



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Acciones de Grupos de Lie en Pseudovariedades

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Ricardo Franquiz** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Fermín Dalmagro.

Caracas, Venezuela

Septiembre de 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Acciones de Grupos de Lie en Psedovariedades**”, presentado por el **Br. Ricardo Franquiz**, titular de la Cédula de Identidad **18556832**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Fermín Dalmagro
Tutor

Dr. Tomás Guardia
Jurado

Dr. Mauricio Angel
Jurado

A Belkys, Rúben, Jocer, César y Magda...

Agradecimientos

Si a algunos debo agradecer, debo comenzar agradeciendo a Dios por permitirme llegar hasta este punto de mi vida académica; a mis padres y a mi tía Magda por haberme brindado su incondicional y ciego apoyo a lo largo de toda la carrera, ya que en gran parte, por ellos, he llegado hasta este punto hoy.

También quiero agradecer a Jocer, por ser mi guía muchas veces y prestarme su ayuda para poder superar algunos obstáculos que se me presentaron durante mis estudios de la licenciatura.

A mi hermano César, quien convive mucho conmigo y aunque lo suyo es la música, a encontrado las oportunidades de ayudarme y apoyarme.

A Jackdin quien su amistad y apoyo ayudaron mucho durante la realización de este trabajo; solo con escuchar y acompañarme muchas veces básto para darme apoyo.

Al profesor Tomás Guardia por ayudarme en la etapa final de mi carrera y estar pendiente de mi durante el desarrollo de la tesis; a muchos le parecerá que esto es poco pero a mi no.

Al profesor Fermín Dalmagro, quien a pesar de no haberme conocido aceptó trabajar conmigo en el desarrollo de esta tesis y completar mi formación académica enseñándome herramientas las cuales, si bien están implícitas en el estudio de la licenciatura, muchos no nos hemos dado cuenta de ellas y hemos sacado el provecho que estas tienen. El trabajo duro a su lado hoy da frutos positivos en estas páginas.

Finalmente gracias a todos aquellos que de una u otra manera, sabiéndolo o no, ayudaron a la realización de este trabajo y me prestaron su compañía a lo largo de mis estudios en la licenciatura.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Variedades Diferenciables	3
1. Variedades Diferenciables	5
2. Partición de la Unidad	8
3. Vectores Tangentes a una Variedad Diferenciable	10
4. Fibrados	11
Capítulo 2. Acciones de Grupos de Lie en Variedades	16
1. Grupos de Lie	16
2. Espacios de Órbitas	21
3. Slices	24
Capítulo 3. G-pseudovariedades Estratificadas	33
1. Espacios Estratificados	33
2. Pseudovariedades Estratificadas	39
3. G- espacios Estratificados	43
4. G-Pseudovariedades Estratificadas	49
Bibliografía	53

Introducción

En la tesis de grado del Prof. Tomás Guardia ([2]), se probó que el espacio de órbita de una acción libre de un grupo de Lie compacto en una variedad diferenciable es una variedad diferenciable. La condición de libre es de vital importancia pues en general, este resultado no es cierto para acciones no libres; es el caso de la acción por rotaciones de la circunferencia en el plano, donde el espacio de órbitas es el intervalo $[0, \infty)$ que obviamente no es una variedad. Esta tesis consiste en introducir una nueva categoría de objetos que generaliza la noción de variedades con acciones de grupos de Lie y donde los espacios de órbita son objetos de esta categoría; esta categoría es La Categoría de las G -pseudovariedades Estratificadas, siendo G un grupo de Lie compacto.

El trabajo presentará una secuencia de definiciones, proposiciones y teoremas, cuyo fin es dar un sustento teórico-matemático a los resultados que se expondrán al finalizar la investigación.

Para ello en el primer capítulo se contempla un estudio sobre las variedades diferenciables. Partiremos del concepto de Sistemas Diferenciables y luego progresivamente se mostrarán algunas características principales y propiedades básicas que poseen la variedades.

Seguidamente el segundo capítulo contempla el estudio de los grupos de Lie y las acciones de grupos de Lie sobre variedades. Comenzaremos con los conceptos de Grupos de Lie y G -variedades para luego ahondar un poco en el tema de los espacios de órbitas y finalmente estudiar la construcción de los slices, cuyos objetos básicamente nos proporcionan la información necesaria para estudiar las G -variedades.

Finalmente el tercer capítulo contempla el estudio de la categoría de las G -Pseudovariedades Estratificadas, la cual es una categoría más amplia que la categoría de las G -Variedades, lo cual nos permitirá catalogar a los espacios de órbitas de acciones efectivas como objetos de esta nueva categoría. Comenzaremos estudiando los Espacios Estratificados y sus principales propiedades, seguidamente estudiaremos la Pseudovariedades Estratificadas y los G -Espacios Estratificados para finalmente pasar a lo que son las G -Pseudovariedades Estratificadas y

estudiar algunas propiedades que estas poseen.

Obtendremos como resultado final que si X es una G -pseudovariedad estratificada y K es un subgrupo cerrado de G ; entonces X/K es una G/K -pseudovariedad estratificada.

Capítulo 1

Variedades Diferenciables

La noción de variedad diferenciable generaliza la noción de Espacios Euclídeos. Básicamente una variedad diferenciable es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto que localmente es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, lo cual nos permite aplicar ideas de cálculo a estos objetos abstractos. En este capítulo desarrollaremos el concepto de variedad diferenciable y parte de las propiedades que se desarrollan a partir de él.

En lo sucesivo diremos que X es un espacio de Hausdorff con una topología segundo numerable.

Definición 1.1. Dados $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ y $\{V_j\}_{j \in \Gamma}$ dos cubrimientos de X , diremos que $\{V_j\}_{j \in \Gamma}$ es un **Refinamiento** de $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ si, para cada V_j existe U_i tal que $V_j \subset U_i$.

Definición 1.2. Una familia de subconjuntos $\{A_k\}_{k \in \Sigma}$ de X es **Localmente finita**, si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x tal que $U \cap A_k \neq \emptyset$ solo para un número finito de índices en Σ .

Proposición 1.3. Sea X un espacio topológico y F una familia de subconjuntos de X localmente finita; entonces

$$\overline{\bigcup_{A \in F} A} = \bigcup_{A \in F} \overline{A}$$

DEMOSTRACIÓN. .

- (i) $\bigcup_{A \in F} \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{A \in F} A}$ (inmediato).
- (ii) $\overline{\bigcup_{A \in F} A} \subset \bigcup_{A \in F} \overline{A}$.

Sea $x \in \overline{\bigcup_{A \in F} A}$; entonces para cada U entorno de x en X , tenemos que $U \cap (\bigcup_{A \in F} A) \neq \emptyset$.

Como F es localmente finita, existe V entorno de x en X tal que $V \cap A_j \neq \emptyset$ solo para los subconjuntos $A_1, \dots, A_k$ de F .

Entonces existe $j = 1, \dots, k$, tal que para todo entorno W de x , $W \subset V$; $W \cap A_j \neq \emptyset$.

Luego $x \in \overline{A_j}$.

Por lo tanto $\overline{\bigcup_{A \in F} A} \subset \bigcup_{A \in F} \overline{A}$.

Luego de (i) y (ii) obtenemos el resultado deseado. $\square$

Definición 1.4. Diremos que un subconjunto $A \subseteq X$ es **Relativamente Compacto** si su clausura es compacta.

Definición 1.5. Un espacio de Hausdorff es **Localmente Compacto** si cada punto tiene un entorno abierto relativamente compacto.

Definición 1.6. Un espacio de Hausdorff es **Paracompacto** si cada cubrimiento abierto posee un refinamiento localmente finito.

Definición 1.7. Un espacio de Hausdorff es de **Lindelöf** si todo cubrimiento abierto posee un subcubrimiento numerable.

Proposición 1.8. *Dado un espacio de Hausdorff X . Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (1) X es localmente compacto.
- (2) Para cada $x \in X$ y cada entorno abierto U de x ; existe un abierto relativamente compacto V , tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.
- (3) Para cada C compacto y U entorno compacto de C ; existe un conjunto abierto V relativamente compacto, tal que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
- (4) La topología de X posee de una base que consta de abiertos relativamente compactos.

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [5], página 238. $\square$

Teorema 1.9. (Morita) *En los espacios de Lindelöf, los conceptos de regularidad y paracompacidad son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [5], página 174 $\square$

Corolario 1.10. *Un espacio topológico localmente compacto y segundo numerable es paracompacto.*

Teorema 1.11. *Todo espacio paracompacto es normal.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [5], página 163. □

1. Variedades Diferenciables

Los resultados expuestos en esta sección ya han sido desarrollados en trabajos anteriores y pueden ser encontrados en las tesis de grado [2] y [3].

Definición 1.12. Sea M un espacio topológico de Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto, y sea un entero $n \geq 0$. Un n -**Sistema Diferenciable** en M es una familia de pares $\Gamma : \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, tales que:

- (1) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento de M por abiertos conexos.
- (2) $\forall \alpha \in \Lambda$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen abierta.
- (3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$, tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$;

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo.

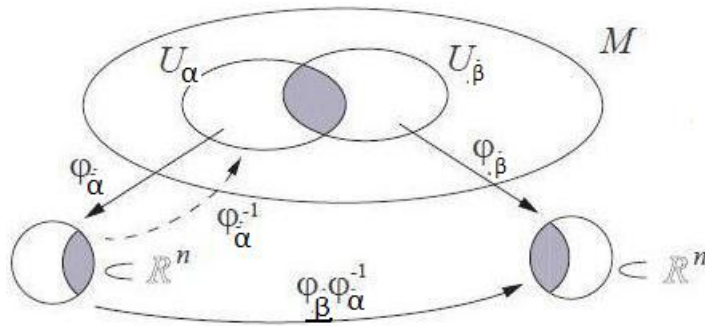


FIGURA 1.1. Cambio de Cartas

Nótese que si M posee un n -sistema diferenciable, entonces n es único, por lo cual en lo que sigue nos referimos únicamente a sistemas diferenciables, omitiendo el entero n .

Los pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ son llamados *Cartas de Γ* y esencialmente se dice que Γ es un *Sistema de Cartas Diferenciables de M* o un *Atlas Diferenciable de M* .

Ejemplo 1.13. Ejemplos de Sistemas Diferenciables:

- (1) En $\mathbb{R}^n$, la familia de difeomorfismos locales.
- (2) En S^n la familia $\{(U_v, P_v)\}_{v \in S^n}$ siendo $U_v = \{z \in S^n / \|z - v\| < \sqrt{2}\}$ y $P_v : U_v \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la composición de la proyección canónica de U_v en el plano $\pi_v = \{z \in \mathbb{R}^n / \langle z, v \rangle = 0\}$ con la rotación $\rho_{(v, N)}$ donde N es el polo norte de S^n .
- (3) En S^n la familia $\{(V_z, \varphi_z)\}_{z \in S^n}$, siendo $V_z = S^n - \{z\}$ y φ_z es la composición de la proyección estereográfica de V_z en el plano π_z , con la rotación $\rho_{(z, N)}$.
- (4) En $\mathbb{R}p^n = S^{(n+1)} / \sim$, donde $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$, la familia $\{(U_v \simeq (U_v / \sim), P_v)\}_{v \in S^n}$ definida en el ejemplo (2) es un sistema diferenciable.

Definición 1.14. Dos sistemas diferenciables se dicen ***Compatibles*** si su unión es a su vez un sistema diferenciable.

Ejemplo 1.15. Ejemplos de sistemas diferenciables compatibles:

- (1) En $\mathbb{R}^n$ el sistema dado en el ejemplo 1.13 (1) y el sistema $\{(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})\}$ son compatibles.
- (2) En S^n , los sistemas dados en los ejemplos 2 y 3 son compatibles.

Notamos que la condición de compatibilidad es una relación de equivalencia. En cada clase de equivalencia la inclusión determina un orden parcial y por el Lema de Zorn, existen elementos maximales, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.16. *Cada clase de equivalencia posee un único elemento maximal.*

Definición 1.17. Una ***Variedad Diferenciable*** es un espacio M de Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto que posee al menos un sistema diferenciable maximal. El número n asociado, es llamado la Dimensión de M y diremos que M es una ***n -Variedad diferenciable***.

Lema 1.18. *Todo Sistema Diferenciable está contenido en algún Sistema Diferenciable maximal.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], página 3. □

Ejemplo 1.19. .

