEMPLOS 3.7.

- (1) Los $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita, con la suma como operación, son grupos de Lie.
- (2) El grupo de las matrices unitarias $n \times n$ con determinante igual a 1, entradas complejas y la operación la multiplicación usual de matrices, denotado por SU , es un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 3.8. Diremos que un grupo de Lie G **actúa** (por la izquierda), sobre una variedad diferenciable M si existe una aplicación diferenciable $\theta : G \times M \rightarrow M$, llamada **acción**, la cual satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para el elemento neutro $e \in G$ y para cualquier $x \in M$, $\theta(e, x) = x$.
- (2) Para cualesquiera $a, b \in G$ y $x \in M$, $\theta(a, \theta(b, x)) = \theta(ab, x)$.

Nota: Llamaremos G -variedad a una variedad en la que actúa un grupo de Lie G . Por comodidad escribiremos gx en lugar de $\theta(g, x)$.

Dada una acción $\theta : G \rightarrow M$, para cada $g \in G$ se tiene un difeomorfismo $\theta_g : M \rightarrow M$, $\theta_g(x) = gx$. De igual forma, para cada $x \in M$ se tiene una aplicación diferenciable $\theta_x : G \rightarrow M$, $\theta_x(g) = gx$, de modo que podemos considerar G como un subgrupo de $\text{Diff}(M)$, donde $\text{Diff}(M)$ denota al grupo de difeomorfismos de M en M .

EJEMPLOS 3.9.

- (1) Sea $a \in G$, $L_a : G \rightarrow G$, $g \mapsto ag$ y $R_a : G \rightarrow G$, $g \mapsto ga$ son acciones.
- (2) El producto en un grupo de Lie, $m : G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = gh$, es una acción.
- (3) Para $F : G_1 \rightarrow G_2$ morfismo de grupos de Lie, $\theta : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$, $\theta(x, y) = F(x)y$, es una acción.
- (4) La acción natural de $G = GL_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$, $\theta : GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\theta(A, x) = Ax$.
- (5) La conjugación en un grupo de Lie, $\theta : G \times G \rightarrow G$, $\theta(g, h) = ghg^{-1}$, es una acción, para la que $\theta_g = L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ es isomorfismo de grupos de Lie.

DEFINICIÓN 3.10. Diremos que la **acción es fiel** o efectiva si dado $g \in G$

$$gx = x, \forall x \in M \Rightarrow g = e.$$

DEFINICIÓN 3.11. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M . Llamaremos **órbita de un punto** $x \in M$ al subconjunto de M

$$\theta_x(G) = G_x = \{gx : g \in G\},$$

en general para $A \subset M$ denotaremos $GA = \{gx : g \in G, x \in A\}$.

DEFINICIÓN 3.12. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M . Llamaremos **grupo de isotropía** de un punto $x \in M$, a los elementos del grupo que lo dejan invariante

$$I_x = \{g \in G : gx = x\} = \theta_x^{-1}\{x\}.$$

Diremos que G actúa libremente en M si el neutro es el único elemento que deja fijo un punto, i.e. dados

$$g \in G \text{ y } x \in M, gx = x \Rightarrow g = e.$$

Recordemos que una álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $\mathcal{G}$ junto con una aplicación, llamada corchete de Lie, $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ que satisface:

- Para todo $g \in \mathcal{G}$, $[g, g] = 0$.
- Para todos $x, y, z \in \mathcal{G}$, $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$. (Identidad de Jacobi)

DEFINICIÓN 3.13. Todo grupo de Lie G , tiene una **álgebra de Lie asociada** de manera natural, denotada por $\mathcal{G}(G)$, dada por:

$$\mathcal{G}(G) = \{X \in \Gamma(G, TG) : L_{a^*}X = X, \forall a \in G\}$$

y el corchete es el corchete de campos vectoriales

$$[X, Y] = YX - XY.$$

Donde L_{a^*} es la aplicación inducida en campos vectoriales por L_a .

