



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Análisis Espectral al Registro de Alturas de Olas y Aplicaciones al Caribe del Sur

Trabajo Especial de Grado presentado ante
la ilustre Universidad Central de Venezuela
por la **Br. Alexandra D. Niño S.** para
optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutores: Dr. José León

Co-tutora: Dra. Mairene Colina

Caracas, Venezuela

Julio 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado **”Análisis Espectral al Registro de Alturas de Olas y Aplicaciones al Caribe del Sur”**, presentado por la **Br. Alexandra D. Niño Salavarría**, titular de la Cédula de Identidad **17.459.290**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Tutor

Dr. José León

Cotutora

Dra. Mairene Colina

Jurado

MSc. José B. Hernández

Dedicado a:

Mi abuelo, Jesús Salavarría y mi madre, Zulay Salavarría, quienes han sido padres ejemplares y me han brindado el mas grande amor que he podido conocer.

Agradecimientos

En primer lugar, debo agradecer a Dios por permitirme existir hoy en día y vivir la alegría de haber alcanzado una de las metas más importantes que me he planteado. A mi madre, mujer luchadora, por enseñarme a seguir adelante aunque tropezara, a levantarme aunque cayera. Gracias a ella soy quien soy hoy en día. A mi abuelo, por ser más que mi abuelo, mi papá, por brindarme un amor inmenso y mantener entre nosotros el calor de una familia unida. A mi padre, Alfonso Niño por haber sido parte de mi formación como persona y por inculcarme buenos valores. A mis hermanas, Beatriz y Yaritza, porque son mujeres ejemplares y siempre han sido mi ejemplo a seguir. A mi hermanito Alfonso, por brindarme su cariño incondicional día a día, y por ser la alegría que nos impulsa a seguir hacia adelante a mi y a mi familia. Igualmente, agradezco a mi cuñado Jonathan Osman por el entusiasmo que siempre tuvo para darme y por su valiosa ayuda, siempre que estuvo a su alcance. A mis amigas de siempre Nakarid, Mariell, Johana y Carolina por permitirme contar con ellas en las buenas y en las malas y porque son ejemplo de una verdadera amistad; también debo agradecer a mi amigo de toda la vida Tito por haber estado siempre ahí y por hacer de nuestra amistad una de las cosas más especiales que guardo. A mi novio, Alejandro Possamai por brindarme su apoyo estos últimos meses y por hacer siempre lo posible para hacerme sentir bien. A Miguel Márquez y a mis amigos Nela, Leonardo, Gari y Marwill porque son parte de la alegría de haber hecho de la Facultad de Ciencias un hogar durante estos últimos 5 años, y a mi amiga Lilymar por brindarme su confianza y hacer de cada momento que compartimos juntas algo tan especial. Debo agradecer también a Manuel Alejandro González, excelente compañero y matemático, porque siempre estuvo dispuesto a brindarme su ayuda y su apoyo, y porque en él encontré gran refugio durante los últimos semestres de carrera en esta facultad.

Muy especialmente, quiero agradecer a mis tutores José R. León y Mairene Colina, excelentes mentores, por haber confiado en mi capacidad como estudiante, como persona, y por haber hecho de la culminación de mi carrera una agradable experiencia. Al profesor José B. Hernández y a Hugo Villarroel por haber estado siempre dispuestos a brindarme su ayuda durante el desarrollo de mi Trabajo Especial de Grado. Así mismo, debo agradecer a todas aquellas personas que influyeron en mi formación como profesional.

Contenido

Introducción	1
1 Procesos Estocásticos	5
1.1 Procesos Gaussianos	7
1.2 Procesos Estacionarios	8
1.2.1 Estimación de μ , $\gamma(\cdot)$ y $\rho(\cdot)$	10
1.3 Representación Espectral de la ACVF	11
1.3.1 Teorema de Bochner-Khintchine	13
1.3.2 El Periodograma	14
1.3.3 Procesos Ergódicos	14
2 Modelado de la superficie del Mar y sus Características	16
2.1 Las Olas y sus Características	18
2.1.1 Parámetros Asociados a la Densidad Espectral	18
2.1.2 Características Basadas en cruces del Nivel Medio y Extremos Sucesivos	20
2.1.3 Cruces y Máximos Locales	22
2.1.4 Fórmula de Rice	24
3 Aplicación del Análisis Espectral al Registro de Alturas de Olas en el Caribe del Sur	27
3.1 Análisis de Comportamiento para Olas Altas y Olas Bajas	30
3.2 Estimación de Espectro Haciendo Uso del Periodograma	36
3.3 Estimación de Densidad de Probabilidad de Valores Extremos	37
3.4 Lenguaje Matlab	41
4 Conclusiones	53

Introducción



La masa de las aguas que cubren las depresiones de la corteza terrestre forma mares y océanos, que ocupan siete de cada diez partes de la superficie del planeta. Junto con los ríos y lagos forma lo que llamamos hidrósfera. El hombre realiza estudios científicos sistemáticos sobre el medio marino y sus recursos para comprender al océano como parte del mundo y para utilizarlo inteligentemente en beneficio propio. Para ello se auxilia de ciencias exactas y naturales. El oleaje es uno de los fenómenos que se presentan en la superficie del mar que ha atraído la atención de observadores e investigadores de las ciencias naturales. La influencia del oleaje en los mecanismos que regulan el intercambio entre el océano y la atmósfera, establece la necesidad de entender mejor los procesos que intervienen en la generación, el desarrollo y la propagación de las olas.

Las olas no sólo presentan movimiento en la superficie del mar, sino que cada una de ellas está dotada de un desplazamiento interno, en virtud del cual las partículas de agua que la forman describen un círculo y, debido a esto, el transporte de energía por la ola afecta igualmente a la superficie

y a otras capas más profundas.

La altura, el período y los extremos de las olas del mar, son elementos indispensables para poder diseñar construcciones marítimas confiables: plataformas costa afuera (para la extracción del petróleo del subsuelo del mar), puertos, dársenas, rompeolas.

Estos estudios también son útiles para elaborar cartas de navegación, según la estación y el tipo de viento. Por último la energía de las olas, la cual se describe por medio de los parámetros antes citados, permite concebir y poner en marcha máquinas generadoras de electricidad o de otras formas de energía, permitiendo así la generación de energía renovable. Otros estudios más específicos, como la construcción de modelos de Tsunamis, permiten prevenir los desastres provocados por las inundaciones.

Durante los últimos 15 años, han sido desarrollados importantes estudios con respecto al comportamiento de la superficie del mar, muchos de ellos concentrados, particularmente, en el oleaje. Importantes trabajos han demostrado que en el estudio de las olas el espectro juega un papel fundamental, debido a que éste da un promedio del estado marítimo y se interpreta, como es usual, como la distribución de la energía por frecuencia. Es por ello que en este trabajo de investigación se presenta una revisión de algunas técnicas clásicas para estudiar el estado del mar usando parámetros que pueden obtenerse a partir del espectro de energía de la ola.

La idea fundamental es modelar la superficie del mar como una "superficie aleatoria" que evoluciona en el tiempo; es decir, como un proceso $X(t, x, \omega)$ que depende de la posición en el espacio x , del tiempo t y, por supuesto, de un parámetro aleatorio ω , que pertenece a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Es aquí donde entra en juego una de las ramas ampliamente desarrollada de la probabilidad, con aplicaciones importantes dentro y fuera de la matemática, la teoría de los procesos estocásticos. Se entiende por proceso estocástico a una familia $(X_t; t \in T) = (X_t(\omega); t \in T, \omega \in \Omega)$ de variables aleatorias definidas sobre un espacio Ω .

La mayoría de los datos estadísticos sobre la altura del mar se obtienen de boyas, barcos o platafor-

mas estacionarias, o bien de observaciones satelitales. Este trabajo está concentrado en los modelos más sencillos, que corresponden a la primera situación, en la cual la información que se obtiene es la evolución a lo largo del tiempo de la ola en un punto fijo x del espacio.

Específicamente, el estudio está enfocado a los datos de una boya ubicada en el Caribe sur, muy cerca de la costa de Venezuela. Esta es la única boya con datos abiertos que se encuentra cerca de las playas venezolanas. Al conocer sus propiedades y la estimación de su comportamiento podemos inferir acerca del comportamiento del mar venezolano. La intención es realizar un análisis espectral a los registros de alturas de olas provenientes de la boya antes mencionada y trabajar con los parámetros obtenidos a partir del espectro estimado con el fin de hacer algunas inferencias y predicciones sobre el posible comportamiento del mar en ese punto, basadas en los valores extremos de las olas.

En el primer capítulo del presente trabajo de investigación, se desarrolla una introducción a la teoría básica de procesos estocásticos. Muy particularmente, nos referimos a una clase de procesos que poseen propiedades que no varían con el tiempo, los procesos estacionarios, y a sus propiedades. También se verá un importante resultado del análisis espectral, el teorema de Bochner - Khintchine. El segundo capítulo está enfocado en el estudio del modelado de la superficie del mar, haciendo uso de modelos aleatorios, y de sus características.

Finalmente, en el tercer capítulo, será aplicada la teoría del análisis espectral a los registros de alturas de olas obtenidos por medio de la boya 431 ubicada en el mar Caribe Sur, haciendo uso del paquete MATLAB y la herramienta WAFO (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography), lo cual no es más que un toolbox de Matlab, elaborado en la universidad de Lund de Suecia, para análisis estadísticos y simulación de olas al azar y cargas aleatorias.

Capítulo 1

Procesos Estocásticos

En la vida diaria, muchas veces interesa conocer el comportamiento futuro de procesos que se desarrollan a lo largo del tiempo, para así hacer predicciones con respecto a éstos.

Siempre que se estudia el comportamiento de una variable aleatoria a lo largo del tiempo, se está en presencia de un proceso estocástico.

En general, se trabaja con procesos estocásticos siempre que el interés sea ajustar un modelo teórico que permita hacer predicciones acerca del comportamiento futuro de un proceso.

Dentro de los procesos estocásticos, existe una clase de procesos que poseen propiedades que no varían con el tiempo, dichos procesos son llamados procesos estacionarios y juegan un papel importante en el estudio de muchos fenómenos que pueden ser modelados como un proceso al azar. Es de dichos procesos y de sus propiedades de lo que trata el presente capítulo. Comenzaremos por definir lo que es un vector aleatorio.

Definición 1.1 Un *vector aleatorio* es un vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ donde para cada n , X_n es una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y se interpreta $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ como una función medible.

Definición 1.2 Sea T un conjunto de índices. Un *proceso estocástico* X es una colección de variables aleatorias $(X_t ; t \in T) = (X_t(\omega) ; t \in T, \omega \in \Omega)$ definidas sobre un espacio de probabilidad Ω .

El índice t generalmente es un parámetro que indica tiempo; por lo tanto, un proceso estocástico es una función de dos variables:

- Para un instante fijo de tiempo t , es una variable aleatoria,

$$X_t = X_t(\omega) ; \omega \in \Omega .$$

- Para un parámetro aleatorio fijo ω , es una función del tiempo,

$$X_t = X_t(\omega) ; t \in T .$$

A esta función se le llama realización o trayectoria del proceso X .

Si el conjunto T es finito o infinito numerable, entonces se dice que el proceso es un *proceso a tiempo discreto*. Si es un conjunto infinito no numerable, entonces se dice que el proceso es un *proceso a tiempo continuo*. La figura (1.1) muestra un ejemplo de proceso estocástico, donde cada color corresponde a una trayectoria del mismo.