- (1) $\mathbb{R}^n$ con el n -sistema diferenciable $\{(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})\}$ es una variedad diferenciable.
- (2) La esfera S^n con el n -sistema diferenciable dado en 1.13 (3) es una variedad diferenciable.

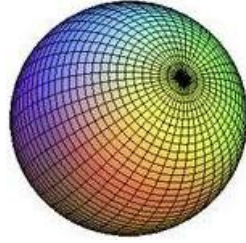


FIGURA 1.2. Ejemplo de Variedad.

- (3) Si M es una n -variedad diferenciable con un sistema diferenciable $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ y A es un abierto conexo de M , entonces $\{C : C \text{ es componente conexa de } (A \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{A \cap U_\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un sistema diferenciable en A , esto es: A es una n -variedad diferenciable. Es fácil ver que en particular el Grupo General Lineal $Gl_n(\mathbb{R})$ es una n^2 -variedad diferenciable por ser abierto de $M_{(n,n)} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Proposición 1.20. .

- (1) *La unión disjunta de n -variedades diferenciables es una n -variedad diferenciable.*
- (2) *Si M es una n -variedad diferenciable y N es una k -variedad diferenciable, entonces $M \times N$ es una $(n + k)$ -variedad diferenciable.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [8], página 110. □

2. Partición de la Unidad

Definición 1.21. Sean M y N dos variedades diferenciables, y sean $\{(U, \varphi)\}$ y $\{(V, \psi)\}$ sus respectivos sistemas diferenciables. Entonces decimos que $F : M \longrightarrow N$ es una **Función Diferenciable** si para cada carta local (U, φ) de M y cada carta local (V, ψ) de N , tal que $F(U) \cap V \neq \emptyset$, la aplicación

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(F(U) \cap V) \subset \mathbb{R}^m$$

es diferenciable de clase C^∞ .

Una aplicación diferenciable $F : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo si es biyectiva y su inversa es diferenciable.

Proposición 1.22. Sean N y M variedades diferenciables. Fijamos $y \in N$; entonces la aplicación

$$M \xrightarrow{F} N \times M$$

definida por $F(x) = (y, x)$ es diferenciable.

DEMOSTRACIÓN. .

Sean $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \Delta}$ dos sistemas diferenciables asociados a M y N respectivamente.

Sea $\{(V_\beta \times U_\alpha, \psi_\beta \times \varphi_\alpha)\}_{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Delta}$ un sistema diferenciable asociado a $N \times M$. Sea $x \in M$, tal que $F(x) \in V_\beta \times U_\alpha$.

Consideremos la proyección sobre el segundo factor $\pi_1 : N \times M \longrightarrow M$ y observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N \times M & \xrightarrow{\pi_1} & M \\ \uparrow F & \nearrow id & \\ M & & \end{array}$$

Sean $\pi_2 : N \times M \longrightarrow N$ la proyección sobre el primer factor y $C : M \longrightarrow N$ la aplicación definida por $C(x) = y, \forall x \in M$. Luego consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 N \times M & \xrightarrow{\pi_2} & N \\
 \uparrow F & \nearrow C & \\
 M & &
 \end{array}$$

Como F compuesta con cada una de sus proyecciones es continua, entonces F es continua. Veamos ahora que la aplicación F es diferenciable. Como $N \times M$ tiene estructura diferenciable con homeomorfismos $\psi_\beta \times \varphi_\alpha : V_\beta \times U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, para algún $\alpha \in \lambda$ y $\beta \in \Delta$, donde $(\psi_\beta \times \varphi_\alpha) = (\psi_\beta \circ \pi_2, \varphi_\alpha \circ \pi_1)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad (\psi_\beta \times \varphi_\alpha) \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} &= (\psi_\beta \circ \pi_2, \varphi_\alpha \circ \pi_1) \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
 (1.2) &= (\psi_\beta \circ \pi_2 \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ \pi_1 \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}) \\
 (1.3) &= (\psi_\beta \circ (\pi_2 \circ F) \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ (\pi_1 \circ F) \circ \varphi_\alpha^{-1}) \\
 (1.4) &= (\psi_\beta \circ id \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ C \circ \varphi_\alpha^{-1}) \\
 (1.5) &= (\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ C \circ \varphi_\alpha^{-1})
 \end{aligned}$$

Luego esta aplicación es diferenciable en ambas componentes, pues es la composición de funciones diferenciables.

□

Definición 1.23. Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$; entonces el **Soporte** de f es el conjunto cerrado

$$Sop(f) = \overline{\{x \in X / f(x) \neq 0\}}$$

Definición 1.24. Una **Partición de la unidad sobre X** , es una familia de funciones reales continuas sobre X ; $\{f_i / i \in I\}$ tales que:

- (1) La familia $\{Sop(f_i)\}_{i \in I}$, es un cubrimiento localmente finito.
- (2) Para todo $x \in X$, $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

Dados $\{U_i\}$ un cubrimiento de X y $\{p_j\}$ una partición de la unidad de X ; diremos que $\{p_j\}$ está **subordinada** a $\{U_i\}$ si para todo j , existe i tal que $Sop(p_j) \subset U_i$.

Teorema 1.25. *Si X es un espacio paracompacto y $\{U_i\}$ un cubrimiento abierto de X entonces, existe una partición de la unidad $\{p_j\}$ de X subordinada a $\{U_i\}$.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [5], página 170. □

Si M es una variedad diferenciable, una **Partición de la Unidad Diferenciable** M , es una partición de la unidad sobre M constituída por funciones diferenciables.

A continuación daremos el teorema análogo al teorema 1.25 para variedades diferenciables, cuyos resultados se encuentran desarrollados en las tesis de grado [2] y Ver [3].

Teorema 1.26. *Dada M una variedad diferenciable y $\{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de M , existe una partición de la unidad diferenciable $\{p_j\}$ subordinada a $\{V_i\}_{i \in I}$.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], página 7. □

3. Vectores Tangentes a una Variedad Diferenciable

Sea M una variedad diferenciable y sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ un sistema diferenciable maximal; fijamos $\alpha \in \Lambda$ y denotamos por $\varphi_\alpha \equiv (x_1, \dots, x_n)$ su **Expresión Coordinada**, esto es:

$$U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathbb{R}^n \xrightarrow{r_j} \mathbb{R}$$

$$U_\alpha \xrightarrow{x_j} \mathbb{R}$$

definida por: $x_j = r_j \circ \varphi_\alpha$

Sea $p \in M$. Escribimos $C^\infty(M, p, \mathbb{R}) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es } C^\infty, U \text{ entorno de } p\}$.

$C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ es un álgebra ya que la suma de funciones y el producto de funciones diferenciables es diferenciable.

Definición 1.27. Un Vector Tangente en p es una aplicación $v : C^\infty(M, p, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- (1) v es lineal.
- (2) $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

Denotamos por $T_p(M)$ **al espacio vectorial de los vectores tangentes de M en p .**

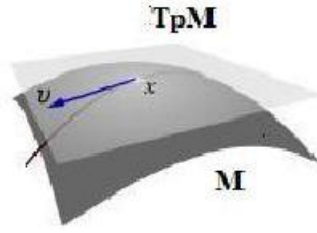


FIGURA 1.3. Plano tangente en un punto en una variedad.

Ejemplo 1.28.

Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ una carta local de M en p , entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ es el vector tangente definido por:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial r_i}|_p(f \circ \varphi^{-1})$$

En particular la familia $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ es una familia linealmente independiente.

Definición 1.29. Sea $F : M \longrightarrow N$ una función diferenciable y sea $p \in M$, el Diferencial de F en p es la aplicación lineal

$$dF : T_p(M) \longrightarrow T_{F(p)}(N)$$

definida de la manera siguiente: si $v \in T_p(M)$ y $g \in C^\infty(N, F(p), \mathbb{R})$, entonces

$$dF(v)(g) = v(g \circ F)$$

Más aún si F es difeomorfismo, entonces dF es un isomorfismo. Luego como el concepto de diferencial es local, entonces $T_p(M) \simeq T_p(U)$. En particular si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es una carta local de M en p ; como $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, tenemos que:

$$T_p(M) \simeq T_p(U) \simeq T_p(\varphi(U)) \simeq T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$$

En consecuencia la familia $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ es una base para $T_p(M)$.

4. Fibrados

Los resultados expuestos en esta sección se encuentran desarrollados en el libro «Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry» M. Singer y J. A. Thorpe [8] y en las tesis [2] y [3].

Definición 1.30. Sean E , B y F espacios topológicos de Hausdorff y $P : E \longrightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Diremos que P es un **Fibrado Trivial con fibra F** si existe un homeomorfismo $\Psi : E \longrightarrow B \times F$ tal que $\pi \circ \Psi = P$ y el siguiente diagrama es conmutativo. Donde $\pi : B \times F \longrightarrow B$ es la proyección canónica.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & B \times F \\ & \searrow P & \swarrow \pi \\ & B & \end{array}$$

Decimos que p es un **Fibrado Localmente Trivial con fibra F** si existe una familia $\{(V_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de B y $\Psi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F$ es un homeomorfismo y el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(V_\alpha) & \xrightarrow{\Psi_\alpha} & V_\alpha \times F \\ & \searrow P & \swarrow \pi \\ & V_\alpha & \end{array}$$

Al par (V_α, Ψ_α) se le denomina **Mapa**.

Ejemplo 1.31. .

- (1) $\mathbb{R}^n$ un ejemplo de fibrado es la aplicación $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$; aquí la fibra F es $\mathbb{R}$ y la base B es $\mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ & \searrow P & \swarrow \pi \\ & \mathbb{R}^{n-1} & \end{array}$$

- (2) La Banda de Moebius es un ejemplo de fibrado; aquí la fibra F es $\mathbb{R}$ y la base B es la circunferencia y la banda completa es el espacio total E .

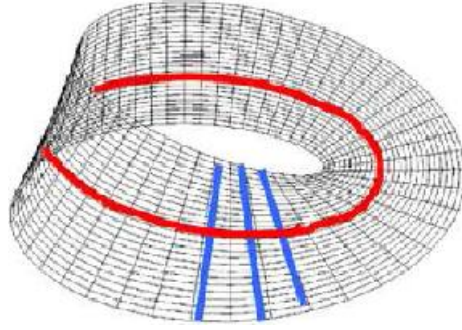


FIGURA 1.4. Banda de Moebius.

Definición 1.32. Sea $P : E \longrightarrow B$ un fibrado localmente trivial con fibra $\mathbb{R}^n$ y mapa (V_α, Ψ_α) . Diremos que P es un **Fibrado Vectorial** si para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ tal que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ existe una aplicación continua

$$g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

tal que:

$$\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}(b, z) = (b, g_{\alpha\beta}(b)z)$$

Se dice que $GL_n(\mathbb{R})$ es el Grupo Estructural y a las aplicaciones $g_{\alpha\beta}$ se les denomina Cociclos o Funciones de Transición.

Estos Cociclos poseen las siguientes propiedades:

- (1) $g_{\alpha\alpha} = e. \forall \alpha \in \Lambda$
- (2) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$
- (3) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$.

Diremos que $P : E \longrightarrow B$ es un **Fibrado Diferenciable** si B es una variedad diferenciable y $g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ son diferenciables.

Teorema 1.33. Si $P : E \longrightarrow B$ es un fibrado diferenciable, entonces E es una variedad diferenciable y $P : E \longrightarrow B$ es una función diferenciable.

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [3], página 10.

□

4.1. Fibrado Tangente. .

Sea M una n -variedad diferenciable, entonces $TM = \sqcup_{p \in M} T_p M$ la unión disjunta. Consideremos la función $\pi : TM \longrightarrow M$ definida por:

$$\pi(v) = p \text{ . Si } v \in T_p M$$

TM es un espacio topológico con la topología final dada por las inclusiones $\pi^{-1}(U) \hookrightarrow TM$, donde U recorre las cartas de M . Luego $\pi : TM \longrightarrow M$ es un fibrado vectorial diferenciable con fibra $\mathbb{R}^n$; este fibrado es conocido como **Fibrado Tangente de M** . Para cada carta (U, φ) de M , tenemos la siguiente biyección:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ \tilde{\varphi}(v) &= (p, \varphi(p)) \text{ , si } p = \pi(v) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{proy} \\ & U & \end{array}$$

Donde *proy* es la proyección canónica sobre U .