PROPOSICIÓN 3.14. Sea G un grupo de Lie, la álgebra de Lie asociada a G es isomorfa al fibrado tangente de G en su elemento neutro, i.e.

$$\mathcal{G}(G) \simeq T_e G.$$

DEFINICIÓN 3.15. Un **fibrado principal** es una cuaterna (M, G, P, π) , donde M es una variedad diferenciable de dimensión m (espacio base), G es un grupo de Lie de dimensión n (espacio fibra), que actúa libremente a derecha sobre P , P es una variedad diferenciable de dimensión $m + n$ (espacio techo) y $\pi : P \rightarrow M$ es una submersión sobreyectiva tal que:

$$\{p \times g / g \in G\} = \pi^{-1}(\pi(p)) \text{ para todo } p \in P, \text{ es decir,}$$

que las órbitas de la acción coincidan con las fibra.

En general, se denota al fibrado como $\pi : P \longrightarrow M$ y se denomina fibrado principal sobre M de fibra típica G o también G -fibrado principal.

EJEMPLO 3.16.

Un fibrado vectorial, donde las fibras son espacios vectoriales de dimensión n , es un fibrado principal, donde el grupo de Lie que actúa es GL_n .

DEFINICIÓN 3.17. Sea V un espacio vectorial sobre el cual un grupo G actúa a izquierda por una representación $r : G \rightarrow GL(V)$ tal que

$$r(g_1 g_2) = r(g_1) r(g_2), \forall g_1, g_2 \in G,$$

$$r(e) = I, r(g^{-1}) = (r(g))^{-1}, \forall v \in V.$$

Entonces sobre el producto del espacio fibra P de un fibrado principal (M, G, P, π) y el espacio vectorial V , definimos una acción a derecha de G como:

$$(x, v)g = (xg, r(g^{-1})v), \forall (x, v) \in P \times V.$$

El espacio de órbitas de esta acción, $(P \times V)/G$ lo denotaremos como $P \times_G V$ y es una variedad. Para cada órbita $z \in P \times_G V$ denotamos por $p(z) = p(x, v)$, al punto en M que es igual a $\pi(x)$ para todo $(x, v) \in P \times_G V$, entonces la cuaterna $(P, P \times_G V, M, p)$ lo denominados **fibrado vectorial asociado al fibrado principal** (M, G, P, π) .

DEFINICIÓN 3.18. Una **conexión** o una conexión principal sobre un fibrado principal (M, G, P, π) con una acción θ , es una 1-forma ω con valores en $\mathcal{G}(G)$ que satisface:

$$(1) (\theta_g)_* \circ \omega = \text{ad}_{g^{-1}} \circ \omega \text{ para todo } g \in G, \text{ i.e. } \forall g \in G, p \in P \text{ y } v \in T_{pg^{-1}P}$$

$$w_p((\omega)_{*pg^{-1}}(v)) = g^{-1} \omega_{pg^{-1}}(v)g,$$

(2) $\omega(A^\#) = A$ para todo $A \in \mathcal{G}(G)$, i.e. para todo $g \in G$ y $p \in P$,

$$\omega_p(A^\#(p)) = A.$$

Nota: Denotamos $A^\#$ al campo fundamental sobre P asociado a $A \in \mathcal{G}(G)$.¹

DEFINICIÓN 3.19. Dada una conexión ω sobre un fibrado principal (M, G, P, π) , definimos la **curvatura** de la conexión, denotada por Ω , como para cada $p \in P$ y $v, w \in T_p P$ tenemos que

$$\Omega_p(v, w) = d(\omega)_p(vw).$$

La curvatura es una 2-*forma* que satisface la ecuación de estructura:

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

2. Teoría de Campos

DEFINICIÓN 3.20. Una **teoría de campos**, denotada por sus siglas en inglés como *FT*, consiste en los siguientes datos:

- (1) Una variedad Riemanniana X suave y orientada. Generalmente se consideran, $\mathbb{R}^3$, el espacio-tiempo $\mathbb{R}^{1,3}$, la versión Euclideana del espacio-tiempo ($\mathbb{R}^4$), la compactificación de uno de estos o una subvariedad de ellos. Decimos que las partículas “viven” en X .
- (2) Un espacio vectorial V de dimensión finita. Las partículas tienen funciones de onda que toman valores en V , la elección de V dependerá de la estructura interna de la partícula, por lo que V se denomina el espacio interno.
- (3) Una matriz de grupos de Lie G y una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$ de G sobre V que es ortogonal respecto al producto interno sobre V

$$\langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Estos grupos son generalmente $U(1)$, SU o el producto de estos.