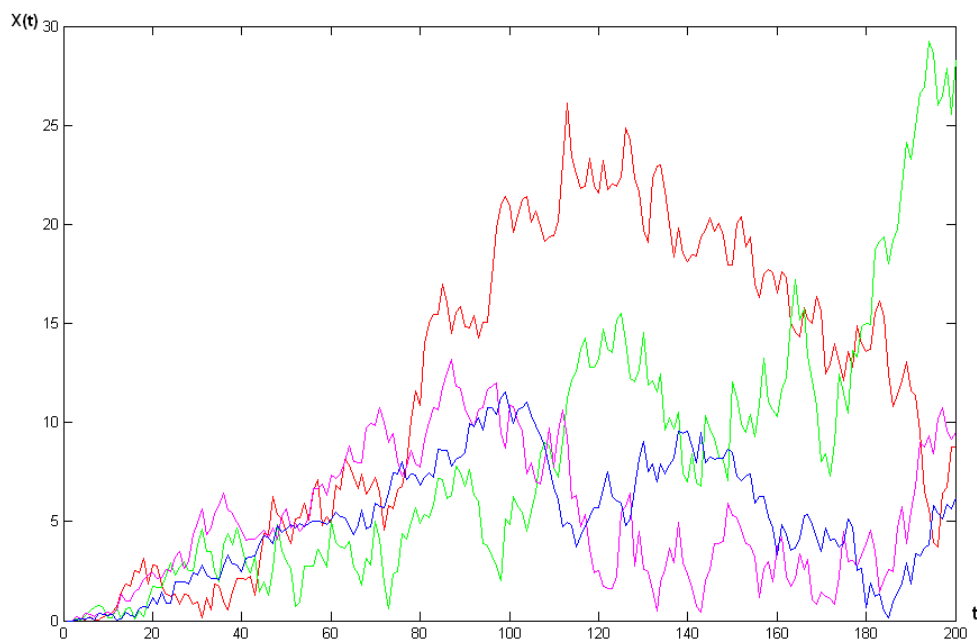


Figura 1.1:Proceso Estocástico

Distribuciones Finito - Dimensionales

Las *distribuciones finito-dimensionales* del proceso estocástico X son las distribuciones de los vectores finito-dimensionales $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$; $t_1, \dots, t_n \in T$ y para todo $n \geq 1$. Es decir, la familia de funciones de distribución

$$F_n(a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = P(x_{t_1} \leq a_1, \dots, x_{t_n} \leq a_n) ;$$

$$n \geq 1, t_j \in T.$$

Tales distribuciones determinan la distribución de X . En este sentido, nos referimos a la colección de las distribuciones finito-dimensionales como la distribución del proceso estocástico.

Definición 1.3 Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico con $EX_t^2 < \infty$. La *función de media* de $\{X_t\}$ es

$$\mu_x(t) = E(X_t) ,$$

para todo $t \in T$.

La *función de covarianza* de $\{X_t\}$ es

$$\gamma_x(t, s) = Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_x(t))(X_s - \mu_x(s))] ,$$

para todo $t, s \in T$.

La *función de varianza* de $\{X_t\}$ es

$$\sigma_x^2(t) = \gamma_x(t, t) = Var(X_t) ,$$

para todo $t \in T$.

1.1 Procesos Gaussianos

Un proceso estocástico se dice **Gaussiano** si para cada selección $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ el vector aleatorio $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in \mathbb{R}^k$ tiene distribución normal k -variada; es decir, que existe un vector μ_k

$\in \mathbb{R}^k$ y una matriz definida no-negativa $\Sigma_k = (\gamma_x(i, j)) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tales que

$$P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k] = \frac{1}{(2\pi|\Sigma_k|)^{k/2}} \int_{A_1} \dots \int_{A_k} \exp\{-(x - \mu_k)\Sigma_k^{-1}(x - \mu)^t\} dx ;$$

donde

$$x = (x_1, \dots, x_k)^t \in \mathbb{R}^k ,$$

es un vector columna, y,

$$\mu_k = (E[X_{t_1}], \dots, E[X_{t_k}]) .$$

1.2 Procesos Estacionarios

Definición 1.4 El proceso $\{X_t\}$ es (*débilmente*) **estacionario** si

1. $\mu_x(t)$ es independiente de t .
2. $\gamma_x(t+h, t)$ es independiente de t para cada $h \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.5 El proceso $\{X_t\}$ es *estrictamente estacionario* si los vectores aleatorios $(X_1, \dots, X_n)$ y $(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})$ tienen la misma función de distribución conjunta para todo $h \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 1$.

Si un proceso es estrictamente estacionario, cumple las siguientes propiedades:

1. Las variables X_t son idénticamente distribuidas.
2. $(X_t, X_{t+h}) =^d (X_1, X_{1+h})$; para todo $t \in T, h \in \mathbb{Z}$.
3. Si (2) se verifica $\{X_t\}$ es débilmente estacionario si $E[X_t^2] < \infty$.
4. Todo proceso independiente idénticamente distribuido (**iid**) es estrictamente estacionario.

Debido a que un proceso Gaussiano está completamente descrito una vez que se conoce su función de media y su función de covarianza, si éste es débilmente estacionario, entonces es estrictamente estacionario.

En lo que sigue, se asume que un *proceso estacionario*, $\{X_t\}$, es aquel que cumple:

1. $E[X_t] = \mu$; para todo $t \in T$.
2. $E[X_t^2 - \mu] = \sigma^2$; para todo $t \in T$.

De las dos propiedades anteriores se deduce que

$$\begin{aligned}
 \gamma_x(t+h, s+h) &= E[(X_{t+h} - \mu)(X_{s+h} - \mu)] \\
 &= E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] \\
 &= \gamma_x(t, s) .
 \end{aligned}$$

De aquí, se concluye que la función de covarianza de un proceso estacionario es una función que depende de un solo parámetro, el cual vendría siendo el valor de la magnitud de la traslación del vector. Esto es, la función $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$\gamma(|s - t|) = \gamma_x(s, t) .$$

En efecto, sean $\gamma(s) = \gamma_x(s, 0)$ y $s \geq t$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \gamma_x(s, t) &= E[(X_s - \mu)(X_t - \mu)] \\
 &= E[(X_{t+(s-t)} - \mu)(X_{0+t} - \mu)] \\
 &= E[(X_{0+t+(s-t)} - \mu)(X_{0+t} - \mu)] \\
 &= E[(X_{0+(s-t)} - \mu)(X_0 - \mu)] \\
 &= E[(X_{s-t} - \mu)(X_0 - \mu)] \\
 &= \gamma_x(s-t, 0) \\
 &= \gamma(s-t) .
 \end{aligned}$$

Si $s = t$ entonces $\gamma_x(t, t) = \gamma(0)$, pero

$$\gamma_x(t, t) = E[(X_t - \mu)^2] = Var(X_t) ,$$

entonces, $Var(X_t) = \gamma(0)$.

Como fue mencionado anteriormente, un proceso Gaussiano está determinado por su función de media y su función de covarianza; por lo tanto, un proceso Gaussiano es estacionario si cumple con las propiedades anteriores. Es en este tipo de procesos en los que se enfoca el estudio desarrollado en el presente trabajo.

Definición 1.6 Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico estacionario. La *función de autocovarianza* (ACVF) de $\{X_t\}$ es

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) .$$

La *función de autocorrelación* (ACF) de $\{X_t\}$ es

$$C(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \text{Cor}(X_{t+h}, X_t) .$$

Propiedades de la ACVF:

Para todo $t \in T$ se tiene,

1. $\gamma(0) > 0$.
2. $\gamma(-t) = \gamma(t)$.
3. $|\gamma(t)| \leq \gamma(0)$.
4. $\gamma(t)$ es definida positiva ; es decir, para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \dots, t_n \in T$,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(t_j - t_k) \geq 0 .$$

1.2.1 Estimación de μ , $\gamma(\cdot)$ y $\rho(\cdot)$

Un problema importante de la inferencia estadística es la estimación de parámetros de los datos. Un estimador, es un estadístico (esto es, una función de la muestra) usado para estimar un parámetro desconocido de la población. El valor de un estimador proporciona lo que se denomina en estadística una estimación puntual del valor del parámetro en estudio.

El estimador de la media, μ , de un proceso estacionario es la *media empírica*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t .$$

Éste es un estimador insesgado de μ puesto que

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} (EX_1 + \dots + EX_n) = \mu .$$

El *error cuadrático medio* de la media empírica viene dado por

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n - \mu)^2 &= \text{Var}(\bar{X}_n) \\ &= n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= n^{-2} \sum_{i-j=1}^n (n - |i - j|) \gamma(i - j) \\ &= n^{-1} \sum_{h=-n}^n \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h) . \end{aligned}$$

Haciendo tender n a infinito se demuestra que $E(\bar{X}_n - \mu)^2 \rightarrow 0$, siempre que

$$\sum_{h=1}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty .$$

La *función de autocovarianza empírica* (SACVF) es

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (X_{t+|h|} - \bar{X})(X_t - \bar{X}) \quad ; \quad -n < h < n . \quad (1.2.1)$$

La *función de autocorrelación empírica* (SACF) es

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \quad ; \quad -n < h < n . \quad (1.2.2)$$

1.3 Representación Espectral de la ACVF

Las técnicas de análisis estocástico se dividen en dos tipos: las basadas en el dominio del tiempo y las que se basan en el dominio de la frecuencia.

La modelización de los procesos estocásticos en el dominio del tiempo se apoyan en el cálculo de los coeficientes de autocovarianza y autocorrelación, que se expresan en función de la diferencia de tiempo entre observaciones estudiadas.

El *análisis espectral*, ofrece un procedimiento de análisis espacial diferente. La aplicación de este tipo de análisis permite la modelización espacial de la distribución de la variable por medio de una función llamada *densidad espectral*, la cual especifica la descomposición en frecuencias de la función de autocovarianza.

En 1934, el matemático ruso Khintchine desarrolló la teoría de correlación para procesos estacionarios y débilmente estacionarios. Dicho desarrollo fue uno de los trabajos pioneros de la teoría moderna de los procesos estocásticos. Más adelante, dicha teoría fue generalizada por Wiener.

Antes de enunciar uno de los resultados dados por Khintchine, el cual permite la representación espectral de la función de autocovarianza de procesos estacionarios y es de gran utilidad para el estudio de dichos procesos en el dominio de frecuencia, presentamos la siguiente definición:

Definición 1.7 Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico estacionario a tiempo continuo, de media cero con función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. La *densidad espectral* de $\{X_t\}$ es la función $f(\cdot)$ dada por,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda h} \gamma(h) dh ;$$

donde $e^{i\lambda} = \cos(\lambda) + i \sin(\lambda)$ e $i = \sqrt{-1}$.

Como las funciones coseno y seno tienen período 2π , entonces también lo tiene f ; por lo tanto basta con limitarse a la atención de f con valores en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

Propiedades básicas de f :

1. f es par; es decir, $f(\lambda) = f(-\lambda)$.
2. $f(\lambda) \geq 0$; para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$.
3. $\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda) f(\lambda) d(\lambda)$.

1.3.1 Teorema de Bochner-Khintchine

Considérese un proceso estocástico estacionario $\{X_t\}$ real de media cero y ACVF $\gamma(h)$ continua para todo h . Supóngase también, $\gamma(0) = 1$.

Teorema 1.3.1 (Bochner-Khintchine) *Una función continua, $\gamma(h)$ es positiva definida si y sólo si puede ser escrita de la forma*

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda h} dF(\lambda) ; \quad (1.3.1)$$

donde $F(\gamma)$ es una función real, no decreciente y acotada.

La función $F(\lambda)$ es llamada función de distribución espectral del proceso X_t .

Si $\gamma(0) \neq 1$, entonces

$$\rho(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda h} dG(\lambda).$$

donde $G(\lambda) = F(\lambda)/\gamma(0)$. (Una demostración del teorema anterior se encuentra en [7])

La teoría de Wiener engloba la teoría establecida para procesos estacionarios. Wiener estableció la existencia de una función de distribución F tal que (1.3.1) se satisface, y resultados análogos valen a partir de ahí.

Para expresar el teorema anterior en el caso de procesos tenemos el corolario siguiente:

Corolario 1.3.1 La función γ es la función de covarianza de un proceso Gaussiano estacionario si es positiva definida y existe una medida espectral G tal que

$$\gamma(h) = \int e^{-ih\lambda} G(d\lambda).$$

Es muy sencillo ver que, la función γ del corolario (1.3.1) es definida positiva pues,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \gamma(t_i - t_j) = E \left[\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \right]^2 \geq 0 .$$

Una demostración completa de este corolario puede encontrarse en ???.

1.3.2 El Periodograma

Si $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ y densidad espectral $f(\cdot)$, entonces al igual que la función de autocovarianza empírica de las observaciones, $\{x_1, \dots, x_n\}$, puede considerarse como una muestra análoga de $f(\cdot)$, también el periodograma $I_n(\cdot)$ de las observaciones, $\{x_1, \dots, x_n\}$, puede considerarse una muestra análoga de $2\pi f(\cdot)$.