Proposición 1.34. *Si (M, Γ) es una variedad diferenciable de dimensión n , entonces el fibrado tangente TM es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ con el atlas $\Delta = \{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}) / (U, \varphi \in \Gamma)\}$.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], página 11. □

Definición 1.35. Dada una variedad diferenciable M y su fibrado tangente TM , una función $X : M \longrightarrow TM$ es una **Sección del Fibrado** si $\pi \circ X = Id_M$.

Un **Campo Vectorial sobre M** es una sección del fibrado $X : M \longrightarrow TM$ diferenciable, en el siguiente sentido: si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces $Xf \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ donde $Xf(p) = X(p)(f)$.

Definición 1.36. Dadas M, N dos variedades diferenciables y $F : M \longrightarrow N$ una función diferenciable, diremos que:

- (1) F es una ***Inmersión*** si dF es inyectiva, para cada $p \in M$.
- (2) El par (M, F) es una ***Subvariedad de*** N si F es una inmersión uno a uno, es decir, si F es una función diferenciable inyectiva y dF es inyectiva en cada punto de M .
- (3) F es un ***Embebimiento*** si, F es una inmersión uno a uno, abierta sobre $F(M) \subset N$, donde $F(M)$ está dotado de la topología relativa inducida por N .

Proposición 1.37. *Si $N \subset M$ es una subvariedad diferenciable de M ; entonces $T_p N \subset T_p M$.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [8], página 139.

□

Capítulo 2

Acciones de Grupos de Lie en Variedades

Un Grupo de Lie es básicamente un grupo topológico que adicionalmente posee una estructura de variedad diferenciable. En la primera parte de este capítulo desarrollaremos las definiciones básicas de los grupos de Lie y las acciones de dichos grupos en variedades diferenciables. Posteriormente introduciremos el concepto de slice, que es lo que nos da una representación local de las variedades. Finalmente daremos la construcción geométrica del slice.

Los resultados presentados a continuación se encuentran desarrollados en [2].

1. Grupos de Lie

Definición 2.1. Un *Grupo Topológico* es un espacio Hausdorff junto con una estructura de grupo, cuyas operaciones son continuas.

Definición 2.2. Un *Grupo de Lie* es un grupo topológico junto con una estructura de variedad diferenciable que hacen diferenciables las operaciones de grupo.

Algunos ejemplos de grupos de Lie son los siguientes:

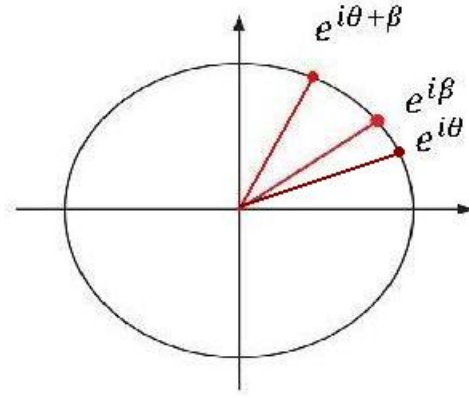
Ejemplo 2.3. .

(1) $Gl_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie con la siguiente operación de grupo:

$$\begin{aligned} Gl_n(\mathbb{R}) \times Gl_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow Gl_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\longrightarrow AB \end{aligned}$$

(2) S^1 es un grupo de Lie con la siguiente operación de grupo:

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (e^{i\theta}, e^{i\beta}) &\longrightarrow e^{i(\theta+\beta)} \end{aligned}$$

FIGURA 2.1. Acción de S^1 .

(3) $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie con la siguiente operación de grupo:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (a, b) &\longrightarrow a + b\end{aligned}$$

Proposición 2.4. .

- (1) Si G y H son grupos de Lie; entonces $G \times H$ es un grupo de Lie.
- (2) Todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie es un grupo de Lie.

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [10], página 83 y página 110. □

En lo que sigue diremos que M es una G -**variedad**, si G actúa en M , esto es una aplicación diferenciable $\Theta : G \times M \longrightarrow M$ que cumple con las siguientes propiedades:

- (1) Si e es el elemento identidad de G y x un punto en M , entonces

$$\Theta(e, x) = x$$

- (2) Para cada $g, h \in G$ y $x \in M$,

$$\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(gh, x)$$

Si no hay confusión denotamos por gp al elemento $\Theta(g, p)$.

Definición 2.5. Dados M, N dos G -variedades y $F : M \longrightarrow N$ una función diferenciable, diremos que F es una función G -**equivariante**, si $F(gx) = gF(x)$.

En caso de que F sea un difeomorfismo, diremos que F es una **Equivalecia**.

Las G -variedades junto con las funciones diferenciables G -equivariantes forman una categoría.

Definición 2.6. Dada M una G -variedad, decimos que:

- (1) Una acción es **Libre** si $e \in G$ es el único elemento que deja fijo a los elementos de M .
- (2) Una acción es **Efectiva** si para todo $g \neq e$ mueve a algún punto $x \in M$.

A continuación veamos algunos ejemplos de acciones diferenciables:

Ejemplo 2.7. .

- (1) Si G es un grupo de Lie compacto y H es un subgrupo cerrado de G ; la acción $\Theta : H \times G \longrightarrow G$ definida por

$$\Theta(h, g) = hg$$

es una acción libre.

- (2)

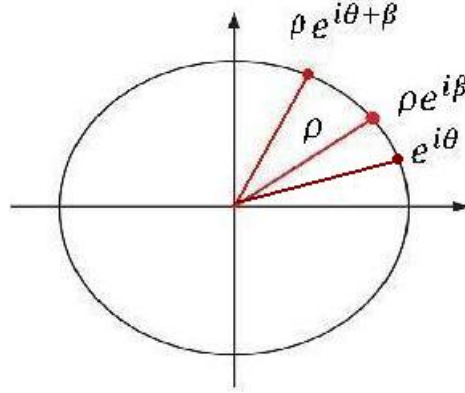
$$\begin{aligned} S^1 \times S^{2n+1} &\longrightarrow S^{2n+1} \\ (\alpha, (z_0, \dots, z_n)) &\longrightarrow (\alpha z_0, z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Donde $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} / \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$. Esta acción es conocida como la acción de Hopf y es una acción efectiva solamente si $z_0 \neq 0$.

- (3)

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (e^{i\theta}, \rho e^{i\varphi}) &\longrightarrow \rho e^{i(\theta+\varphi)} \end{aligned}$$

Esta acción es una acción efectiva.

FIGURA 2.2. Acción de S^1 en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 2.8. *Toda acción libre es efectiva.*

DEMOSTRACIÓN. .

Sea $\Theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción libre definida por $\Theta(g, x) = gx$. Supongamos que Θ no es efectiva; entonces existe $g \in G$, $g \neq e$, tal que $gx = x$. Pero esto no es posible pues Θ es una acción libre por hipótesis. Luego $\Theta : G \times M \longrightarrow M$ es una acción efectiva. $\square$

Proposición 2.9. *Las G -variedades poseen las siguientes propiedades:*

- (1) *Para cada $g \in G$; la aplicación $\Theta_g : M \longrightarrow M$, definida por $\Theta_g(p) = gp$ es un difeomorfismo.*
- (2) *La aplicación Θ es cerrada.*
- (3) *Para cada $x \in M$, **La Órbita de x** , $G(x)$, es la subvariedad cerrada.*

$$G(x) = \{x' \in M / \exists g \in G; x' = gx\}$$

- (4) *Para cada $x \in M$, **La Isotropía de x** , G_x , es el subgrupo cerrado.*

$$G_x = \{g \in G / gx = x\}$$

- (5) *La aplicación $\bar{P} : G/G_x \longrightarrow G(x)$, definida por $\bar{P}([g]) = gx$, es un difeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], páginas 16 y 17. $\square$

Teorema 2.10. *Sea M una G -variedad, G compacto. Para cada $A \subset M$, sea $G(A) = \bigcup_{g \in G} gA$. Entonces:*

- (1) *Si A es abierto, entonces $G(A)$ es abierto.*
- (2) *Si A es cerrado, entonces $G(A)$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. .

- (1) Si A es abierto, como $\forall g \in G$ la aplicación

$$\begin{aligned} \Theta_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow gx \end{aligned}$$

es un homeomorfismo; $G(A) = \bigcup_{g \in G} gA$ es abierto.

- (2) Si A es cerrado, entonces A posee todos sus puntos de acumulación. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G(A)$ una sucesión que converge a $y \in X$.

Veamos que $y \in G(A)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = g_n x_n$; $\{x_n\} \subset A$ y $\{g_n\} \subset G$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\{g_n\} \longrightarrow g$$

Luego como la inversión es una función continua

$$\{g_n^{-1}\} \longrightarrow g^{-1}$$

Entonces $g_n^{-1}(g_n x_n) = x_n$ y; como $g_n^{-1} \longrightarrow g^{-1}$ y $g_n x_n \longrightarrow y$, por lo tanto $x_n \longrightarrow g^{-1}y$, porque $x_n \subset A$ y A es cerrado.

Tomando $x = g^{-1}y$ tenemos lo buscado.

□

Sea $\Theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción diferenciable, entonces Θ induce una acción diferenciable $\hat{\Theta} : G \times TM \longrightarrow TM$, definida por la fórmula:

$$\hat{\Theta}(g, v) = d\Theta_g(v)$$

2. Espacios de Órbitas

Sea M una G -variedad; damos en M la siguiente relación de equivalencia:

$$xRy \Leftrightarrow G(x) = G(y)$$

Las clases de equivalencias son las órbitas de los puntos de M . Al espacio cociente M/G se le denomina el **Espacio de Órbitas de M** .

Si consideramos la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M/G$, entonces podemos dotar a M/G la topología inducida por la proyección.

Ejemplo 2.11. Si consideramos la acción

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (e^{i\theta}, \rho e^{i\varphi}) &\longrightarrow \rho e^{i(\theta+\varphi)} \end{aligned}$$

entonces la órbitas pueden verse de la siguiente manera:

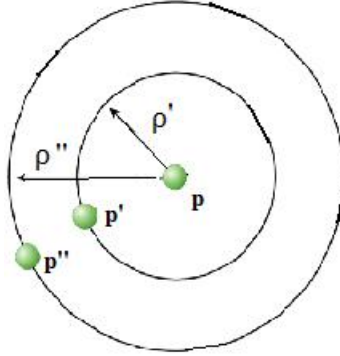


FIGURA 2.3. órbitas de la acción de S^1 en $\mathbb{R}^2$.

y $\mathbb{R}^2/S^1$ es homeomorfo al segmento $[0, \infty)$.

Proposición 2.12. *Si G actúa libremente en M , entonces M/G es una variedad diferenciable.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], página 25.

□

Teorema 2.13. π es una aplicación continua abierta y cerrada.

DEMOSTRACIÓN. .

- (i) Veamos primero que π es abierto. Sea $A \subset X$ abierto, debemos ver que $\pi(A)$ es abierto.

Luego $\pi(A) \subset X/G$; y $\pi(A)$ es abierto en X/G si, y solo si $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset X$ es abierto en X . Pero $\pi^{-1}(\pi(A)) = G(A)$ y por el teorema 2.10 tenemos que $G(A)$ es abierto, y por tanto π es abierto.

- (ii) Veamos ahora que π es cerrado. Sea $A \subset X$ cerrado. Entonces

$$\pi(A) \text{ es cerrado en } X/G \Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(A)) \text{ es cerrado en } X$$

Pero $\pi^{-1}(\pi(A)) = G(A)$; y por el teorema 2.10 tenemos que:

$$A \text{ es cerrado} \Rightarrow G(A) \text{ es cerrado}$$

Por lo tanto $\pi(A)$ es cerrado .