- (4) Un G -fibrado principal sobre X .

¹El campo $A^\#$ sobre un punto $p \in P$ se define por: $A^\#(p) := \frac{\partial}{\partial t} p \cdot \exp(tA)|_{t=0}$, donde $\exp : \mathcal{G}(G) \rightarrow G$, donde $\exp$ es la función exponencial. Para más detalle ver [6, pp.35].

(5) Una conexión ω sobre el fibrado con curvatura Ω .

Si $s : V \rightarrow P$ es una sección local, entonces $A = s^*\omega$ es su potencial de calibre local y $F = s^*\Omega$ es su campo de fuerza local.

(6) Una sección global del fibrado vectorial $P \times_G V$ asociado a $G \hookrightarrow P \rightarrow V$ para p .

Fisicamente, tal campo tiene una energía potencial la cual describimos como

(7) Una función real, no negativa y suave

$$U : V \rightarrow \mathbb{R}$$

que es invariante bajo la acción de G sobre V :

$$U(gv) = U(v).$$

(8) Una acción funcional $A(\omega, \phi)$, los puntos estacionarios tales que el campo de configuraciones (ω, ϕ) es significativo fisicamente. Por lo general, este funcional es de la forma:

$$A(\omega, \phi) = c \int_X [\|F_\omega\|^2 + c_1 \|d^\omega \phi\|^2 + c_2 U \circ \phi].$$

Donde c es la constante de normalización, c_1 y c_2 son “constantes de emparejamiento”, F_ω es una 2-forma sobre X , $d^\omega \phi$ es la derivación exterior covariante y la norma es la inducida por la métrica en X . Los espacios de configuración interesantes fisicamente son aquellos que minimizan (por lo menos localmente) la evaluación de la acción funcional y determinan las ecuaciones de movimiento asociadas al funcional.

EJEMPLO 3.21. *El campo electromagnético.*

La variedad Riemanniana es el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ que es exactamente $\mathbb{R}^4$. El grupo es $U(1)$ así que consideraremos el $U(1)$ -fibrado principal

$$U(1) \hookrightarrow P \rightarrow X,$$

y una conexión ω sobre X . Luego como $U(1)$ es abeliano, todos los corchetes de Lie $u(1) = \text{Im}(\mathbb{C})$ son cero, entonces la curvatura Ω de ω viene dada por $\Omega = d\omega$. Si $s : V \rightarrow P$

es una sección global, entonces escribimos el potencial de calibre local y el campo de fuerza local como

$$A = s^* \omega = -iA,$$

$$F = s^* \Omega = dA = -idA - iF,$$

donde A y F son formas reales sobre V , y la acción funcional es la acción de **Yang-Mills** la cual podemos escribir como

$$YM(\omega) = \int_X -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

y las correspondientes ecuaciones de Yang-Mills son

$$d^* F = 0,$$

de donde se tiene la Identidad de Bianchi ²

$$d F = 0.$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas al funcional, vienen determinadas por:

$$\frac{\partial(YM(\omega))}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Dada una teoría de campos clásica, vemos que las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción funcional no se cumplen a nivel cuántico, por lo que se introduce la noción de cuantizar la teoría de campos, para obtener una en la que si se cumplan las ecuaciones de movimiento, esta nueva teoría es denominada teoría de campos cuánticos.

Existen varios métodos de cuantización, entre los que tenemos la cuantización de Dirac, la de Feymann y la BRST o tambien llamado el formalismo de Batalin-Vilkovisky, debido a que la cuantización nos da una teoría de campos que tiene estructura de una álgebra de Batalin-Vilkovisky.

²Para más detalles ver [6, pp.76]

DEFINICIÓN 3.22. Decimos que la cuaterna $(V, d, \Delta, \wedge)$ es una **álgebra diferencial de Batalin-Vilkovisky** (BV), si V es un espacio vectorial graduado, d, Δ son diferenciales sobre V y se satisfacen las siguientes propiedades:

- $(V, d, \wedge)$ es una álgebra graduada, conmutativa y asociativa; y
- $(V[-1], d, (\cdot, \cdot))$ es una álgebra de Lie diferencial graduada, donde $(\cdot, \cdot)$ está definido como

$$(v, w) := (-1)^{|v|} \Delta(v \wedge w) - (-1)^{|v|} \Delta(v) \wedge w - v \wedge \Delta(w),$$

para v y w cualesquiera.