Sea

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{n} \quad ; \quad k = -\left[\frac{n-1}{2}\right], \dots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Al conjunto F_n de esos valores se les conoce como *frecuencias de Fourier* asociadas con muestra de tamaño n . F_n es un subconjunto del intervalo $(-\pi, \pi]$.

Definición 1.8 El *periodograma* de $\{x_1, \dots, x_n\}$ es la función,

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-it\lambda} \right|^2,$$

donde,

$$x_t = \sum_{k=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} a_k [\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t)] \quad ; \quad t = 1, \dots, n. \quad (1.3.2)$$

Si λ es una de las frecuencias de Fourier, ω_k , entonces $I_n(\omega_k) = |a_k|^2$.

1.3.3 Procesos Ergódicos

Definición 1.9 Un proceso estacionario se dice *ergódico en relación a la media* si cuando $t \rightarrow 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \longrightarrow E[X(t)] \quad ; \quad t \in T,$$

y se dice *ergódico en relación a la ACVF* si cuando $t \rightarrow 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t X(u+h)X(u) du \longrightarrow \gamma(h) \quad ; \quad t \in T, h \in \mathbb{Z}.$$

En particular, un proceso es ergódico respecto a la media y la ACVF cuando la independencia entre las variables aleatorias $X(t)$ y $X(t+h)$ se torna progresivamente menor a medida que $h \rightarrow \infty$.

Capítulo 2

Modelado de la superficie del Mar y sus Características

La superficie del mar puede ser modelada como un proceso aleatorio M que depende de la posición en el espacio, x , del tiempo, t , y de un parámetro aleatorio, ω ; es decir, la superficie del mar puede ser vista como un proceso estocástico. En función de que el modelo sea manejable para su estudio, el proceso se supone:

- Estacionario

Esta hipótesis solo se cumple parcialmente, debido a que las condiciones del mar cambian con el tiempo y junto con ellas, los parámetros de la altura de las olas. Sin embargo, si se trabaja sobre un intervalo de tiempo suficientemente grande de condiciones meteorológicas estables, es posible suponer que la distribución de las olas en un punto específico no cambia con el tiempo.

- Centrado

Se considera que el nivel medio del mar es cero ($EM_t = 0$) y se miden las variaciones con respecto a él.

- Con trayectorias continuas

Esto quiere decir que, si se fija $\omega \in \Omega$ la función

$$M(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

es continua para casi todo $\omega \in \Omega$.

- Ergódico
- Gaussiano

En lo presente, el estudio está concentrado en las trayectorias del proceso antes mencionado; es decir se fija un punto, x , del espacio, y la información que se obtiene es al evolución de la ola a lo largo del tiempo. Sea $M(t)$ la altura del nivel del mar en el instante de tiempo t , en el punto x .

En el estudio de las olas el espectro se interpreta, como es usual, como la distribución de energía por frecuencia. Obsérvese que, como se vió en el capítulo 1, $Var(M_t) = \gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda)$, de modo que la varianza del proceso representa la energía total, por lo tanto si se conoce la densidad espectral, es posible hacer predicciones respecto a las alturas de la ola.

Para estudiar los espectros lo usual es utilizar densidades espectrales típicas que dependen de algunos parámetros que deben ser estimados en cada caso. Los dos tipos de espectro más comunes son el espectro de Pierson-Moskowitz y el espectro JONSWAP.

En esta investigación sólo se hizo uso del espectro JONSWAP. Tal espectro viene dado por

$$S(\omega, \theta) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[\frac{-5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right] \varphi^\delta \frac{2^{2s-1}}{\pi} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) ; \quad (2.0.1)$$

donde $-\pi < \theta < \pi$; $s > 0$; $\delta = \exp \left[-\frac{\omega - \omega_p}{\sqrt{2}\sigma_0\omega_p} \right]$; ω es la frecuencia angular; g es la constante gravitacional; $\cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right)$ es una función de propagación; $\alpha = 0,076 \left(\frac{gM}{\sigma_r} \right)$ es un factor de normalización; $\varphi \simeq 3,3$ y $\sigma_0 = 0,07$ si $\omega \leq \omega_p$ o $\sigma_0 = 0,09$ si $\omega > \omega_p$. El espectro JONSWAP es calculado automáticamente por WAFO haciendo uso del comando *jonswap*.

2.1 Las Olas y sus Características

Las olas son ondulaciones de la superficie del agua las cuales son originadas principalmente debido a la fricción del viento contra la superficie del agua. Dichas ondulaciones presentan la siguiente anatomía:

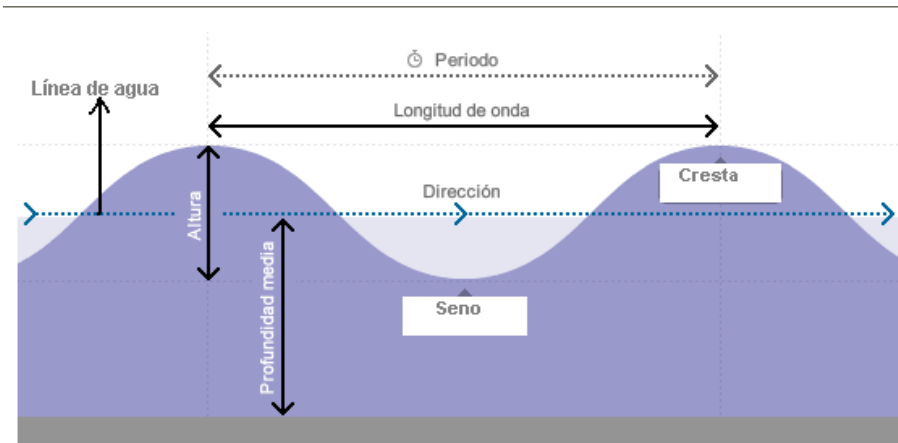


Figura 2.1: Anatomía de las olas

- Línea de agua: nivel de la superficie del mar.
- Dirección: dirección en la que se mueve la ola.
- Profundidad Media: distancia desde el fondo del agua hasta la línea de agua.
- Cresta: punto más alto de la ola medido desde la línea de agua.
- Seno: punto más bajo de la ola medido desde la línea de agua.
- Altura: distancia vertical entre el punto más alto de la cresta y el más bajo del seno.
- Longitud de Onda: distancia horizontal distancia que separa dos crestas o dos senos consecutivos.
- Período: tiempo que transcurre entre el paso de dos crestas o dos senos consecutivos por un mismo punto.

2.1.1 Parámetros Asociados a la Densidad Espectral

Es muy importante conocer y comprender el significado de algunas de las características mas relevantes del movimiento de las olas para su estudio.

Algunas de las principales características corresponden a parámetros asociados a la densidad espectral, como las descritas a continuación:

- Momentos espectrales de orden n

Su existencia está asociada a la regularidad de las trayectorias del movimiento de la ola y vienen dados por

$$m_n = \int_0^\infty \lambda^n dF(\lambda) . \quad (2.1.1)$$

En particular, nótese que

$$m_0 = \int_{-\infty}^\infty dF(\lambda) = \gamma(0) ,$$

y

$$m_2 = \int_{-\infty}^\infty \lambda^2 dF(\lambda) = -\gamma''(0) .$$

Dichas acotaciones serán de gran utilidad mas adelante.

- Altura Significativa (H_s)

Es un parámetro asociado a la severidad del mar y es una medida que trata de indicar las olas mas altas que pueden encontrarse durante un periodo razonable de tiempo. La altura significativa se define por

$$H_s = 4\sqrt{Var(M_t)} = 4\sqrt{m_o} .$$

- Frecuencia Media

Es la frecuencia alrededor de la cual se encuentra concentrado el espectro, y está dada por,

$$\frac{m_1}{m_o} .$$

- Los siguientes parámetros son importantes en el estudio espectral de la altura de la ola

$$\lambda_{i,j} = \sqrt{\frac{m_i}{m_j}}.$$

- Ancho Espectral (a manera de ejemplo)

El ancho espectral se define por

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_o m_4}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{2,0}^2}{\lambda_{4,2}}}. \quad (2.1.2)$$

Como ya es conocido, la frecuencia es una medida que indica el número de repeticiones de cualquier fenómeno o suceso periódico en la unidad de tiempo. Para calcular la frecuencia de un evento, se contabilizan un número de ocurrencias de éste teniendo en cuenta un intervalo temporal y luego estas repeticiones se dividen entre el tiempo transcurrido. Un método alternativo para calcular la frecuencia, es medir el tiempo entre dos repeticiones (el período) y luego calcular el inverso del mismo.

La frecuencia de un proceso estacionario a tiempo continuo viene dada por $\lambda = \frac{K\Delta}{2\pi}$, donde Δ indica los saltos entre los tiempos de las observaciones. En este caso, para valores pequeños de K , se habla de frecuencias altas, mientras que para valores grandes de K se habla de frecuencias bajas.

Otras características pueden tener varias definiciones. La definición más usual está basada en los cruces del nivel medio, otra podría estar basada en los extremos sucesivos de la ola; es decir, en sucesiones de máximos y mínimos locales de la ola.

2.1.2 Características Basadas en cruces del Nivel Medio y Extremos Sucesivos

Como fue mencionado anteriormente, llamamos $M(t)$ a la altura sobre el nivel medio del mar en un punto específico. Sean $t_1, \dots, t_n \in T$ los instantes de tiempo en los cuales $M(t)$ cruza dicho nivel medio hacia abajo.

Se define el *período* de la ola como la diferencia entre dos cruces sucesivos hacia abajo del nivel medio de la ola; es decir

$$T_{d,k} = t_{k+1} - t_k .$$

El máximo valor de $M = \{M(t) ; t \in T\}$ para $t_k < t < t_{k+1}$ define una *Cresta* (a_C). De la misma manera, el mínimo valor de M durante ese mismo intervalo de tiempo define un *Seno* (a_T), y la *altura* de la ola ($H_{d,k}$) viene dada por la distancia vertical entre una cresta y un seno.

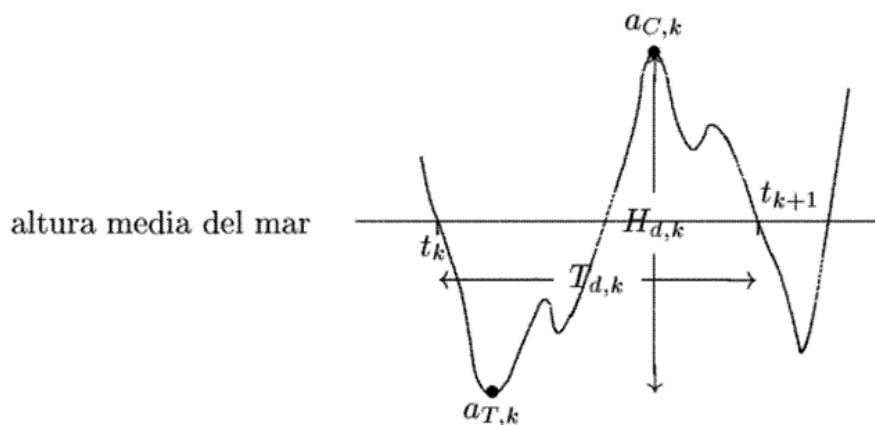


Figura 2.1.1:Características de la ola basadas en cruces del nivel medio

Por otro lado, supóngase ahora que la ola tiene una sucesión de mínimos locales $\{a_{T,k}\}$ y máximos locales consecutivos $\{a_{C,k}\}$. Una ola mín-máx es aquella en la que su altura está definida como la diferencia entre estos valores y su período viene dado por la diferencia de tiempos correspondiente. De la misma manera, se definen las olas mín-mín y máx-máx. La figura (2.1.2) muestra una ola mín-máx.

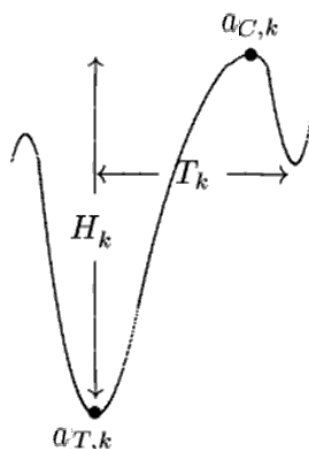


Figura 2.1.2:Características de la ola basadas en extremos sucesivos

Es esta última la definición que se basa en los extremos sucesivos de la ola.