□

Sea G un grupo de Lie compacto, $H \subset G$ un subgrupo cerrado de G y X un espacio topológico, tal que G actúa en X . Entonces, H actúa en $G \times X$ con la acción

$$(h, (g, x)) \longrightarrow (gh^{-1}, hx)$$

Al espacio de órbitas de $G \times X$ lo denotamos por $G \times_H X$. A la H -órbita de (g, x) la denotamos por $[g, x]$, luego $[g, x] = [g', x']$ si y solo si, existe $h \in H$ tal que $g' = gh^{-1}$ y $x' = hx$; en particular $[gh, x] = [g, hx]$. Al espacio de órbitas $G \times_H X$ se le denomina el **Producto torcido de G y X bajo H** . Además G actúa en el producto torcido $G \times_H X$ con la acción

$$G \times G \times_H X \longrightarrow G \times_H X$$

$$(g', [g, x]) \longrightarrow [g'g, x]$$

Si X, Y son dos espacios tales que H actúa en ellos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función H -equivariante, entonces esta función f induce una aplicación sobre los productos torcidos

$$(2.1) \quad G \times_H f : G \times_H X \longrightarrow G \times_H Y$$

$$(2.2) \quad .[g, x] \longrightarrow [g, f(x)]$$

Sea Y un espacio topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado de G . Supongamos que H actúa en Y ; entonces la **Inclusión bajo** e es la aplicación:

$$(2.3) \quad i_e : Y \longrightarrow G \times_H Y$$

$$(2.4) \quad y \longrightarrow [e, y]$$

Nótese que esta aplicación es H -equivariante, dado que

$$(2.5) \quad i_e(hy) = [e, hy] = [h, y] = h[e, y] = hi_e(y)$$

Además la aplicación i_e es continua, dado que es la composición de funciones continuas

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \xrightarrow{\pi} & G \times_H Y \\ \uparrow i \hookrightarrow & \nearrow i_e & \\ Y & & \end{array}$$

$i_e = i \circ \pi$ donde π es la proyección canónica sobre el producto torcido.

Pero esta aplicación i_e induce una aplicación sobre el espacio cociente Y/H mediante el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i_e} & G \times_H Y \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ Y/H & \xrightarrow{\hat{i}_e} & (G \times_H Y)/G \end{array}$$

Donde π_1 y π_2 son las respectivas proyecciones canónicas sobre los espacios cocientes y $\hat{i}_e(H(y)) = G([e, y])$. Donde $H(y)$ es la órbita de y en H y $G([e, y])$ la órbita de $[e, y]$ en $(G \times_H Y)/G$

Proposición 2.14. *La aplicación $\hat{i}_e$ está bien definida y es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], página 19. □

3. Slices

3.1. Métricas Riemmanianas.

Definición 2.15. Sea V un espacio vectorial, un **Producto Interno en V** es una aplicación

$$\mu : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que es bilineal, simétrica, no degenerada y definida positiva.

Definición 2.16. Una Métrica Riemmaniana en un variedad M es una aplicación

$$\mu : M \longrightarrow \{\text{Prod. Internos en } \mathbb{R}^n\}$$

que asigna a cada $p \in M$ un producto escalar en el plano tangente $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$ diferenciable en el siguiente sentido :

Si $x = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p \equiv (a_1, \dots, a_n)$ y $y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial y_i} |_p \equiv (b_1, \dots, b_n)$ son vectores tangentes en $T_p M$, existen $a_{ij} \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ tales que:

$$\mu(p)(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(p) & a_{n2}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A continuación veremos que cada variedad diferenciable posee al menos una métrica riemanniana.

Proposición 2.17. *Cada variedad diferenciable posee al menos una métrica riemanniana; más aún, si M es una G -variedad dicha métrica puede ser escogida invariante por la acción de G , esto es, para todo $g \in G$, $p \in M$ y $v, w \in T_p M$*

$$\mu(gp)(gv, gw) = \mu(p)(v, w)$$

DEMOSTRACIÓN. .

Ver [2], página 21. □

Definición 2.18. Sea V es un espacio vectorial con producto interno μ . Una aplicación lineal $T : V \longrightarrow V$ es una **Isometría** cuando para dos vectores arbitrarios $v, w \in V$ se cumple:

$$(2.6) \quad \mu(T(v), T(w)) = \mu(v, w)$$

Ejemplo 2.19. Las isometrías en $\mathbb{R}^n$ son las transformaciones lineales ortogonales, $O(n)$.

Sea M una G -variedad y μ una métrica riemanniana invariante en M , si H es la isotropía de $p \in M$; entonces cada miembro de H actúa por isometrías en $T_p M$. Esto nos permite considerar a H como subgrupo de $O(n)$.

3.2. Curvas Integrales. La definición de curva integral que damos a continuación para un vector en una variedad dada, es un cierta medida una generalización del concepto de curva integral de un campo vectorial en un punto.(Ver [10])

Definición 2.20. Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $v \in T_p M$. Una **Curva Integral de v** , es una función diferenciable

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow M$$

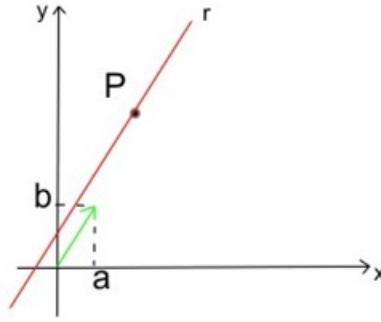
Que satisfice las siguientes condiciones:

$$(2.7) \quad \sigma(0) = p$$

$$(2.8) \quad d\sigma(0) = \sigma'(0) = v$$

Ejemplo 2.21. .

- (1) La curva integral de un vector v sobre $\mathbb{R}^n$, es la recta que pasa por p y tiene a v , un vector del campo vectorial X , como vector director.

FIGURA 2.4. Curvas integrales en $\mathbb{R}^n$.

- (2) Si $F : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables. Sea $p \in M$, $v \in T_p M$

$$dF : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

Si $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es la curva integral del campo vectorial v en $T_p M$, entonces

$$F \circ \sigma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$$

es la curva integral de $dF(v)$ en $T_{F(p)} N$.

El teorema presentado a continuación es de gran importancia, porque nos garantiza la existencia y unicidad de las curvas integrales.

Teorema 2.22 (Existencia y Unicidad de las Curvas Integrales). *Dado p un punto en M y $v \in T_p M$. Existe una única curva integral σ de v en M .*

DEMOSTRACIÓN. .

Sea $(U, \varphi \equiv (x_1, \dots, x_n))$ una carta de M que contiene a p . Consideremos

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n &\implies d\varphi : T_p M &\longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \\ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow U &\implies d\varphi^{-1} : T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p M \end{aligned}$$

$\sigma(t) = \varphi(p) + td\varphi(v)$ es la curva integral de $d\varphi(v)$. Veamos que $(\varphi^{-1} \circ \sigma)$ es la curva integral de v en p . Verificamos:

(1)

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \circ \sigma)(0) &= \varphi^{-1}(\sigma(0)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(p) + 0 \cdot d\varphi(v)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(p)) \\ &= p \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} [(\varphi^{-1} \circ \sigma)]'(t) &= d\varphi^{-1}(\varphi(p) + td\varphi(v)) \cdot d\varphi(v) \\ &= (d\varphi^{-1}(\varphi(p)) + t \cdot d\varphi^{-1}(d\varphi(v))) \cdot d\varphi(v) \\ &= 1 \cdot d\varphi(v) \\ &= v \end{aligned}$$

Luego el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales garantiza la existencia de una única curva integral de v en p . A esta única curva integral la denotaremos por σ_v .

□

Proposición 2.23. *Dado $v \in T_p M$ y $s \in \mathbb{R}$; entonces $\sigma_{sv} = s\sigma_v$ es la curva integral de sv .*

DEMOSTRACIÓN. .

Sea σ_X la curva integral de X en p ; entonces

$$(2.9) \quad \sigma_v(0) = p$$

$$(2.10) \quad \sigma'_v(t) = X(\sigma_v(t)) \text{ luego}$$

$$(2.11) \quad s \cdot \sigma_v(0) = \sigma_v(s \cdot 0) = p$$

$$(2.12) \quad s \cdot \sigma'_v(0) = \sigma'_v(s \cdot 0) = s \cdot v$$

□

Corolario 2.24. Sea $(U, \varphi \equiv (x_1, \dots, x_n))$ una carta de M que contiene a p . Sea $\varphi(p) = b = (b_1, \dots, b_n)$. Entonces, $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi^{-1}((b_1, \dots, b_n) + t(a_1, \dots, a_n))$$

es la curva integral de $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p$.

DEMOSTRACIÓN. .

Si $\sigma_{d\varphi(v)}(t) = (b_1, \dots, b_n) + t(a_1, \dots, a_n)$ es la curva integral de $d\varphi(v)$, donde $v = (a_1, \dots, a_n)$ y $\varphi(p) = (b_1, \dots, b_n)$. Entonces

$$(2.13) \quad \sigma_{d\varphi(v)}(t) = \varphi^{-1}((b_1, \dots, b_n) + t \cdot (a_1, \dots, a_n))$$

$$(2.14) \quad \Rightarrow \sigma'_{d\varphi(v)}(t) = d\varphi^{-1}((b_1, \dots, b_n) + t \cdot (a_1, \dots, a_n))$$

$$(2.15) \quad = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (a_1, \dots, a_n)$$

□

3.3. La Función Exponencial. Sean M una G -variedad, $p \in M$, $v \in T_p M$ y σ_v la curva integral de v en M .

Definición 2.25. La **Función Exponencial** de una variedad diferenciable M , es la función.

$$(2.16) \quad \exp : TM \longrightarrow M \times M$$

definida por la fórmula $\exp(X) = (p, \sigma_v(1))$.

Algunas propiedades de esta función serán anunciadas a continuación en la siguiente proposición:

Proposición 2.26. .

- (1) Si M es un G -variedad, entonces $\exp$ es una función G -equivariante.
- (2) Sea $(U, \varphi \equiv (x_1, \dots, x_n))$ una carta local en M y $(TU, \tilde{\varphi})$ la carta local en TM inducida por (U, φ) , entonces la composición

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} TU \xrightarrow{\exp} U \times U \xrightarrow{\varphi \times \varphi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

es la aplicación que transforma al par (b, a) en el par $(b, b + a)$ y su diferencial es la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I & I \end{array} \right)$$

DEMOSTRACIÓN. .

(1) Debemos ver que dados $p \in M$, $v \in T_p M$ y $g \in G$; $g \exp(v) = \exp(gv)$.

Por un lado tenemos que $\exp(gv) = (gp, \gamma_{gv}(1))$ donde γ_{gv} es la curva integral de gv .

Pero por otro lado, $\exp(v) = (p, \sigma_v(1))$ donde σ_v es la curva integral de v . Entonces se satisface lo siguiente:

$$(2.17) \quad \sigma_v(0) = p \quad \text{y} \quad \sigma'_v(0) = v$$

$$(2.18) \quad \Rightarrow \quad g\sigma_v(0) = gp \quad \text{y} \quad g\sigma'_v(0) = gv$$

Luego $\gamma_{gv} = g\sigma_v$; de donde deducimos la invarianza de $\exp$.

(2) Sea $(U, \varphi \equiv (x_1, \dots, x_n))$ una carta en M y $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ la carta local en TM inducida por (U, φ) , donde $\tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} TU \xrightarrow{\exp} U \times U \xrightarrow{\varphi \times \varphi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ ((b_1, \dots, b_n), (a_1, \dots, a_n)) &\rightsquigarrow \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \rightsquigarrow (p, \varphi^{-1}((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n))) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow ((b_1, \dots, b_n), (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n)) \end{aligned}$$

□

Si restringimos la función $\exp$ a la fibra $T_p M$ obtenemos la aplicación:

$$(2.19) \quad \exp_p : T_p M \longrightarrow M$$

definida por:

$$(2.20) \quad \exp_p(X) = \sigma_v(1)$$

Donde σ_v es la curva integral del vector v .

Teorema 2.27. $\exp_p : T_p M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo local.

DEMOSTRACIÓN. .

De la proposición 2.26 se deduce que la función $\exp_p$ es diferenciable. Luego por el Teorema de la Función Inversa (Ver [8] página 119) $\exp_p$ es un difeomorfismo local. □

Si M es una G -variedad y $H \subset G$ es el subgrupo de isotropía de $p \in M$, es claro que $\exp_p$ es H -equivariante, es decir,

$$h \exp_p(v) = \exp_p(hv) \quad \forall h \in H.$$

Estudiaremos esta situación con más detalle:

Sea M una G -variedad, dotada de una métrica riemanniana G -invariante. Sea $p \in M$ y H el subgrupo de isotropía de p . Como H actúa en $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$ por isometrías, no perdemos generalidad si suponemos que $H \subset O(n)$. Además la órbita de p , $G(p)$, es una subvariedad cerrada de M , por lo tanto el espacio tangente a la órbita en p es un subespacio de $T_p M$.