DEFINICIÓN 3.23. Una **teoría de campos cuánticos**, denotada QFT , es una teoría de campos, que consiste en los siguientes datos:

- (1) Una variedad Riemanniana X suave y orientada.
- (2) Un espacio de Hilbert H de dimensión infinita, en vez de un espacio vectorial V de dimensión finita.
- (3) Una matriz de grupos de Lie G .
- (4) Un G -fibrado principal sobre X .
- (5) Una conexión ω sobre el fibrado con curvatura Ω .
- (6) Una sección global del fibrado vectorial $P \times_G H$.
- (7) Una función real, no negativa y suave $U : H \rightarrow \mathbb{R}$, y
- (8) Una acción funcional A que depende de ω y Ω .

La modificación del espacio interno de la teoría, nos trae varias dificultades para definir las conexiones y secciones de la teoría pero sobre todo la acción funcional, ya que como estructuras matemáticas se van modificando y volviendo mas complejas, pero lo mas importante es que se conserve su significado físico y la información que deben aportar.

Capítulo 4

Ambientes Cuánticos

En [8] y [9] se plantea la existencia de una teoría de campos cuánticos, sin que ésta provenga de la cuantización de una teoría de campos clásica, por lo que introducen la definición de ambiente cuántico.

En este capítulo veremos esta definición y la construcción de un funtor que nos permite asociar un ambiente cuántico a una teoría de campos cuánticos. Luego, veremos la consistencia de este funtor mediante un ejemplo, tomando una teoría de campos cuánticos y viendo cuál ambiente cuántico le correspondería. Por último, veremos cómo podría construirse este funtor para teorías topológicas de campos cuánticos.

1. El funtor QFT

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero, de aquí en adelante, consideraremos $\Lambda = \mathbb{K}[[\hbar]]$.

DEFINICIÓN 4.1. Decimos que una Λ -álgebra unitaria y asociativa P tiene límite clásico si es libre como Λ -módulo y si $\mathbb{K} = P/\hbar P$ es una $\mathbb{K}$ -álgebra unitaria y asociativa. Esto es, que si P tiene límite clásico, entonces

$$P \simeq \mathbb{K} \oplus \hbar P \oplus \hbar^2 P \oplus \cdots \text{ y } [P, P] \subseteq \hbar P.$$

DEFINICIÓN 4.2. Un **ambiente cuántico** $\mathbf{B}$, es una cuaterna (P, N, m, φ) donde:

- P es una Λ -álgebra unitaria y asociativa con límite clásico.
- N es un P -módulo a izquierda, tal que es libre como Λ -módulo.
- $m \in P$ tal que $m^2 = 0$ (m es llamado estructura de B).
- $\varphi \in N$ tal que $m \cdot \varphi = 0$ (φ es llamado vacío de B).

Un morfismo entre dos ambientes cuánticos $B = (P, N, m, \varphi)$ y $B' = (P', N', m', \varphi')$ consiste en un morfismo de Λ -álgebras $\sigma : P \longrightarrow P'$ y un morfismo de P -módulos $\tau : N \longrightarrow N'$ tales que $\sigma(m) = m'$ y $\tau(\varphi) = \varphi'$.

La **categoría de ambientes cuánticos** la denotaremos $\mathfrak{B}$, donde los objetos son los ambientes cuánticos y sus morfismos como el descrito anteriormente.

DEFINICIÓN 4.3. Sea $B = (P, N, m, \varphi)$ un ambiente cuántico, sea $(A, d) \in \text{Ob}(\text{Art}_\Lambda)$ y $\pi \in P \otimes m_A$. Llamaremos a la ecuación

$$(e^{\frac{\pi}{\hbar}} m e^{-\frac{\pi}{\hbar}} - \hbar e^{\frac{\pi}{\hbar}} d(e^{-\frac{\pi}{\hbar}}))\varphi = 0$$

la ecuación cuántica maestra, y denotaremos al conjunto de soluciones por $\mathbf{QM}_B(A)$, i.e.