2.1.3 Cruces y Máximos Locales

Hemos supuesto que M es un proceso Gaussiano y por definición se tiene que,

$$M' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} ;$$

entonces $M'(t)$ también es un proceso gaussiano, por ser límite de combinación lineal de un proceso gaussiano. $M'(t)$ es independiente de $M(t)$. En efecto,

$$\begin{aligned} E [M(t)M'(t)] &= E \left[M(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (E [M(t)M(t+h)] - E [M^2(t)]) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\gamma(h) - \gamma(0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\gamma(h) - \gamma(0))}{h} \right] \\ &= \gamma'(0) = 0 = E [M(t)] E [M'(t)] . \end{aligned}$$

Supongamos $m_2 < \infty$. La función de covarianza tiene desarrollo de Taylor cerca del origen,

$$\gamma(h) = \sigma^2 - \frac{m_2 h^2}{2} + o(h^2) .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E[M'(t+k)M'(t)] &= \lim_{h \rightarrow 0} E \left[\left(\frac{M(t+h+k) - M(t+k)}{h} \right) \left(\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [\gamma(k) - \gamma(h+k) - \gamma(k-h) + \gamma(k)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2\gamma(k) - 2\gamma(h+k)}{h^2} \right] . \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
E[M'^2(t)] &= \lim_{k \rightarrow 0} E[M'(t+k)M'(t)] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2\gamma(0) - 2\gamma(h)}{h^2} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2\gamma(0) - 2\sigma^2 + m_2 h^2 - 2o(h^2)}{h^2} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m_2 h^2}{h^2} - \lim_{h \rightarrow 0} 2o(h^2) \\
&= m_2 .
\end{aligned}$$

De donde, $Var(M'(t)) = m_2 = -\gamma''(0)$ y $Cov(M'(t), M'(t+h)) = -\gamma''(h)$.

Sean σ_1^2 y σ_2^2 las varianzas de M y M' respectivamente. De la gaussianidad de ambos procesos, la función de densidad conjunta de M' y M viene dada por

$$\mathcal{P}_{M,M'}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2\sigma_1\sigma_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z \right\}$$

donde,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} ,$$

es la matriz de covarianza conjunta, y $z = (x, y)$.

Debido a la estacionaridad de ambos procesos, se cumple que $(M(t), M'(t)) = (M(0), M'(0))$, para todo t . Así, teniendo en cuenta que $\sigma_1^2 = \gamma(0)$, $\sigma_2^2 = -\gamma''(0)$, y que $\rho = 0$ (porque los procesos son independientes), se tiene entonces que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \gamma(0) & 0 \\ 0 & -\gamma''(0) \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, la densidad conjunta de M' y M es

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{M,M'}(x, y) &= \mathcal{P}_{M(0),M'(0)}(x, y) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma(0)m_2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\gamma(0)} \right\} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2m_2} \right\} \\
&= \mathcal{P}_{M(0)}(x) \mathcal{P}_{M'(0)}(y) .
\end{aligned}$$

Definición 2.1 Decimos que el proceso M

- Tiene un cruce hacia arriba del nivel u si $M(t) = u$ y $M'(t) > 0$; para $t \in T$.
- Tiene un cruce hacia abajo del nivel u si $M(t) = u$ y $M'(t) < 0$; para $t \in T$.
- Tiene un máximo local en $t_0 \in T$, si M' tiene un cruce hacia abajo en t_0

Si la trayectoria del proceso tiene un sólo máximo durante cada medio ciclo, se dice que el modelo es de *Banda Estrecha*. Por otro lado, el modelo se dice de *Banda Ancha*, si hay varios extremos durante el medio ciclo determinado por cruces sucesivos del nivel cero, en este caso, pueden haber máximos positivos y negativos. Valores pequeños de ϵ (en particular $\epsilon = 0$) corresponden a espectros de banda estrecha, mientras que $\epsilon = 1$ asegura un modelo de banda ancha.

2.1.4 Fórmula de Rice

Sea f una función. Sea $g : [a, b] \rightarrow (-\infty, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, una función creciente o decreciente y derivable. Llamemos $\mathcal{N}_{[0, T]}^g(s)$ al número de cruces del nivel u de la función g . Por la fórmula de cambio de variable para integrales,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \mathcal{N}_{[0, T]}^g(u) du = \int_0^T f(g(t)) |g'(t)| dt .$$

Supongamos ahora $M = g$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \mathcal{N}_{[0, T]}^M(u) du = \int_0^T f(M(t)) |M'(t)| dt .$$

Aplicando esperanza ambos lados de la ecuación anterior y haciendo uso del Teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) E \left[\mathcal{N}_{[0, T]}^M(u) \right] du &= \int_0^T E \left[f(M(t)) |M'(t)| \right] dt \\ &= \int_0^T E \left[f(M(0)) |M'(0)| \right] dt \\ &= T E \left[f(M(t)) |M'(t)| \right] dt . \end{aligned}$$

Pero, por definición de esperanza y debido a la independencia de M' y M ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [f(M(t)) |M'(t)|] dt &= \mathbb{E} \int \int_{\mathbb{R}^2} f(u) |\dot{x}| \mathcal{P}(u, \dot{x}) du d\dot{x} \\
 &= \mathbb{E} \int \int_{\mathbb{R}^2} f(u) |\dot{x}| \mathcal{P}(u) \mathcal{P}(\dot{x}) du d\dot{x} \\
 &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{e^{-u^2/2m_0}}{\sqrt{2\pi m_0}} du \int_{\mathbb{R}} |\dot{x}| \frac{e^{-\dot{x}^2/2m_2}}{\sqrt{2\pi m_2}} d\dot{x} .
 \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $w = \frac{\dot{x}}{\sqrt{m_2}}$, entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |\dot{x}| \frac{e^{-\dot{x}^2/2m_2}}{\sqrt{2\pi m_2}} d\dot{x} &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{m_2} |w| \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{m_2} dw \\
 &= \sqrt{m_2} 2 \int_0^\infty w \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dw \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{m_2} .
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{E} [\mathcal{N}_{[0,T]}^M(u)] du = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f(u) \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \frac{e^{-u^2/2m_0}}{\pi} du ;$$

para casi todo s , y así,

$$\mathbb{E} [\mathcal{N}_{[0,T]}^M(u)] = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-u^2/2m_0} . \quad (2.1.3)$$

La fórmula (2.1.3) se conoce como la *Fórmula de Rice para Procesos Gaussianos Estacionarios* y permite calcular el número esperado de cruces con el nivel u .

En particular, si $u = 0$,

$$\mathbb{E} [\mathcal{N}_{[0,T]}^M(0)] = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} ;$$

y como el proceso M es simétrico, si $\mathcal{U}_{[0,T]}^M(0)$ es el número de cruces hacia arriba del nivel cero se tiene,

$$E \left[\mathcal{U}_{[0,T]}^M(0) \right] = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} .$$

Capítulo 3

Aplicación del Análisis Espectral al Registro de Alturas de Olas en el Caribe del Sur

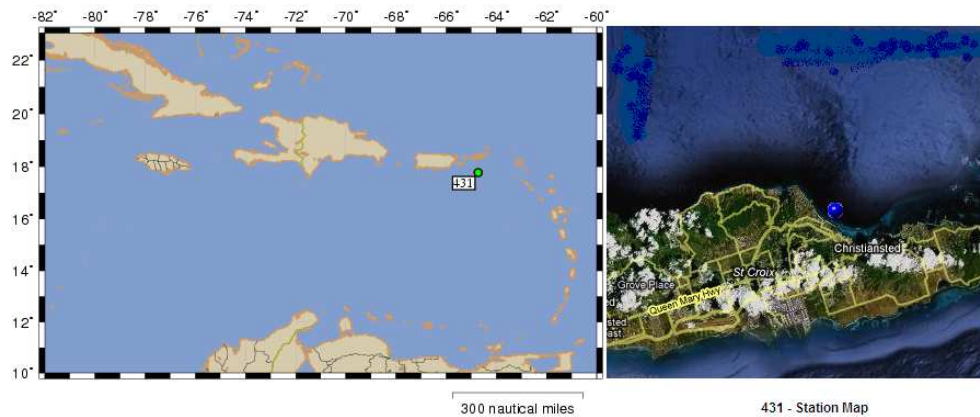


Figura 3.1: Mapa de ubicación de la estación 431 (izquierda). Imagen satelital de la estación (derecha)

El conjunto de datos con el cual se trabajó fue seleccionado de los registros mensuales provenientes de la boya 431, la cual se encuentra ubicada en Christiansted, St. Croix VI, estación 43101, con latitud $17^{\circ}46'09''$ N y longitud $64^{\circ}43'49''$ O, a una profundidad de 255 metros. Dicha boya mide parámetros tales como la altura y energía de la ola, la dirección de la misma, y la temperatura del mar en un momento dado. Los registros fueron obtenidos por medio de la base de datos del portal web del Coastal Data Information Program (CDIP) o Programa de Información de Datos Costeros, el cual es una extensa red de vigilancia de las olas y playas a lo largo de las costas de los Estados Unidos.

El estudio realizado sobre los datos está basado en los valores extremos de la ola; es decir, en los máximos (crestas) y mínimos (senos) de la misma, razón por la que al seleccionar los datos se consideró un valor de t suficientemente grande durante el cual se hayan registrado alturas significativas (H_s) de interés para el estudio. Teniendo fijado el valor de t sobre el cual interesa trabajar, se tomaron los datos correspondientes a las alturas de las olas registradas durante ese período de tiempo. Estas alturas vienen dadas en centímetros (cm). Los registros corresponden a una trayectoria de un proceso estocástico con distribución Gaussiana, donde el período de muestreo es menor a un segundo ($0.78125seg.$). El paquete utilizado para estudiar los registros fue MATLAB y también se usó la herramienta WAFO.

Bajo el criterio de selección antes mencionado, se tomaron 6 conjuntos de datos, 3 de ellos correspondientes a registros de ola alta ($H_s \geq 1.5mts$) y otros 3 correspondientes a registros de ola baja ($H_s \leq 0.8$).

- Olas Altas

<i>registro</i>	<i>día</i>	<i>mes</i>	<i>año</i>	<i>inicio(Hr)</i>	<i>culminación(Hr)</i>	$H_s(m)$
data 1	27	12	2008	8:00	21:00	entre 1,95 y 2,45
data 2	6	3	2009	10:00	23:00	entre 1,8 y 2,30
data 3	11	2	2009	9:00	22:00	entre 2,00 y 2,60

- Olas Bajas

<i>registro</i>	<i>día</i>	<i>mes</i>	<i>año</i>	<i>inicio(Hr)</i>	<i>culminación(Hr)</i>	$H_s(m)$
data 4	8	4	2009	11:00	23:00	entre 0,45 y 0,52
data 5	26	7	2008	14:00	23:00	entre 0,45 y 0,52
data 6	25	8	2008	7:00	20:00	entre 0,30 y 0,45

La figura (3.2) muestra los histogramas de las alturas de cada uno de los registros de olas descritos anteriormente con una distribución Gaussiana superpuesta. Es claro ver que todos los registros se ajustan muy bien a dicha distribución, lo cual indica que, en efecto, estos cumplen con la suposición de gaussianidad. Más aún, en la figura (3.3) se muestra el ajuste de cada uno de los registros a una

recta de probabilidad normal.