Consideremos el subespacio vectorial de $T_p M$ ortogonal a $T_p G(p)$ al cual denotaremos por $E_p = T_p G(p)^\perp$.

Dado que H actúa ineffectivamente en $G(p)$, es decir, $gx = x$, $\forall g \in H$ y $\forall x \in G(p)$; también actúa ineffectivamente en $T_p G(p)$ y en consecuencia E_p es H -equivariante.

Definamos ahora lo que es un **Slice de X en p** .

Definición 2.28. Dada X una G -espacio, $p \in X$ y H la isotropía de p . Un **Slice de X en p** es un subconjunto S_p de X tal que:

- (1) $p \in S_p$.
- (2) S_p es un H -espacio.
- (3) La aplicación $\alpha : G \times_H S_p \longrightarrow X$ definida por $\alpha([g, s]) = gs$ es un embebimiento G -equivariante sobre su imagen abierta $G(S_p)$.

Proposición 2.29. $S_p \subset X$ es un slice de X en p si y sólo si

- (1) $p \in S_p$.
- (2) S_p es una H -espacio.
- (3) $gS_p \cap S_p \neq \emptyset \Rightarrow g \in H$.
- (4) $G(S_p)$ es abierto en X .

DEMOSTRACIÓN. .

Ver[2], página 23. □

Ejemplo 2.30. En [2] se probó que efectivamente, si M es una G -variedad y $p \in M$, entonces $S_p = \exp_p(E_p)$ es un slice de M en p .

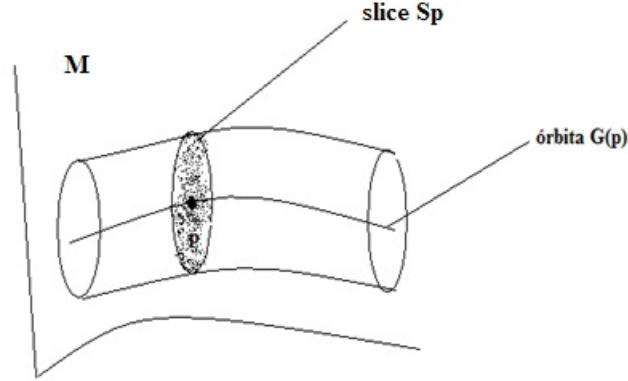


FIGURA 2.5. Slice.

Adicionalmente los Slices poseen una estructura cónica de terminada de la siguiente manera:

Sea $C(S^q)$ el espacio cociente

$$C(S^q) = \frac{S^q \times [0, 1)}{S^q \times \{0\}}$$

donde la relación de equivalencia viene dada por: $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow s = t = 0$ ó $(t, x) = (s, y)$.

Sea $v = [x, 0]$.

Sea E'_p el subespacio vectorial de E_p , constituido por todos los puntos fijos respecto a la acción H y E''_p su complemento ortogonal respecto a la métrica riemanniana.

$$(2.21) \quad E_p = E'_p \oplus E''_p$$

Si $\dim(E'_p) = i$ y $\dim(E''_p) = q + 1$. Entonces

$$(2.22) \quad E_p \simeq \mathbb{R}^i \times C(S^q)$$

Siendo $E'_p \simeq \mathbb{R}^i$ y $E''_p \simeq \mathbb{R}^{q+1}$; donde la identificación de $\mathbb{R}^{q+1} \simeq C(S^q)$ mediante la aplicación

$$(2.23) \quad \mathbb{R}^{q+1} \xrightarrow{f} C(S^q)$$

$$(2.24) \quad x \longrightarrow \left[\frac{x}{\|x\|}, \|x\| \right]$$

$$(2.25) \quad 0 \longrightarrow v$$

Luego

$$(2.26) \quad S_p \simeq \mathbb{R}^i \times C(S^q).$$

G-pseudovariedades Estratificadas

Así como la noción de variedad diferenciable es una extensión de la noción de Espacios Euclídeos; el concepto de pseudovariedades estratificadas es una extensión de la noción de variedades diferenciables. En la primera parte de este capítulo desarrollaremos las definiciones y propiedades básicas relacionadas con esta teoría, lo cual nos permitirá luego resolver el problema planteado en la introducción de este trabajo.

1. Espacios Estratificados

Sea X un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto.

Definición 3.1. Una **Estratificación** de X es una partición localmente finita S_X que satisface las siguientes propiedades:

- (i) Cada elemento $S \in S_X$ es una variedad diferenciable conexa, que llamaremos *Estrato* de X .
- (ii) Si $S' \cap \overline{S} \neq \emptyset$, entonces $S' \subset \overline{S}$, para cualesquiera dos estratos $S, S' \in S_X$. Diremos que S *Incide sobre* S' , y escribiremos $S' < S$.

Si S_X es una estratificación de X , entonces diremos que el par (X, S_X) es un **Espacio Estratificado**.

Proposición 3.2. Sea (X, S_X) un espacio estratificado. Entonces para cada estrato $S \in S_X$

$$\overline{S} = \bigcup_{S' < S} S'$$

DEMOSTRACIÓN. .

(1) $\bigcup_{S' \leq S} S' \subset \overline{S}$ es inmediata.

(2) $\overline{S} \subset \bigcup_{S' \leq S} S'$.

Sea $x \in \overline{S}$. Si $x \in S$, entonces $x \in \bigcup_{S' \leq S} S'$. Si $x \notin S$, entonces existe $S' \in S_X$ tal que $x \in S'$; luego $x \in S' \cap \overline{S}$, entonces $S' \leq S$, por lo tanto $x \in \bigcup_{S' \leq S} S'$

Luego de (1) y (2) podemos concluir que $\overline{S} = \bigcup_{S' \leq S} S'$. □

Definición 3.3. Sea X un espacio estratificado. Para cada subconjunto $Z \subset X$ la **Partición Inducida** es:

$$S_Z = \{C : C \text{ es componente conexa de } Z \cap S; S \in S_X\}$$

Donde S_X es la estratificación de X .

Definición 3.4. Diremos que Z es un **Subespacio Estratificado** de X , si la partición inducida en Z es una estratificación de Z .

Definición 3.5. Sean X y Y dos espacios estratificados. Un **Morfismo** $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, que manda estratos en estratos diferenciablemente. En particular f es un **Embebimiento** si para todo $B \subset X$, $f(B)$ es un subconjunto abierto de Y .

Definición 3.6. .

(I) Los estratos maximales en S_X son llamados **Estratos Regulares**.

(II) Los estratos **no** maximales son llamados **Estratos Singulares**.

Proposición 3.7. Sea X un espacio estratificado, con estratificación S_X . Sea $S \in S_X$; entonces

(i) S es maximal $\Leftrightarrow S$ es abierto.

(ii) S es minimal $\Leftrightarrow S$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. .

- (i) ($\Leftarrow$) Asumimos que S es abierto. Sea S' un estrato de X tal que $S \leq S'$, debemos probar que $S = S'$.

Dado que $S \leq S'$, para todo punto de S , todo entorno de dicho punto intersecta a S' . Sea $x \in S$, dado que S es entorno de sus puntos, $S \cap S' \neq \emptyset$ y, como S_X es partición tenemos que $S = S'$.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que S es maximal. Debemos probar que para todo $x \in S$, existe $U \subset S$ entorno de x tal que $x \in U \subset S$.

Sea $x \in S$; dado que S_X es localmente finita, existe un entorno V de x que intersecta solo un número finito de miembros de la partición. Sean $S, S_1, \dots, S_k$ tales estratos.

Para todo $j = 1, \dots, k$, $S \not\leq S_j$; existe un entorno U_j de x tal que $U_j \cap S_j = \emptyset$.

Elegimos $U = V \cap U_1 \cap \dots \cap U_k$ y probaremos que $U \subset S$, para ello fijemos $S' \subset S_X$, tal que $S \neq S'$. Entonces

$$U \cap S' = (V \cap U_1 \cap \dots \cap U_k) \cap S' = (V \cap S') \cap (U_1 \cap S') \cap \dots \cap (U_k \cap S') = \emptyset$$

En consecuencia $U \subset S$.

- (ii) ($\Rightarrow$) Supongamos que S es minimal, dado que $\overline{S} = \bigcup_{S' \leq S} S' = S$ tenemos que S es cerrado.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que S es cerrado. Sea S' un estrato de X tal que $S' \leq S$. Debemos probar que $S = S'$.

Entonces

$$S' \leq S \Leftrightarrow S' \subset \overline{S} \Leftrightarrow S' \subset S$$

. Como S_X es partición, $S = S'$

□

Proposición 3.8. *La relación de incidencia es un orden parcial en S_X .*

DEMOSTRACIÓN. .

Las propiedades reflexivas y transitivas son inmediatas. solo probaremos la antisimetría; esto es: si S y S' son estratos de S_X tales que $S' < S$ y $S' \neq S$, entonces $\overline{S'} \cap S = \emptyset$.

Veamos:

Asumimos $S' < S$ y $S' \neq S$, es claro que $\bar{S} = \bigcup_{S'' \leq S} S''$ es un espacio estratificado con la estratificación inducida. Dado que S es maximal en $\bar{S}$, tenemos por 3.7 que S es abierto en $\bar{S}$ y por tanto su complemento $\bigcup_{S'' < S} S''$ es cerrado en $\bar{S}$. Dado que $S' \subset \bigcup_{S'' < S, S'' \neq S} S''$, su clausura $\bar{S}'$ está contenida en $\bigcup_{S'' < S, S'' \neq S} S''$, esto es:

$$\bar{S}' \cap S = \emptyset$$

□

Proposición 3.9. *Toda cadena $C \subset S_X$ estrictamente ordenada es finita.*

DEMOSTRACIÓN. .

Sea $C \subset S_X$ una cadena en S_X .

Entonces $X_{(C)} = \bigcup_{S \in C} S$ es un espacio estratificado. Sea S_0 estrato minimal de $X_{(C)}$; fijemos $x \in S_0$, entonces dado que $x \in \bar{S}$, $\forall S \in C$ y que existe $U \subset S$ entorno de x que solo intersecta a un número finito de miembros de C , tenemos que C es finita.

□

Definición 3.10. Se define la **Profundidad** del espacio estratificado X de la manera siguiente:

$$D(X) = n$$

Si la cadena de mayor longitud en X tiene $n + 1$ elementos.

Teorema 3.11. *Si (X, S_X) es un espacio estratificado compacto. Entonces X tiene solo un número finito de estratos.*

DEMOSTRACIÓN. .

Como S_X es una partición localmente finita, entonces para cada $x \in X$, existe un entorno $U_{(x)}$ de x que intersecta solo a un número finito de estratos $S_1^{(x)}, \dots, S_n^{(x)}$.

Luego la familia $F = \{U_{(x)}/x \in X\}$ es un cubrimiento de X ; y como X es compacto; existe $x_1 \dots, x_n \in X$ tales que

$$\bigcup_{j=1}^n U_{(x_j)} = X$$

Entonces a lo sumo hay $n(x_1) + \dots + n(x_n)$ estratos en X .

□

Corolario 3.12. *Todo espacio estratificado compacto tiene profundidad finita.*

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios estratificados:

Ejemplo 3.13. .

- (1) Todo intervalo semiabierto es un espacio estratificado.
- (2) $X = \{\text{Triángulo Relleno}\}$

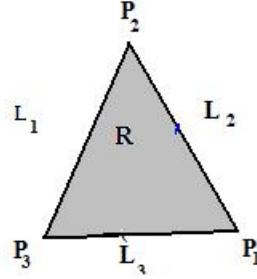


FIGURA 3.1. Triángulo Relleno.

Estratificación: $S_X = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, L_1, L_2, L_3, R\}$

Profundidad: $D(X) = 2$

- (3) Si X es una variedad diferenciable, entonces X es un espacio estratificado, con la estratificación dada por:

$$S_X = \{C : C \text{ es componente conexa de } X\}.$$

Proposición 3.14. *Si M es una variedad conexa y (X, S_X) es un espacio estratificado; entonces $M \times X$ es un espacio estratificado y su estratificación está dada por:*

$$S_{M \times X} = \{M \times S : S \in S_X\}$$

DEMOSTRACIÓN. .

Para ver que $S_{M \times X}$ es una estratificación debemos probar que satisface las condiciones de la definición 3.1.

- (1) Sea $S \in S_X$ un estrato en X . Como el producto de variedades diferenciable es una variedad diferenciable y el producto de conexos es conexo; entonces $M \times S$ es una variedad diferenciable conexa para cada estrato $S \in S_X$.