$$\mathbf{QM}_B(A) = \{\pi \in P \otimes m_A : (e^{\frac{\pi}{\hbar}} m e^{-\frac{\pi}{\hbar}} - \hbar e^{\frac{\pi}{\hbar}} d(e^{-\frac{\pi}{\hbar}}))\varphi = 0\}.$$

Notemos que $m_K = 0$, entonces $\mathbf{QM}_B(K) = \{0\}$ y que todo morfismo $\tau : A \longrightarrow B \in \text{Art}_\Lambda(A, B)$ genera un mapeo

$$\mathbf{QM}_B(A) \longrightarrow \mathbf{QM}_B(B)$$

dado por

$$\pi \longmapsto (1 \otimes \tau)\pi.$$

Con esto definimos el funtor $\mathbf{QM}_B \in \mathcal{Fun}_\Lambda$, donde $\mathcal{Fun}_\Lambda$ es la categoría de los funtores $F : \text{Art}_\Lambda \longrightarrow \mathcal{Set}$.

DEFINICIÓN 4.4. Sea B un ambiente cuántico.

- (1) Definimos $\mathbf{QFT}_B := \mathbf{QM}_B / \sim$, (notemos que $\mathbf{QFT}_B : \text{Art}_\Lambda \longrightarrow \mathcal{Set}$).
- (2) La asignación $B \longmapsto \mathbf{QFT}_B$ define un funtor $\mathbf{QFT} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{Fun}_\Lambda$.
- (3) Definimos $H(B)$ como el espacio vectorial $H(B) := T_{\mathbf{QFT}_B}$ y lo llamaremos la homología de B . La composición $H := T \circ \mathbf{QFT}_B$ define un funtor $H : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathcal{Vect}$.
Adicionalmente podemos definir el módulo de Dirac de B como el Λ -módulo $D(B) := D_{\mathbf{QFT}_B}$. La composición $D := D \circ \mathbf{QFT}_B$ define un funtor $D : \mathfrak{B} \longrightarrow R_{mod}$.

OBSERVACIÓN 4.5. *La relación de equivalencia por la que se parte en (4.4.(1)) es la natural, i.e. sean B un ambiente cuántico, A y A' dos $\mathbb{K}$ -álgebras de Artin, y $\mathbf{QM}_B(A)$ y $\mathbf{QM}_B(A')$ los conjuntos de soluciones de la ecuación maestra en B para A y A' respectivamente, decimos que $\mathbf{QM}_B(A) \sim \mathbf{QM}_B(A')$ si*

$$\mathbf{QM}_B(A) = \mathbf{QM}_B(A').$$

PROPOSICIÓN 4.6. *El funtor $\mathbf{QFT}_B$ es un funtor de deformación.*

OBSERVACIÓN 4.7. *Por ser $\mathbf{QFT}_B$ un funtor de deformación, es posible tomar una subclase de este funtor la cual esté definida $\mathbf{Art}_\Lambda \longrightarrow \mathcal{V}_{\text{ect}}$.*

2. Aplicación a una álgebra de BV

En el capítulo anterior vimos que uno de los métodos para cuantizar una teoría de campos clásica, es a través del formalismo BRST, el cual nos da la teoría cuantizada con estructura de álgebra de Batalin-Vilkovisky. Veamos ahora cómo es el ambiente cuántico asociado a un álgebra de Batalin-Vilkovisky cualquiera, con la idea de completar el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} FT & \xrightarrow{\text{BRST}} & QFT \\ & \nearrow \text{QFT} & \\ & B & \end{array}$$

Sea $(V, d, \Delta, \wedge)$ una álgebra de BV, por conveniencia asumimos que ésta álgebra es simple, tomemos:

$V = SU$ con U un espacio vectorial finito, donde $\wedge$ es el producto simétrico asociativo en SU . (Esto es para trabajar mas fácilmente con coordenadas).

Si consideramos $\{q_1, \dots, q_n\}$ una base homogénea para U , entonces podemos escribir d y Δ en función de ésta base, de la siguiente manera:

$$d = \sum a_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i}, 1 \leq i \leq n$$

y

$$\Delta = \sum b_{i,j}(q) \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}, 1 \leq i, j \leq n$$

donde $a_i(q) \in V$ para cada i y $b_{i,j} \in V$ donde $b_{i,j}(q) = -(-1)^{|q_i||q_j|} b_{j,i}(q)$ para cada i y j .

Ahora para cada álgebra de BV, podemos definir un ambiente cuántico $B_{V,d,\Delta,\wedge} = (P, m, N, \varphi)$, tomando convenientemente P, m, N, φ , en función de $V, d, \Delta, \wedge$.

La Δ -álgebra P .

Tomamos P como $P = W(U)$, una álgebra graduada de Weyl en el espacio vectorial U , definida como:

$$W(U) := T(U \oplus U^*)[[\hbar]]/J$$

J es el ideal a izquierda generado por $[q, q']$, $[p, p']$, y $[q, p] = \hbar p(q)$, para todo $q, q' \in U$, $p, p' \in U^*$, y $[\cdot, \cdot]$ es el conmutador graduado.

La estructura m .

Definimos $m \in P$ como:

$$m = \sum a_i(q) p^i + \sum b_{i,j}(q) p^i p^j, 1 \leq i, j \leq n,$$

donde $a_i(q) \in V$ para cada i ; y $b_{i,j} \in V$, donde $b_{i,j}(q) = -(-1)^{|q_i||q_j|} b_{j,i}(q)$ para cada i y j .

Nota: Por ser $(V, d, \Delta, \wedge)$ una álgebra de BV, implica que como $m \in P$, $m^2 = 0$.

El módulo N .

Tenemos que $U^* \subset P$, consideremos el ideal a izquierda PU^* . El cociente P/PU^* es un P -módulo, así que definiremos $N = P/PU^*$.

Denotaremos $|\alpha\rangle$ a la imagen de $\alpha \in P$ en P/PU^*

El vacío φ .

El vacío φ lo definiremos como $|1\rangle$.

Notemos que $m\varphi = m|1\rangle = |m\rangle = |0\rangle$. (cumpliendo la condición)

Hemos definido entonces, el ambiente cuántico asociado a una álgebra de BV.

EJEMPLO 4.8. *Álgebra de BV asociada a los multicampos vectoriales.*

Sea (M, F, E, π) un fibrado vectorial, si $E = \wedge TM$ entonces $\Gamma(M, E)$ son los multicampos vectoriales sobre M .

Recordemos la construcción de la álgebra exterior de un espacio vectorial.

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de v , entonces

$$\Lambda^k V = \frac{V \otimes \cdots \otimes V}{\langle v \otimes w + w \otimes v \rangle}$$

k veces

y $\overline{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ me define el producto $\wedge$ asociado a la álgebra exterior.

Ahora, consideremos el fibrado tangente de M , si X es el espacio fibra, podemos escribirlo respecto a una base, es decir,

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Entonces, $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$ es una base para $T_p M$, y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}; \text{con } 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \right\}$ es una base para $\Lambda^k T_p M$.

La álgebra de BV $(A^\cdot, m, [\cdot, \cdot], d)$ es la asociada a los multicampos vectoriales, donde:

- $A^\cdot = \Gamma(M, \wedge TM)$,
- $m = \wedge$ es el producto inducido por la álgebra exterior,
- $[\cdot, \cdot]$ es la extensión del corchete de campos vectoriales, denominado corchete de Shouten, y
- d es la extensión del diferencial de Rham.

Luego, el ambiente cuántico asociado a los multicampos vectoriales es $B_{A^\cdot, m, [\cdot, \cdot], d} = (P, m, N, \varphi)$, donde

- $P = W(A^\cdot) = T(A^\cdot \oplus A^{*\cdot})[[\hbar]]/J$, recordando que J es el ideal a izquierda generado por $[q, q']$, $[p, p']$, y $[q, p] = \hbar p(q)$,

- $m = \sum a_i(q)p^i + \sum b_{ij}(q)p^i p^j$, $1 \leq i, j \leq n$, donde $a_i(q) \in A$ para cada i y $b_{i,j} \in A$, donde $b_{i,j}(q) = -(-1)^{|q_i||q_j|} b_{ji}(q)$ para cada i y j ,
- $N = P/PA^*$, y
- $\varphi = |1\rangle$.

3. TQFT

En esta sección daremos la definición de una teoría topológica de campos cuánticos, denotada $TQFT$ por sus siglas en inglés, según [10] y la definición de una teoría homológica de campos cuánticos, denotada $HLQFT$, según [11]. Luego para ambas teorías plantearemos los esquemas a través de los cuales se podría estudiar la existencia de ambientes cuánticos asociados a ellas.

DEFINICIÓN 4.9. Una **teoría topológica de campos cuánticos**, la cual denotaremos $TQFT$, de dimensión $(d + 1)$, consiste en un funtor

$$Z : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Vect},$$

donde $\mathcal{Vect}$ es la categoría de $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales y $\mathcal{M}$ es la categoría de variedades de dimensión d , cerradas y orientadas con bordismos como morfismos.

Para $M, M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ el funtor Z satisface los siguientes axiomas:

- (1) Axioma del vacío, $Z(\emptyset) = \mathbb{K}$.
- (2) Axioma de dualidad, $Z(M^*) = Z(M)^*$.
- (3) Axioma de multiplicatividad, $Z(M_1 \amalg M_2) = Z(M_1) \otimes Z(M_2)$ para todos $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$.
- (4) Axioma de naturalidad, si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ es un difeomorfismo, entonces la restricción de f al borde de M_1 induce un isomorfismo $Z(f|_{\partial M_1})$ tal que $Z(M_2) = Z(f|_{\partial M_1})Z(M_1)$.

Luego, a partir de esta definición en [11] se introduce el concepto de teorías homológicas de campos cuánticos ($HLQFT$) a partir de un funtor $HLQFT_d : Cob_d^M \longrightarrow \mathcal{Vect}$ siendo Cob_d^M la categoría de d -cobordismos enriquecidos sobre M^1 , los objetos de esta

¹Para más detalle de la categoría Cob_d^M ver [11, pp.25].

categoría son ternas $(N, f, <)$, de variedades orientadas de dimension $d - 1$, aplicaciones $f : \pi_0(N) \longrightarrow D(M)$ y $<$ es un orden lineal en $\pi_0(N)$.

Como dijimos anteriormente, podemos tomar una subclase de funtores de $\mathbf{QFT}_B$, que esten definidos de

$$Art_\Lambda \longrightarrow Vect.$$

Entonces, tenemos el funtor $\mathbf{QFT}_B$ que manda

$$\mathfrak{B} \longrightarrow Vect$$

y el funtor $HLQFT_d$ que manda

$$Cob_d^M \longrightarrow Vect.$$

Por lo que lo siguiente a estudiar en esta línea de trabajo, podría ser la existencia de **Ambientes Cuánticos Homológicos**, en los cuales a cada teoría homológica de campos cuánticos, podamos asociarle uno de estos ambientes, y que nos permitiera completar el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}_H & \xrightarrow{\mathbf{QFT}_B} & Vect \\ & \nwarrow \text{dashed} & \nearrow \text{HLQFT}_d \\ & Cob_d^M & \end{array}$$

Bibliografía

- [1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2. Categories and structures.*- Cambridge University Press 1994.
- [2] P. Freyd, *Abelian Categories.*- Harper and Row 1964.
- [3] M. Manetti, *Differential Graded Lie Algebras and Formal Deformation Theory.*- Algebraic Geometry: Seattle, 2005 - mat.uniroma1.it. 2005.
- [4] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.*- Springer Science, Inc. 2004.
- [5] M. Schlessinger, *Functors of Artin rings.*- Trans. Amer. Math. Soc. 130, p.208-222, 1968.
- [6] G.L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields.*- Springer-Verlag New York Inc. 2000.
- [7] W. Drechsler, M.E. Mayer, *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories.*- Springer-Verlag New York Inc. 1977.
- [8] J-S. Park et al., *Quantum Backgrounds and QFT.*-Int Math Res Notices.2009; 2009: 765-801.
- [9] M. Sullivan, J. Terilla, *Symplectic field theory and quantum backgrounds.*- J. Sympl. Geometry, Vol. 6, No. 4, p.379-405, 2008.
- [10] M. F. Atiyah, *Topological quantum field theory.*- Publ. Math. IHES 68, p. 176-186, 1989.
- [11] E. Castillo, R. Díaz, *Homological Quantum Field Theory.*- math/0509532, 2008.