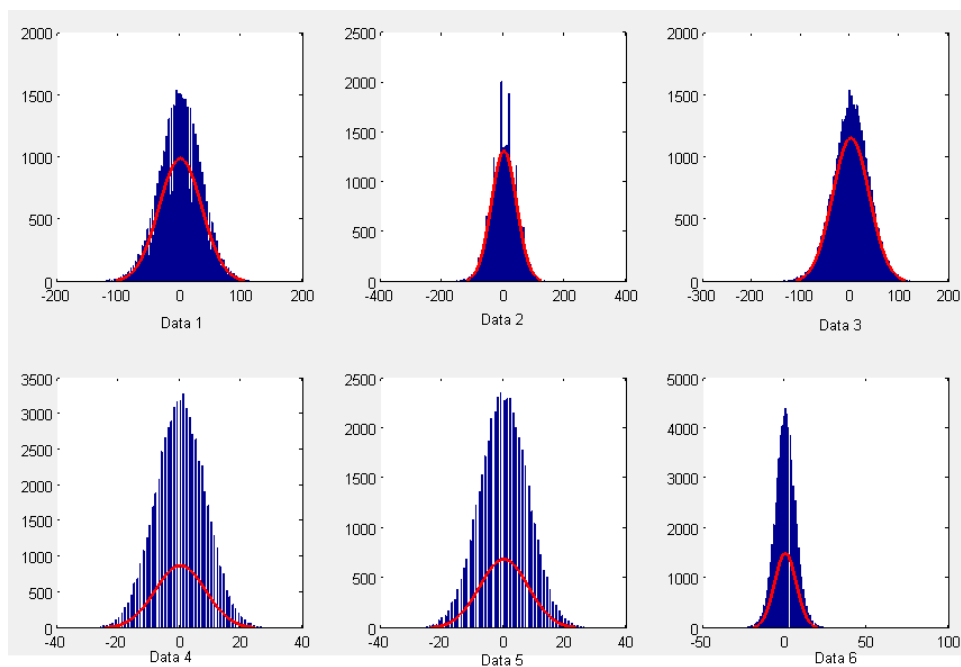


Figura 3.2: Histograma de las alturas de cada una de las olas

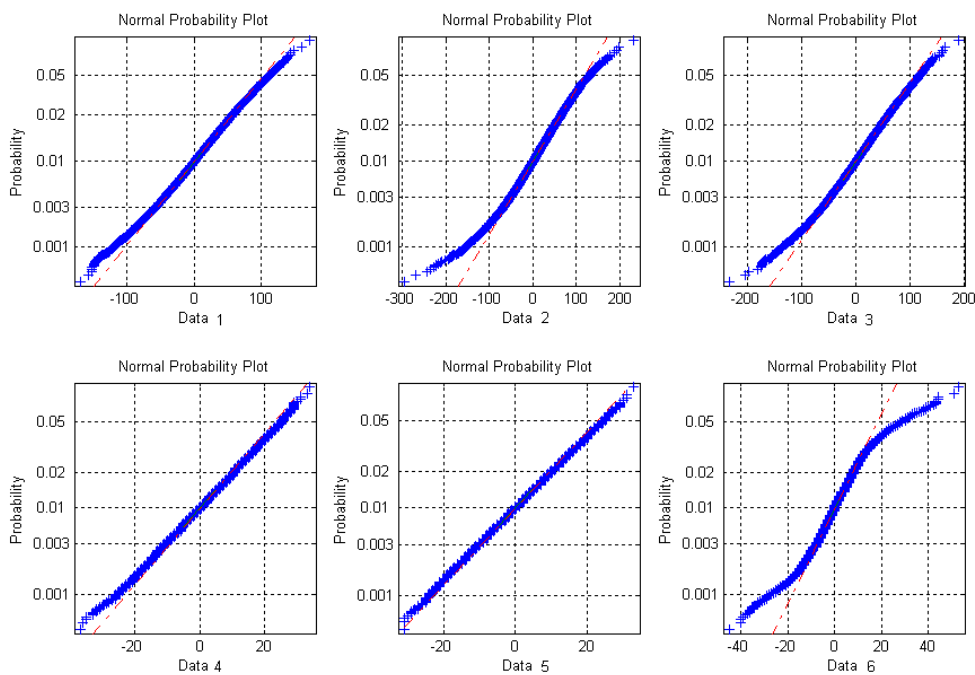


Figura 3.3: Ajuste de Recta de Probabilidad Normal de cada uno de los Registros de Alturas de Olas

Obsérvese que el registro correspondiente a la data 6 exhibe un comportamiento menos ajustado

que los demás en las colas a la hora de pegarse a un modelo de probabilidad normal. En la figura (3.4) se presenta un gráfico del comportamiento del registro antes mencionado, en ésta se observa un incremento significativo de las alturas de la ola al final de la trayectoria de la misma, lo que podría deberse tal vez al paso de una tormenta en esos instantes de tiempo, perturbando así la hipótesis de estacionaridad a la que debería obedecer el modelo para su estudio.

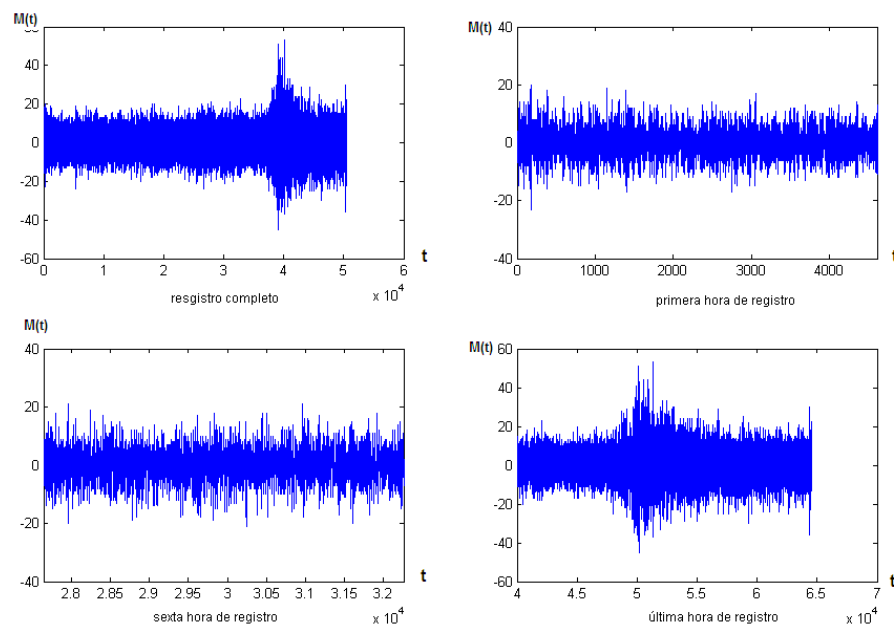


Figura 3.4:Ola data 6

3.1 Análisis de Comportamiento para Olas Altas y Olas Bajas

Como un primer paso, se realizó un estudio estadístico descriptivo de los datos, fueron estimados el mínimo, el máximo, la media y varianza empíricas, la desviación estándar, el primer y tercer cuartil y las covarianzas empíricas de cada conjunto de datos. Estas últimas fueron calculadas por medio de la ecuación (1.2.1), la cual, debido a la estacionaridad del proceso y tomando $\Delta = 0,78125$, queda como

$$\hat{\gamma}(j\Delta) = \sum_{j=1}^{n-j} (M(j\Delta) - \bar{M}) ;$$

donde n es el tamaño de la muestra y $j = 1, \dots, n$.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla, en la que se observa claramente que los datos son centrados y simétricos. También es claro, que la variabilidad de los datos es mucho mayor en los conjuntos de datos tomados de registros correspondientes a olas altas.

<i>registro</i>	<i>mínimo</i>	<i>máximo</i>	<i>media</i>	<i>varianza</i>	<i>desv.estánd.</i>	<i>1^{er} cuartil</i>	<i>3^{er} cuartil</i>
data 1	-170	172	0,0024	1213,70	34,8381	-22	23
data 2	-297	233	-0,0022	1657,70	40,7143	-25	23
data 3	-235	191	-0,0070	1383,50	37,1955	-24	24
data 4	-37	34	-0,0010	66,43	8,1504	-5	5
data 5	-31	33	-0,0006	62,51	7,9064	-5	5
data 6	-45	53	-0,0003	43,16	6,5696	-4	4

Tabla 3.1: Parámetros estadísticos estimados para cada registro

Posteriormente, se calculó el espectro Jonswap, de cada uno de los registros de olas. A continuación, se muestran los resultados obtenidos para dos registros en particular, uno correspondiente a una ola alta (data 3) y otro correspondiente a una ola baja (data 4) , esto con la finalidad de permitirnos hacer algunas comparaciones entre los dos tipos de olas.

La figuras (3.5), (3.6) y (3.7) muestran el comportamiento de una ola alta. En la figura (3.5) se observa cómo varían las alturas de la ola, se puede ver claramente que ésta comienza siendo de gran tamaño y luego sus alturas van disminuyendo.

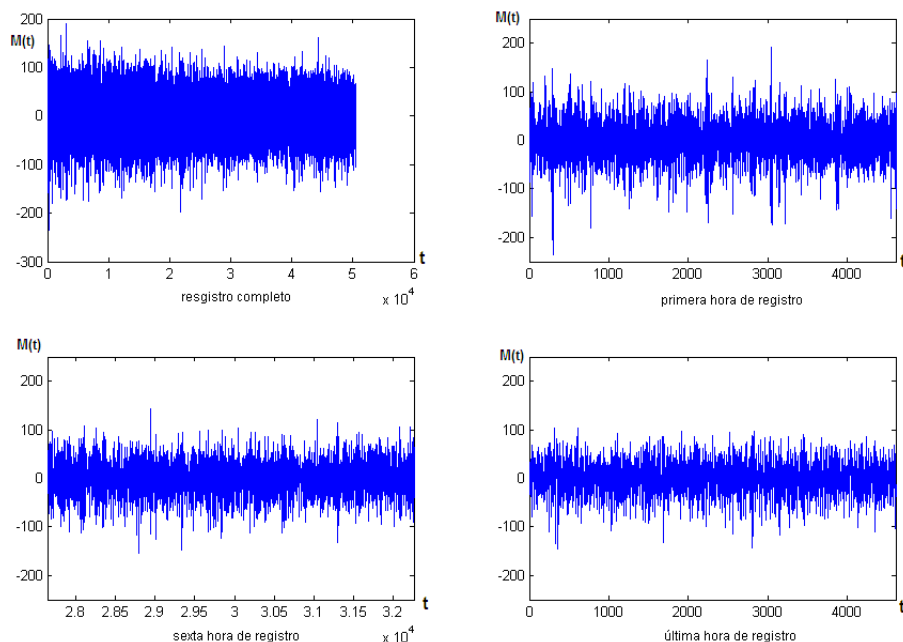


Figura 3.5: Ola Alta

La figura (3.6) corresponde al gráfico de covarianzas, el cual deja clara muestra de que, mientras más grande es el valor de t , las alturas de la ola son datos independientes de los anteriores.

El espectro Jonswap fue calculado usando la función *jonswap* de la herramienta WAFO, y fue calculado en cuatro partes. Primero se calculó el espectro del registro completo y luego se calcularon 3 espectros más, los cuales corresponden a la primera, la sexta y la última hora de registro. El resultado se muestra en la figura (3.7). Para la primera hora de registro, se obtuvo una frecuencia dominante de 0,78 rad/seg, para la sexta hora una frecuencia dominante de 0,8 rad/seg, para la última hora la frecuencia obtenida fue 0,83 rad/seg lo que permite inferir que el espectro se mantuvo concentrado en las frecuencias bajas durante el registro. El registro completo arrojó una frecuencia dominante de 1.1 rad/seg. El gráfico anterior, reitera el hecho de que la ola tuvo mayor energía durante las primeras horas de registro.