(2) Sean $S, S' \in S_X$, tales que $(M \times S') \cap (\overline{M \times S}) \neq \emptyset$. Entonces

$$(3.1) \quad (M \times S') \cap \overline{(M \times S)} = (M \times S') \cap (M \times \overline{S})$$

$$(3.2) \quad = (M \cap M) \times (S' \cap \overline{S})$$

$$(3.3) \quad = M \times (S' \cap \overline{S}) \neq \emptyset$$

$$(3.4) \quad \Leftrightarrow S' \cap \overline{S} \neq \emptyset$$

$$(3.5) \quad \Leftrightarrow S' \subset \overline{S}$$

$$(3.6) \quad \Leftrightarrow (M \times S') \subset (M \times \overline{S}) = \overline{(M \times S)}$$

(3) $S_{M \times X}$ es una partición localmente finita.

Sean $(p, x) \in M \times S$ y $M \times U$ entorno de (p, x) en $M \times S$. Debemos probar que $M \times U$ intersecta solo a un número finito de estratos $M \times S_1, \dots, M \times S_n$.

Como $x \in S$ entonces cada entorno U de x , intersecta solo un número finito de estratos en S_X . Supongamos que $U \cap S_i \neq \emptyset$ solo para $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$(3.7) \quad (M \times U) \cap (M \times S_i) = M \times (U \cap S_i) \neq \emptyset \text{ solo para } i = 1, \dots, n$$

Luego $S_{M \times X}$ es una partición localmente finita

Con esto finalmente hemos probado que el conjunto $S_{M \times X}$ es una estratificación para $M \times X$. $\square$

Definición 3.15. Si X es un espacio topológico, entonces el **Cono de** X es el espacio cociente

$$C(X) = \frac{X \times [0, 1)}{X \times \{0\}}$$

Donde la relación de equivalencia viene dada por: $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow s = t = 0$ ó $(t, x) = (s, y)$.

Llamamos **Vértice** a $v = [x, 0]$.

Proposición 3.16. Si X es un espacio estratificado compacto, entonces $C(X)$ es un espacio estratificado con la estratificación

$$S_{C(X)} = \{v\} \cup \{S \times (0, 1) : S \in S_X\}$$

DEMOSTRACIÓN. .

Veamos que $S_{C(X)}$ satisface las condiciones de la definición 3.1.

(1) Si consideramos el vértice $\{v\} \in S_{C(X)}$ este es una variedad diferenciable conexa. Sea $S \in S_X$, entonces como $(0, 1)$ es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}$; entonces $(0, 1)$ es una subvariedad diferenciable conexa de $\mathbb{R}$. Luego como el producto de variedades diferenciables es una variedad diferenciable y el producto de espacios conexos es conexo, tenemos que $S \times (0, 1)$ es una variedad diferenciable conexa para cada $S \in S_X$.

(2) Sean $S, S' \in S_X$, tales que $S' \times (0, 1) \cap \overline{S \times (0, 1)} \neq \emptyset$. Entonces

$$(3.8) \quad S' \times (0, 1) \cap \overline{S \times (0, 1)} = S' \times (0, 1) \cap \overline{S} \times (0, 1)$$

$$(3.9) \quad = S \cap \overline{S} \times (0, 1) \neq \emptyset$$

$$(3.10) \quad \Rightarrow S' \cap \overline{S} \neq \emptyset$$

$$(3.11) \quad \Rightarrow S' \subset \overline{S}$$

$$(3.12) \quad \Rightarrow S' \times (0, 1) \subset \overline{S} \times (0, 1) = \overline{S \times (0, 1)}$$

(3) $S_{C(X)}$ es una partición localmente finita. Como X es compacto, por el teorema 3.11 X posee un número finito de estratos. Luego $C(X)$ posee un número finito de estratos. Entonces trivialmente $S_{C(X)}$ es localmente finita.

Así finalmente de (1), (2) y (3) podemos concluir que $S_{C(X)}$ es una estratificación para $C(X)$. □

Corolario 3.17. $D(C(X)) = D(X) + 1$.

2. Pseudovariedades Estratificadas

Una Pseudovariedad estratificada es básicamente un espacio estratificado al cual dotamos además de una estructura cónica transversa a los estratos. En esta sección desarrollaremos con más detalle esta noción.

Definición 3.18 (Pseudovariedad Estratificada). (Definición hecha por inducción sobre la profundidad)

- Una **Pseudovariedad Estratificada de profundidad cero** es una variedad diferenciable con la estratificación dada por las componentes conexas.

- (*Hipótesis Inductiva*) Supongamos que para toda profundidad menor que n aplica la definición de pseudovariiedad estratificada y definamos entonces para la profundidad n .
- Un espacio estratificado (X, S_X) es una ***Pseudovariiedad Estratificada*** si para cada estrato $S \in S_X$, existe una pseudovariiedad estratificada compacta L_S , que depende de S (llamada *Ligadura*) tal que, para cada $x \in S$, existe un entorno U de x en S y una función $\varphi : U \times C(L_S) \longrightarrow X$ que es un embebimiento sobre su imagen abierta que contiene a x .

El par (U, φ) se le denomina *Carta de x Modelada en L_S* .

Ejemplo 3.19. .

- (1) Todo espacio estratificado de profundidad cero es una pseudovariiedad estratificada.
- (2) El espacio $(X, S_X) = \{ \text{Triángulo Relleno} \}$ es una pseudovariiedad estratificada.

Proposición 3.20. *Si M es una variedad diferenciable conexa y X es una pseudovariiedad estratificada entonces; $M \times X$ es una pseudovariiedad estratificada.*

DEMOSTRACIÓN. .

Si la profundidad de X es cero, entonces X es una pseudovariiedad estratificada de profundidad cero.

Si $D(X) > 0$, entonces $D(M \times X) > 0$. Luego $M \times X$ es un espacio estratificado y su estratificación viene dada por

$$S_{M \times X} = \{M \times S / S \in S_X\}$$

donde S_X es la estratificación asociada a X .

Sea $S \in S_X$. Consideremos un estrato de la forma $M \times S \in S_{M \times X}$. Elegimos la ligadura de $M \times S$, $L_{M \times S} = L_S$.

Sea $x \in S$, como X es pseudovariiedad estratificada existe una carta modelada (U, φ) de x en X . Entonces para todo $(m, x) \in M \times X$, los entornos de (m, x) son de la forma $M \times U$; donde U es entorno de x en S y M es entorno de m . Luego el embebimiento estará dado por la aplicación

$$id \times \varphi : M \times U \times C(L_S) \longrightarrow M \times X$$

Por lo tanto el par $(M \times U, id \times \varphi)$ determinan una carta modelada para (m, x) en $M \times X$. $\square$

Proposición 3.21. *Si X es una pseudovarietad estratificada compacta, entonces $C(X)$ es una pseudovarietad estratificada.*

DEMOSTRACIÓN. .

(a) Por la proposición 3.16, $C(X)$ es un espacio estratificado con estratificación

$$S_{C(X)} = \{v\} \cup \{S \times (0, 1) : S \in S_X\}$$

.

(b) (*Escogencia de la ligadura*) Sea $x \in C(X)$.

(1) Si $x = v$, elegimos $U = v$, $L_v = X$ y $\varphi : v \times C(L_v) \longrightarrow C(L)$ definido por $\varphi(v, z) = z \forall z \in L_v$

(2) Si $x \neq v$, entonces $x = (y, t)$, $y \in X$ y $t \in (0, 1)$. Sea S' el estrato de X que contiene a y , entonces existe U' entorno de y en S' y $\varphi' : U' \times C(L_{S'}) \longrightarrow X$ embebimiento. Elegimos $S = S' \times (0, 1)$, $L_S = L_{S'}$ y $U = U' \times (0, 1)$. Entonces

$$(3.13) \quad \varphi : (U' \times (0, 1)) \times C(L_{S'}) \longrightarrow C(X)$$

es la aplicación

$$(3.14) \quad (U' \times (0, 1)) \times C(L_{S'}) \longrightarrow (U' \times C(L_{S'})) \times (0, 1) \xrightarrow{\varphi' \times id} X \times (0, 1) \hookrightarrow C(X)$$

$\square$

Proposición 3.22. *Si X es una pseudovarietad estratificada; entonces todo subconjunto abierto conexo $A \subset X$ es también una pseudovarietad estratificada.*

DEMOSTRACIÓN. .

- Si la profundidad de X es cero; entonces X es una pseudovarietad estratificada de profundidad cero, es decir, un espacio estratificado de profundidad cero.

Si $A \subset X$ es un subconjunto abierto, entonces $D(A) \leq D(X)$, pero como $D(X) = 0$, entonces $D(A) = 0$. Por lo tanto A es un espacio estratificado de profundidad cero, es decir, una pseudovarietad estratificada de profundidad cero.

- Supongamos que X tiene profundidad $n > 0$; y veamos que $A \subset X$ es un espacio estratificado con la estratificación

$$S_A = \{C/C \text{ es C.C de } A \cap S, S \in S_X\}$$

En efecto probaremos que S_A es un estratificación para A .

- (1) Para cada $S \in S_X$; $A \cap S$ es una variedad diferenciable conexa.

Dado que A es abierto conexo en X , para cada $S \in S_X$, $A \cap S$ es abierto en S ; y en consecuencia es una variedad conexa.

- (2) Veamos ahora que S_A es localmente finita; para ello usamos un argumento inductivo sobre la profundidad de X .

Si la profundidad de X es cero, entonces profundidad de A es cero y A es una variedad cuyos estratos son sus componentes conexas; con lo cual la condición de local finitud se satisface automáticamente.

Asumamos cierto para cada L_S y veamos que se satisface para A . Sea $x \in A$, entonces $x \in X$. Consideremos $S \in S_X$ el estrato tal que $x \in S$. Como X es pseudovariedad estratificada, existe L_S pseudovariedad estratificada, U entorno de x y $\varphi : U \times C(L_S) \rightarrow X$ embebimiento.

Sea $W = \varphi(U \times C(L_S))$ y sea U' la componente conexa de $W \cap A$ que contiene a x . Entonces, como φ es isomorfismo estratificado, W tiene un número finito de estratos y por lo tanto, U' tiene un número finito de estratos. Luego S_A es localmente finito.

- (3) (*Propiedad de Incidencia*) Sean $S, S' \in S_X$ y suponemos que $(A \cap S) \cap (\overline{A \cap S'})_A \neq \emptyset$, veamos que $(A \cap S) \subset (\overline{A \cap S'})_A$.

Dado que $\overline{(A \cap S')} = A \cap \overline{(A \cap S')}_X$ y $A \cap \overline{(A \cap S')}_X \subset A \cap \overline{S'}$ obtenemos que $(A \cap S) \cap (A \cap \overline{S'}) \neq \emptyset$ y; como X es espacio estratificado $S \subset \overline{S'}$.

Sea $x \in (A \cap S)$, veamos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $A \cap S'$ que converge a x .

Como $x \in S$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en S' que converge a x . Pero A es abierto y $x \in A$, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{y_n\}$ está contenida en A , de modo que es suficiente tomar $x_n = y_n$.

- (4) Veamos la elección de la ligadura de los estratos. Sea S estrato de X . Elegimos la ligadura de $A \cap S$, $L_{A \cap S} = L_S$. Sea $x \in A \cap S$, por hipótesis existe una carta modelada (U, φ) de x , esto es: un isomorfismo estratificado

$$\varphi : U \times C(L_S) \longrightarrow X$$

tal que $Im\varphi$ es abierto en X y $\varphi(x, v) = x$.

Dado que A es abierto en X , $\varphi^{-1}(A)$ es abierto en $U \times C(L_S)$, luego existe un entorno conexo V de x en $A \cap U$ y un entorno W de U en $C(L_S)$ tal que $V \times W \subset \varphi^{-1}(A) \cap Im\varphi$.