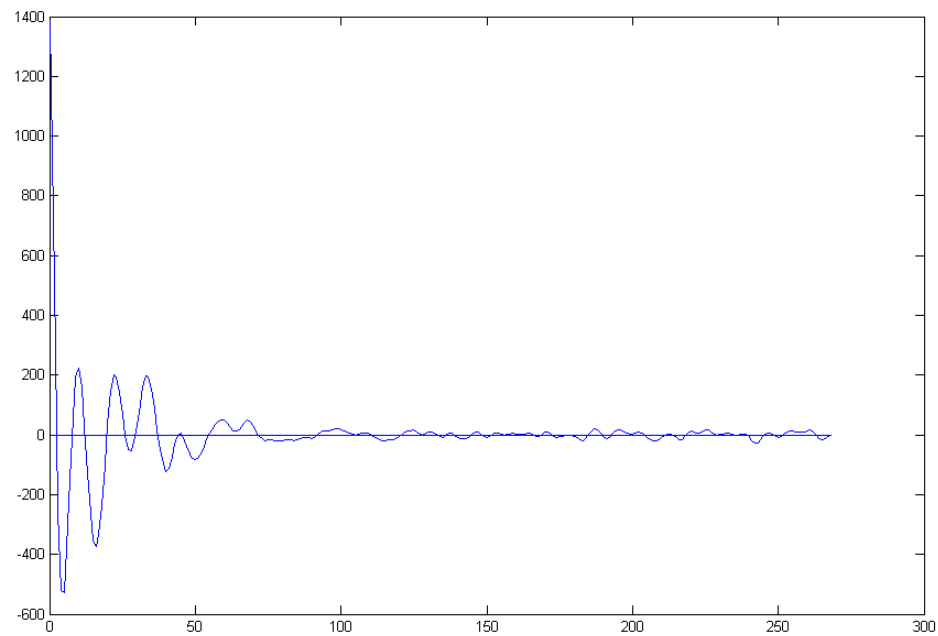


Figura 3.6:Covarianzas Ola Alta

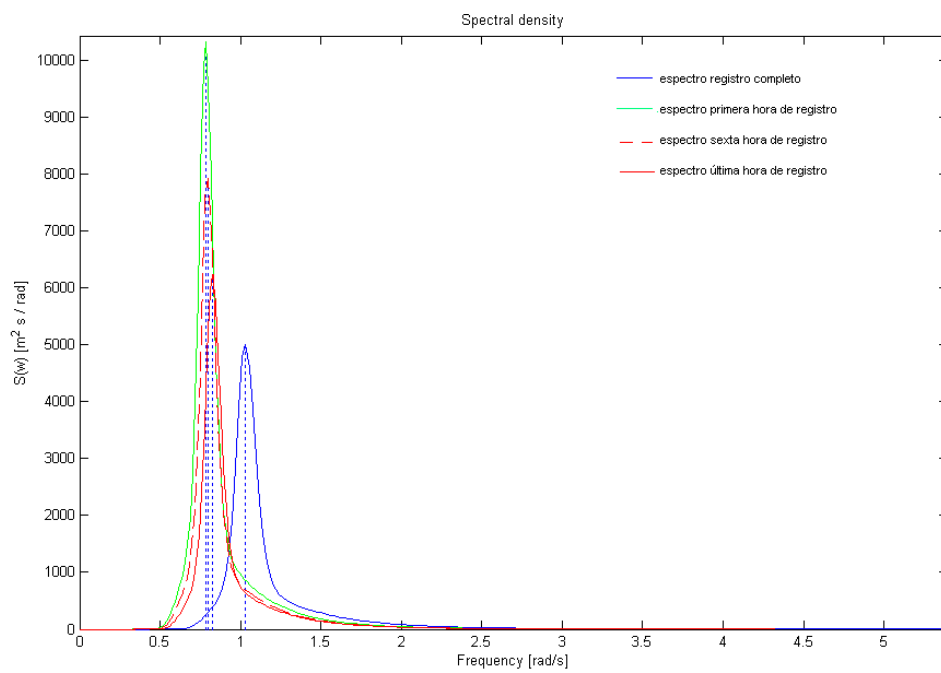


Figura 3.7:Espectro Jonswap Ola Alta

Asimismo, las figuras (3.8), (3.9) y (3.10) corresponden a los resultados obtenidos al realizar el análisis anterior a una ola baja. Es claro ver que las alturas de la ola son considerablemente bajas con respecto a la ola alta (ver figura 3.5). A diferencia de la ola alta, ésta mantuvo un comportamiento más o menos constante durante todo el registro, a excepción de la última hora, en la que se observa que las alturas de la ola aumentaron considerablemente, mostrando así mayor energía en ésta última, como lo muestra el resultado arrojado por el espectro Jonswap (figura 3.10).

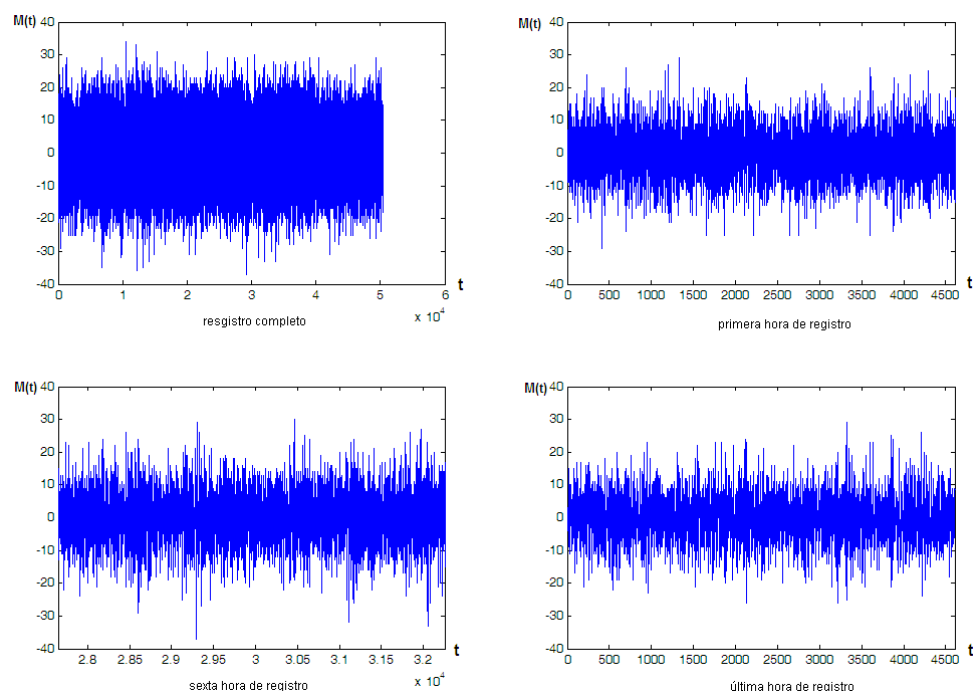


Figura 3.8:Ola Baja

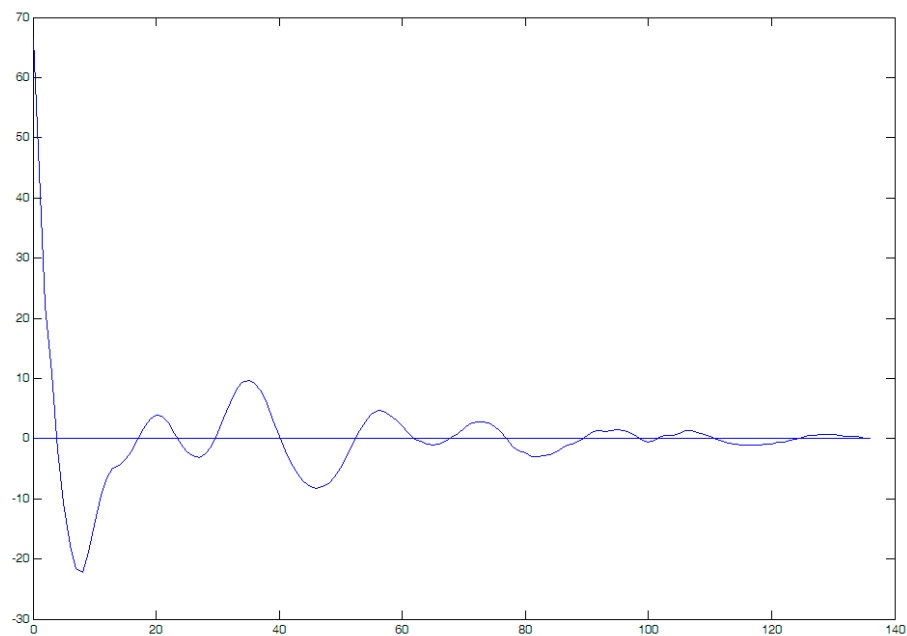


Figura 3.9:Covarianzas Ola Baja

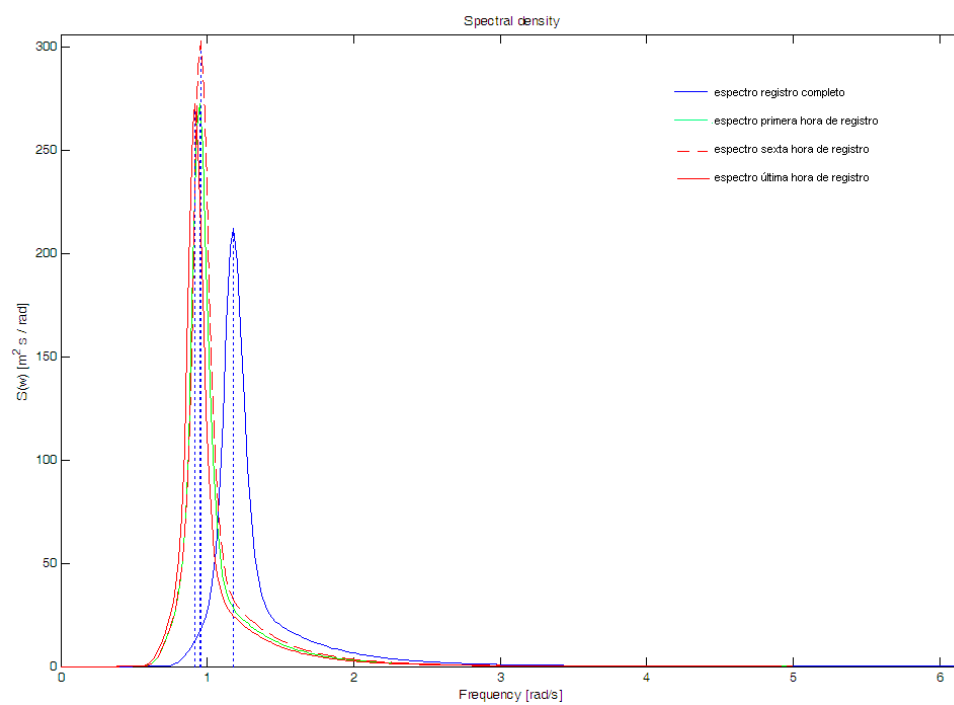


Figura 3.10:Espectro Jonswap Ola Baja

3.2 Estimación de Espectro Haciendo Uso del Periodograma

Como fue mencionado en el capítulo 2, el periodograma es una útil herramienta de estimación de la densidad espectral de un proceso estacionario. En la presente investigación se hizo uso del mismo para ver si era posible obtener una información más completa acerca del comportamiento de nuestras olas, en esta ocasión, en el dominio de frecuencias.

Recordando que el periodograma viene dado por la expresión (1.3.2), y apoyándonos en la definición de período, si llamamos T al período, se tiene que,

$$e^{ij\Delta(\lambda+T)} = e^{ij\Delta(\lambda)} ;$$

por lo tanto,

$$e^{ij\Delta T} = 1 = e^{i2\pi} ;$$

lo que implica que $T = \frac{2\pi}{j\Delta}$, y de aquí, $0 \leq \lambda \leq \frac{2\pi}{\Delta}$. Es decir, si n es el tamaño de la muestra, λ varía con saltos

$$\frac{2\pi}{n\Delta}, \frac{2\pi}{n\Delta}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n\Delta} .$$

La figura (3.2) corresponde a los peridiogramas estimados para cada uno de nuestros registros de olas. cada pico del periodograma corresponde a una frecuencia dominante.

Recordemos que, la frecuencia es el inverso del período; entonces , si se está en presencia de bajas frecuencias, quiere decir que el período es grande; por lo tanto, la ola muestra ondulaciones mas suaves y prolongadas. Lo contrario pasa cuando se está en presencia de frecuencias altas; es decir, el período es pequeño y eso indica que la ola presenta ondulaciones mas rápidas.