Pero dado que $C(L_S) = \frac{[0,1] \times L_S}{\{0\} \times L_S}$, la imagen inversa de W en $[0, 1] \times L_S$ por la aplicación cociente, contiene un entorno de $\{0\} \times L_S$; y en consecuencia existe $\epsilon > 0$ tal que $[0, \epsilon) \times L_S$ está contenido en dicho entorno, por lo tanto $C_\epsilon(L_S) = \frac{[0, \epsilon) \times L_S}{\{0\} \times L_S} \subset W$. Pero como $C_\epsilon(L_S)$ es isomorfo como espacio estratificado a $C(L_S)$. Luego podemos suponer que

$$V \times C(L_S) \simeq V \times C_\epsilon(L_S) \hookrightarrow V \times W \xrightarrow{\varphi} A \cap Im\varphi$$

que determina una carta modelada de (V, φ_A) de x en A . Asumiendo que S_A es localmente finita tenemos demostrado que A es una pseudovariedad estratificada.

□

3. G- espacios Estratificados

Para esta sección consideraremos G un grupo de Lie compacto, abeliano y conexo, actuando en un espacio estratificado X y estudiaremos la familia de acciones de G la cual preserva los estratos.

Sea (X, S_X) un espacio estratificado, $H \subseteq G$ subgrupo cerrado y una acción efectiva $\phi : G \times X \longrightarrow X$. Entonces X/H es el espacio de H -órbitas de X ; y la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/H$ es la función de órbita.

Definición 3.23. Decimos que X es un *G-Espacio Estratificado* si:

- (1) Para cada estrato $S \in S_X$, todos los puntos de S tienen la misma isotropía, denotada por G_S .

(2) Cada $g \in G$ induce un isomorfismo

$$\phi_g : X \longrightarrow X$$

$\phi_g \in ISO_G(X, S_X)$ donde $ISO_G(X, S_X)$ es la familia de los isomorfismos estratificados en X .

Nótese que el espacio de órbitas X/H hereda una estratificación canónica dada por la familia

$$S_{X/H} = \{\pi(S)/S \in S_X\}$$

Proposición 3.24. $\pi(\overline{S}) = \overline{\pi(S)}$.

DEMOSTRACIÓN. .

- $\pi(\overline{S}) \subset \overline{\pi(S)}$ Sea $x \in \pi(\overline{S})$; entonces existe $g \in H$ tal que $gx \in \overline{S}$.

Luego existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en S que converge a gx . Debemos encontrar una sucesión $\{y_n\}$ en $\pi(S)$ que converge a x . Entonces $g^{-1}x_n \longrightarrow x$. Sea $y_n = \pi(g^{-1}x_n) = \pi(x_n)$; está es la sucesión buscada.

- $\overline{\pi(S)} \subset \pi(\overline{S})$. Es consecuencia directa del teorema 2.13

Luego de (1) y (2) podemos concluir que $\pi(\overline{S}) = \overline{\pi(S)}$. □

Proposición 3.25. $S_{X/H}$ es una estratificación de X/H .

DEMOSTRACIÓN. .

Debemos probar que $S_{X/H}$ satisface la definición de estratificación.

- (1) Sea $S \in S_X$; probaremos que $\pi(S)$ es una variedad diferenciable conexas. Como todos los puntos de S tienen igual H -isotropía; se deduce de resultados obtenidos en [2] que $\pi(S)$ es una variedad diferenciable. Además como π es una aplicación continua y S es conexo, entonces por propiedades topológicas $\pi(S)$ es conexo. Así finalmente $\pi(S)$ es una variedad diferenciable conexas.
- (2) (Propiedad de incidencia). Si $\pi(S) \cap \overline{\pi(S')} \neq \emptyset$, entonces $\pi(S) \cap \pi(\overline{S'}) \neq \emptyset$. Luego existe $x \in S$ y $g \in H$ tal que $gx \in \overline{S'}$. Entonces $gS \subset \overline{S'}$, y por tanto

$$\pi(gS) = \pi(S) \subset \pi(\overline{S'}) = \overline{\pi(S')}$$

Entonces $\pi(S) \subset \overline{\pi(S')}$.

(3) $S_{X/H}$ es localmente finita. Para esto debemos ver que para cada $S \in S_X$ y $x' \in \pi(S)$, existe un entorno V de x tal que $V \cap S_i \neq \emptyset$ solo para $i = 1, \dots, k$.

Sea $x \in S$; como $\pi : X \rightarrow X/H$ es una función abierta, entonces $\pi(U)$ es un entorno abierto para $\pi(x)$ en X/H . Supongamos que U intersecta solo a $S_1, \dots, S_k$; entonces $\pi(U \cap S_i) \neq \emptyset$ solo para $i = 1, \dots, k$.

Luego como para cada $i = 1, \dots, k$, $\pi(U \cap S_i) \subset \pi(U) \cap \pi(S_i)$, entonces $\pi(U) \cap \pi(S_i) \neq \emptyset$ solo para $i = 1, \dots, k$.

Luego de (1), (2) y (3) podemos concluir que $S_{X/H}$ es una estratificación. $\square$

Además de está ultima proposición podemos concluir que $D(X) = D(X/H)$.

Proposición 3.26. *Sea G un grupo de Lie compacto y abeliano. Entonces G posee un número finito de subgrupos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. .

Dado que G es un grupo de Lie compacto y abeliano; por [4] tenemos que $G \simeq T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-veces}}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Basta probar que T^n posee un número finito de subgrupos cerrados y conexos. La prueba la haremos sobre inducción sobre n .

- Para $n = 1$; entonces $T^1 = S^1$. Luego los subgrupos cerrados y conexos de S^1 son $\{e\}$ y S^1 .
- (Hipótesis Inductiva) Supongamos cierto para $n - 1$ y veamos que es cierto para n .
- Basta probar que T^n posee un número finito de subgrupos cerrados y conexos de dimensión $(n - 1)$.

En efecto los subgrupos cerrados y conexos de dimensión $(n - 1)$ de T^n son las n -proyecciones de T^n en T^{n-1} , los $\frac{(n-1)n}{2}$ subgrupos con dos coordenadas en la diagonal, los $\frac{(n-1)n}{2}$ con dos coordenadas en antidiagonal. Lo cual hace un total de n^2 subgrupos cerrados y conexos de dimensión $(n - 1)$.

$\square$

3.1. Partición por tipos de Órbitas. Sea M una G -variedad diferenciable, H un subgrupo cerrado de G y $M_{(H)}$ el conjunto de todos los elementos de M con isotropía H .

La Partición por Tipos de Órbitas de una G -Variedad Diferenciable, S_M , es la unión de los conjuntos $C \subset M_{(H)}$, donde H se mueve sobre la isotropía de los elementos de M . Asumimos para simplificar que cada $M_{(H)}$ es conexo.

Lema 3.27. *Sea $S \in S_M$, $x \in S$ y S_x slice de x en S . Entonces*

$$(GS_x) \cap S \simeq G \times_H \mathbb{R}^i \simeq \frac{G}{H} \times \mathbb{R}^i$$

Teorema 3.28. *Sea M una G -variedad. Para todo H subgrupo de isotropía de algún elemento de M ; $M_{(H)}$ es una variedad.*

DEMOSTRACIÓN. .

Sea $x \in M$, y H la isotropía de x . Sea S_x el slice de x en M , ya que GS_x es abierto en M y la condición es local, basta probar que $(GS_x) \cap M_{(H)}$ es una variedad. Pero ello es inmediato pues

$$(3.15) \quad (GS_x) \cap M_H = (GS_x)_{(H)} \simeq (G \times_H S_x)_{(H)} = (G \times_H \mathbb{R}^i) = \frac{G}{H} \times \mathbb{R}^i$$

□

Teorema 3.29. *S_M es una estratificación de M .*

DEMOSTRACIÓN. .

Supongamos que para cada H subgrupo de isotropía de G , $S = M_{(H)}$ es conexo.

- (1) Por el teorema 3.28; para cada $H \subset G$, $M_{(H)}$ es una variedad diferenciable conexa.
- (2) S_M es localmente finito. Esto es consecuencia inmediata de la proposición 3.26
- (3) (Propiedad de incidencia) Como la condición es local basta probar que para cada $x \in M$, el abierto GS_x satisface la condición de incidencia de los estratos, pero $GS_x \simeq G \times_H S_x \simeq G \times (\mathbb{R}^i \times C(S^q))$; y dado que S^q es un H -espacio estratificado, se sigue de 3.20, 3.21 y 3.24 que GS_x es estratificado y en consecuencia se satisface la condición de incidencia.

□

Proposición 3.30. *Si M es una G -variedad, entonces M es un G -espacio estratificado.*

DEMOSTRACIÓN. .

Debemos verificar que se satisfacen las condiciones de la definición 3.23. Sea $S \in S_M$.

- (1) Todos los puntos de S tienen igual isotropía. Esto se deduce del teorema 3.29.
- (2) Cada $g \in G$ induce un isomorfismo estratificado $\Theta_g : S \longrightarrow S$. Como M es una G -variedad, se deduce de la proposición 2.9 que existe el difeomorfismo

$$\Theta_g|_S : S \longrightarrow S$$

□

Proposición 3.31. *Si X es un G -espacio estratificado y M una variedad diferenciable conexa; entonces $M \times X$ es un G -espacio estratificado con la acción $g(m, x) = (m, gx)$.*

DEMOSTRACIÓN. .

Como $M \times X$ es un espacio estratificado con la estratificación $S_{M \times X} = \{M \times S / S \in S_X\}$; debemos probar que con la acción $g(m, x) = (m, gx)$, $M \times X$ satisface las propiedades de la definición 3.23. Sean $M \times S \in S_{M \times X}$.

- (1) Todos los puntos de $M \times S$ tienen igual isotropía. Para cada $(m, x) \in M \times X$ esto es inmediato pues $G_{(m, x)} = G_x$.
- (2) Cada $g \in G$ induce un isomorfismo estratificado $\Theta_g : M \times S \longrightarrow M \times S$. Como X es un G -espacio estratificado. Entonces para cada $S \in S_X$ y para cada estrato $M \times S \in S_{M \times X}$ el isomorfismo estratificado buscado es $\Theta_g : M \times S \longrightarrow M \times S$ definido por $\Theta_g(m, x) = (m, \Theta_g(x))$.

Luego de 1) y 2) podemos concluir que $M \times X$ es un G -espacio estratificado. □

Proposición 3.32. *Si X es un G -espacio estratificado compacto; entonces $C(X)$ es un G -espacio estratificado, con la acción $g[x, r] = [gx, r]$.*

DEMOSTRACIÓN. .

Como $C(X)$ es un espacio estratificado con la estratificación $S_{C(L)} = \{S \times (0, 1) / S \in S_L\} \cup \{v\}$; debemos probar que con la acción $g(x, r) = (gx, r)$, $C(X)$ satisface las propiedades de la definición 3.23. Sea $S \times (0, 1) \in S_{C(L)}$.

- (1) Todos los puntos de $S \times (0, 1)$ tienen igual isotropía.
 - Para el vértice v , $G_v = G$.
 - Para $S \times (0, 1)$, $G_{S \times (0, 1)} = G_S$.

- (2) Cada $g \in G$ induce un isomorfismo estratificado $\Theta_g : C(X) \longrightarrow C(X)$. Como X es un G -espacio estratificado, entonces para cada $(x, t) \in S \times (0, 1)$ el isomorfismo estratificado buscado es $\Theta_g : S \times (0, 1) \longrightarrow S \times (0, 1)$ definido por $\Theta_g(x, t) = (m, \Theta_g(x))$.

Luego de 1) y 2) podemos concluir que $C(L)$ es un G -espacio estratificado. $\square$

Lema 3.33. *Sea G un grupo de Lie compacto y abeliano. $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Entonces para cada G -espacio estratificado X ; el espacio de órbitas X/H es un G/H -espacio estratificado.*

DEMOSTRACIÓN. .

Denotemos por $\bar{g}$ a las clases de equivalencia de G/H . Si $\Theta : G \times X \longrightarrow X$ es la acción de G en X , está acción induce una acción cociente $\bar{\Theta} : G/H \longrightarrow X/H$ mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\Theta} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H \times X/H & \xrightarrow{\bar{\Theta}} & X/H \end{array}$$

$$\text{Donde } \bar{g}(\pi(x)) = \pi(g(x))$$

Esta acción está bien definida porque G es abeliano. Verifiquemos ahora las condiciones para que X/H sea un G/H -espacio estratificado.

- (i) Para cada estrato $\pi(S) \in S_{X/H}$; los puntos de $\pi(S)$ tienen isotropía constante.

$$\text{Sea } x \in X, \text{ entonces } (G/H)_{\pi(S)} = \pi(G_S) = G_S/H \simeq HG_S/H$$

- (ii) Cada $\bar{g} \in G/H$, induce un isomorfismo estratificado $\bar{\Theta} \in Iso(X/H, S_{X/H})$. Como X es G -espacio estratificado, para cada $g \in G$ existe un isomorfismo $\Theta_g : X \longrightarrow X$. Entonces podemos definir $\bar{\Theta}_g : X/H \longrightarrow X/H$ a través del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\Theta_g} & gS \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \pi(S) & \xrightarrow{\bar{\Theta}_g} & gS \end{array}$$

$$\overline{\Theta}_g(\pi(x)) = \pi(\Theta_g(x)) = \pi(gx)$$

□

4. G -Pseudovarietades Estratificadas

Una **G -Pseudovarietad Estratificada** es básicamente una pseudovarietad estratificada, dotada de una estructura de G -espacio estratificado, cuyo modelo es descrito a través de slices cónicos.

Definición 3.34. Sea (X, S_X) un G -espacio estratificado. Consideremos un estrato singular $S \in S_X$ y $x \in S$. Un ***Slice Cónico*** es un slice S_x , con una parte cónica transversal al estrato S . En otras palabras:

- (1) S_x es un G_S -espacio estratificado.
- (2) Para cada $g \in G$; si $gS_x \cap S_x \neq \emptyset$, entonces $g \in G_S$.
- (3) La aplicación $\alpha : G \times_H S_x \longrightarrow X$ es un embebimiento sobre su imagen abierta GS_x .
- (4) Existe una G_S -equivalencia $\beta : \mathbb{R}^i \times C(L) \longrightarrow S_x$, donde $i \geq 0$ y L un G_S -pseudovarietad estratificada compacta. Aquí la acción de G_S es trivial en $\mathbb{R}^i$.

Proposición 3.35. S_x posee estructura de G_S -espacio estratificado, inducida por la G_S -equivalencia $\beta : \mathbb{R}^i \times C(L) \longrightarrow S_x$.

DEMOSTRACIÓN. .

Por la proposición 3.31, $\mathbb{R}^i \times C(L)$ es un G -espacio estratificado y como la aplicación β es una G -equivalencia, entonces S_x es un G -espacio estratificado. □

Definición 3.36 (**G -Pseudovarietad Estratificada**). Esta definición está hecha por inducción sobre la profundidad del espacio. Sea (X, S_X) un G -espacio estratificado.

- (i) Una **G -Pseudovarietad Estratificada** de profundidad cero es una variedad diferenciable con una acción libre de G .
- (ii) En general, diremos que X es una **G -Pseudovarietad Estratificada** si para cada estrato singular $S \in S_X$, existe una G_S -pseudovarietad estratificada compacta L_S , tal que para cada punto $x \in S$ existe un slice cónico

$$\beta : \mathbb{R}^i \times C(L_S) \longrightarrow S_{(x)}$$

y la aplicación en el producto torcido

$$\alpha : G \times_{G_S} S_{(x)} \longrightarrow X \quad \alpha([g, y]) = gy$$

la cual es un embebimiento equivariante sobre un subconjunto abierto de X .

Diremos que $(S_{(x)}, \beta, L_S)$ es un ***Slice Distinguido*** de x .

Los resultados presentados a continuación son precisamente el objetivo de esta tesis.

Teorema 3.37. *Toda G -variedad con la estratificación por tipos de órbitas es una G -pseudovariedad estratificada.*

DEMOSTRACIÓN. .

Es consecuencia inmediata de 3.29 y 3.30. □

Teorema 3.38. *Toda G -pseudovariedad estratificada X es una pseudovariedad estratificada.*

DEMOSTRACIÓN. .

Si $D(X) = 0$, X es una G -variedad diferenciable con una acción libre y por lo tanto es una pseudovariedad estratificada de profundidad cero.

Supongamos que $D(X) > 0$. Sea $S \in S_X$ y (S_x, β, α) un slice distinguido de x en S . Como el subgrupo de isotropía G_S actúa en G , fijamos un slice S_e de $e \in G$. Luego la composición

$$(S_e \times \mathbb{R}^i) \times C(L_S) \rightarrow S_e \times (\mathbb{R}^i \times C(L_S)) \rightarrow S_e \times S_x \rightarrow S_e \times (G_S \times_{G_S} S_x) \rightarrow (G_S S_e) \times_{G_S} S_x \rightarrow X$$

resulta ser un embebimiento. Veamos que $S_e \times \mathbb{R}^i \simeq S_e G_S (S \cap S_x)$ es un abierto en S que contiene a x .

Dado que S_e es slice de e en G para la acción de G_S , tenemos que $S_e G_S$ es abierto en G y en consecuencia $(S_e G_S) S_x$ es abierto en $G S_x$, el cual es abierto en X y en consecuencia $S_e G_S S_x$ es abierto en X .

Finalmente probaremos que $S_e G_S (S \cap S_x) = S \cap S_e G_S S_x = S \times \mathbb{R}^i$ abierto en S .

$$(3.16) \quad S \cap S_e G_S S_x \simeq S_e G_S (S \cap S_x) \simeq G_S (S \cap (\mathbb{R}^i \times C(S^q))) \simeq G_S (\mathbb{R}^i)$$

Por lo tanto $S_e G_S (S \cap S_x) = S \cap S_e G_S S_x = S \times \mathbb{R}^i$ □

Teorema 3.39. *Sea G un grupo de Lie compacto y abeliano y H un subgrupo cerrado de G . Si X es una G -pseudovarietad estratificada; entonces X/H es una G/H -pseudovarietad estratificada.*

DEMOSTRACIÓN. .

Por la proposición 3.25 tenemos que X/H es un espacio estratificado con estratificación $S_{X/H} = \{\pi(S)/S \in S_X\}$. Más aún por el lema 3.33 X/H es un G/H -espacio estratificado con la acción $\bar{\Theta} : G/H \times X/H \rightarrow X/H$ definida por $\bar{\Theta}([g], [x]) = [gx]$.

Si $D(X) = 0$; entonces $D(X/H) = 0$. Luego X/H es un espacio estratificado de profundidad cero; es decir, una variedad diferenciable con una acción libre.

Supongamos que $D(X) > 0$, entonces $D(X/H) > 0$. Sean $S \in S_X$, $x \in S$ y (S_x, β, L_S) un slice distinguido de x . Construyamos ahora un slice distinguido para $\pi(x)$ en X/H .

- (1) Sea S_x un slice de x en S . Veamos que $\pi(S_x)$ es un slice de $\pi(x)$ en $\pi(S)$.
 - (a) Como π es una aplicación continua abierta y cerrada, entonces $\pi(x) \in \pi(S_x)$.
 - (b) $\pi(S_x)$ es un $(G/H)_{\pi(x)}$ -espacio: Como S_x es un G_S -espacio este induce una acción en el cociente S_x/H a través de la restricción de $\bar{\Theta}$. Luego como G_x actúa en S_x y $(G/H)_{\pi(x)} = \frac{G_x}{H} = \frac{HG_x}{H}$, entonces $(G/H)_{\pi(x)}$ actúa en S_x/H .
 - (c) $\bar{\alpha} : G/H \times_{(G/H)_{\pi(x)}} \pi(S_x) \rightarrow X/H$ es un embebimiento: Como S_x es un slice de x en S ; existe el embebimiento $\alpha : G \times_{G_S} S_x \rightarrow X$.

Esta aplicación α induce una aplicación en el espacio cociente X/H determinada a través del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times_{G_S} S_x & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 G/H \times_{\frac{HG_S}{H}} \pi(S_x) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & X/H
 \end{array}$$

Donde $\bar{\alpha}(\overline{[h, y]}) = \pi_2(hy)$. Veamos que esta aplicación está bien definida.

Si $\pi_1([h_1, y_1]) = \pi_2([h_2, y_2])$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{[h_1, y_1]} = \overline{[h_2, y_2]} &\Leftrightarrow \exists h_3 \in \frac{HG}{H} \text{ tal que } [h_1, y_1] = [h_3 h_2, y_2] \\
&\Leftrightarrow \exists h' \in G_S \text{ tal que } (h_1, y_1) = (h_3 h_2 h'^{-1}, h' y_2) \\
&\Leftrightarrow h_1 y_1 = h_3 h_2 y_2 \\
&\Leftrightarrow y_1 = h_1^{-1} h_3 h_2 y_2 \\
&\Leftrightarrow [y_2] = [y_1]
\end{aligned}$$

(2) Escogencia de la ligadura de $\pi(S)$. Sea L_S la ligadura de S en X . Escogemos la ligadura de $\pi(S)$, $L_{\pi(S)} = \pi(L_S)$. Luego la aplicación $\beta : \mathbb{R}^i \times C(L_S) \rightarrow S_x$ induce una aplicación en el espacio cociente determinada por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^i \times C(L_S) & \xrightarrow{\beta} & S_x \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
\mathbb{R}^i \times C(L_S/H) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & S_x/H
\end{array}$$

Donde $\bar{\beta}(b, [\bar{p}, r]) = \pi(\beta(b, [p, r]))$. Veamos que en efecto esta aplicación está bien definida.

Si $\bar{\beta}(b_1, [\bar{p}_1, r_1]) = \bar{\beta}(b_2, [\bar{p}_2, r_2])$; entonces

$$\begin{aligned}
\pi_2(b_1, [p_1, r_1]) = \pi_2(b_2, [p_2, r_2]) &\Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } (b_1, [p_1, r_1]) = (b_2, [hp_2, r_2]) \\
&\Leftrightarrow b_1 = b_2 \text{ y } [p_1, r_1] = [hp_2, r_2] \\
&\Leftrightarrow r_2 = r_1 \text{ ó } (p_1, r_1) = (hp_2, r_2) \\
&\Leftrightarrow p_1 = hp_2 \\
&\Leftrightarrow [p_1] = [p_2]
\end{aligned}$$

(3) La aplicación inducida $\bar{\alpha} : (G/H) \times_{HG_S/H} \pi(S_x) \rightarrow X/H$ es un embebimiento. Definimos $\bar{\alpha}$ está definida de la siguiente manera: $\bar{\alpha}([\bar{g}, \pi(z)]) = \cdot \pi_2(gz)$. Luego como $\bar{\alpha}$ es un homeomorfismo, α es un embebimiento y π_2 es una aplicación abierta, entonces $\bar{\alpha}$ es un embebimiento.

Entonces la terna $(\pi(S_x), \bar{\beta}, \bar{\alpha})$ será una carta modelada para $\pi(x)$ en $\pi(S)$. $\square$

Bibliografía

- [1] DALMAGRO, F. *Equivariant Unfolding of G -stratified Pseudomanifolds*. Extracta mathematicae ,Vol. 19. (2004). 4, 5, 10
- [2] GUARDIA, T. *Acciones de Grupos de Lie en Variedades*. (Trabajo Espacial de Grado). U.C.V. Facultad de Ciencias. Caracas. (2002). 1, 5, 7, 10, 11, 14, 16, 19, 21, 24, 25, 31, 44
- [3] OLLARVES, A. *Sobre la Cohomología de De Rham del n -Toro*. (Trabajo Espacial de Grado). U.C.V. Facultad de Ciencias. Caracas. (2006). 5, 10, 11, 13
- [4] BREDON, G. *Introduction to Compact Transformations Groups*. Pure and Applied Mathematics **vol.46**. Academic Press. New York. (1972). 45
- [5] DUGUNDJI, J. *Topology*. Allyn and Bacon. Boston MA. (1974). 4, 5, 10
- [6] KELLEY, J. General Topology. *Springer- Verlag*. New York.
- [7] LIPSCHUTZ, S. *Topología General*. Series Schaum, Mac Graw-Hill Book Company. México. (1970).
- [8] I.M, SINGER & THORPE, J.A. *Lectures Notes on Elementary Topology and Geometry*. Scott Foresman and Company. Glenview IL. (1967). 7, 11, 15, 30
- [9] AUSLANDER, L & MACKENZIE, R. *Introduction to Differentiable Manifold*. McGraw-Hill Book Company. New York.
- [10] WARNER, F. *Foundations of Differentiable Manifold and Lie Group*. Springer- Verlag. New York. 17, 25
- [11] GREUB, W; HALPERIN, S; VANSTONE, R. *Conexions, Curvature and Cohomology*. Academic Press. London.(1976).
- [12] BOOTHBY, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press Inc. Orlando FL. (1986).