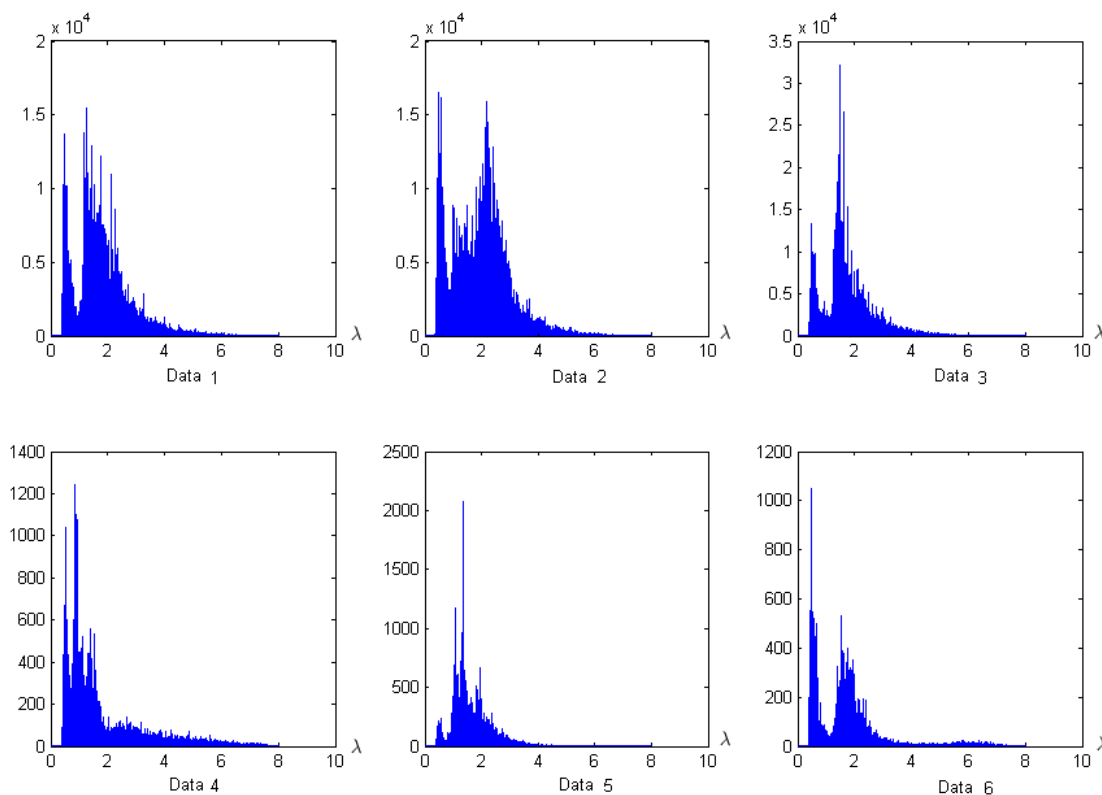


Figura 3.1: Periodograma de cada uno de los registros de olas

Por ejemplo, en el periodograma obtenido para la data 3, se observan dos frecuencias dominantes, una de ellas con menos concentración de energía que la otra; lo que podría implicar que la ola tal vez esté formada por dos olas encontradas. Sin embargo, la energía de la ola sigue estando concentrada en las frecuencias bajas. Resultado que se corresponde con el arrojado por el espectro JONSWAP, mostrado en la figura (3.7).

3.3 Estimación de Densidad de Probabilidad de Valores Extremos

Luego de tener una idea del comportamiento de cada uno de los registros y de haber obtenido los espectros de las olas, pudieron ser estimados parámetros de interés para estudiar los extremos de cada una de ellas, como lo son los momentos de orden 0, 2 y 4 y el ancho espectral. Dichos parámetros fueron calculados por medio de las definiciones (2.1) y (2.2).

<i>registro</i>	m_0	m_2	m_4	ϵ
data 1	1213,6943	1357,3033	4094,6031	0,7933
data 2	1657,6542	2110,0332	6083,5440	0,7433
data 3	1383,5037	1460,7397	4197,5072	0,7953
data 4	66,4285	91,6758	501,0350	0,8646
data 5	62,5106	54,8059	124,5731	0,7838
data 6	43,1592	51,5263	268,3863	0,8779

Tabla 3.2: Momentos Espectrales y Ancho Espectral

Como fue mencionado en el capítulo 2, la existencia de momentos de orden m está asociado a la regularidad de la trayectoria de la ola. Más aún, que el valor de m_4 sea finito, permite asegurar que el proceso tiene un numero finito de máximos durante el intervalo de tiempo estudiado, tomando en cuenta que dicho intervalo es un intervalo de tiempo finito.

Por otro lado, recordemos que valores pequeños de ϵ corresponden a espectros de banda estrecha; lo que quiere decir que, debido a que los valores obtenidos al estimar ϵ en cada caso se encontraron mas cercanos a 1 que a 0, podría suponerse entonces que las olas estudiadas presentan varios máximos (tanto positivos como negativos) entre dos cruces sucesivos del nivel cero. También vale la pena destacar la gran similitud de los anchos espectrales entre olas de la misma naturaleza; es decir, el valor ϵ correspondiente a los registros de ola alta difiere en muy poco y de igual manera pasa entre los valores de ϵ que corresponden a olas bajas, con la única excepción del registro de la data 5 la cual, aunque cumple con las hipótesis de gaussianidad y estacionaridad, presenta 3 horas menos de registro, lo que equivale a 4608 datos menos que las otras datas, hecho que permite corroborar que el modelo con el cual se trabajó necesita de un valor de t suficientemente grande para la confiabilidad de sus resultados.

Así, nos planteamos el problema del cálculo del número esperado de máximos y su distribución de probabilidad, así como también, la probabilidad de que un máximo local esté por encima de un nivel de interés u .

A manera de ejemplo, usando la Fórmula de Rice (2.1.3) fue posible calcular el número esperado de máximos por encima del nivel 0, y los resultados se presentan en la tabla (3.3).

<i>registro</i>	<i>cruces con nivel 0</i>
data 1	83.721
data 2	89.320
data 3	81.348
data 4	93.004
data 5	52.949
data 6	86.502

Tabla 3.3: Número esperado de cruces hacia arriba del nivel cero

Sea ahora, t_0 el instante de tiempo en el cual la trayectoria del proceso M tiene un máximo local positivo y llamemos a dicho máximo ξ_{max} ; es decir,

$$M(t_0) = \xi_{max} .$$

Entonces, la densidad de probabilidad para crestas extremas positivas puede ser calculada por medio de la ecuación

$$f_{max} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}} \left\{ \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2\epsilon^2} + \sqrt{1 - \epsilon^2} \xi e^{-\xi^2/2} \Phi \left(\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \xi \right) \right\} ; \quad (3.3.1)$$

donde $\xi = \frac{\xi_{max}}{\sqrt{m_0}}$, ϵ es el ancho espectral y Φ es la función de densidad normal estándar. (Para mayor referencia consultar [6]).

La figura (3.12) corresponde al comportamiento de la función de densidad de probabilidad de crestas positivas para cada uno de los registros estudiados. Tales funciones fueron estimadas haciendo uso de la ecuación (3.3).

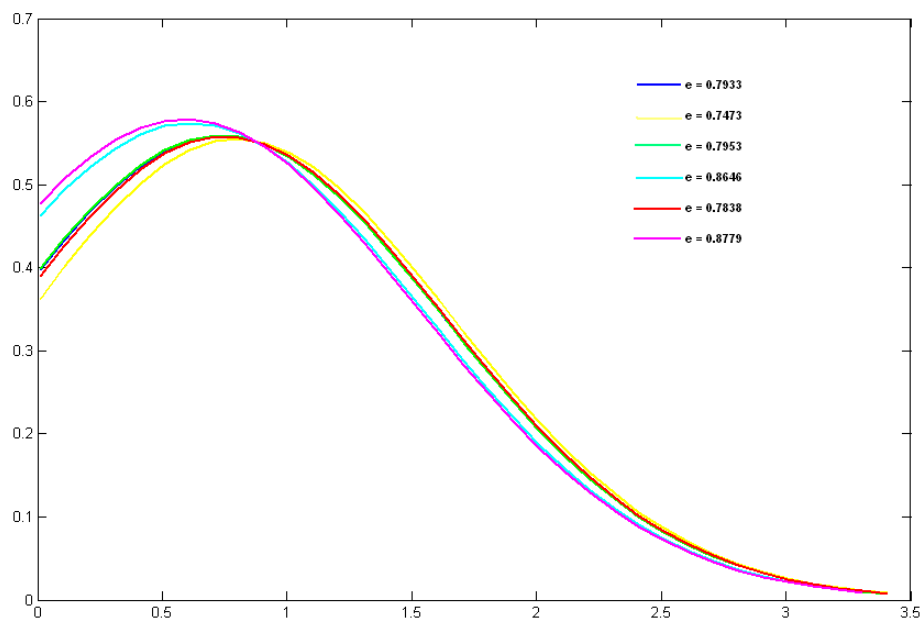


Figura 3.12: Función de densidad de probabilidad de maximos positivos como una función de parámetro ϵ

Nótese que las funciones estimadas para los 6 registros muestran un comportamiento muy similar. Dicha similitud se debe a que el valor de ϵ en cada caso no presenta una variación muy significativa con respecto a los demás registros, como se mostró en la tabla (3.2), lo cual, a su vez, invita a pensar que el modelo con el cual se trabajó es un modelo que permite ver mejores resultados entre olas altas y olas bajas en el caso en que las diferencia entre alturas significativas es mucho mayor.

Finalmente, por medio del cálculo del primer, segundo y tercer cuartil, nos permitimos estimar el porcentaje de máximos locales por encima de un nivel u . La tabla (3.4) indica los resultados obtenidos en cada caso estudiado.

<i>registro</i>	25%	50%	75%
data 1	0,41	0,81	1,41
data 2	0,41	0,91	1,41
data 3	0,31	0,81	1,31
data 4	0,41	0,81	1,41
data 5	0,41	0,91	1,41
data 6	0,31	0,81	1,31

Tabla 3.4: Cuartiles

Por ejemplo, en la fila que corresponde a la data 1, se indica que el 25% de los máximos locales de la ola correspondiente al registro de tal data se encuentran por encima de 0,41 cm, el 50% de dichos máximos están por encima de 0,81 cm y el 75% por encima de 1,41 cm.

Nótese que, los resultados de la tabla (3.4) no presentan coherencia con respecto a los resultados de la tabla (3.1). Es importante recalcar que la presente investigación permite dar estimados del comportamiento del mar, mas no nos permite asegurar que dichas estimaciones se encuentren totalmente apegadas a la realidad.

3.4 Lenguaje Matlab

A continuación se presentan los programas que fueron creados y los comandos que fueron utilizados, en MATLAB y WAFO, para el desarrollo de la investigación realizada.

- El análisis estadístico inicial a los datos fue calculado mediante el siguiente programa, el cual recibe la matriz de datos, D, y devuelve la media (mean), varianza (var), desviación típica (desv) y las covarianzas empíricas (r).

```
function [mean,var,desv,r]=mvc(D)
```

```
[n,p]=size(D);
```

```
%media
```

```
x = zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i) = D(i,2);
    end
s = 0;
    for i=1:n
        s = x(i)+s;
    end
mean = s/n;

%varianza
v = 0;
    for i=1:n
        v = ((x(i)-mean)^2)+v;
    end
var = v/(n-1);

%desviación estándar%
desv = sqrt(var);

%covarianzas
t=1;
r0=0;
k=0;
    while t <= n-k
        r0=(((D(t+k,2) - mean)* (D(t,2) - mean))* (1/(n-k))) + r0;
        t= t+1;
    end
r=zeros(n,1);
y=zeros(n,1);
r(1)=r0;
i=1;
```

```

        while abs(r(i))>0.05
            t=1;
            i=i+1;
            z=0;
            while t <= n-i
                z=((D(t+i,2) - mean)* (D(t,2) - mean))* (1/(n-i))) + z;
                t= t+1;
            end
            y(i)=i;
            r(i)=z;
        end
    mean;
    var;
    desv;
    r;

```

- El siguiente programa divide la matriz de datos inicial en una matriz Z la cual tiene como columnas los datos de la matriz por horas. El programa también retorna la matriz de medias y de varianzas (de cada hora).

```

function [Z,medias,varianzas] = divmat(D)
    [n,p]=size(D);

    %división de la matriz en submatrices por hora
    %para la primera entrada
    Z = zeros(4608,(n/4608)-1);
    medias = zeros(1,(n/4608)-1);
    varianzas=zeros(1,(n/4608)-1);
    Z(:,1) = D(1:4608,2);
    %media
    x = zeros(1,4608);
    for k=1:4608
        x(k) = Z(k,1);
    end

```

```
        end
    s = 0;
    for k=1:4608
        s = x(k)+s;
    end
    mean = s/4608;
    medias(1,1) = mean;

    %varianza
    v = 0;
    for l=1:4608
        v = ((x(l)-mean)^2)+v;
    end
    var = v/(4608-1);
    varianzas(1,1) = var;

    %para la segunda en adelante
    for j = 2:(n/4608)-1
        i = (4608*j)+1;
        Z(:,j) = D(i:(i-1)+4608,2);

        %media por submatriz
        x = zeros(1,4608);
        for k=1:4608
            x(k) = Z(k,j);
        end
        s = 0;
        for k=1:4608
            s = x(k)+s;
        end
        mean = s/4608;
        medias(1,j) = mean;
```

```

    %varianza por submatriz
    v = 0;
    for l=1:4608
        v = ((x(l)-mean)^2)+v;
    end
    var = v/(4608-1);
    varianzas(1,j) = var;
end
medias;
varianzas;

```

- Espectro JONSWAP: el programa se hizo utilizando la función *jonswap* de WAFO. Recibe como entradas la matriz inicial de datos (D) la matriz Z calculada anteriormente, los momentos de orden 0, 2 y 4 (los cuales son calculados desde un programa inicial que será visto mas adelante), la varianza de la matriz inicial, var, y la matriz de varianzas. Arroja como parámetros de salida, la altura significativa (Hs) el período de pico (Tp) el espectro del registro completo (spec) y los espectros de la primera (spec1), la última (spec3) y la hora media del registro (spec2).

```

function [Hs,Tp,spec,spec1,spec2,spec3]=jons(D,Z,mom,var,varianzas)

Hs = 4*sqrt(var); Tp = 2*pi*sqrt(mom(1)/mom(2));
spec=jonswap([], [HsTp]); spec.note

S1 = dat2spec(Z(:,1)); [mom1] = spec2mom(S1,2); Hs1 =
4*sqrt(varianzas(1)); Tp1 = 2*pi*sqrt(mom1(1)/mom1(2)); spec1 =
jonswap([], [Hs1 Tp1]); spec1.note

S2 = dat2spec(Z(:,6)); [mom2] = spec2mom(S2,2); Hs2 =
4*sqrt(varianzas(6)); Tp2 = 2*pi*sqrt(mom2(1)/mom2(2)); spec2 =
jonswap([], [Hs2 Tp2]); spec2.note

S3 = dat2spec(Z(:,13)); [mom3] = spec2mom(S3,2); Hs3 =
4*sqrt(varianzas(13)); Tp3 = 2*pi*sqrt(mom3(1)/mom3(2)); spec3 =
jonswap([], [Hs3 Tp3]); spec3.note

```

```
figure,wspecplot(spec,'b');hold on wspecplot(spec1,'g');
wspecplot(spec2,'r--'); wspecplot(spec3,'r'),hold off
```

```
Hs;
Tp;
spec;
spec1;
spec2;
spec3;
```

- Periodograma: Se realizó el programa haciendo uso de la función de MATLAB *periodogram*. Toma como parámetro de entrada la matriz inicial y retorna un vector (P) con los valores del periodograma por frecuencia.

```
function [P]=periodograma(D)
    M=D(:,2);
    [m,p]=size(M);
    P=periodogram(M);
    [n,q]=size(P);
    d = 0.78125;
    w = zeros(n,1); w(1,1)=0;
    h = 1; q = 0; v = (2*pi)/(n*d);
    for h=1:(n-1)
        q=v*h;
        w(h+1,1)=q;
    end
    plot(w,P);

P;
```

- Función de densidad de probabilidad para crestas máximas positivas: el programa recibe como

parámetros de entrada las matrices D y Z y los momentos. Da como resultado, la función de densidad (fmax) el ancho espectral (e) el número esperado de crestas por encima del nivel cero (N) y los cuartiles.

```
function [fmax,N,e,cuartiles] = fextrem(D,Z,mom)

    [n,p] = size(D);
    [m,q] = size(Z);
    a = (3600*(q+1));
    N=(a/2*pi)*sqrt(mom(2)/mom(1));

    %Ancho espectral
    E = 1-(mom(2)^2/(mom(1)*mom(3)));
    e = sqrt(E);

    %función de distrib normal estándar en (sqrt(1-e^2)/e)*I
    fm = zeros(n,1);
    k = 1;
    I = 0.01;
    c = (sqrt(1-E)/e)*I;
    erf = quad(@exponencial,0,c/sqrt(2))*2/sqrt(pi);
    Q = (1/2)*(1 + erf);

    %densidad de probabilidad
    f = (2/((1+sqrt(1-E)))*(e/sqrt(2*pi)*exp(-I^2/(2*E)) + sqrt(1-E)*I*exp(-I^2/2)*Q);
    fm(k,1) = I;
    fm(k,2) = f;

    while abs(fm(k,2))>0.01
        I = I+0.1;
        c = (sqrt(1-E)/e)*I;
        erf = quad(@exponencial,0,c/sqrt(2))*2/sqrt(pi);
        Q = (1/2)*(1 + erf);
```

```

    %densidad
    f = (2/(1+sqrt(1-E)))*(e/sqrt(2*pi)*exp(-I^2/(2*E))
        + sqrt(1-E)*I*exp(-I^2/2)*Q);
    k = k+1;
    fm(k,1) = I;
    fm(k,2) = f;
end

    %Eliminamos los ceros
    fm2 = fm(:,2);
    fm2 = sort(fm2,'ascend');
    f = find(fm2);
    a = f(1);
    b = n-(a-1);
    fmax = zeros(b,2);
    fmax(:,1) = fm(1:b,1);
    fmax(:,2) = fm(1:b,2);

    % Crea la verdadera función de densidad (la cual suma 1)
    d=0.1;
    h=0;
    for k=1:b
        h = fmax(k,2) + h;
    end
    h = d*h;
    F = zeros(b,1);
    for k=1:b
        F(k) = fmax(k,2)/h;
        F(k) = F(k)/10;
    end

    %media, error cuadrático medio (med2) y varianza

```

```
m = 0;
s = 0;
for k=1:b
    m = (k*F(k)) + m;
    s = ((k^2)*F(k)) + s;
end
media = (d^2)*m;
med2 = (d^3)*s;
varianza = med2 - (media^2);

%Cuartiles
sum = zeros(b,2);
cuartiles = zeros(1,3);
c = 0.01;
sum(1,1) = c;
sum(1,2) = F(1);
for k=2:b
    c = c+d;
    quart = 0;
    for j=1:k
        quart = F(j) + quart;
    end
    sum(k,1) = c;
    sum(k,2) = quart;
end
k = 1;
while sum(k,2)<=0.25
    k = k+1;
end
cuartiles(1,1) = sum(k-1,1);
while sum(k,2)<=0.50
    k = k+1;
```

```

        end
        cuartiles(1,2) = sum(k-1,1);
    while sum(k,2)<=0.75
        k = k+1;
    end
    cuartiles(1,3) = sum(k-1,1);

fmax;
N;
e;
cuartiles;

```

Las funciones anteriores son llamadas desde un programa inicial, el cual se muestra a continuación.

```

D = textread('data.txt');
[n,p] = size(D);
%q numero de horas del registro
d= 0.78125;
t = (0:d:(3600*(q+1))-d); D(:,1) = t';

    %Media, varianza, desv, covarianzas
[mean,var,desv,r]=mvc(D);

    %División del registro por horas, matriz de medias y varianzas
[Z,medias,varianzas]=divmat(D);

    %Densidad espectral usando el periodograma%
[P] = periodograma(D);

    %Espectro predeterminado de Wafo
S = dat2spec(D);

```

```
%momentos espectrales 0,2 y 4
[mom] = spec2mom(S,4);

%Espectro Jonswap
[Hs,Tp,spec,spec1,spec2,spec3]=jons(D,Z,mom,var,varianzas);

%Densidad de probabilidad de crestas máximas
[fmax,N,e,cuartiles] = fextrem(D,Z,mom);
```

Los gráficos mostrados en este capítulo fueron realizados haciendo uso de los siguientes comandos:

```
figure(1),subplot(2,2,1),plot(t,D(:,2));
subplot(2,2,2),plot(t,D(:,2)),axis ([]);
subplot(2,2,3),plot(t,D(:,2)),axis ([]);
subplot(2,2,4),plot(D(:,2)),axis ([]);

%Histogramas con gaussiana superpuesta
figure(2),subplot(2,3,1),histfit(D1(:,2));
subplot(2,3,2),histfit(D2(:,2)); subplot(2,3,3),histfit(D3(:,2));
subplot(2,3,4),histfit(D4(:,2)); subplot(2,3,5),histfit(D5(:,2));
subplot(2,3,6),histfit(D6(:,2));

%Recta de probabilidad normal
figure(3),subplot(2,3,1),normplot(D1(:,2));
subplot(2,3,2),normplot(D2(:,2)); subplot(2,3,3),normplot(D3(:,2));
subplot(2,3,4),normplot(D4(:,2)); subplot(2,3,5),normplot(D5(:,2));
subplot(2,3,6),normplot(D6(:,2));

%Densidad de probabilidad con parámetro ancho espectral
plot(fmax1(:,1),fmax1(:,2),'b',...
      'LineWidth',1.5),hold on
plot(fmax2(:,1),fmax2(:,2),'y',...
      'LineWidth',1.5);
```

```
plot(fmax3(:,1),fmax3(:,2),'g',...  
      'LineWidth',1.5);  
plot(fmax4(:,1),fmax4(:,2),'c',...  
      'LineWidth',1.5);  
plot(fmax5(:,1),fmax5(:,2),'r',...  
      'LineWidth',1.5);  
plot(fmax6(:,1),fmax6(:,2),'m',...  
      'LineWidth',1.5),hold off
```

Capítulo 4

Conclusiones

El presente trabajo de investigación, el cual trata del análisis espectral al registro de alturas de olas y sus aplicaciones al mar Caribe Sur, a pesar de que estuvo dirigido a una boya en particular, es de gran importancia debido a que, como fue mencionado anteriormente, la ubicación de ésta es muy cercana a costas venezolanas, y el estudio de la misma brinda una posibilidad de hacer inferencias y predicciones sobre el comportamiento del mar en Venezuela.

Un aspecto que merece ser mencionado es que el modelo con el cual se trabajó necesita de un valor de t suficientemente grande para que los resultados arrojados al ser éste estudiado sean confiables, ya que, a medida de que el valor de t aumenta, las alturas de las olas se van haciendo independientes.

Nótese que las condiciones meteorológicas bajo las cuales se trabaje deben ser estables ya que en caso contrario, se perdería la hipótesis de estacionaridad y junto con ésta, la gaussianidad, hipótesis que son esenciales para que el modelo sirva para un estudio significativo que sea lo mas parecido posible a la realidad.

Por otro lado, es importante resaltar que, el espectro proporciona mayor información sobre el comportamiento de la ola cuando es calculado por subintervalos de tiempo que posean, una cantidad considerable de datos, en lugar de ser calculado para un registro completo.

También vale la pena mencionar que el modelo con el cual se trabajó no arrojó grandes diferencias entre olas altas y olas bajas a la hora de estudiar los valores extremos de las mismas debido a que,

tal vez sea necesaria mayor diferencia entre las alturas significativas de las mismas, lo que permite pensar que dicho modelo es un modelo bastante robusto.

Cabe destacar que parámetros como los momentos espectrales y el ancho espectral juegan un papel fundamental en la predicción de las olas con base en los valores extremos de la misma.

Una vez establecido los cuartiles, y luego de un estudio de más duración que el que hicimos, se puede caracterizar cuál es la altura de las crestas (o máximos) lo que luego puede ser muy útil para el diseño de edificaciones o construcciones marinas. De esta forma el programa que diseñamos en esta investigación puede servir de base como un manual para ingenieros.

Bibliografía

- [1] Mikosh, Thomas. (1998). *Elementary Stochastic Calculus*. Vol. 6, World Scientific Publishing Co., Pte. Ltd.
- [2] Cramér, Harald y Leadbetter, M.R. (2006). *Stationary and Related Stochastic Processes*. Centre for Mathematical Sciences, Lund University.
- [3] Brockwell, P. y Davis, R. (1997). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [4] Koopmans, L.H. (1974). *Probability and mathematical Estatistics*. Academic Press, New York and London, Inc.
- [5] Ortega, Joaquín. (2001). *Estudio de Algunas Propiedades del Mar Usando Modelos Aleatorios*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VIII, N^o 2.
- [6] Goda, Y. (2nd Edition). *Random Seas and Desing of Maritime Structures* Advanced Series on Ocen Engineering, Volume 15. Yokohama National University.
- [7] Morettin, Pedro A. (1979). *Análise Hârmonica de Processos Estocásticos*. 12^o Colóquio de Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro.