UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Estructuras Combinatorias y Análisis Asintótico

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Sixto Rafael Betancourt** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor:Dr. Ricardo Rios.

Caracas, Venezuela
Julio 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Estructuras Combinatorias y Análisis Asintótico**", presentado por el **Br. Sixto Rafael Betancourt**, titular de la Cédula de Identidad **3.436.122**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Ricardo Rios
Tutor

Dra. Mairene Colina
Jurado

Dr. Manuel Maia
Jurado

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mi madre que no tuvo la oportunidad de verlo.

A mi esposa y a mis hijos por soportarme estoicamente durante tantos años.

A mi querido amigo Diomedes Barcenas a pesar de que se marcho sin esperar.

Agradecimiento

A mi madre por darme la vida.

A todos mi compañeros de ruta, que no flaquearon en su afán por sacarme del pantano, y que me brindaron la confianza y el respeto que no merezco.

A los profesores, estudiantes, empleados, obreros y anónimos de esta casa de estudios, por estar ahí.

A Gian-Carlo Rota y a Miguel Méndez por atravesarse en mi camino.

Al Profesor Ricardo Ríos por su orientación y apoyo en la elaboración de este trabajo y por ser mi pana.

Al Lic. Hugo Villarroel por su invalorable asesoría y colaboración en el montaje del trabajo en LaTeX, sin su concurso no hubiera sido posible llegar a feliz término.

Índice general

Introducción

El conteo de cosas es probablemente la experiencia matemática más temprana de la especie humana, y por lo tanto no es sorprendente que la combinatoria enumerativa ocupe un lugar importante en virtualmente cada campo de la matematica. Pero aparte de resultados reconocidos como los de los coeficientes binomiales, el principio de inclusión exclusión y las funciones generatrices, la combinatoria enumerativa es una disciplina relativamente joven. Sus principios fundamentales, métodos y campos de aplicación evolucionaron en madurez en el último siglo, produciendose un enorme crecimiento en los años recientes.
El estudio de las funciones generatrices se ha repotenciado enormemente en los últimos años, ellas son un puente de doble vía entre la matemática discreta y el análisis complejo, de claro desarrollo individual cada uno de los temas, surgiendo una serie de problemas y aplicaciones en diversos campos de la Matemática: Teoría Combinatoria, Probabilidades, Algebra, Geometria, etc. etc. En efecto existe una batería de poderosos, a la vez que sorprendentemente simples, resultados en las formas como las funciones generatrices dan métodos unificados para la solución de problemas tanto continuos como discretos. Su principal belleza estriba en el acoplamiento entre ambos ambientes, convirtiendo a veces la solución laboriosa de problemas relacionados con ecuaciones en diferencias a respuestas muy sencillas en su formulación. Por su parte la teoría del análisis complejo brinda los recursos asintóticos para hacer una estimación, por simple inspección, del tamaño de las soluciones de los problemas de conteo que se van estudiando.
Apoyandose en este par de pilares, el trabajo que a continuación se presenta, tiene por modesto propósito, un paseo detenido y curioso, por algunas estructuras combinatorias familiares, despojandolas de las asperesas que nos las hacen esquivas y presentandolas en la plenitud de la belleza que nos tienen reservadas.

CAPíTULO 1

Métodos Asintóticos Complejos.

Técnicas elementales del análisis complejo permiten estimar asintóticamente resultados de conteo cuando están expresados en la forma de sumas combinatorias. Examinaremos la determinación asintótica de coeficientes de funciones generatrices directamente de una expresion para la función misma y sin necesidad de una expansión explicita. La observación crucial es que muchas de las funciones generatrices que ocurren en enumeración combinatoria son también *funciones analíticas*: su expansión converge en una vecinda del origen y la fórmula integral de Cauchy expresa los coeficientes de tales funciones analíticas como integrales de línea. El uso adecuado de la fórmula integral de Cauchy hace posible determinar cotas efectivas para los coeficientes de tales funciones generatrices. Para el caso bastante común de funciones que tienen singularidades a una distancia finita, las fórmulas de *crecimiento exponencial* relacionan la *ubicación* de las singularidades cercanas al origen al orden de crecimiento exponencial de los coeficientes. Información asintótica precisa sobre los coeficientes de las funciones analíticas es entonces alcanzable mediante argumentos mas refinados. La naturaleza de las *singularidades* de una función establece la fina estructura de la asintótica de sus coeficientes, especialmente los *factores subexponenciales* implicados.

1. Funciones Generatrices.

Las funciones generatrices son una extrordinaria, poderosa y versatil herramienta en combinatoria enumerativa y muchas estimaciones asintóticas se derivan de ellas. Las más comunes en enumeración combinatoria son las funciones generatrices ordinarias y exponenciales. Si $a_0, a_1, \cdots$ es una sucesión cualquiera de números reales o complejos, la *función generatriz ordinaria* correspondiente es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mientras que la *función generatriz exponencial* correspondiente es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}.$$

En general una función generatriz es justamente una serie formal de potencias en la que los problemas de convergencia no son considerados. Sin embargo algunas de las principales aplicaciones de las funciones generatrices en enumeración asintótica toman en consideración la analiticidad y las propiedades de convergencia de esas funciones centrandose entonces la atención sobre sus dominios de convergencia.

Una función generatriz es justamente otra forma de manejar la sucesión que la define. Hay muchas razones para el uso de las funciones generatrices. Una de ellas es, que a pesar de la complejidad que una sucesión pueda presentar, su tratamiento a través de funciones generatrices la hace elegantemente manejable.

Pero más allá de esa versatilidad, lo que realmente las hace importantes es que las funciones generatrices pueden ser utilizadas para obtener información acerca de los comportamientos asintóticos de las sucesiones que ellas codifican, información que a veces no se puede obtener por otros procedimientos. Esta aplicación las han convertido en el instrumento mas comodo y amigable para el estudio del comportamiento asintótico de las sucesiones que son representativas de objetos combinatorios.

En los capitulos que siguen nos ocuparemos con cierto cuidado sobre estos aspectos. A continuación estableceremos una notación que será de gran utilidad en el manejo de las funciones generatrices.

Definición 1. Sea $f(z)$ una serie de potencias de z. Entonces por el símbolo $[z^n]f(z)$ entenderemos el coeficiente de z^n.

Veamos algunos ejemplos de la interesante utilidad de esta notación:

Ejemplo 1.

$$[z^n]e(z) = 1/n! \text{ pues } e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!},$$

$$[z^s](1/(1-3z)) = 3^s \text{ pues } \frac{1}{(1-3z)} = \sum_{n\geq 0}(3z)^n,$$

$$[z^t](1+z)^m = \binom{m}{t} \text{ pues } (1+z)^m = \sum_{n\geq 0}\binom{m}{n}z^n.$$

Una propiedad perfectamente obvia de este símbolo, que se usará con frecuencia, es

$$[z^n]\{z^a f(z)\} = [z^{n-a}]f(z) \tag{1.1}$$

Otra propiedad de este símbolo es la convención de que si β es cualquier número real, entonces

$$[\beta z^n]f(z) = (1/\beta)[z^n]f(z) \tag{1.2}$$

así por ejemplo $[z^n/n!]e^z = 1$ para todo $n \geq 0$.

A manera de ilustración veamos como las funciones generatrices pueden ser de utilidad en problemas que involucran dos variables discretas. Llegaremos a resultados, que son sucesiones de gran importancia en el conteo combinatorio y que usualmente se obtienen por otros métodos.

Sean n y k enteros tales que $0 \leq k \leq n$. ¿De cuántas maneras podemos elegir un subconjunto de k elementos del conjunto $\{n = 1, 2, \ldots, n\}$?

Supongamos que la respuesta a esta pregunta es $f(n, k)$. Consideremos la colección de todos los posibles subconjuntos de k elementos de esos n números y dividamoslo en dos grupos. En el primero pongamos todos aquellos subconjuntos que contienen al número n, y en el segundo a los subconjuntos que no contienen a n. El primero contiene $f(n-1, k-1)$ subconjuntos. El segundo contiene $f(n-1, k)$ subconjuntos. Entonces el número desconocido $f(n, k)$ satisface la recurrencia

$$f(n, k) = f(n-1, k-1) + f(n-1, k), \tag{1.3}$$

(con la condición $f(n, 0) = 1$). Definamos ahora para cada $n = 0, 1, 2\ldots$ la función generatriz

$$B_n(x) = \sum_{k\geq 0} f(n, k)x^k.$$

Multiplicando (1.3) a ambos lados por x^k obtenemos $B_n(x) - 1 = (B_{n-1}(x) - 1) + xB_{n-1}(x)$ para $n \geq 1$ con $B_0(x) = 1$ y por lo tanto

$$B_n(x) = (1 + x)B_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1; B_0(x) = 1). \tag{1.4}$$

Y por consiguiente $B_n(x) = (1 + x)^n$ para todo $n \geq 0$. Así pues nuestro $f(n, k)$ no es otra cosa que el coeficiente de x^k en el polinomio $(1+x)^n$. Otra manera de hallar la fórmula para $f(n, k)$, es usando la fórmula de Taylor, que nos dice que $f(n, k)$ es la k-sima derivada de $(1 + x)^n$ evaluada en $x = 0$, dividida por $k!$. Claramente la k-sima derivada de $(1 + x)^n$ es $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)(1 + x)^{n-k}$. Evaluando en $x = 0$ y dividiendo por $k!$, llegamos a que $f(n, k)$, el número de k-subconjuntos de n objetos, está dado por

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}}{k!}\Big|_{x=0}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

para enteros n, k con $0 \leq k \leq n$.

Los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ tienen sentido cuando $0 \leq k \leq n$, con n y k enteros. Cuando k es un entero **negativo** el coeficiente binomial es $\binom{n}{k} = 0$.

Cuando n es un entero negativo, el segundo miembro (1.5) es díficil de descifrar, mientras que el tercer miembro es menos complicado, incluso si n es un número complejo, pero siempre con k un entero no negativo. De modo que obtenemos una extensión de la definición de los coeficientes binomiales para numeros complejos arbitrarios n, a saber,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad (k \geq 0 \quad \text{entero}). \tag{1.6}$$

Así $\binom{-3}{3} = (-3)(-4)(-5)/6 = -10$, y $\binom{i}{2} = i(i-1)/2 = (-1-i)/2$, etc. La función generatriz

$$B_n(x) = (1+x)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots$$

permanece válida para todo número complejo n: la serie termina si n es un entero no negativo, y converge para $|x| < 1$ en cualquier caso.

Veamos ahora el soporte de $\binom{n}{k}$, esto es los valores de n y k para los que $\binom{n}{k} \neq 0$. Primero k debe ser un enero no negativo. Si n no es un entero no negativo seguramente $\binom{n}{k}$ sera distinto de cero por (1.6). Si n es un entero no negativo entonces (1.6) nos dice que $\binom{n}{k} \neq 0$ si $0 \leq k \leq n$ por definición de número combinatorio.

Una consecuencia importante de lo anterior es que si n es un entero no negativo, en lugar de escribir $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, podemos escribir $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$, por que el coeficiente binomial se anulará en todos los valores de k que esten fuera de $0 \leq k \leq n$ en los índices de la suma. Los coeficientes binomiales controlan la suma y por lo tanto no hay necesidad de hacerlo con los índices de la suma.

Tomando esto en consideración, introduciremos dos convenciones que se usarán frecuentemente en el texto:

1) Cuando los índices de las variables que están siendo sumadas no se especifican, se entenderá que su rango es de $-\infty$ a $+\infty$.

2) Cuando el rango de los índices no se especifica en una ecuación, se entenderá que la ecuación se cumple para todos los valores enteros de los índices.

Por ejemplo $\sum_k \binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ es una expresión general para el binomio de Newton, que se entiende fácilmente sin necesidad de indicar los límites de la suma. Estas convenciones nos evitarán trabajo innecesario, sobre todo por que no tendremos que preocuparnos por cambiar los límites de los índices cuando hagamos cambios, en las variables de sumación.

Veamos ahora unos resultados interesantes. Si multiplicamos $B_n(x)$ por y^n y sumamos solamente sobre $n \geq 0$, encontramos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B_n(x)y^n &= \sum_{n\geq 0}\sum_k \binom{n}{k}x^k y^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(1+x)^n y^n\\ &= \frac{1}{1-y(1+x)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto para enteros $n \geq 0$, $\binom{n}{k} = [x^k y^n](1-y(1+x))^{-1}$.

Desde otro enfoque evaluemos, para enteros no negativos k, la suma $\sum_n \binom{n}{k}y^n$. Notemos que el índice k recorre todos los enteros, y los sumando se anulan cuando $n < k$.

Esta suma es claramente

$$\begin{aligned}
[x^k]\sum_{n\geq 0}\sum_k \binom{n}{k} x^k y^n &= [x^k]\frac{1}{1-y(1+x)} \\
&= \frac{1}{1-y}[x^k]\frac{1}{1-(\frac{y}{1-y}x)} \\
&= \frac{1}{1-y}(\frac{y^k}{1-y}) \\
&= \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido los importantes resultados siguientes

$$\sum_k \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n; \sum_n \binom{n}{k} y^n = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}, \tag{1.7}$$

que serán de gran utilidad en lo que sigue.

1.1. Funciones Analíticas y Funciones Meromorfas. Las funciones analíticas son el concepto matemático principal para asintótica compleja. Ellas pueden ser caracterizadas en tres maneras esencialmente equivalentes: por medio de expansión en series convergentes (a la manera de Cauchy y Weierstrass), mediante diferenciabilidad (a la manera de Riemann) y por el hecho de que sus integrales se anulan en caminos cerrados. Las funciones meromorfas son simplemente el cociente de funciones analíticas.
Consideraremos funciones definidas en ciertas *regiones* del plano complejo. *Por una región se entiende un subconjunto abierto* Ω *del plano complejo que es conexo.*

DEFINICIÓN 2. Una función $f(z)$ definida en una región Ω, es analítica en un punto z_0 de Ω, si para algún disco abierto centrado en z_0 y contenido en Ω, es representable por una expansion en serie de potencias convergente

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z-a)^n. \tag{1.8}$$

Una función es analítica en una región Ω si es analítica en cada punto de Ω. Las Funciones analíticas en un punto $z = a$ son cerradas respecto a la suma y al producto. Si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en $z = a$ entonces, el cociente $f(z)/g(z)$, también es analítico, siempre que

$g(a) \neq 0$ (las funciones analíticas son al mismo tiempo un algebra y un dominio de integridad).

Las funciones analíticas son también cerradas con respecto a la composición: si $f(z)$ es analítica en $z = a$ y $g(w)$ es analítica en $w = f(a)$, entonces $g \circ f$ es analítica en $z = a$. Las funciones inversas existen condicionalmente: si $f'(a) \neq 0$, entonces $f(z)$ es localmente invertible, de modo que existe una función analítica g que satisface $f \circ g = g \circ f = Id$ donde Id es la función identidad, $Id(z) = z$.

Estas definiciones son esencialmente locales. Una función es analítica en una región Ω si es analítica en cada punto de Ω.

Definición 3 (Diferencial.). Una función $f(z)$ es llamada compleja diferenciable (también *holomorfa*) en $z = a$ si

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existe y es indiferente de la manera como Δz tiende a 0. La definición se extiende a regiones arbitrarias.

A menudo se usan los conceptos de *función simple* y *función entera*.

Definición 4. Diremos que una función $f(z)$ es *simple* en una región Ω si es analítica, univaluada e inyectiva [1]. Por otra parte se dirá que una función es *entera* si es analítica en todo el plano complejo (excepto posiblemente en el punto al infinito).

Se sigue de un conocido teorema de Riemann que una función es analítica en una región Ω si y solo si es compleja diferenciable en Ω.

Integral. Un concepto importante en este contexto es el de *dominio simplemente conexo*: un conjunto abierto conexo es simplemente conexo si caminos cerrados pueden ser continuamente deformados en puntos. Un ejemplo típico es el dominio interior definido por una curva simple, por ejemplo un disco abierto; en contraste un disco perforado o un anillo circular no

[1] Titchmarsh, The Theory of Functions, **6.4**

son *simplemente* conexos.

Es un teorema básico el hecho de que si f es analítica dentro de un conjunto abierto simplemente conexo, entonces la integral de línea $\int_\Gamma f(z)dz$ tomada a lo largo del camino Γ en Ω depende solamente de los puntos extremos de Γ. Si Ω es simplemente conexa y Γ es tomada como una curva cerrada dentro de Ω, entonces la integral $\int_\Gamma$ se hace cero. La propiedad para una función definida sobre un dominio simplemente conexo de tener sus integrales a lo largo de ciclos (caminos simplemente conexos) igual a cero es un efecto equivalente a la analiticidad.

1.2. Funciones Meromorfas y Residuos. El cociente de dos funciones analíticas $f(z)/g(z)$ deja de ser analítico en un punto donde $g(a) = 0$. Sin embargo una estructura simple para cocientes de funciones analíticas prevalece.

Una función $h(z)$ es *meromorfa* en $z = a$ si y solo si en una vecindad de a con $z \neq a$ la función es representable por una expansión de la forma

$$h(z) = \sum_{n \geq -m} h_n (z-a)^n. \tag{1.9}$$

Si $h_{-m} \neq 0$ entonces se dice que $h(z)$ tiene un polo de orden m en $z = a$. De manera equivalente $h(z)$es meromorfa en $z = a$ si puede ser representada como $f(z)/g(z)$, con $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en $z = a$. Cuando $h(z)$ tienen un *polo* de orden $m \geq 1$ en $z = a$, entonces el coeficiente h_1 es llamado *el residuo* de $h(z)$ en $z = a$ y es designado por

$$Res[h(z) : z = a]$$

o también $[\frac{1}{z-a}]h(z)$. Al igual que para las funciones analíticas, una función es meromorfa en un dominio si y solo si es meromorfa en cada punto del dominio.

Veamos un importante resultado del Analisis Complejo como lo es el *Teorema del Residuo* cuyo merito es relacionar las propiedades globales de las funciones meromorfas (sus integrales a lo largo de curvas) a sus propiedades locales en puntos específicos, los polos.

Teorema 1.1 (Teorema del Residuo de Cauchy.). *Sea Γ una curva simple orientada positivamente y situada en el interior de una región simplemente conexa Ω (como un disco), y asumamos que $h(z)$ es meromorfa en Ω y analítica en Γ. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)dz = \sum_s Res[h(z); z = s],$$

donde la suma es extendida a todos los polos s de $h(z)$ encerrados en Γ.

Demostracion 1. Para verlo en el caso representativo donde $h(z)$ tiene solamente un polo en $z = 0$ observemos recurriendo a las funciones primitivas que

$$\int_\Gamma h(z)dz = \sum_{n\geq -m, n\neq -1} h_n \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_\Gamma + h_{-1}\int_\Gamma \frac{dz}{z},$$

donde $[u(z)]_\Gamma$ indica la variación de la función $u(z)$ a lo largo del contorno Γ.
Esta expresión se reduce a su último término que es igual a $2\pi i$, que resulta de la integración a lo largo de un círculo haciendo $z = re^{i\theta}$.
La demostración se extiende a la consideración de un único polo $z = a$. En el caso de polos multiples se procede a una simple descomposición del dominio interior de Γ en células cada una conteniendo un único polo.

Muchos resultados interesantes sobre funciones se derivan del teorema del residuo. Por ejemplo si $f(z)$ es analítica en Ω, z_0 en Ω y λ un contorno simple que encierra z_0, se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\lambda f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0}. \tag{1.10}$$

Esto es inmediato pues

$$Res[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}; \zeta = z_0] = f(z_0).$$

Diferenciando con respecto a z_0 bajo el signo integral, se tiene

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\lambda f(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \tag{1.11}$$

Teorema 1.2 (Fórmula del Coeficiente de Cauchy.). *Sea $f(z)$ analítica en una región simplemente conexa (como un disco) y sea Γ una curva orientada positivamente y localizada dentro de Ω que encierra el origen. Entonces los coeficientes $[z^n]f(z)$ admiten una representación integral*

$$f_n \equiv [z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Demostracion 2. Esta fórmula sigue directamente del Teorema del residuo ya que

$$[z^n]f(z) = Res\left[\frac{f(z)}{z^{n+1}}; z = 0\right].$$

La fórmula de los coeficientes nos permite deducir información acerca de los coeficientes, del compotamiento de la función misma usando contornos de integración Γ elegidos convenientemente. Abre la posibilidad de estimar los coeficientes $[z^n]f(z)$ en la expansión de $f(z)$ cerca de 0 mediante el uso de la información sobre $f(z)$ cuando se aleja de 0.

1.3. Singularidades. Una singularidad puede informalmente ser definida como un punto donde la función deja de ser analítica.
Por ejemplo, sea $f(z)$ una función analítica sobre el dominio interior delimitado por una curva cerrada simple en el plano complejo. Una *singularidad* es un punto z_0 en la frontera de Ω tal que no es posible determinar una extensión $f^*(z)$ de $f(z)$ definida sobre un conjunto abierto $\Omega^* \supset \Omega$ conteniendo z_0, con $f^*(z)$ analítica en Ω^*. En términos simples, la función es singular en z_0 si no puede ser continuada como función analítica más allá de z_0.

Definición 5. Las singularidades de valor en módulo pequeño de una función analítica en 0 son llamadas singularidades dominantes.

Colocaremos un par de teoremas que serán de gran utilidad:

Teorema 1.3. *Supongamos que la serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge para todo z en $|z| < R$, y sea $f(z)$ su suma. Entonces $f(z)$ es una función analítica en $|z| < R$. Si además la serie diverge para $|z| > R$, entonces la función $f(z)$ debe tener al menos una singularidad en el cículo de convergencia $|z| = R$.*

En otras palabras:*una serie de potencias se mantiene convergente hasta que algo la interrumpe, a saber una singularidad de la función que está siendo representada.*

Teorema 1.4. *Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ analítica en alguna región conteniendo al origen, sea $z_0 \neq 0$ una singularidad de $f(z)$ de valor pequeño en módulo, y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe N tal que para todo $n > N$ tenemos*

$$|a_n| < \left(\frac{1}{z_0} + \epsilon\right)^n.$$

Además para un número infinito de n tenemos

$$|a_n| > \left(\frac{1}{z_0} - \epsilon\right)^n.$$

CAPíTULO 2

Numeros de Stirling de Segunda Clase.

Este capitulo lo destinaremos al estudio de dos objetos combinatorios que nos permitiran familiarizarnos con el tipo de estructuras en el que las funciones generatrices son de gran utilidad.

Definición 6. Por una *partición de un conjunto* S entendemos una colección de conjuntos no vacios, disjuntos dos a dos y cuya unión es S. Otro nombre para una partición de S es el de *relación de equivalencia* sobre S. Los conjuntos en los cuales S está particionado son llamados las *clases* de la partición.

Por ejemplo podemos particionar $[5]$ (recordemos que $[n]$ es el conjunto $\{1, 2, 3, \cdots n\}$) de varias maneras. Una de ellas es como $\{123\}; \{4\}; \{5\}$. En esta partición tenemos tres clases, una contiene 1,2,y 3, la otra solamente 4, mientras que la otra contiene solamente 5. El orden que tengan los elementos dentro de las clases no tiene ninguna importancia, como tampoco la tiene el orden de las clases. Lo que importa es 'quien está acompañado y quién está solo'.

Aquí hay una lista de la partición de $[4]$ en 2 clases:

$$\{12\}\{34\}; \{13\}\{24\}; \{14\}\{23\}; \{123\}\{4\}; \{124\}\{3\}; \{134\}\{2\}; \{1\}\{234\}. \tag{2.1}$$

Hay exactamente 7 particiones de $[4]$ en 2 clases.

El problema que trataremos de resolver mediante este ejemplo es el de descubrir cuantas particiones de $[n]$ en k clases hay. Este número lo denotaremos con $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ y se le conoce como el *número de Stirling de segunda clase.*Nuestra lista anterior nos muestra que $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$.

Para saber algo más acerca de estos números seguiremos el método de las funciones generatrices. Primero encontraremos una relación de recurrencia, después unas cuantas funciones generatrices y luego algunas fórmulas exactas, etc.

Comenzaremos con una fórmula de recurrencia para $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

Sean n y k enteros positivos. Imaginemos que tenemos al frente la colección de todas las particiones de $[n]$ en k clases. Hay exactamente $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ de ellas. Separemos esta colección en dos pilas; en la primera pila estarán todas aquellas particiones de $[n]$ en k clases en las que la letra n está sola. En la segunda pila estarán todas las otras particiones, esto es, aquellas particiones en las que n está en las clases acompañadas con otras letras.

El problema consiste en determinar cuántas particiones hay en cada una de las dos pilas (expresadas en términos de los números de Stirling).

Consideremos la primera pila. Ahí en cada partición n aparece sola formando una clase. Imaginemosnos recorriendo la pila y borrando la clase $'(n)'$ cada vez que aparezca en cada partición simple en la pila. Después de haber hecho esto solamente quedaría la colección completa de todas las particiones de $[n-1]$ en $k-1$ clases. Habrá entonces $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ de ellas, y por lo tanto deben haber $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ particiones en la primera fila.

Esto resultó bastante sencillo. Consideremos la segunda pila. Ahí la letra n aparece acompañada con otras letras en las clases que forman las particiones. Por lo tanto si recorremos la pila y borramos la letra n cada vez que aparezca, no afectaremos el número de las clases en cada partición; las particiones conservaran su clases originales. Después de borrar la letra n en todas partes, nuestra pila contendrá ahora particiones de $[n-1]$ letras en k clases. Sin embargo, cada una de esas particiones, no aparecerá exactamente un vez, sino varias veces.

Por ejemplo, en la lista (2.1), la segunda pila contiene las particiones

$$\{12\}\{34\};\{13\}\{24\};\{14\}\{23\};\{124\}\{3\};\{134\}\{2\};\{1\}\{234\} \tag{2.2}$$

después de borrar $'4'$ en cada una de ellas obtenemos la lista

$$\{12\}\{3\};\{13\}\{2\};\{1\}\{23\};\{12\}\{3\};\{13\}\{2\};\{1\}\{23\}$$

Lo que estamos viendo es una lista de todas las particiones de $[3]$ en 2 clases, en la que cada partición aparece dos veces. Por lo tanto esta lista contiene exactamente $2\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ particiones.

En el caso general, después de borrar n en todas partes en la segunda pila, resultará la lista de todas las particiones de $[n-1]$ en k clases, donde cada partición aparecerá k veces. Por lo tanto la lista contendrá exactamente $k\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\}$ particiones.

En consecuencia, la segunda pila debe también contener $k\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\}$ particiones después de la eliminación de n.

La lista original de $\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}$ *particiones fué por lo tanto dividida en dos pilas, la primera de las cuales contiene* $\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right\}$ *particiones y la segunda contiene* $k\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\}$ *particiones.*

Por lo tanto debe ser cierto que

$$\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right\} + k\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\} \qquad (con los (n,k), tomados arbitrariamente).$$

Para determinar el rango de n y k extendemos la definición de $\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}$ a todos los pares de enteros. Pondremos $\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\} = 0$ si $k > n$ o $n < 0$ o $k < 0$. Además, $\left\{\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right\} = 0$ si $n \neq 0$, y tomamos $\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\} = 1$. Con estas convenciones, la recurrencia anterior es válida para todo (n,k) diferente de $(0,0)$, y tendremos

$$\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right\} + k\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\} \qquad \left((n,k) \neq (0,0); \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\} = 1\right) \tag{2.3}$$

El escenario está preparado para buscar la función generatriz. Hay tres candidatos naturales para funciones generatrices que pueden ser hallados rápidamente, a saber

$$
\begin{aligned}
A_n(y) &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} y^k. \\
B_k(x) &= \sum_n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n. \qquad (2.4) \\
C(x,y) &= \sum_{n,k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n y^k.
\end{aligned}
$$

Antes de sumergirnos en los cálculos, detengamosnos por un momento para desarrollar una intuición acerca de lo que resultará de cada una de las elecciones que hagamos de estos candidatos. Para construir $A_n(y)$ multiplicamos (2.3) por y^k y sumamos sobre k. Hay algunos problemas implícitos en esta construcción, sobre todo con el factor k que aparece en el segundo término de la derecha. En efecto, después de multiplicar por y^k y sumar sobre k tendremos que lidiar con algo como $\sum_k k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} y^k$. Esto nos recuerda la derivada de $A_n(y)$, esto complica un poco las cosas.

Elijamos por el contrario $B_k(x)$. Para su construcción multiplicamos (2.3) por x^n y sumamos sobre n. En este caso el factor k que nos creaba problemas en la elección anterior no está ahora implicado en la suma y podemos sacarlo como un factor multiplicativo.

Nos inclinamos entonces por la última aproximación, y tratamos de encontrar $B_k(x)$ $(k > 0)$. Multipliquemos (2.3) por x^n y sumemos sobre n; obtenemos entonces

$$
\begin{aligned}
B_k(x) &= \sum_{n\geq 0} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^n + \sum_{n\geq 0} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^n \\
&= xB_{k-1}(x) + kxB_k(x) \qquad (k \geq 1; B_0(x) = 1).
\end{aligned}
$$

Reordenando la expresión anterior obtenemos

$$
B_k(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}(x) \qquad (k \geq 1; B_0(x) = 1).
$$

y finalmente, por recursión

$$
\begin{aligned}
B_k(x) &= \sum_n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n \\
&= \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)} \qquad (k \geq 0). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

El problema de encontrar una fórmula explícita para los números de Stirling puede por lo tanto ser resuelta si encontramos una expansión en serie de potencias de la función que aparece en (2.5). Esto nos recuerda una dosis de fracciones parciales, no una fórmula de Taylor!.

La expansión en fracciones parciales tiene la forma

$$
\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{(1-jx)}.
$$

Para encontrar los α, fijemos r, $1 \leq r \leq k$, multipliquemos ambos lados por $1-rx$, y hagamos $x = 1/r$. El resultado es que

$$
\begin{aligned}
\alpha_r &= \frac{1}{(1-1/r)(1-2/r)\cdots(1-(r-1)/r)(1-(r+1)/r)\cdots(1-k/r)} \\
&= (-1)^{k-r} \frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!} \qquad (1 \leq r \leq k) \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

De (2.5) y (2.6) obtenemos para $n \geq k$

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= [x^n]\left\{\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}\right\} \\
&= [x^{n-k}]\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \\
&= [x^{n-k}]\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha_r}{1-rx} \qquad (k \geq 1) \\
&= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r[x^{n-k}]\frac{1}{1-rx} \qquad (2.7) \\
&= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r r^{n-k} \\
&= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}r^{n-k} \\
&= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^n}{r!(k-r)!}.
\end{aligned}
$$

que es justamente lo que estabamos buscando: una fórmula explìcita para $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Como prueba vemos que $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$, un resultado que conocemos. Notemos que la fórmula también nos dice que $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^n - 1\,(n > 1)$. Esta interesante fórmula la utilizaremos más adelante.

Estudiaremos ahora otra de las aproximaciones que señalamos para resolver la recurrencia de los números de Stirling, esto es la funciones en (2.4). El empleo de las $A_n(y)$ presenta el inconveniente de que su completación es mucho más complicada, pero aun así, la importancia de esas funciones generatrices estriba en el amplio uso que se les da en la teoría.

Para comenzar con el estudio, fijemos $n > 0$, multipliquemos (2.3) por y^k y sumemos sobre

k. El resultado es

$$A_n(y) = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} y^k + \sum_k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} y^k \tag{2.8}$$
$$= yA_{n-1}(y) + \left(y\frac{d}{dy} \right) A_{n-1}(y)$$
$$= \{y(1+D_y)\}\, A_{n-1}(y) \qquad (n > 0; A_0(y) = 1).$$

El rasgo novedoso en este procedimiento es la aparición del operador diferencial $D_y = (d/dy)$ que se utilizó para eliminar el factor k en la relación de recurrencia.
Por lo tanto cada función $A_n(y)$ es obtenida de la precedente aplicando el operador $y(1+D_y)$. Comenzando con $A_0 = 1$, obtenemos sucesivamente $y, y+y^2, y+3y^2+y^3, \cdots$, pero como lo, que se requiere es una fórmula explícita, solamente encontramos por ahora que

$$A_n(y) = \{y + yD_y\}^n 1 \qquad (n \geq 0), \tag{2.9}$$

en esta aproximación.
Hay, sin embargo, dos cosas que pueden ser vistas con más claridad a través de esta función generatriz que con las $B_n(x)$. Una de ellas se discutirá más adelante y concierne con la forma de la sucesión $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ para un n fijo, cuando k va de 1 a n. Resulta que la sucesón crece por un momento y después decrece, como es el caso de la *unimodalidad*.

Definición 7. Una sucesión finita $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ se llama *unimodal* si para algún indice k, $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k$ y $a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$.

Es decir la sucesión tiene justamente un máximo. Muchas sucesiones combinatorias son *unimodales*, como esta, pero en algunas casos puede ser complicado probarlo. Sin embargo, gracias a la fórmula (2.9) veremos que no es tan díficil como parece.

Para una aplicación de (2.7), recordemos que el número de Stirling $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ es la manera de particionar un conjunto de n elementos en k clases. Supongamos que no tengamos un particular cuidado en la cantidad de clases que hay, pero queremos conocer el numero de maneras de particionar un conjunto de n elementos. Designemos estos números por $\{b_n\}_0^\infty$. Ellos son llamados los números de Bell. Es convención tomar $b_0 = 1$. La sucesión de los números de Bell comienza $1, 1, 5, 15, 52, \cdots$

¿Podemos encontrar una fórmula explícita para los números de Bell?. Nada de eso. En (2.7) tenemos una fórmula explícita para $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Si sumamos aquella fórmula desde $k = 1$ hasta n tendremos una fórmula explícita para $b(n)$. Sin embargo hay una cosa más que es beneficioso destacar. La fórmula (2.7) es válida para *todos* los valores enteros positivos de n y k. En particular es válida para $k > n$. Pero $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ si $k > n$. Esto significa que la fórmula (2.7) no tiene nada que *decirnos* sobre $\left\{ \begin{matrix} 13 \\ 19 \end{matrix} \right\} = 0$, pues eso está implicito ; es decir si alegremente insertamos $n = 13, k = 19$ en la suma, al relizarse esta se obtendrá 0.

Por lo tanto para calcular los números de Bell podemos sumar el último miembro de (2.7) desde $k = 1$ hasta M, donde M es cualquier número $\geq n$. En efecto

$$\begin{aligned} b(n) &= \sum_{k=1}^{M} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!(k-r)!} \\ &= \sum_{r=1}^{M} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{M} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} \\ &= \sum_{r=1}^{M} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \left\{ \sum_{s=0}^{M-r} \frac{(-1)^s}{s!} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora M es arbitrario, excepto que $M \geq n$. Como la suma parcial de la serie exponencial entre llaves es tan sugestiva, mantengamos n y r fijos y hagamos $M \longrightarrow \infty$. Esto da la siguiente fórmula notable para los números de Bell

$$b(n) = \frac{1}{e} \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{r!}. \tag{2.10}$$

Esta fórmula para los números de Bell, aun cuando tiene un cierto encanto, no se presta para los cálculos. De ella sin embargo podemos derivar una función generatriz para los números de Bell que es inesperadamente simple y elegante. Buscaremos una función generatriz en la forma

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n. \tag{2.11}$$

Es la primera vez que encontramos necesario introducir el factor extra $1/n!$ en los coeficientes de una función generatriz. Esto sucede frecuentemente, y resulta de gran utilidad. Una función generatriz de la forma (2.11), con $1/n!$ dentro del coeficiente es llamada *función generatriz exponencial*. Diremos por ejemplo que $B(x)$ es la función generatriz exponencial de los números de Bell.
Cuando necesitemos distinguir las diferentes clases de funciones generatrices podemos usar la frase *la serie ordinaria de potencias de la función generatriz de la sucesión* $\{a_n\}$ es $\sum_n a_n x^n$ ó *la función generatriz exponencial de la sucesión* $\{a_n\}$ es $\sum_n a_n x^n/n!$.

Para encontrar $B(x)$ explícitamente, tomemos la fórmula (2.10) que es valida para $n \geq 1$, multipliquemosla por $x^n/n!$ y sumemos sobre $n \geq 1$. Esto da

$$\begin{aligned}
B(x) - 1 &= \left(\frac{1}{e}\right) \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{r\geq 1} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \\
&= \left(\frac{1}{e}\right) \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r!} \sum_{n\geq 1} \frac{(rx)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{1}{e}\right) \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r!} (e^{rx} - 1) \\
&= \left(\frac{1}{e}\right) \left(e^{e^x} - e\right) \\
&= e^{e^x - 1} - 1.
\end{aligned}$$

Que es la demostración del siguiente

Teorema 2.1. *La función generatriz exponencial de los números de Bell es e^{e^x-1}, es decir, el coeficiente de $x^n/n!$ en la expansión en series de potencias de e^{e^x-1} es el número de particiones de un conjunto de n elementos.*

Este resultado es con toda seguridad un ejemplo extraordinario del poder de aproximación de las funciones generatrices. Los números de Bell en si mismos son complicados, pero la función generatriz es simple y fácil de recordar.

El otro elemento novedoso de esta historia es el hecho de que podemos *ir* de las funciones generatrices *a* las fórmulas de recurrencia aun cuando en todos nuestros ejemplos el movimiento ha sido en la otra dirección. Nos proponemos ahora derivar del Teorema 1 una fórmula de recurrencia para los números de Bell, que hará fácil el cálculo de tantos de ellos como necesitemos para visualizarlos.

Primero, el teorema nos dice que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{b(n)}{n!}x^n = e^{e^x-1}. \tag{2.12}$$

Seguidamente echaremos mano de una operación nada convencional y que describimos a continuación.

La Operación $x(d/dx)$

(1) Tomar el logaritmo a ambos lados de la ecuación

(2) Derivar ambos lados y multiplicar por x

(3) Eliminar las fracciones de la ecuación

(4) Para cada n, encontrar los coeficientes de x^n a ambos lados de la ecuación e igualarlos

Aunque la mejor motivación para el empleo del algoritmo anterior es el hecho de que funciona, veamos que efectivamente es asi antes de usarlo. Al tomar logaritmo se produce una simplificación de la función $e^{e^{x-1}}$, que hace desaparecer el terrible misterio que tienen sus coeficientes en su expansión en serie de potencias, y los hace más amigables. El costo de esa simplificación se refleja en el lado izquierdo al aparecer el impresionante logaritmo de una serie. Al derivar el logaritmo de la serie lo reducimos a un cociente de series y al multiplicar por x recuperamos el orden de potencia de x en la serie del numerador. Eliminamos el cociente de series y comparamos los coeficientes de x^n a ambos lados de el sigo de igualdad para terminar el trabajo.
Veamos los detalles. Después de aplicar 1 a (2.12), tenemos

$$\log\left(\sum_{n\geq 0}\frac{b(n)}{n!}x^n\right) = e^x - 1.$$

El paso 2 nos da

$$\frac{\sum_n n\frac{b(n)}{n!}x^n}{\sum_n \frac{b(n)}{n!}x^n} = xe^x.$$

Multiplicando por la serie del denominador a ambos lados obtenemos

$$\sum_n n\frac{b(n)}{n!}x^n = (xe^x)\sum_n \frac{b(n)}{n!}x^n.$$

Finalmente tenemos que identificar los coeficientes de x^n a ambos lados de esta ecuación. A la izquierda es fácil. A la derecha, primero tenemos que multiplicar dos series de potencias y después identificar los coeficientes. Como en el capitulo 3 trabajaremos con una regla general y bastante fácil para hacer cosas como estas, pospondremos este cálculo hasta entonces y simplemente indicarmose el resultado.

Así pues los números de Bell satisfacen la recurrencia

$$b(n) = \sum_k \binom{n-1}{k} b(k) \qquad (n \geq 1;\, b(0) = 1). \tag{2.13}$$

Hemos visto varios ejemplos de como las funciones generatrices pueden ser utilizadas para encontrar relaciones de recurrencia, y sólo después podemos dar una interpretación combinatoria de la recurrencia.

CAPíTULO 3

Series Formales de Potencias

Discutir la teoría *formal* de las series de potencias, como opuesta a su teoría analítica, es tratar esas series como objetos puramente algebraicos, asignándoles un rol de herramienta de representación, sin hacer uso de ninguna de las propiedades funcionales teóricas de la función que puede ser representada por la serie, desconociendo incluso si una tal función existe.
Estudiamos series formales porque ocurre a menudo, en la teoría de las funciones generatrices, que al tratar de resolver una relación de recurrencia introducimos una función generatriz y realizamos manipulaciones, pero con reserva porque no estamos seguros si las series con las que estamos trabajando convergen. Podríamos estar trabajando con la derivada de una función generatriz sin tener ninguna idea sobre si la serie converge a una función.
Por fortuna, podemos decir que no hay necesidad de preocuparse porque las diferentes manipulaciones pueden ser realizadas en el anillo de las series formales de potencias, donde los problemas de convergencia no existen. Podemos ejecutar las operaciones que hagan falta y concluir con la serie generadora, y solamente entonces descubrir si converge y, por lo tanto, que representa a una verdadera función. Si no, podemos obtener una cantidad de información sobre la serie formal, pero no estaríamos en capacidad de obtener información analítica, tales como, fórmulas asintóticas para establecer el tamaño de los coeficientes.
Podrían resultar también formulas exactas sobre las sucesiones en estudio, aun cuando en esos casos, el método operacional se mantenga en una fundamentación puramente algebraica.
La serie

$$f = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + 120x^5 + \cdots + n!x^n + \cdots \tag{3.1}$$

tiene una apariencia muy agradable como una serie de potencia formal, a pesar del hecho de que ella no converge para un valor de x distinto de 0, lo que no ofrece posibilidades para la investigación con métodos analíticos. A pesar de ello, esta serie juega un importante papel en algunos problemas de conteo natural, como se verá más adelante.

Definición 8. Una *serie de potencias formal* es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

donde la sucesión $\{a_n\}_0^\infty$ es llamada una *sucesión de coeficientes*.

Decir que dos series son *iguales*, es decir que sus sucesiones de coeficientes son las mismas. Podemos hacer ciertas clases de operaciones con series de potencias formales. Podemos *sumarlas* o *substraerlas*, por ejemplo. Esto se hace de acuerdo con las reglas

$$\sum_n a_n x^n \pm \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n \pm b_n) x^n$$

Las series de potencias pueden ser multiplicadas mediante la regla usual del producto de Cauchy

$$\sum_n a_n x^n \sum_n b_n x^n = \sum_n c_n x^x \qquad (c_n = \sum_k a_k b_{n-k}) \tag{3.2}$$

Es ciertamente esta regla del producto la que cuenta para la extensa aplicabilidad del método de las series en problemas de combinatoria. Debido a esto es que frecuentemente podemos construir todos los a_n de los objetos de tipo n en alguna familia mediante la elección de un objeto de tipo k y de un objeto de tipo $n-k$ e hilvanarlos para hacer un objeto de tipo n. El número de maneras de hacer eso será $a_k a_{n-k}$, y si sumamos sobre k encontraremos que el producto de Cauchy de dos series formales es directamente pertinente al problema que estamos estudiando.
Si seguimos la regla de la multiplicación, obtenemos, por ejemplo

$$(1-x)(1+x+x_2+x_3+\cdots) = 1.$$

Así podemos decir que la serie $(1-x)$ tiene un recíproco y que el recíproco es $1+x+x_2+x_3+\cdots$ (y de la otra manera también).

Proposición 1. *Una serie formal $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene un recíproco sí, y solamente sí, $a_0 \neq 0$. En ese caso el recíproco es único.*

Demostracion 3. Supongamos que f tiene el recíproco $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$. Entonces $f.(1/f) = 1$ y de acuerdo con (3.2), $c_0 = a_0 b_0 = 1$, y por lo tanto $a_0 \neq 0$. Además, en este caso, (3.2) nos dice que para $n \geq 1$, $c_n = 0 = \sum_n a_k b_{n-k}$, de donde encontramos

$$b_n = (-1/a_0) \sum_{n \geq 1} a_k b_{n-k}. \tag{3.3}$$

Esto determina $b_1, b_2, \cdots$ de manera única, como se había afirmado.
Recíprocamente, supongamos que $a_0 \neq 0$. Entonces podemos determinar $b_0, b_1, \cdots$ de (3.3) siendo la serie resultante $\sum_n b_n x^n$ el recíproco de f.

La colección de series de potencias formales bajo las reglas de aritmética que justamente hemos descrito forman un *anillo*, en el que los elementos invertibles son las series con términos constantes distinto de cero.
La idea anterior del *recíproco* de una serie de potencias no debe ser confundida con la noción sutil de la *inversa* de una tal serie. La inversa de una serie f, si existe, es una serie g tal que $(f(g(x)) = g(f(x)) = x$. ¿Cuándo puede existir una tal inversa?. Primero hay que *definir* el símbolo $f(g(x))$, entonces podremos ocuparnos sobre si es o no igual a x.
Si $f = \sum_n a_n x^n$, entonces $f(g(x))$ significa

$$f(g(x)) = \sum_n a_n g(x)^n = \sum_n b_n x^n. \tag{3.4}$$

Si la serie $g(x)$ tiene el término g_0 constante entonces cada término de la serie (3.4) aparece en el cálculo del correspondiente coeficiente b_n. Por ejemplo

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_0^n \qquad (= 0) \\ b_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a, g) \quad (= 1), \end{aligned}$$

donde $C_n(a, g)$ son los coeficientes del producto de Cauchy de las sucesiones $a = (a_n)_{n \geq 0}$ y $g = (g_n)_{n \geq 0}$, siendo cada vez más engorroso el cálculo de los otros coeficientes b_n, $n > 1$. Por otro lado, si $g_0 = 0$, estaríamos en capacidad de calcular el coeficiente b_{57} con los primeros 58 términos de la serie (3.4). En efecto, notemos que cada término simple

$$\begin{aligned} a_n g(x)^n &= a_n (g_1 x + g_2 x^2 + \cdots)^n \\ &= a_n x^n (g_1 + g_2 x^2 + \cdots)^n \end{aligned}$$

con $n > 57$ contendrá solamente potencias de x mayores que 57, así que no necesitamos mirar aquellos términos para encontrar el coeficiente de x^{57}. En particular, $a_1 g_1 = 1$.

Así, si $g_0 = 0$, el cálculo de cada uno de los coeficientes de la serie $f(g(x))$ es un proceso *finito*, por lo tanto todos sus términos están bien definidos y por consiguiente la serie. Si $g_0 \neq 0$, vimos que el cálculo de cada coeficiente de $f(g(x))$ es un proceso *infinito* a menos que f sea un polinomio, y tendrá sentido solamente si la serie converge. Como en la teoría algebraica formal las ideas de convergencia no son consideradas, la *composición $f(g(x))$ de dos serie de potencias formales está definida sí y solamente sí $g_0 \neq 0$ ó f es un polinomio.* Por ejemplo, la serie $e^{e^x} - 1$ es una serie formal bien definida porque el primer término de $\exp(x) - 1$ es nulo, mientras que la serie e^{e^x} no está definida, al menos desde el enfoque de la definición general de composición de funciones.
Para retomar la cuestión de la serie inversa de una serie dada f, veremos que si una tal serie inversa g existe, entonces

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \tag{3.5}$$

ambas igualdades deben tener sentido y ser ciertas. Concluimos que si $f(0) = 0$ *la serie inversa existe sí y solamente sí el coeficiente de x es distinto de 0* en la serie de f.

Proposición 2. *Sean las series de potencias formales f, g que satisfacen (3.5) y $f(0) = 0$. Entonces $f = f_1 x + f_2 x^2 + \cdots, (f_1 \neq 0)$ y $g = g_1 x + g_2 x^2 + \cdots, (g_1 \neq 0)$.*

Demostracion 4. Supongamos que $f = f_r x^r + \cdots$ y $g = g_s x^s + \cdots$ donde $r, s > 0$ y $f_r g_s \neq 0$. Entonces $f(g(x)) = x = f_r g(s)^r x^{rs} + \cdots$ y por consiguiente $rs = 1$, y $r = s = 1$ como se afirmó.

En el anillo de las series de potencias formales hay otras operaciones definidas, que repruducen las operaciones correspondientes del cálculo de funciones, pero que no hacen uso de la operación del límite.
La *derivada* de la serie de potencia formal $f = \sum_n a_n x^n$ es la serie $f' = \sum_n n a_n x^{n-1}$. La diferenciación sigue las reglas usuales del cálculo, tales como suma, producto y cociente. Muchas de estas propiedades son más fáciles de probar para las series formales que para las

funciones usuales del cálculo. En las siguientes proposiciones veremos algunos casos.

Proposición 3. *Si* $f' = 0$ *entonces* $f = a_0$ *es constante.*

Demostracion 5. Miremos de otra manera el signo $' ='$ en la hipótesis $f' = 0$, eso significa que la serie de potencia formal f' es idéntica a la serie formal 0, es decir que cada uno de los coeficientes de la serie formal f' es 0. Pero los coeficiente de f' son $a_1, 2a_2, 3a_3, \cdots$, por lo tanto cada uno de ellos es 0, de donde $a_j = 0$ para todo $j \geq 1$, que es lo mismo que decir que f es una constante.

Ahora veamos el siguiente resultado:

Proposición 4. *Si* $f' = f$, *entonces* $f = ce^x$.

Demostracion 6. Como $f' = f$ los coeficientes de x^n deben ser los mismos en f que en f', para todo $n \geq 0$. De ahí $(n+1)a_{n+1} = a_n$ para todo $n \geq 0$, de donde $a_{n+1} = a_n/(n+1)\, n \geq 0$. Por inducción sobre n, $a_n = a_0/n!$ para todo $n \geq 0$, y por lo tanto $f = a_0 e^x$.

1. El Cálculo de las Funciones Generatrices.

1.1. Series Ordinarias de Potencias. Las operaciones sobre las series formales incluyen las operaciones correspondientes sobre los coeficientes. Si las series convergen y representan funciones, entonces las operaciones sobre aquellas funciones corresponden a ciertas operaciones sobre los coeficientes de las series de potencias de las expansiones de aquellas funciones. Exploraremos algunas de estas relaciones. Ellas son de gran importancia para determinar qué clase de función generatriz es apropiada para una clase de relación de recurrencia u otra situación combinatoria.

Definición 9. El símbolo $f \stackrel{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ significa que la serie f es la función generatriz de la serie ordinaria de potencia para la sucesión $\{a_n\}_0^\infty$. Esto es, significa que $f = \sum_n a_n x^n$.

Supongamos que $f \stackrel{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$. Entonces, ¿qué genera $\{a_{n+1}\}_0^\infty$? Para responder esto hagamos un pequeño cálculo:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \frac{(f(x) - f(0))}{x}.$$

Por lo tanto

$$f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty \Rightarrow \left(\frac{(f-a_0)}{x}\right) \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_{n+1}\}_0^\infty. \tag{3.6}$$

Así, un desplazamiento del subíndice en la unidad cambia la serie representada a la diferencia cociente$(f-a_0)/x$. Sí desplazamos 2 unidades, por supuesto, que justamente iteramos la operación cociente de diferencias y encontramos que

$$\{a_{n+2}\}_0^\infty \overset{sop}{\longleftrightarrow} \frac{\left(\frac{(f-a_0)}{x}-a_1\right)}{x} = \frac{f-a_0-a_1x}{x^2}.$$

Notemos como este enfoque nos permite, en una ojeada, ver que la relación de recurrencia de Fibonacci $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n \geq 0; F_0=0; F_1=1)$ trasladada directamente en términos de la función generatriz de serie ordinaria de potencias nos da

$$\frac{f-x}{x^2} = \frac{f}{x}+f.$$

Ciertamente, el propósito del estudio es desarrollar esto para pasar de relaciones de *sucesiones* a relaciones de *series*, rápida y convenientemente.

Regla 1. *Si* $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ *entonces para enteros* $h>0$

$$\{a_{n+h}\}_0^\infty \overset{sop}{\longleftrightarrow} \frac{f-a_0-\cdots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}.$$

Seguidamente veamos el efecto que produce la multiplicación de la sucesión por potencias de n. Supongamos que $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$, entonces, ¿qué genera la sucesión $\{na_n\}_0^\infty$?. En otras palabras, ¿podemos expresar la serie $\sum_n na_nx^n$ de una manera simple en términos de la serie $f=\sum_n a_nx^n$?. La respuesta es fácil, porque la primera serie es xf'. Por lo tanto, *multiplicar el n-esimo miembro de una sucesión por n ocasiona que la función generatriz de su serie ordinaria de potencia (*sop*) sea 'multiplicada' por* $x(d/dx)$, lo cual escribiremos como xD. En símbolos:

$$f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty \Rightarrow (xDf) \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{na_n\}_0^\infty. \tag{3.7}$$

Como ejemplo, consideremos la recurrencia

$$(n+1)a_{n+1} = 3a_n+1 \quad (n \geq 0; a_0=1).$$

Si f es la *fgsop* de la sucesión $\{a_n\}_0^\infty$, entonces de la Regla 1 y de (3.7),

$$f' = 3f + \frac{1}{1-x},$$

que es una ecuación diferencial de primer orden en la función generatriz incognita y puede ser resuelta por métodos conocidos.

De nuevo, sea $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$. Entonces, ¿qué genera la sucesuón

$$\{n^2 a_n\}_{\geq 0}?$$

Obviamente repetimos la multiplicación por n sobre el operador xD, de tal manera que la respuesta es $(xD)^2 f$. En general.

$$(xD)^k f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{n^k a_n\}_{\geq 0}.$$

Sabiendo esto, podemos preguntarnos ¿qué genera $\{(3-7n^2)a_n\}_{n\geq 0}$?, por supuesto que hacemos lo mismo sobre xD que se hizo sobre n, es decir, $(3-(xD)^2)f$. La formulación general es:

Regla 2. *Si* $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ *y* P *es un polinomio, entonces*

$$P(xD)f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n\geq 0}.$$

Ejemplo 2. Encontrar una fórmula cerrada para la suma de la serie $\sum_{n\geq o}(n^2+4n+5)/n!$. De acuerdo con la regla, la respuesta es el valor en $x=1$ de la serie

$$\begin{aligned}\{(xD)^2 + 4(xD) + 5\}e^x &= \{x^2+x\}e^x + 4xe^x + 5e^x \\ &= (x^2+5x+5)e^x\end{aligned}$$

y por lo tanto la respuesta es $11e$.

El cálculo anterior no está permitido en el anillo de las series formales. Se ha hecho una evaluación de la función generatriz en $x=1$, Una operación de esta naturaleza no existe en el anillo de las series formales, ahí las series no toman valores en los valores particulares que pueda tomar x. La letra x es un símbolo puramente formal cuyas potencias solamente nos indican la ubicación en la serie formal de los términos de la sucesión $\{a_n\}_0^\infty$.

Lo que *puede* ser evaluado en un valor particular de x es una serie que converge en ese x, lo que constituye una idea analítica más que una idea formal. Con frecuencia nos encontramos con este tipo de situaciones, en tales caso se procede de la siguiente manera: si después de escribir la relación de recurrencia y resolverla mediante una función generatriz en serie de potencias, encontramos que la serie así obtenida converge a una función analítica dentro de un cierto disco en el plano complejo, entonces la derivación entera que hacemos formalmente es válida analíticamente para todos los complejos x en ese disco. En esa circunstancia podemos cambiar de velocidad y considerar la serie formal como una criatura analítica convergente si nos viene en gana.

Ejemplo 3. *Encontrar una formula cerrada para la suma de los cuadrados de los N primeros enteros positivos.*

Para hacer eso, comencemos con el hecho de que

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1}-1}{x-1}$$

y notemos que si aplicamos $(xD)^2$ a ambos lados de esta relación y hacemos $x = 1$ el lado izquierdo será la suma de los cuadrados que buscamos y el lado derecho será la respuesta. En efecto

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = (xD)^2 \left\{ \frac{x^{N+1}-1}{x-1} \right\}_{x=1}.$$

Después de hacer las dos derivaciones y algunas cuentas, la respuesta emerge como

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

que es un resultado conocido. Notemos sin embargo que la maquinaria de la función generatriz es capaz de producir, de manera mecánica, una visualización de muchos problemas que involucran sumas.

Nuestra tercera regla será una reformulación de la conocida regla de Cauchy para la multiplicación de dos *fgsop*.

Regla 3.*Si* $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ *y* $g \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$, *entonces*

$$fg \overset{sop}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} \right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{3.8}$$

Consideremos ahora el producto de más de dos series. Por ejemplo en el caso de tres series que generan sucesiones $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, respectivamente, entonces un breve cálculo muestra que

fgh genera la sucesión

$$\left\{ \sum_{r+s+t=n} a_r b_s c_t \right\}_{n=0}^{\infty} \tag{3.9}$$

Una comparación con la Regla 3 sugiere la fórmula general que aplica al producto de cualquier número de series de potencias. Un caso interesante es el que está relacionado con la $k-esima$ potencia de una serie.

Regla 4. *Sea* $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^{\infty}$, *y sea* k *un entero positivo. Entonces*

$$f^k \overset{sop}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right\}_{n=0}^{\infty} \tag{3.10}$$

Ejemplo 4. Sea $f(n,k)$ el número de maneras en que un entero no negativo puede ser escrito como sumas ordenadas de k enteros no negativos. Encontrar $f(n,k)$. Por ejemplo, $f(4,2) = 5$, pues $4 = 4+0 = 3+1 = 2+2 = 1+3 = 0+4$. Para encontrar f, consideremos la serie de potencias $1/(1-x)^k$. Como $1/(1-x) \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{1\}$, por (3.10)

$$1/(1-x)^k \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{f(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$$

Por (1.7) se tiene que $f(n,k) = \binom{n+k-1}{n}$.

Consideremos seguidamente el efecto de multiplicar una serie de potencias por $1/(1-x)$. Supongamos que $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^{\infty}$. Entonces, ¿qué sucesión genera $f(x)/(1-x)$?

Para encontrarla observemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(1-x)} &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

lo cual claramente nos conduce a:

Regla 5. Si $f \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^{\infty}$ entonces

$$\frac{f}{(1-x)} \overset{sop}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \right\} n \geq 0.$$

Esto es, el efecto de dividir un *fgsop* por $(1-x)$ es el de reemplazar la sucesión que ella genera por la sucesión de sus sumas parciales.

EJEMPLO 5. Los *números armónicos* $\{H_n\}_1^\infty$ están definidos por

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n \geq 1).$$

¿Cómo podemos encontrar la serie de potencias de su función generatriz?. Según la Regla 5, esa función generatriz es $1/(1-x)$ veces la *sop* de la función generatriz de $\{1/n\}_1^\infty$. ¿Qué es entonces la serie $\sum_{n\geq 1} x^n/n$?. Como su derivada es $1/(1-x)$, la serie debe ser $-\log(1-x)$. Esto significa que la *sop* de la función generatriz de los números armónicos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \frac{1}{1-x} \lg(\frac{1}{1-x}).$$

EJEMPLO 6. Probar que los números de Fibonacci satisfacen

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad (n \geq 0).$$

Por la Regla 5, la *sop* de la función generatriz de la sucesión del lado izquierdo es $F/(1-x)$ donde F es la *sop* de la función generatriz de los números de Fibonacci, que por un resultado anterior sabemos qué es $x/(1-x-x^2)$. Por la Regla 1, la *sop* de la función generatriz de la sucesión de la derecha es

$$\frac{F-x}{x^2} - \frac{1}{1-x}$$

y lo que queda por chequear es que justamente esas expresiones son iguales, que es una tarea relativamente fácil.

EJEMPLO 7. Por una *fuente* de monedas entendemos un arreglo de n monedas en filas tales que en la primera fila forman un bloque simple de piezas contiguas, y que en todas las filas superiores cada moneda toca exactamente dos monedas de la fila que está debajo de ella. Si la primera fila contiene k monedas, hablaremos de una (n,k)-fuente. En la figura1 mostramos una (28,12) fuente.

Figura 1: Una fuente (28,12)

Entre todas las las posibles fuentes distinguiremos un tipo especial: aquella en la que cada fila consiste de justamente un bloque simple de piezas contiguas. Llamaremos a éstos *bloques* *fuente*.

El problema que se plantea es el siguiente: ¿cuántos bloques fuentes tiene una primera fila que consiste exactamente de k monedas?

Sea $f(k)$ ese número, para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si sacamos la primera fila de un bloque fuente, veremos entonces otro bloque fuente, esto es el anterior menos k monedas. Recíprocamente, si queremos formar todos los posibles bloques fuentes cuyas primeras filas tienen k monedas, entonces comenzamos por poner esa primera fila. Para comenzar elegimos un número j, $0 \leq j \leq k-1$. Encima de la fila de k monedas podemos colocar un bloque fuente cuya primera fila tiene j monedas. Si $j = 0$ hay solamente una manera de hacerlo. Si $j \neq 0$ hay $k - j$ maneras de hacerlo, dependiendo de como coloquemos la fila de j monedas sobre la fila de k monedas. Asumamos que $f(0) = 1$ y

$$f(k) = \sum_{j=1}^{k}(k-j)f(j) + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

Definamos la *sopfg* como $F(x) = \sum_{j\geq 0} f(j)x^j$. La apariencia de la expresión dentro del signo de sumatoria en (3.11), de una función $k - j$ veces una función de j, dispara una reacción refleja que nos indica que la Regla 3 aplica para este caso, ya que el producto de dos series ordinarias de potencias de funciones generatrices está implicado. Las dos series en cuestión son las *sopfg* de los enteros $\{j\}_1^\infty$ y la de las incognitas $\{f(j)\}_1^\infty$, respectivamente.

Calculemos la primera *fgsop*:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 1} jx^j &= \sum_{j\geq 1} x(\frac{d}{dx})x^j \\
&= x(\frac{d}{dx})\sum_{j\geq 1} x^j \\
&= x(\frac{d}{dx})\frac{1}{1-x} \\
&= \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

y la última es $F(x)-1$. Por lo tanto después de multiplicar la ecuación (3.11) por x^k y sumar sobre $k \geq 1$ obtenemos

$$F(x) - 1 = \frac{x}{(1-x)^2}(F(x) - 1) + \frac{x}{1-x}$$

y por lo tanto haciendo las cuentas correspondientes obtenemos

$$F(x) = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}. \tag{3.12}$$

La sucesión $\{f(k)\}_0^\infty$ comienza con $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, \cdots$. Estos números se ven sospechozamente similares a los de Fibonacci.

1.2. El Cálculo de las Funciones Generatrices Exponenciales. Investiguemos ahora el comportamiento de la serie en el caso de las funciones generatrices exponenciales.

Definición 10. El símbolo $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ significa que la serie f es la función generatriz exponencial de la sucesión $\{a_n\}_0^\infty$, esto es

$$f = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}.$$

Cabe preguntarse entonces las mismas cuestiones que para el caso de las series ordinarias de potencias. Para el caso de un análogo de la **Regla 1** supongamos que $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$. Entonces cual es la *fge* de la sucesión $\{a_{n+1}\}_0^\infty$?. Concluimos que la respuesta es f', por que

$$\begin{aligned} f' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!}, \end{aligned}$$

que es exactamente equivalente a la afirmación $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_{n+1}\}_0^\infty$. Vemos que, sobre este particular, la situación con la función generatriz exponencial es muy sencilla, en comparación con la situación correspondiente de la serie ordinaria de potencias. El desplazamiento del subíndice en una unidad en una sucesión es equivalente a la acción del operador D sobre la función generatriz, actuando de manera diferente a como lo hacia el operador $(f(x)-f(0))/x$ en el caso de la función generatriz de la serie ordinaria de potencias. Por lo tanto, por inducción tenemos:

Regla 1'. Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ entonces para el entero $h \geq 0$

$$\{a_{n+1}\}_0^\infty \overset{fge}{\longleftrightarrow} D^h f. \tag{3.13}$$

Ejemplo 8. A manera de ilustración de la fortaleza de este punto de vista en la solución de problemas, busquemos la *fge* de los números de Fibonacci. Echandole una mirada a la recurrencia

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

vemos de la **Regla 1'.** que la *fge* satisface

$$f'' = f' + f.$$

En el escenario para la solución de este problema en la versión de *sop*, se tuvo que resolver la ecuación para f, donde no se echaba mano del recurso de la derivación. Se trabajó con una expansión en fracciones parciales para encontrar una fórmula exacta para los números de Fibonacci. En la versión de *fge* resolvemos la ecuación diferencial, obteniendo

$$f(x) = c_1 e^{r_+ x} + c_2 e^{r_- x} \qquad (r_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2)$$

Donde c_1 y c_2 están determinados por las condiciones iniciales (que no han sido usadas todavía) $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$. Después de aplicar estas dos condiciones, encontramos que $c_1 = 1/\sqrt{5}$ y $c_2 = -1/\sqrt{5}$ de donde resulta que la *fge* de la sucesión de Fibonacci es

$$f(x) = (e^{r_+ x} - e^{r_- x})/\sqrt{5} \qquad r_\pm = (1 \pm \sqrt{5}/2). \tag{3.14}$$

Ahora es fácil obtener la fórmula exacta, por que ninguna expansión en fracciones parciales es necesaria. Aplicamos el operador $[x^n/n!]$ a ambos lados de (3.14) y la fórmula explicita

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

se materializa.

El método de la *sop* para el tratamiento de este problema nos coloca frente a una ecuación funcional sencilla cuya solución es la función generatriz buscada: esto es, el enfoque es algebraico en lugar de un enfoque diferencial. El método *fge* nos conduce en un fácil viaje hacia la fórmula exacta, haciendo innecesaria la expansión en fracciones parciales. Ambos métodos funcionan, ¿cuál de ellos usar?, es un *desideratum*.

Para continuar, discutamos ahora el analogo de la Regla 2 para las *fge*, que resulta ser muy fácil pues es la misma que para las *sop*. Es decir, la multiplicación de los elementos de una sucesión por un polinomio en n es equivalente a actuar sobre la *fge* con el mismo polinomio sobre el operador xD y por consiguiente tenemos:

Regla 2'. Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ y P es un polinomio dado, entonces

$$P(xD)f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n\geq 0}.$$

Pensemos ahora en el análogo de la Regla 3, es decir, sobre lo que le sucede a las sucesiones cuando sus *fge* son multiplicadas entre si. Precisamente supongamos $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ y $g \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$. Entonces cabe preguntarse: ¿de cuál sucesión es fg la *fge*?.

Esto nos inclina a buscar una respuesta atractiva y poco usual. Para encontrarla efectuaremos la multiplicación fg y trataremos de identificar los coeficientes de $x^n/n!$. En efecto

$$\begin{aligned} fg &= \left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r x^r}{r!}\right\}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_s x^s}{s!}\right\} \\ &= \sum_{r,s\geq 0} \frac{a_r b_s x^{r+s}}{r!s!} \\ &= \sum_{n\geq 0} x^n \left\{\sum_{r+s=n} \frac{a_r b_s}{r!s!}\right\}. \end{aligned}$$

El coeficiente de $x^n/n!$ es evidentemente

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^n}{n!}\right] fg &= \sum_{r+s=n} \frac{n! a_r b_s}{r!s!} \\ &= \sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}. \end{aligned}$$

Establecemos este resultado como:

Regla 3'. Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ y $g \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$, entonces fg genera la sucesión

$$\left\{\sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{3.15}$$

Esta regla puede ser comparada con la Regla 3 para la multiplicación de las *fgsop* cuyo resultado genera la sucesión

$$\left\{\sum_r a_r b_{n-r}\right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{3.16}$$

Comentamos tempranamente que la convolución de sucesiones que se muestra en (3.16) es útil en el conteo de problemas donde las estructuras de tamaño n son obtenidas tejiendo

sucesivamente estructuras de tamaño r y $n-r$ de todas las posibles maneras. Correspondientemente la convolución (3.15) es útil en situaciones combinatorias donde no solamente tejemos dos de tales estructuras sino que además *reetiquetamos* las estructuras. Pero entonces, en términos generales, hay $\binom{n}{r}$ maneras de elegir las nuevas etiquetas de los elementos de tamaño r, así como a_r maneras de elegir esa estructura y b_{n-r} maneras de elegir la otra.
Como todo esto parece muy abstracto, trataremos de volverlo más amigable con algunos ejemplos.

Ejemplo 9. En (2.13) encontramos la fórmula de recurrencia para los números de Bell, que se puede escribir en la forma

$$b(n+1) = \sum_k \binom{n}{k} b(k) \qquad (n \geq 0; b(0) = 1). \tag{3.17}$$

Aplicaremos ahora los métodos de esta sección para encontrar la *fge* de los números de Bell. Esto nos dará una demostración del Teorema 1.1 del capítulo anterior.
Sea B la función generatriz exponencial requerida. La *fge* de (3.17) es por la Regla 1', B'. Si comparamos el lado derecho de (3.17) con (3.15) vemos que la *fge* de la sucesión del lado derecho de (3.17) es el producto de B y de la *fge* cuyos términos son todos 1 que es e^x, tenemos por lo tanto

$$B' = e^x B(x),$$

como la ecuación que se tiene que resolver para encontrar la *fge* desconocida. Pero obviamente la solución es $B = c\ \exp(e^x)$ y como $B(0) = 1$ debemos tener $c = e^{-1}$, de donde $B(x) = e^{-1}e^{e^x} = e^{e^x-1}$ y esto completa la prueba del Teorema 1.1

Ejemplo 3. Con el fin de resaltar la fortaleza de las *fgo* versus *fge*, veamos un problema donde la forma de la convolución de las sucesiones sugieren la forma de las *sop* de la función generatriz. Contaremos las manera de arreglar n pares de paréntesis, cada par consistente de un paréntesis izquierdo y un derecho, como una *cadena legal*. Una cadena legal de paréntesis es una cadena con la propiedad de que cuando recorremos la cadena de izquierda a derecha nunca veremos más préntesis derechos que izquierdos.
Consideremos el siguiente caso, en el hay exactamente 5 cadenas legales de 3 pares, a saber:

$$((())), (()()), (())(), ()()(), ()(()). \tag{3.18}$$

Sea $f(n)$ el número de cadenas legales de n pares de paréntesis ($f(0) = 1$) para $n \geq 0$. Con cada cadena legal asociamos un único entero no negativo k como sigue: cuando recorremos la cadena de izquierda derecha, ciertamente después de haber visto todos los n pares de parentesis, el número de izquierdos será igual al número de derechos. Sin embargo estos dos números pueden ser iguales, incluso antes. En la última cadena de (3.18), por ejemplo, depués de que $k = 1$ pares han sido chequeados encontramos que todos los paréntesis que han sido abiertos se han cerrado. En general para cualquier cadena legal, el entero k que se asocia con ella, es el *menor* entero positivo tal que los primeros $2k$ caracteres de la cadena forman ellos mismos una cadena legal. Los valores de k que están asociados con cada una de las cadena en (3.18) son 3,3,2,1,1. Diremos que una cadena legal de $2n$ paréntesis es *primitiva* si tiene $k = n$. Las primeras dos cadenas en (3.18) son primitivas.

¿Cuántas cadenas legales de $2n$ paréntesis tendrán un valor dado de k?. Sea w una tal cadena . Los primero $2k$ caracteres de w son una cadena primitiva y los últimos $2n - 2k$ caracteres de w son una cedena legal arbitraria. Hay exactamente $f(n-k)$ maneras de elegir los últimos $2n - 2k$ caracteres, pero ¿de cuántas meneras podemos elegir los primeros $2k$?. Esto es ¿cuántas cadenas *primitivas* de longitud $2k$ hay?.

Lema 1. *Si $k \geq 1$ y $g(k)$ es el número de cadenas legales primitivas y $f(k)$ es el número de cadenas legales de $2k$ paréntesis, entonces*

$$g(k) = f(k-1).$$

Demostracion 7. Dada cualquier cadena legal de $k-1$ pares de paréntesis, se construye a partir de ella, una primitiva de longitud $2k$, agregandole un parentesis inicial a la izquierda y un paréntesis términal a la derecha. Recíprocamente, dada una cadena primitiva de longitud $2k$, si sus paréntesis inicial izquierdo y términal derecho son borrados, lo que queda es una cadena legal arbitraria de longitud $2k - 2$. Por lo tanto, hay tantas cadenas primitivas de longitud $2k$, como hay cadenas legales de longitud $2k - 2$, es decir hay $f(k - 1)$ de ellas.

Así pues, el número de cadenas legales de longitud $2n$ que tienen un valor dado de k es $f(k-1)f(n-k)$. Como cada cadena legal tiene un valor de k tenemos entonces

$$f(n) = \sum_k f(k-1)f(n-k) \qquad (n \neq 0; f(0) = 1), \tag{3.19}$$

con el convenio de que $f = 0$ en todos los argumentos negativos.

La recurrencia fácilmente permite calcular los valores $1, 1, 2, 5, 14, \ldots$.Busquemos ahora una función generatriz para estos números. La clave sobre cuál es la clase de función generatriz apropiada, nos la da la forma de la recurrencia (3.19). La suma de la derecha está obviamente relacionada a los coeficientes del producto de las funciones generatrices de dos series ordinarias de potencias, que son las especies que usaremos.
Sea $F = \sum_k f(k)x^k$ *fgsop* de $\{f(n)\}_{n\geq 0}$. Entonces el lado derecho de (3.19) es *casi* el coeficiente de x^n en la serie F^2. ¿Qué es exactamente?. Es el coeficiente de x^n en el producto de las series F y las series $\sum_k f(k-1)x^k$. ¿Cómo está relacionada esta última serie a F?. Es justamente xF. Por lo tanto, si multiplicamos el lado derecho de (3.19) por x^n y sumamos sobre $n \neq 0$, obtenemos $F - 1$. Por lo tanto nuestra función generatriz desconocida satisface la ecuación

$$F(x) - 1 = xF(x)^2. \tag{3.20}$$

Aquí se produce un nuevo problema. Estamos acostumbrados a ir de relaciones de recurrencia sobre una sucesión a ecuaciones funcionales que tienen que ser resueltas mediante funciones generatrices. En ejemplos previos, aquellas ecuaciones funcionales han sido o ecuaciones lineales simples ó ecuaciones diferenciales. En (3.20)tenemos una función generatriz que satisface una ecuación cuadrática. Al resolverla obtenemos

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

¿Cuál signo elegir?. Si elegimos $'+'$ entonces el númerador se aproximará a 2 cuando $x \to 0$ por lo tanto la relación se hará infinita en $x = 0$. Pero nuestra función generatriz toma el valor 1 en 0, de modo que la elección no es correcta. Si elegimos el signo $'-'$, entonces una dósis de la regla de L'Hospital muestra que ciertamente tendremos $F(0) = 1$. Por lo tanto nuestra función generatriz es

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{3.21}$$

Esta es seguramente una de las más celebradas funciones generatrices en combinatoria. Los número $f(n)$ son los *números de Catalan*, también existe una fórmula explícita para ellos, pero no nos ocuparemos de eso por ahora. Queda claro pues como la forma de la recurrencia puede guiar la elección de la función generatriz.

Ejemplo 4.

Por un *desarreglo* de n letras entendemos una permutación de ellas que no tiene puntos fijos. Sea D_n el número de desarreglos de n letras y sea $D(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{D_n\}_0^\infty$. Encontraremos la recurrencia para la sucesión, después a $D(x)$ y finalmente una fórmula explícita para los miembros de la sucesión.

El número de permutaciones de n letras que tienen un conjunto particular de $k \leq n$ letras como su conjunto de puntos fijos es claramente D_{n-k}. Hay $\binom{n}{k}$ maneras de elegir el conjunto de k puntos fijos, por lo que hay $\binom{n}{k}D_{n-k}$ permutaciones de n letras que tienen exactamente k puntos fijos. Como cada permutación tiene *algún* conjunto de puntos fijos, este debería ser

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} D_{n-k} \qquad (n \geq 0),$$

si tomamos la *fge* a ambos lados, obtenemos por la Regla 3′

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x),$$

, de donde $D(x) = e^{-x}/(1-x)$, seguidamente por la Regla 5, si tomamos $[n^n]$ a ambos lados, encontramos

$$D_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!},$$

y terminamos.

Justamente como en el caso de las *funciones generatrices de las series ordinarias de potencias* suceden cosas útiles y agradables cuando consideramos productos de más de dos funciones generatrices exponenciales. Por ejemplo si multiplicamos tres de ellas, f, g y h que generan $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, respectivamente, encontramos que

$$fgh \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{r+s+t=n} \frac{n!}{r!s!t!} a_r b_s c_t \right\}_0^\infty \tag{3.22}$$

y por lo tanto de tales operaciones se puede esperar que sean de gran utilidad en el tratamiento de sumas que involucran coeficientes multinomiales.

Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ entonces

$$f^k \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{r_1+\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_k} \right\}_{n=0}^\infty \tag{3.23}$$

Un aspecto interesante de la teoría que venimos de estudiar lo constituye la busqueda de las relaciones entre las funciones generatrices ordinarias y las funciones generatrices exponenciales. Veamos:

Si $A(z)$ y $E(z)$ son funciones generatrices ordinaria y exponencial de la sucesión $\{a_n\}_0^\infty$ respectivamente, entonces formalmente

$$A(z) = \int_0^\infty e^{-s} E(sz) ds.$$

Esta es justamente la relación para las sumas de Borel de series divergentes. Esta relación se deriva al notar que

$$k! = \int_0^\infty e^{-s} s^k ds.$$

(la integral de Euler para la función Gamma). De aquí

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{k\geq 0} a_k z^k \\ &= \sum_{k\geq 0} a_k \{z^k/k!\} \int_0^\infty e^{-s} s^k ds \\ &= \int_0^\infty e^{-s} ds \sum_{k\geq 0} a_k \{z^k/k!\} \\ &= \int_0^\infty e^{-s} E(sz) ds \end{aligned}$$

CAPíTULO 4

Aplicaciones de las Funciones Generatrices.

Las series de potencias de las funciones generatrices están excepcionalmente bien adaptadas para calcular medias, desviaciones estándar y otros momentos de distribuciones, con un mínimo de esfuerzo. Supongamos que $f(n)$ es el número de objetos en un cierto conjunto S de N objetos, que tiene exactamente n propiedades para cada $n = 1, 2, \cdots$ con $f(n) = N$. ¿Cuál es el promedio del numero de propiedades que un objeto en S puede tener?. Evidentemente es:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_n n f(n). \tag{4.1}$$

Supongamos que tenemos la gran fortuna de conocer la *sopfg* de la sucesión $\{f(n)\}$ digamos, $F(x) \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{f(n)\}_0^\infty$. ¿Hay alguna manera conveniente de expresar la media μ de (4.1) en términos de F?. Por supuesto. Claramente $\mu = F'(1)/F(1)$. Por lo tanto el promedio puede directamente ser calculado por funciones generatrices.

Vayamos al siguiente momento, la desviación estádard σ, de la distribución. Esto está definido como sigue:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{w \in S} (n(w) - \mu)^2. \tag{4.2}$$

Donde w representa un objeto en el conjunto S y $n(w)$ es el número de propiedades que w tiene. σ^2, que es conocida como la *varianza* de la distribución, es por lo tanto la media cuadrática de la diferencia entre el número de propiedades que cada objeto tiene y el promedio de las propiedades, μ.
Cada uno de los $f(n)$ objetos w que tienen exactamente n propiedades contribuye con $(n-\mu)^2$

a la suma en (4.2) y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}(n-\mu)^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-2n\mu+\mu^2)f(n) \\
&= \frac{1}{N}\{(xD)^2-2\mu(xD)+\mu^2\}F(x)|_{x=1} \qquad (4.3)\\
&= (F''(1)+(1-2\mu)F'(1)+\mu^2F(1))/F(1) \\
&= F''(1)/F(1)+F'(1)/F(1)-(F'(1)/F(1))^2 \\
&= \{(\log F)'+(\log F)''\}|_{x=1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la desviación estándar puede también ser calculada en términos de los valores de F y sus primeras dos derivadas en $x=1$.

Trabajemos ahora en el contexto de las familias exponenciales. ¿En una familia exponencial $\mathcal{F}$, cuál es el promedio $\mu(n)$ de cartas en una mano de peso n?.

Si $h(n,k)$ es el número de manos de peso n que tienen k cartas, entonces el promedio es

$$\mu(n)=\frac{1}{h(n)}\sum_k kh(n,k) \qquad (4.4)$$

La fórmula exponencial en este caso viene dada por

$$\sum_{n,k} h(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k = e^{y\mathcal{D}(x)},$$

apliquemosle a esta expresión el operador $\partial/\partial y$ y hagamos $y=1$. El resultado es

$$
\begin{aligned}
\sum_n \frac{x^n}{n!}\sum_k kh(n,k) &= \mathcal{D}(x)e^{\mathcal{D}(x)} \\
&= \mathcal{D}(x)\mathcal{H}(x). \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Teorema 4.1. *En una familia exponencial $\mathcal{F}$, el promedio de cartas en una mano de peso n es*

$$\begin{aligned} \mu(n) &= \left[h(n)\frac{x^n}{n!}\right]\mathcal{D}(x)\mathcal{H}(x) \\ &= \frac{1}{h(n)}\sum_r \binom{n}{r} d_r h(n-r). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ejemplo 10 (Ciclos de permutación.). Los promedios (4.6) son particularmente agradables si $h(n) = n!$ como en las familias de todas las permutaciones. En este caso (4.6) se convierte en

$$\begin{aligned} \mu(n) &= \frac{1}{n!}\sum_r \binom{n}{r}(r-1)!(n-r)! \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Consecuentemente el promedio del número de ciclos en una permutación de n letras son los números armónicos H_n. ¿Cuál es la desviación estandár?. La función $F(x)$ que aparece en (4.3), en el caso de las permutaciones, es, para n fijo

$$F(x) = \sum_k H(n,k)x^k = x(x+1)\cdots(x+n-1),$$

por (A.8) en el **Apendice**. Después de tomar logaritmos y derivar, siguiendo (4.3), encontramos $F(1) = n!, (\log F)'(1) = H_n$ y

$$(\log F)''(1) = -1 - 1/4 - 1/9 - \cdots + 1/n^2.$$

Si sustituimos esto en (4.3), encontramos que la varianza de la distribución de ciclos sobre permutaciones de n letras es

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= H_n - 1 - 1/4 - 1/9 - \cdots - 1/n^2 \\ &= \log n + \gamma + \pi^2/6 + o(1) \end{aligned}$$

donde γ es la constante de Euler.

Aquí el promedio del número de ciclos es equivalente a $\log n$ con una desviación estándar $\sigma\sqrt{\log n}$.

1. El Principio de Inclusión Exclusión dede el punto de vista de las Funciones Generatrices.

El método de cribado [1] es una herramienta de bastante uso en combinatoria. Se explica muy bien en muchos textos de matemáticas discretas, donde es presentado como una sucesión de manipulaciones de sumas alternativas de coeficientes binomiales. El enfoque del método de cribado desde el punto de vista de las funciones generatrices elimina el engorroso tratamiento de las sumas sucesivas y lo transforma en un procedimiento amigable.

Sean Ω un conjunto finito de objetos y P un conjunto de propiedades que los objetos poseen o no. En este contexto, queremos responder preguntas como: ¿Cuántos objetos tienen todas las propiedades? ¿Cuál es es el promedio de propiedes que los objetos tienen?, etc., etc. El sabor característico de los problemas que con el método de cribado se pueden resolver, es que aun cuando sea difícil ver cuántos objetos tienen exactamente r propiedades, por ejemplo, es relativamente fácil ver cuantos objetos tienen *al menos* un cierto conjunto de propiedades o incluso más.

Lo que el método hace es convertir la información *al menos* en una información más *exacta*. Para ver cómo esto ocurre , sea $S \subseteq P$ un conjunto de propiedades, sea $N(\supseteq S)$ [2] el número de objetos que tienen *al menos* las propiedades en S. Es decir $N(\supseteq S)$ es el números de objetos cuyo conjunto de propiedades contiene a S.

Para un $r \geq 0$ fijo, consideremos la suma

$$N_r = \sum_{|S|=r} N(\supseteq S). \tag{4.7}$$

Es decir, N_r cuenta la cantidad de objetos con propiedades en los subconjuntos S de cardinalidad r. Introduzcamos el símbolo $P(w)$ para el conjunto de propiedades que w tiene.

[1]También conocido como Principio de Inclusión Exclusión (PIE).

[2]Esta notación tiene sentido, pues estrictamente hablando, una propiedad es un subconjunto de los objetos.

Entonces podemos escribir N_r como sigue:

$$\begin{aligned} N_r &= \sum_{|S|=r} N(\supseteq S) \\ &= \sum_{|S|=r} \sum_{\substack{w\in\Omega \\ S\subseteq P(w)}} 1 \\ &= \sum_{w\in\Omega} \left\{ \sum_{\substack{|S|=r \\ S\subseteq P(w)}} 1 \right\} \\ &= \sum_{w\in\Omega} \binom{|P(w)|}{r}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto *cada objeto que tiene exactamente* t *propiedades contribuye* $\binom{t}{r}$ *veces a* N_r. Si hay e_t objetos que tienen exactamente t propiedades, entonces (4.8) se simplifica a

$$N_r = \sum_{t\geq 0} \binom{t}{r} e_t \qquad (r = 0, 1, 2, \cdot). \tag{4.9}$$

Recordemos la filosofía del método: los N_r son más fáciles de calcular que los e_r, por que ellos pueden ser encontrados mediante (4.7). Sin embargo, son los e_r los que estamos buscando. Por lo tanto es deseable resolver la ecuación (4.9) para los e en términos de los N. Pero ¿cómo podemos hacerlo?. Después de todo (4.9) es un conjunto de ecuaciones simultaneas. Lo que a primera vista parece complicado, se simplifica notablemente mediante el uso de las funciones generatrices. Sean $N(x)$ y $E(x)$ las *fgsop* de las sucesiones $\{N_r\}$, $\{e_r\}$ respectivamente. ¿Qué relación entre estas dos funciones generatrices nos propone la ecuación (4.9)?. Multipliquemos (4.9) por x^r y sumemos sobre r. Obtenemos

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{r\geq 0} \sum_{t\geq 0} \binom{t}{r} e_t x^r \\ &= \sum_{t\geq 0} e_t \left\{ \sum_{r\geq 0} \binom{t}{r} x^r \right\} \\ &= \sum_{t\geq 0} e_t (x+1)^t \\ &= E(x+1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

En el lenguaje de las funciones generatrices, el conjunto de las ecuaciones (4.9) se reduce a $N(x) = E(x+1)$. Ahora el problema de encontrar las e en términos de los N es una trivialidad y la solución es obviamente

$$E(x) = N(x-1). \tag{4.11}$$

Este es el método de cribado o PIE, en el lenguaje de las funciones generatrices. *El acto de reemplazar la variable x por $x-1$ en la función generatriz $N(x)$ reemplaza el dato no filtrado $\{N_r\}$ por las cantidades cribadas $\{e_r\}$.*

Si los N son conocidos, entonces en principio podemos considerar los e como los coeficientes de $N(x-1)$.

Por ejemplo. e_0 es el número de objetos que no tienen propiedades. Por (4.11)

$$e_0 = E(0) = N(x-1) = \sum_{t\geq 0}(-1)^t N_t. \tag{4.12}$$

Es fácil encontrar fórmulas explicitas para todos los e_j mirando los coeficientes de x^j en ambos lados de (**??**). El resultado es

$$e_j = \sum_{t\geq 0}(-1)^{t-j}\binom{t}{j}N_t. \tag{4.13}$$

que se obtiene de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_j e_j x^j &= \sum_t N_t(x-1)^t \\
&= \sum_t\left(\sum_j \binom{t}{j}x^j(-1)^{t-j}\right)N_t \\
&= \sum_j\left(\sum_t \binom{t}{j}(-1)^{t-j}N_t\right)x^j
\end{aligned}$$

Con esto hemos visto que de la ecuación (4.11) podemos obtener los resultados de una forma más simple.

En resumen podemos concluir que **El Método de Cribado o Principio de Inclusión Exclusión** se obtiene a partir del siguiente

Procedimiento:

(A) (Encontrar Ω y P). Dado un problema de conteo, encontrar conjuntos de objetos y propiedades de tal manera que el problema se resuelva si conocemos el número de objetos con cada número de propiedades.

(B) (Encontrar las cuentas no filtradas $N(\supseteq S)$ Para cada conjunto S de propiedades, encontrar $N(\supseteq S)$, el número de objetos cuyo conjunto de propiedades contiene a S.
(C) (Encontrar los coeficiente N_r) Para cada $r \geq 0$, calcular N_r sumando los $N(\supseteq S)$ sobre todos los conjuntos S de r propiedades, como en (4.7).
(D) (El resultado) Los números e_r son los coeficientes de las potencias de x en el polinomio $N(x-1)$.
Antes de dar algunos ejemplos, hay que puntualizar que el número N_1 tiene un papel especial que jugar. De acuerdo con (4.9), $N_1 = \sum_{t \geq 0} te^t$. Que, sin embargo, es lo se quisiera saber si se estuviese tratando de calcular el promedio de las propiedades que un objeto tiene. Es bueno recordar que cuando se usa el método de cribado sobre un conjunto de N objetos, el promedio de las propiedades que un objeto tiene es N/N_1.

EJEMPLO 11 (Los puntos fijos de las permutaciones.). De las $n!$ permutaciones de n letras, ¿cuántas tienen exactamente r puntos fijos?.
El paso (A) del método de cribado nos exige el conjunto de objetos y las propiedades que estos tienen. Es recomendable ser bastante explicito con respecto a esto. En el presente caso, el conjunto Ω de objetos es el conjunto de todas las permutaciones de n letras. El conjunto P lo podemos definir de la manera siguiente:Hay n propiedades para cada $i = 1, \cdots, n$ una permutación τ tiene la propiedad i si i es un punto fijo de τ, esto es si $\tau(i) = i$. Es decir el conjunto P tiene n propiedades.
Con esas definiciones de Ω y P, es claro lo que queremos saber del número de objetos que tienen r propiedades, para cada r.
El el paso (B) debemos encontrar a $N(\supseteq S)$. Aquí S es un conjunto de propiedades. Entonces $S \subseteq [n]$ es un conjunto de letras, y queremos conocer el número de permutaciones de n letras que dejan al menos las letras fijas en S.
Si una permutación deja letras fijas en S, entonces la permutación puede actuar libremente sólo sobre las $n - |S|$ letras restantes, y por lo tanto hay $(n - |S|)!$ de tales permutaciones. Así

$$N(\supseteq S) = (n - |S|)!.$$

Para el paso (C) calculemos las N_r. Para cada $r = 0, 1, \cdots, n$,

$$N_r = \sum_{|S|=r} N(\supseteq S) = \sum_{|S|=r} (n - |S|)! = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!}.$$

En el paso (D) estamos listos para la respuesta. Nos ahorraremos un poco de tiempo introduciendo la abreviación $\exp_{|\alpha}$ para representar la serie exponencial truncada

$$\exp_{|\alpha} = \sum_{0 \le r \le \alpha} \frac{x^r}{r!}. \tag{4.14}$$

Formemos ahora la *fgsop* $N(x)$ con los N_r,

$$N(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!} x^r = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r!}.$$

Entonces e_t es el coeficiente de x^t en $N(x-1)$, esto es

$$E(x) = \sum_{t \ge 0} e_t x^t = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(x-1)^r}{r!} = n! \exp_{|n}(x-1). \tag{4.15}$$

Como beneficio extra, el promedio de puntos fijos que la permutación de n letras tiene es

$$\frac{N_1}{N} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

En el promedio, una permutación tiene un punto fijo. El número de permutaciones que no tienen puntos fijos es

$$e_0 = E(0) = N(-1) = n! \exp_{|n}(-1) \sim \frac{n!}{e}. \tag{4.16}$$

Finalmente, si queremos una fórmula para los e_t, es bastante fácil obtenerla de (4.15) pues

$$e_t = \frac{n!}{t!} \exp_{|n-t}(-1) \sim e^{-1} \frac{n!}{t!} \qquad (n \longrightarrow \infty). \tag{4.17}$$

Ejemplo 12 (El número de k-ciclos en permutaciones.). Fijemos enteros positivos n, k, y $r \ge 0$. ¿Cuantas permutaciones de n letras tienen exactamente r ciclos de longitud k?. Cualquiera que sea la respuesta, habrá al menos una buena manera de reducirla al ejemplo previo cuando $k = 1$, ya que un punto fijo es un ciclo de longitud 1.

¿Cuales son los objetos y las propiedades?. Evidentemente Ω es el conjunto de todas las permutaciones de n letras. Además el conjunto de propiedades P es el conjunto de todos los k-ciclos elegidos posibles de n letras. ¿Cuántos k-ciclos hay?. Las k letras pueden ser elegidas de $\binom{n}{t}$ maneras, y pueden ser ordenadas en ciclos en $(k-1)!$ maneras, por lo tanto tenemos una lista de $\binom{n}{t}(k-1)!$ propiedades.

Elijamos un conjunto S de k-ciclos de P. ¿Cuántas permutaciones tiene al menos el conjunto S de propiedades?. Ninguna , a menos que el conjunto de letras en aquellos ciclos sean disjuntas entre si. Si los conjuntos son disjuntos entre si, entonces hay $N(\supseteq S) = (n - k|S|)!$ permutaciones que tienen al menos todos los k-ciclos.
Calculemos N_r, la suma de $N(\supseteq S)$ sobre todos los conjuntos de r propiedades. Los términos en esta suma son ó 0 ó $(n - kr)!$. Por lo tanto sólo necesitamos saber cuántos de ellos no son 0, esto es, en cuantas maneras podemos elegir un conjuto de r k-ciclos de n letras de manera tal que los ciclos operen sobre conjuntos disjuntos de letras.
Las letras para el primer ciclo pueden ser elegidas en $\binom{n}{k}$ maneras y pueden ser ordenadas en torno al ciclo en $(k-1)!$ maneras. Las letras para el segundo ciclo pueden ser elegidas en $\binom{n-k}{k}$ maneras, y ordenadas en $(k-1)!$ maneras etc. Finalmente como la secuencia en las que los ciclos son construidos no tienen ninguna importancia dividimos por $r!$. Por lo tanto

$$N_r = \frac{(n-kr)!}{r!}\frac{n!(k-1)!^r}{(k)!^r(n-kr)!} = \frac{n!}{r!k^r} \qquad (0 \geq r \geq n/k). \tag{4.18}$$

Podemos obtener una muestra de la solucion sin mayor trabajo: el promedio de las permutaciones de k-ciclos de n letras es

$$N_1/n! = 1/k.$$

La *fgsop* de $\{N_r\}$ es

$$N(x) = n! \sum_{(0\geq r\geq n/k)} \frac{x^r}{k^r r!} = n! \exp_{|n/k}(\frac{x}{k}). \tag{4.19}$$

Finalmente en la cribación, convertimos esto en información exacta reemplazando x por $x-1$ para obtener

$$E(x) = n! \exp_{|n/k}\left(\frac{x-1}{k}\right). \tag{4.20}$$

Ejemplo 13 (Números de Stirling de Segunda Clase.). Los números de Stirling $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, que estudiamos en el **Cap.2**, son el número de particiones de un conjunto de n elementos en k clases. Podemos obtener información sobre ellos con el método del cribado (**PIE**) si podemos construir una colección apropiada de objetos y de propiedades. Para el conjunto Ω de objetos podemos tomar la colección de todas las k^n maneras de colocar n bolas etiquetadas en k cajas etiquetadas. Asumamos que un tal arreglo tendrá las propiedades P_i si la caja i está vacia $(i = 1, \cdots, k)$. Entonces $k!\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ es el número de objetos que no tienen exactamente ninguna propiedad.

Sea S algún conjunto de propiedades. ¿Cuántos arreglos de bolas en cajas tienen al menos el conjunto S de propiedades?. Si $N(\supseteq S)$ es ese número, entonces $N(\supseteq S)$ cuenta los arreglos de n bolas etiquetadas en justamente $k - |S|$ cajas etiquetadas, pues todas las cajas etiquetadas por S deben estar vacias.

Obviamente hay $(k - |S|)^n$ de tales arreglos. Por lo tanto

$$N(\supseteq S) = \begin{cases} (k - |S|)^n & \text{si } |S| \leq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si ahora sumamos sobre todos los conjuntos S de r propiedades, obtenemos para $r \leq k$

$$N_r = \binom{n}{r}(k-r)^n,$$

cuya *fgsop* es

$$N(x) = \sum_{0 \leq r \leq k} \binom{k}{r}(k-r)^n x^r.$$

Podemos ahora invocar el método del cribado para encontrar qué el número de arreglos que tienen exactamente t celdas vacias es el coeficiente de x^t en $N(x-1)$. Por otro lado el número de arreglos que tienen exactamente t celdas vacias es claramente

$$\binom{k}{t}(k-t)!\left\{ \begin{matrix} n \\ k-t \end{matrix} \right\} = \frac{k!}{t!}\left\{ \begin{matrix} n \\ k-t \end{matrix} \right\}.$$

El resultado es la identidad

$$\sum_{0 \leq r \leq k} \binom{k}{r}(k-r)^n (x-1)^r = k! \sum_{0 \leq t \leq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k-t \end{matrix} \right\} \frac{x^t}{t!}. \tag{4.21}$$

Si ponemos $x = 0$, encontramos la fórmula explicita (2.7) de nuevo.

Si por otro lado comparamos (4.20) con la **Regla3** para encontrar los coeficientes del producto de dos *fge*, descubrimos la extraordinaria identidad:

$$\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\begin{array}{c} n \\ k-t \end{array}\right\} y^k = e^{-y}\sum_{r\geq 1}\frac{r^n}{r!}y^r. \tag{4.22}$$

Esto muestra que e^{-y} veces la serie infinita es un polinomio!. El caso especial $y = 1$ ha sido previamente señalado en (2.10).

Ejemplo 14 (Torres en el Tablero de Ajedres.). Para n fijo, un *tablero de ajedres* C es un subconjunto de $[n] \times [n]$. Damos $\mathcal{C}$ y definimos una sucesión $\{r_k\}$ como sigue: r_k es el número de maneras en las que podemos colocar k torres que no se amenacen mutuamente (es decir que ambas no se encuentren en la misma fila o columna) en C.
Sea σ una permutación de n letras. Para cada j sea e_j el número de permutaciones que 'interceptan al tablero de ajedres en exactamente j casillas', es decir, si el evento $(i, \sigma(i)) \in \mathcal{C}$ ocurre exactamente para j valores de $i, 1 \leq i \leq n$.
La pregunta obligada es.¿Cómo podemos encontrar los e_j en términos de los r_j?.
Sea Ω la colección de objetos de las $n!$ permutaciones de $[n]$. Habrá una propiedad $P(s)$ correspondiente para cada $s \in \mathcal{C}$. Una permutación σ tiene la propiedad $P(s)$ si σ coincide con el minitablero que consiste en la casilla simple s.

Sea S un conjunto de propiedades, es decir, de casillas en $\mathcal{C}$ y consideremos la suma $N_k = \sum_{|S|=k} N(\supseteq S)$. Cada arreglo de k torres que no se ataquen mutuamente sobre $\mathcal{C}$ contribuye en $(n-k)!$ a esta suma. Es más cuando el conjunto S corresponde a las casillas sobre las que aquellas torres pueden ser colocadas, entonces estamos mirando k de los n valores de una permutación que intercepta a $\mathcal{C}$ en al menos k casillas. Las permutaciones pueden ser completadas en las restantes $n-k$ filas, en $(n-k)!$ maneras.
Por lo tanto $N_k = r_k(n-k)!$ para cada $k, 0 \leq k \leq n$. Por consiguiente

$$N(x) = \sum_k (n-k)! r_k x^k,$$

e inmediatamente encontramos que el número de n permutaciones que intercepta a $\mathcal{C}$ en exactamente j casillas es

$$[x^j]\sum_k (n-k)! r_k (x-1)^k. \tag{4.23}$$

Ejemplo 15 (Un problema sobre subconjuntos.). Este problema es más atractivo que profundo, pero queremos finalizar con una demostración combinatoria de una identidad interesante, así como ilustrando el aspecto función generatriz del método de cribado.

Para un n fijo positivo, tomemos como nuestro conjunto Ω de objetos las $\binom{2n}{n}$ maneras de elegir un n subconjunto de $[2n]$. Como el conjunto P de propiedades tomemos la siguiente lista de n (no $2n$) propiedades: un n-subconjunto Q tiene la propiedad i si $i \notin \mathcal{Q}$, para cada $i = 1, 2, \ldots n$, notemos que estamos trabajando con solamente la primera mitad de los posibles elementos de S.

Si S es un conjunto de propiedades (es decir un conjunto de letras de $[n]$), entonces el número de objetos Q que tienen al menos ese conjunto de propiedades (es decir que le faltan todos los $i \in S$) es claramente

$$N(\supseteq S) = \binom{2n - |S|}{n}.$$

Entonces

$$N(\supseteq S) = \binom{n}{r}\binom{2n-r}{n}.$$

Si sustituimos esos n en la criba (4.11) encontramos que

$$\sum_j e_j t^j = \sum_r \binom{n}{r}\binom{2n-r}{n}(t-1)^r. \tag{4.24}$$

Esta fórmula nos dice el número e_j de objetos que tienen *exactamente* j propiedades, para cada j.

Pero no es eso lo que queremos decir!.

Un objeto que tiene exactamente j de esas propiedades es un subconjunto $\mathcal{Q}$ de $[2n]$ al que le faltan exactamente j elementos de $1, 2, \ldots, n$. Obviamente hay justamente $\binom{n}{j}^2$ de tales subconjuntos $\mathcal{Q}$, pues podemos elegir los j faltantes tanto en $\{1, 2, \ldots, n\}$ como en $\{n+1. \ldots, 2n\}$.

Entonces sin necesidad de recurrir al cribado, sabemos que $e_j = \binom{n}{j}^2$, para todo j. Entonces de (4.23), debe ser cierto que

$$\sum_j \binom{n}{j}^2 t^j = \sum_r \binom{n}{r}\binom{2n-r}{n}(t-1)^r, \tag{4.25}$$

que es una especie de prueba con argumentos combinatorios de la identidad (4.24). Esta igualdad sugiere una expansión de la serie en torno al origen de un lado, y en torno a $t = 1$ del otro lado.

CAPíTULO 5

Metodos Asintóticos y Analíticos

Generalmente se hace énfasis sobre los aspectos formales de la teoría de las funciones generatrices como opuesta a la teoría analítica. Uno de los atractivos de este asunto, sin embargo, es cuan fácil se puede abandonar la idea de pensar las funciones generatrices como simples colgadores de sucesiones, para pasar a considerarlas como funciones analíticas de variable compleja. Teniendo esto en mente, se pueden deducir muchas propiedades de las sucesiones consideradas; propiedades que serían inaccesibles mediante aproximaciones puramente formales. Entre estas propiedades son notables las tasas de crecimiento asintótico de las sucesiones, que son, probablemente, el foco principal del lado analítico de la teoría. Desarrollaremos algunos elementos de la maquinaria analítica indispensables para realizar el estudio.

0.1. La Formula de Inversion de Lagrange. La fórmula de inversion de Lagrange (**FIL**) es una herramienta importante para resolver ecuaciones funcionales de cierto tipo, y lo más importante es que puede dar fórmulas explícitas donde otras aproximaciones fallan. La forma de la ecuación funcional que la **FIL** puede resolver es

$$u = t\phi(u). \tag{5.1}$$

Aquí ϕ es una función dada de u, y en la ecuación u está determinada como una función de t.

En el conteo de *árboles etiquetados* se presentan situaciones que se manejan eficientemente con las **FIL**. En el **Apendice** se ha incorporado el marco teórico-conceptual que nos permite tratar el conteo en estructuras de este tipo. Ahi se establece que si $T(X)$ es la *fge* para el número de árboles enraizados y etiquetados de cada número n de vertices, entonces $T(x)$ satisface la ecuación $T = xe^T$, que evidentemente es de la forma (5.1), con $\phi(u) = e^u$.

El problema general es : supongamos que damos la expansión en serie de potencias de la función $\phi = \phi(u)$ convergente en alguna vecindad del origen (del plano u). ¿Cómo podemos encontrar la expansión en serie de potencias de la solución de (5.1), $u = u(t)$. En alguna vecindad del origen (en el plano t)?. La respuesta es sorprendentemente explícita, y precisamente nos permite encontrar la expansión de alguna función de la solución $u(t)$.

TEOREMA 5.1 (Formula de Inversión de Lagrange). *Sean f(u) y $\phi(u)$ series de potencias formales en u, con $\phi(0) = 1$. Entonces existe una única serie de potencias formal u=u(t) que satisface (5.1). Además, el valor de f(u(t)) de f en la raíz u=u(t), cuando se expande en una serie de potencias en torno a t=0 satisface*

$$[t^n]\{f(u(t))\} = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\{f'(u(t))\phi(u)^n\}. \tag{5.2}$$

DEMOSTRACION 8. Primeramente notaremos que es suficiente probar el teorema en el caso en el que tanto f como ϕ son polinomios. En efecto, si n está fijo, y si f y ϕ son series de potencias formales completas, supongamos que truncamos ambas series descartando todos los términos que contengan potencias para $k > n$. Si el resultado es cierto para estos polinomios entonces se mantendrá válido para las series originales (no truncadas), ya que los términos de orden elevado que fueron descartados no afectarán a (5.2) para n fijo.

Por lo tanto supondremos que f y ϕ son polinomios

Primero haremos un cálculo formal, y después discutiremos el rango de validéz del resultado.

$$\begin{aligned}
[u^{n-1}]\{f'(u)\phi(u)^n\} &= [u^{n-1}]\{f'(u)(u/t)^n\} \\
&= [u^{-1}]\{f'(u)/t^n\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{t(u)^n}\,du \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int t^{-n} f'(u(t))u'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{t}{t^{n+1}}(d/dt)f(u(t)) \\
&= [t^n]\{t(d/dt)f(u(t))\} \\
&= n[t^n]f(u(t)).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

En la cadena de igualdades anterior, la primera igualdad viene del (5.1), la segunda es el desplazamiento de coeficiente [1], la tercera es la aplicación del teorema del residuo de la integración compleja, en la que el integrando es una función de u, y el contorno es un pequeño círculo que contiene al 0.

La cuarta igualdad necesita alguna discusión. Consideremos el comportamiento de la función $g(u) = u/\phi(u)$ cercana al origen. Como $\phi(0) = 1$, la función se mantiene diferente de cero en una vecindad del 0. Por consiguiente es analítica ahí, y tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma $u + cu^2 + \ldots$, se sigue entonces que g es una aplicación conforme inyectiva cerca del cero. Por lo tanto tiene una aplicación inversa bien definida que también es analítica en las cercanías del 0. Así (5.1) tiene una única solución $u = u(t)$ en alguna vecindad $\Re$ de $t = 0$, y u es una función analítica de t ahí. Si el contorno de integración en la integral que aparece después del cuarto signo de igualdad es un círculo en torno a $t = 0$ que está en $\Re$, entonces el signo de igualdad es válido simplemente como un cambio de variable de u a t en la integral. El resto de las igualdades son triviales y la demostración es completa.

Veamos la versatilidad de la **Fórmula de Inversión de Lagrange** a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 16. Probaremos ahora el importante resultado de la combinatoria que establece que para cualquier $n \geq 1$, hay exactamente n^{n-2} árboles etiquetados de n vertices (ver Sección sobre Conteo de Arboles etiquetados en el **Apendice**). Si $\mathcal{D}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{t_n\}$, entonces según (A.17) del Apendice

$$\mathcal{D}(x) = xe^{\mathcal{D}(x)}. \tag{5.4}$$

[1]ver (1.1) en **Cap1**

Ahora con La Fórmula de Inversión de Lagrange podemos resolver (5.4), por que es el caso de $\phi(u) = e^u$ de (5.1). Si tomamos $f(u) = u$ entonces de acuerdo con (5.2)

$$\begin{aligned}
[x^n]\mathcal{D}(x) &= (1/n)[u^{n-1}]\{\phi(u)^n\} \\
&= (1/n)[u^{n-1}]\{e^{nu}\} \\
&= (1/n)\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{n^{n-1}}{n!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{t_n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{n!},$$

y $t_n = n^{n-1}$. Pero t_n es el número de árboles enraizados de n vertices, y cada árbol etiquetado contribuye con n árboles etiquetados enraizados, por lo tanto el número de árboles etiquetados de n vertices es n^{n-2}, lo que completa la prueba.

Ejemplo 17. Ahora nos propondremos demostrar que si dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ están relacionadas por

$$b_n = \sum_k \binom{k}{n-k} a_k, \tag{5.5}$$

entonces tenemos la inversion

$$na_n = \sum_k \binom{2n-k-1}{n-k}(-1)^{n-k} k b_k. \tag{5.6}$$

Ciertamente, si (5.5) se cumple, entonces multiplicando por x^n, sumando en n, e intercambiando k y n obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_n &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} a_k x^n \\
B(x) &= \sum_{k\geq 0} a_k x^k \sum_{n\geq 0}\binom{k}{n-k} x^{n-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} a_k x^k (1+x)^k \\
&= A(x(1+x)), \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

donde A y B son *fgsop* de las sucesiones en estudio. Ahora podemos resolver A en términos de B poniendo $y = x + x^2$. Entonces si leemos (5.7) hacia atrás, encontramos que

$$A(y) = B(x(y)), \tag{5.8}$$

donde $x(y)$ es la solución de la ecuación cuadrática $y = x + x^2$ que se anula cuando $y = 0$.

Ahora *podemos*, por supuesto, resolver explícitamente la ecuación cuadrática. Si tuviéramos que hacer eso (que no es el caso) encontraríamos de (5.8) que

$$A(y) = B\left(\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right),$$

y entonces tendríamos que encontrar una fórmula agradable para el coeficiente de y^n en el lado derecho de la igualdad anterior para cada n. Esto a su vez requeriría de una fórmula pulcra para

$$[y^n]\left\{\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right\}, \tag{5.9}$$

para cada n y k. En lugar de tratar de lidiar con (5.9) elevando a la k-esima potencia la cantidad entre llaves y trabajar con la raíz cuadrada, es más elegante dejarle el trabajo pesado a la **FIL**.

Comencemos reformulando la cuestión (5.9) *implícitamente*, en lugar de explícitamente. Lo que queremos es

$$[y^n]\left\{x(y)^k\right\},$$

donde $x = x(y)$ es la solución de $y = x + x^2$ que es 0 en $y = 0$. En términos de la **FIL**, escribimos la ecuación como

$$x = \frac{y}{1+x},$$

que es de la forma (5.1) con $\phi(u) = 1/(1+u)$. Además, como queremos el coeficiente de la k-ésima potencia de $x(y)$, la función $f(u)$ en la **FIL** es ahora $f(u) = u^k$.

La conclusión (5.2) de la **FIL** nos dice que

$$\begin{aligned}
[y^n]\,\{x(y)\}^k &= (1/n)[x^{n-1}]\left\{\frac{kx^{k-1}}{(1+x)^n}\right\}\\
&= (k/n)[x^{n-k}]\frac{1}{(1+x)^n}\\
&= (k/n)\sum_k \binom{n+k-1}{k}(-x)^k\\
&= (k/n)(-1)^{n-k}\binom{2n-k-1}{n-k},
\end{aligned}$$

y finalizamos todo con la demostración de (5.6).

En la cadena de igualdades se ha usado la identidad

$$\sum_n \binom{n+k}{n}(x)^n = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$

Se notará en particular que la **FIL** es adepta al cálculo de los coeficientes de las k-ésimas potencias de la función desconocida así como de la misma función desconocida. La función f en el enunciado de la **FIL** *simplemente especifica la función de la función desconocida cuyos coeficientes queremos conocer*. La **FIL** nos entrega esos coeficientes.

1. Analiticidad y Asintótica (I): Polos.

Supongamos que hemos encontrado la función generatriz $f(z)$ para una cierta sucesión de números combinatorios que nos interesan. Necesitamos encontrar el comportamiento asintótico de la sucesión; esto es, encontrar una función simple de n que proporcione una buena aproximación a los valores de nuestra sucesión, cuando n es grande. Por lo tanto, en esta y en las siguientes secciones, estudiaremos la influencia de las singularidades de funciones analíticas sobre el comportamiento asintótico de sus coeficientes. Este método, tomado en su conjunto, provee una poderosa técnica para obtener el comportamiento asintótico de sucesiones combinatorias y provee también otra justificación de la aproximación de la función generatriz. En esta sección nos concentraremos en funciones cuyas únicas singularidades son polos.

1.1. Singularidades y polos. Sea $f(z)$ analítica en alguna región del plano complejo que incluye al origen, con la excepción de un número finito de singularidades. Si R es el más pequeño de los módulos de esas singularidades, entonces f es analítica en el disco $|z| < R$, por lo tanto este será precisamente el disco en el cual su expansión en series de potencias en torno al origen, converge.

Recíprocamente, si la expansión en series potencias de una cierta función generatriz f converge en el disco $|z| < R$, pero no en uno mayor centrado en el origen, entonces hay una o más singularidades de la función f sobre la circunferencia $|z| = R$.

Una cantidad de métodos para tratar con problemas de crecimiento asintótico de sucesiones de coeficientes se apoyan en la siguiente estrategia: encontrar una función simple g que tenga las mismas singularidades que f tiene en el círculo $|z| = R$. Entonces $f - g$ es analítica en un disco mayor, digamos, de radio $R' > R$. Entonces, de acuerdo con el Teorema 1.4, los coeficientes de las series de potencias de $f - g$ serán menores que $(\frac{1}{R} + \epsilon)^n$ [1] para n suficientemente grande y, por lo tanto, serán más pequeños que los mismos coeficientes de f. Estos, de acuerdo con el mismo teorema 1.4, serán con frecuencia tan infinitamente grandes como $(\frac{1}{R} - \epsilon)^n$.

En consecuencia, podremos encontrar los aspectos más importantes del crecimiento de los coeficientes de f observando el crecimiento de los coeficientes de g.

La estrategia ganadora, por consiguiente, es la de encontrar una función simple que mimetice las singularidades de la función en la que se está interesado y entonces usar el crecimiento de los coeficientes de la función simple para la estimación.

Estas consideraciones se cumplen más claramente en el caso de una *función meromorfa* $f(z)$, es decir, una función analítica en una región con la excepción de un número finito de *polos*, por ello estudiaremos tales funciones primeramente. La idea es que en las proximidades de un polo z_0, una función meromorfa se aproxima muy bien por la *parte principal* de su expansión de Laurent; esto es, por el número finito de términos de la serie que contienen $(z - z_0)$ elevado a potencias negativas.

Ejemplo 18. La función $f(z) = e^z/(z-1)$ es meromorfa en la totalidad del plano finito, es decir, su única singularidad está en $z = 1$ y la parte principal en esta singularidad es $e/(z-1)$. En consecuencia, la función $f(z) - e/(z-1)$ es analítica en el todo el plano. Así,

[1] Siempre consideraremos $\epsilon > 0$.

si c_n son los coeficientes de la serie de potencias de f en las cercanias del origen y d_n son los mismos para la función $e/(z-1)$, la diferencia $c_n - d_n$ es pequeña cuando n es grande. En efecto, el Teorema 1.4 garantiza que para cada $\epsilon > 0$ tenemos $|c_n - d_n| < \epsilon^n$ para n suficientemente grande. Por lo tanto los coeficientes ¨desconocidos¨ de $f(z)$ se aproximarán muy bien por aquellos de la función simple $e/(z-1)$.

Es interesante desarrollar este ejemplo en su totalidad para ver como opera la maquinaria. La expansión de $e^z/(z-1)$ en torno al origen es (ver Regla 5 del Cap.3)

$$\frac{e^z}{(z-1)} = (-1)e^z \frac{1}{1-z} = -\sum_{n\geq 0}\{1 + 1/2 + \cdots + 1/n!\}z^n.$$

Por otro lado la expansión de $e/(z-1)$ es

$$\frac{e}{(z-1)} = -e - ez - ez^2 - ez^3 - \cdots .$$

Por lo tanto, el acto de remplazar la función por su parte principal reduce en un paso la aproximación de los verdaderos coeficientes de z^n de la función f, los cuales son las *enésimas* sumas parciales de la serie de potencia para$-e$, por $-e$ mismo, lo cual es en verdad una aproximación impresionantemente buena. La razón para este gran éxito, en este caso particular, es que simplemente la substracción de una parte principal de la función expande su disco de analiticidad de $R = 1$ a $R = \infty$.

Veamos otra manera de mirar este ejemplo, sin mencionar para nada la maquinaria pesada. Consideremos el inocente hecho de que

$$f(z) = \frac{e^z}{z-1} = \frac{e}{z-1} + \frac{e^z - e}{z-1}.$$

En el primer témino los coeficientes de la serie de potencias son todos iguales a $-e$. El segundo témino no tiene singularidades en todo el plano infinito, es decir, es una *función entera* de z. Por el Teorema 1.4, sus coeficientes son $O(\epsilon^n)$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto los coeficiente de $f(z)$ son del orden

$$-e + O(\epsilon^n) \qquad (n \to \infty)$$

para todo $\epsilon > 0$.

En casos menos favorables se puede tratar de sustraer varias partes principales a fin de incrementar el tamaño del disco de analiticidad; es decir, si hay varios polos en la circunferencia, se puede incrementar a un círculo $|z| \leq R$ ligeramente mayor, si hubiesen otras singularidades.

Cuando f es meromorfa en $\Re$ y z_0 es un polo de f de orden r, $1 \leq r < \infty$, entonces, en algún disco centrado en z_0 que no contiene a z_0, f tiene una expansión

$$f(z) = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j. \tag{5.10}$$

La primera de las sumas anteriores, la que contiene las potencias negativas de $(z - z_0)$ es llamada la *parte principal* de la expansión de f alrededor de la singularidad z_0, y la denotaremos por $PP(f; z_0)$. La función $f - PP(f; z_0)$ es analítica en z_0. Es decir, podemos remover la singularidad substrayendo la parte principal.

Si además de z_0, hay otros polos de f sobre el mismo círculo $|z| = R = |z_0|$, entonces sean $z_1, \ldots, z_s$ todos esos polos. La función

$$h(z) = f(z) - PP(f; z_0) - PP(f; z_1) - \cdots - PP(f; z_s), \tag{5.11}$$

es regular (analítica) en cada uno de los puntos $\{z_j\}_0^s$. Al no tener f otras singularidades en ese círculo, h es analítica en un círculo centrado en el origen que tiene radio R', con $R' > R$. Esto significa, por el Teorema 1.4 de nuevo, que los coeficientes de la serie de potencias de h, en torno al origen, no puede crecer más rápidamente que

$$\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n$$

para n grande. Así, si $f \xrightarrow{sop} \{a_n\}$, y si

$$g(z) = PP(f; z_0) + PP(f; z_1) + \cdots + PP(f; z_s) \xrightarrow{sop} \{b_n\} \tag{5.12}$$

entonces

$$a_n = b_n + O\left(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n\right) \qquad (n \to \infty).$$

Podemos entonces estar confiados en el camino que hemos elegido para el estudio del comportamiento asintótico de los coeficientes de f.

En efecto, estudiaremos ahora los coeficientes de las series de potencias, en torno al origen, de las sumas de las partes principales de (5.12). Si z_0 es un polo de multiplicidad r, tenemos

$$
\begin{aligned}
PP(f;z_0) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^j(1-(z/z_0))^j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^j} \sum_{n\geq 0} \binom{n+j-1}{n} (z/z_0)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} z^n \left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1} \right\}.
\end{aligned}
$$

Vemos, por lo tanto, que un polo de orden r en z_0, de una función f, contribuye

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1} \tag{5.13}$$

en el coeficiente de z^n en f.

En la cadena de igualdades anterior se ha hecho uso una vez más de la serie

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{n} x^n$$

y del hecho de que z_0 tiene orden de multiplicidad r. El teorema básico que asegura que podemos aproximar bien los coeficientes de una función *meromorfa* por los coeficientes de la parte principal en sus polos de módulo pequeño, puede ser establecido como sigue:

Teorema 5.2. *Sea f analítica en una región $\Re$ conteniendo el origen, excepto para un número finito de polos. Sea $R > 0$ el módulo del (de los) polo(s) de módulo más pequeño, y sean $z_0, \cdots, z_s$ todos los polos de $f(z)$ cuyo módulo es R. Además, sea $R' > R$ el módulo del (de los) polo(s) de f, del módulo siguiente más pequeño, y sea $\epsilon > 0$. Entonces*

$$[z^n]f(z) = [z^n]\left\{ \sum_{j=0}^{s} PP(f;z_j) \right\} + O\left(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon \right)^n \right). \tag{5.14}$$

Demostracion 9. Por el Teorema 1.4, este teorema será probado tan pronto como establezcamos que sí substraemos de $f(z)$ la suma de todas sus partes principales de singularidades en el cículo $|z| = R$, entonces la función resultante es analítica en el disco mayor $|z| < R'$. Consideremos el momento cuando substraemos $PP(f;z_0)$ de $f(z)$. Ciertamente, la función resultante g, digamos, es analítica en z_0. Seguidamente substraemos $PP(f;z_1)$ de g, en lugar de substraer $PP(g;z_1)$ de g. Concluimos que esto no tiene importancia, es decir que

$$PP(f - PP(f;z_0);z_1) = PP(f;z_1).$$

Para ver esto observemos que

$$PP(f - PP(f;z_0);z_1) = PP(f;z_0) - PP(PP(f;z_0);z_1)$$

pero el segundo término de la derecha se anula porque $PP(f;z_0)$ es analítica en z_1. El resultado se obtiene haciendo inducción sobre s.

Ejemplo 19 (**Números Ordenados de Bell**). Los números de Bell son los elementos de la sucesión

$$\{1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, \ldots\}.$$

Estos cuentan las formas en que N objetos distinguibles pueden ser agrupados en conjuntos no vacios. Investigaremos ahora el comportamiento asintótico de los 'números ordenados de Bell'. Estos también pueden ser definidos como sigue: un conjunto de n elementos tiene $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ particiones en k clases. Si ahora conservamos el orden de las clases, pero no así el orden de los elementos dentro de las clases, entonces podemos ver que $[n] = \{1, \ldots, n\}$ tiene $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ *particiones ordenadas en k clases.* El número ordenado de Bell $\tilde{b}(n)$ es el número total de particiones ordenadas de n, esto es,

$$\tilde{b}(n) = \sum_k k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{5.15}$$

Por ejemplo, las letras ABCD pueden ser agrupadas en conjuntos tales que:

(1) Las cuatro letras forman un conjunto (1) $\{ABCD\}$
(2) Una letra y tres letras (4) $\{A, BCD\}, \{B, ACD\}, \{C, ABD\}, \{D, ABC\}$
(3) Dos pares de letras (3) $\{AB, CD\}, \{AC, BD\}, \{AD, BC\}$
(4) Un par y dos individuales (6) $\{A, B, CD\}, \{A, C, BD\}, \{A, D, BC\}$, $\{AB, C, D\}, \{AC, B, D\}\{AD, B, C\}$
(5) Cada letra individual (1) $\{A, B, C, D\}$
(6) Total 15=1+4+3+6+1

Nuestro problema está relacionado con el crecimiento de $\left\{\tilde{b}(n)\right\}$ cuando n es grande. Para encontrar una fórmula atractiva para estos números, multipliquemos a ambos lados de la identidad ((4.22) del **Cap.4**)

$$\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} y^k = e^{-y}\sum_{r\geq 1}\frac{r^n}{r!}y^r$$

por e^{-y} e integremos entre 0 e ∞.

En efecto:

$$\begin{aligned} e^{-y}\left(\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} y^k\right) &= e^{-y}\left(e^{-y}\sum_{r\geq 1}\frac{r^n}{r!}y^r\right) \\ \sum_{1\leq k\leq n}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}\int_0^\infty y^{k-1}e^{-y}dy &= \sum_{r\geq 1}\frac{r^n}{r!}\int_0^\infty \frac{1}{2^r}2y^{r-1}e^{-2y}dy. \end{aligned}$$

Usando la variante de la fórmula de la función Gamma

$$\int_0^\infty (\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}dx = k!,$$

para $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, obtenemos el lindo resultado

$$\tilde{b}(n) = \sum_{r\geq 0}\frac{r^n}{2^{r+1}}, \tag{5.16}$$

el cual nos permite deducir que la función generatriz exponencial de los números ordenados de Bell es

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq 0}\frac{\tilde{b}(n)}{n!}z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\sum_{r\geq 0}\frac{r^n}{2^{r+1}} \\ &= \sum_{r\geq 0}\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{n\geq 0}\frac{(zr)^n}{n!} \\ &= \sum_{r\geq 0}\frac{e^{zr}}{2^{r+1}} \\ &= \frac{1}{2-e^z}. \end{aligned}$$

¡Estamos de suerte! La función generadora $f(z)$ tiene solamente polos simples, específicamente en los punto $\log 2 \pm 2k\pi i$ para todos los enteros k. La parte principal del polo $z_0 = \log 2$

es $(-1/2)/(z-\log 2)$. Esa parte principal por sí misma contribuye con

$$\frac{1}{(2\log 2)^{n+1}},$$

a los coeficientes de z^n. No hay otras singularidades de $f(z)$ en el círculo de radio $\log 2$ centrado en el origen. De aquí

$$h(z) = f(z) - \frac{(-1/2)}{(z-\log 2)},$$

es analítica en el círculo mayor que se extiende desde el origen hasta $\log 2 + 2\pi i$. El radio de ese círculo es

$$\rho = \sqrt{(\log 2)^2 + 4\pi^2} = 6{,}321\ldots$$

Por lo tanto, los coeficientes de $h(z)$ son $O((0.16)^n)$. En suma, hemos mostrado que *los números ordenados de Bell $\tilde{b}(n)$ son de la forma*

$$\tilde{b}(n) = \frac{1}{2(\log 2)^{n+1}} n! + O((0{,}16)^n n!), \tag{5.17}$$

que no es malo para tan pequeño esfuerzo invertido. Se pueden producir tantos términos de la expansión asintótica como se deseen, a partir de la parte principal de $f(z)$ en sus polos restantes, tomando el orden no decreciente de sus valores absolutos.
Abajo mostramos una tabla de algunos valores de $n, \tilde{b}(n)$, y $n!/(2(\log 2)^{n+1})$.

n	1	2	3	5	10
$\tilde{b}(n)$	1	3	13	541	102247563
$n!/(2(\log 2)^{n+1})$	1,04	3,002	12,997	541,002	102247563

La concordancia es asombrosamente cercana. Básicamente, todo lo que hemos hecho es usar los coeficiente de la serie de Taylor de $1/(2(\log 2 - z))$ como aproximación a los coeficientes de la serie de $1/(2-e^z)$. Con todo estamos recompensados con una magnifica aproximación.

Ejemplo 20. **Permutaciones que no tienen ciclos pequeños.**
Fijemos un entero positivo q. Sea $f(n,q)$ el número de permutaciones de n letras cuyos ciclos tienen longitudes $> q$. Queremos estudiar el comportamiento asintótico de $f(n,q)$. Nótese que $f(n,q) = 0$ si $n \leq q$ y que $f(n,q) = (n-1)!$ si $n > q$, entonces la función generadora

exponencial (*fge*) de $\{f(n,q)\}_0^\infty$ es, de acuerdo con el ejemplo24 del **Apendice**

$$\begin{aligned} f_q(z) &= \exp\left\{\sum_{n>q}\frac{z^n}{n}\right\} \\ &= \exp\left\{\log\frac{1}{1-z} - \sum_{1\le n\le q}\frac{z^n}{n}\right\} \\ &= \frac{1}{1-z}e^{-\{z+\cdots+z^q/q\}}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}.$$

La única singularidad de $f_q(z)$ en el plano finito es un polo de orden 1 en $z=1$ con la parte principal $e^{-H_q}/(1-z)$, donde

$$H_q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{q}$$

es el q-ésimo número armónico.

Esta es la clase de situaciones donde obtenemos estimaciones asintóticas muy precisas, porque la diferencia entre la función y su parte principal en $z=1$ es

$$\begin{aligned} h(z) &= f_q(z) - \frac{e^{-H_q}}{1-z} \\ &= \frac{e^{-\{z+\cdots+z^q/q\}} - e^{-H_q}}{1-z} \end{aligned}$$

y es analítica en todo el plano, esto es, es una función entera. De nuevo, por el Teorema1.4, el n-ésimo coeficiente de $h(z)$ es $O(\epsilon^n)$ cuando $n\to\infty$ para todo $\epsilon>0$. Por lo tanto,

$$\frac{f(n,q)}{n!} = e^{-H_q} + O(\epsilon^n) \qquad (n\to\infty). \tag{5.19}$$

El término impresionantemente pequeño del error sugiere que para cada q fijo la probabilidad de que una n-permutación no tenga ciclos de longitud $\le q$ sería ciertamente independiente de n. Consideremos el caso $q=1$ para saborear lo que hemos hecho aquí. Entonces $f(n,1)/n!$ es la probabilidad de que una n-permutación no tenga punto fijo. Pero vimos en (4.17) que

$$\begin{aligned} f(n,1)/n! &= e^{-1}_{|n} = 1 - 1 + 1/2 - \cdots + (-1)^n/n! \\ &= e^{-1} + O(1/n!). \end{aligned}$$

En la expresión anterior $e_{|n}(x) = \sum_{0\le r\le n} \frac{x^r}{r!}$. Ciertamente la probabilidad es estrechamente independiente de n y el error implicado en el uso de la parte principal es $O(\epsilon^n)$ para todo ϵ positivo.

Los dos ejemplos anteriores han mostrado el método operando en situaciones donde es atípicamente preciso. Más comunmente se encuentran polos que no son precisamente de orden 1 en el plano complejo, sino muchos polos de varias multiplicidades. El método es el mismo en tales casos, pero se requiere de un poco más de trabajo para obtener estimaciones de razonable precisión.

2. Analiticidad y Asintótica (II): Singularidades Algebraicas

De nuevo, sea $f(z)$ analítica en alguna región que contiene al origen, pero supongamos ahora que la singularidad z_0 de f que está cercana a 0 no es un polo, sino una singularidad algebraica (punto de ramificación). Lo que esto significa es que $f(z) = (z_0 - z)^\alpha g(z)$, donde g es analítica en z_0 y α no es un entero, sino un número real.
Un caso apropiado es el de grafos 2-regulares (ver **Apendice**), donde encontramos que la *fge* para un número de grafos de n vertices cuyos ordenes de vertices son todos iguales a 2 es

$$f(z) = \frac{e^{-z/2-z^2/4}}{\sqrt{1-z}}. \tag{5.20}$$

En esta sección derivaremos un teorema conocido como **Lema de Darboux**, que nos permitirá deducir la asintótica de las sucesiones con esta clase de funciones generatrices. Lo que se está proponiendo es que se haga exactamente lo mismo que se hizo para las funciones meromorfas y se alcanzará la respuesta correcta. La prueba de que esto es ciertamente válido es más exigente. Seguiremos la demostración de [KnW].
Mediante la consideración de $f(zz_0)$ en lugar de $f(z)$, si es necesario, veremos que se puede suponer, sin perdida de generalidad, que $z_0 = 1$. En consecuencia, trataremos con una función que sea analítica en el disco unitario y que tenga un punto de ramificación en $z = 1$. Supondremos también, hasta que se diga lo contrario, que $z_0 = 1$ es la *única* singularidad que f tiene en algún disco $|z| < 1 + \eta$, donde $\eta > 0$.
Después de las lecciones previas sobre funciones meromorfas, estableceremos ahora cómo se procederá en el presente caso. Primero tenemos que $f(z) = (1 - z)^\alpha g(z)$ donde g es analítica

en $z = 1$, entonces podemos expandir g en una serie de potencias

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} g_k (1 - z)^k$$

que converge en una vecindad de $z = 1$. Por lo tanto, f misma tiene una expansión

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} g_k (1 - z)^{k+\alpha} \tag{5.21}$$

Por analogía con el procedimiento de las funciones meromorfas, podemos esperar que cada término sucesivo en la expansión, en la serie anterior, genere el término siguiente de la expansión asintótica de los coeficientes de f. Esto es en efecto cierto. El comportamiento dominante de los coeficientes de z^n en $f(z)$ viene del primer término en (5.21). Esto es, la función simple $g_0(1 - z)^\alpha$ tiene, para sus coeficientes de z^n, la principal contribución para los coeficientes de f, etc.
Probaremos ahora todas esas cosas.

Lema 2. *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, dos sucesiones que satisfacen (a) $a_n = O(n^{-r})$ y (b) $b_n = O(\theta^n) \quad (0 < \theta < 1)$. Entonces*

$$\sum_k a_k b_{n-k} = O(n^{-r}). \tag{5.22}$$

Demostracion 10. En la demostración, la letra C representa una constante genérica, cuyo valor puede cambiar a lo largo de la demostrción. Primero tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{0 \leq k \leq n/2} a_k b_{n-k} \right| &\leq \left\{ \max_{0 \leq k \leq n/2} |a_k| \right\} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq n/2} C\theta^{n-k} \right\} \\
&= \left\{ \max_{0 \leq k \leq n/2} |a_k| \right\} \left\{ \theta^n \sum_{0 \leq k \leq n/2} C\theta^{-k} \right\} \\
&\leq \max \left\{ C, Cn^{-r} \right\} \left\{ C\theta^n \right\} \\
&\leq C\tilde{\theta}^n \quad (0 < \theta < 1).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n/2<k\leq n} a_k b_{n-k} \right| &\leq \left\{ \max_{n/2<k\leq n} |a_k| \right\} \left\{ \sum_{n/2<k\leq n} \theta^{n-k} \right\} \\ &= \left\{ \max_{n/2\leq k\leq n} |a_k| \right\} \left\{ \sum_{0\leq k\leq n/2} C\theta^{k} \right\} \\ &\leq Cn^{-r} \left(\frac{1}{1-\theta} \right) \\ &= Cn^{-r}. \end{aligned}$$

Lema 3. *Si $\beta \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$, entonces*

$$[z^n](1-z)^\beta \sim \frac{n^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)}. \tag{5.23}$$

Demostracion 11. Tenemos

$$\begin{aligned} [z^n](1-z)^\beta &= \binom{\beta}{n}(-1)^n \\ &= \binom{n-\beta-1}{n} \\ &= \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$

Y el resultado sigue de usar la conocida fórmula de Stirling,

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad (n \to \infty),$$

tanto en el numerador como en el denominador de la expresión anterior.

Lema 4. *Sea $u(z) = (1-z)^r v(z)$ donde $v(z)$ es analítica en algún disco $|z| < 1+\eta, (\eta > 0)$. Entonces*

$$[z^n]u(z) = O\left(n^{-r-1}\right). \tag{5.24}$$

Demostracion 12. Aplicando el **Lema1** con $a_n = [z^n](1-z)^r$ y $b_n = [z^n]v(z)$. Como v es analítica en un disco $|z| < 1+\eta$, tenemos $b_n = O(\theta^n)$. El resultado sigue por el **Lema2**

Teorema 5.3 (Darboux). *Sea $v(z)$ analítica en algún disco $|z| < 1+\eta$, y supongamos que en una vecindad de $z = 1$ tiene una expansión en serie $v(z) = \sum v_j(1-z)^j$. Sea*

$\beta \notin \{1, 2, \dots\}$. *Entonces*

$$
\begin{aligned}
[z^n]\{(1-z)^\beta v(z)\} &= [z^n]\left\{\sum_{j=0}^{m} v_j(1-z)^{\beta+j}\right\} + O(n^{-m-\beta-2}) \\
&= \sum_{j=0}^{m} v_j \binom{n-\beta-j-1}{n} + O(n^{-m-\beta-2}). \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

Demostracion 13. Tenemos

$$
\begin{aligned}
(1-z)^\beta v(z) - \sum_{j=0}^{m} v_j(1-z)^{\beta+j} &= \sum_{j>m} v_j(1-z)^{\beta+j} \\
&= (1-z)^{\beta+m+1}\, \tilde{v}(z),
\end{aligned}
$$

donde la región de analiticidad de $\tilde{v}$ y v es la misma. El resultado sigue del **Lema4**.

Grafos 2-regulares. Para que la función generatriz exponencial $f(z)$ en (5.20), del número de grafos 2-regulares de n vertices, tenemos $f(z) = (1-z)^\beta v(z)$ con $\beta = -1/2$ y $v(z) = \exp\{-z/2 - z^2/4\}$. Los primeros términos de esta expansión de $v(z)$ en torno a $z = 1$ son

$$e^{-z/2-z^2/4} = e^{-3/4} + e^{-3/4}(1-z) + \frac{1}{4}e^{-3/4}(1-z^2) + \cdots$$

Entonces, de acuerdo con (5.25) esta expansión de $v(z)$ en torno a $z = 1$ 'levanta' una fómula asintótica para los coeficientes de $f(z)$, que son en este caso $\gamma(n)/n!$, donde $\gamma(n)$ es el número de grafos 2-regulares de n vértices. Si usamos (5.25) con $m = 2$ obtenemos

$$(5.26)\quad \frac{\gamma(n)}{n!} = e^{-3/4}\binom{n-1/2}{n} + e^{-3/4}\binom{n-3/2}{n} + \frac{1}{4}e^{-3/4}\binom{n-5/2}{n} + O(n^{-7/2}).$$

Se puede, además, simplificar la respuesta mediante el uso de conocidas expansiones asintóticas del coeficiente binomial

$$(5.27)\quad \binom{n-\alpha-1}{n} \approx \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(3\alpha+1)}{24n^2} + \cdots\right].$$

Si esto es sustituido en (5.26), el resultado es

$$(5.28)\qquad \gamma(n) \approx \frac{n!e^{-3/4}}{\sqrt{n\pi}}\left\{1 - \frac{5}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \cdots\right\}.$$

La forma del método de Darboux que hemos probado es válida cuando hay justamente una singularidad algebraica en el círculo de convergencia. El método puede ser extendido a varias de tales singularidades. Citaremos sin demostración un resultado más general:

TEOREMA 5.4 (Szegö). *Sea $h(w)$ analítica en $|w| < 1$ y supongamos que tiene un número finito de singularidades $\{e^{i\phi_k}\}_1^r$, sobre $|z| = 1$. Supongamos que en la vecindad de cada singularidad $e^{i\phi_k}$ hay una expansión*

$$h(w) = \sum_{\nu \geq 0} c_\nu^{(k)} \left(1 - we^{-i\phi_k}\right)^{\alpha_k + \nu\beta_k}$$

donde $\beta_k > 0$. Entonces la siguiente es una serie asintótica completa para los coeficientes de $h(w)$

$$[w^n]h(w) \approx \sum_{\nu \geq 0} \sum_{k=1} c_\nu^{(k)} \binom{\alpha_k + \nu\beta_k}{n} \left(-e^{i\phi_k}\right)^n.$$

3. Analiticidad y Asintótica (III): Método de Haymann

En las secciones anteriores hemos visto como manipular la asintótica de sucesiones cuyas funciones generatrices tienen singularidades en el plano finito. Esencialmente, se busca la singularidad (o las singularidades) en las cercanías del origen, después se buscan funciones simples cuyo comportamiento cerca de las singularidades sea el mismo que el de la función generatriz en estudio y, entonces, se demuestra que el comportamiento asintótico de los coeficientes es el mismo que el de los coeficientes de las funciones simples que se comportan de la misma manera cerca de las singularidades.
Pero ¿qué se hace en el caso en el que la función generatriz no tiene ninguna singularidad, cuando ella es una *función entera*?

EJEMPLO 21 (**Los coeficientes de e^z**). Consideremos la función e^z. El coeficiente de z^n en e^z es $1/n!$. ¿Podemos pensar en un método general definitivo para manipular la asintótica de funciones enteras, que en este caso deriven en la fórmula de Stirling?. Veamos cómo se hace. Usando la fórmula de Cauchy tenemos

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz,$$

donde el contorno de integración es alguna curva simple cerrada que encierra el origen. Si usamos por contorno un círculo de radio r centrado en el origen, tomando valor absoluto encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z|=r} \left\{ \frac{|e^z|}{|z|^{n+1}} \right\} (2\pi r) \\ &= \frac{e^r}{r^n}. \end{aligned}$$

Como e^z es una función entera, el valor de $r > 0$ es de nuestra conveniencia, por lo tanto podemos escogerlo para minimizar la cota superior que obtendremos. Pero

$$\min_{r>0} \frac{e^r}{r^n}, \tag{5.29}$$

es alcanzado en $r = n$, por lo tanto la mejor estimación posible que podemos dar de este argumento es que

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

Si comparamos esto con la fórmula de Stirling

$$\frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \left(\frac{e}{n}\right)^n,$$

vemos que no lo hemos hecho tan mal, ya que nuestra estimación, algo cruda, difere de la "verdadera"solamente por un factor de $1/\sqrt{2n\pi}$.

Para hacer algo mejor que esto, deberiamos tratar la variación de e^z alrededor del contorno de integración con un poco más de cuidado y no reemplazarlo por el valor máximo que él alcance. Efectivamente para muchos de los caminos alrededor de la circunferencia $|z| = r$, el valor absoluto de e^z es considerablemente más pequeño que e^z. Es solamente en una pequeña vecindad del punto $z = r$ que él está cercano a aquél valor.

En su artículo de 1956 *'A generalization of Stirling fórmula'* W.K.Haymann [Ha] desarrolló una teoría de considerable poder para tratar más precisamente con esta clase de situaciones. Además, su método es extraordinariamente útil para las funciones generatrices que se presentan en teoría combinatoria, porque estas tienden a tener coeficientes reales no negativos. Por esta razón sobre cualquier círculo centrado en el origen, una tal función será grande en modulo en el punto real positivo sobre ese círculo. El método de Haymann es potente justamente sobre tales funciones.

La teoría de Haymann se aplica no solamente a las funciones enteras, sino también a todas las funciones analíticas, incluso a aquellas con singularidades en el plano finito. En la práctica, ha sido usada con frecuencia en funciones enteras, principalmente porque, como hemos visto, otros métodos se emplean cuando las singularidades existen en el plano finito.

Sea $f(z)$ analítica en un disco $|z| < R$ en el plano complejo, donde $0 < R \leq \infty$. Supongamos además que $f(z)$ es una función *admisible* para el método. Operacionalmente, esto simplemente significa que $f(z)$ es una función sobre la cual el método es válido. Daremos algunas condiciones suficientes para la admisibilidad más abajo.

Definimos

$$M(r) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\} . \tag{5.30}$$

Será una consecuencia de la condición de admisibilidad el que

$$M(r) = f(r) \tag{5.31}$$

para todo r suficientemente grande. Esto porque, como señalamos antes, el método está dirigido a funciones que toman sus valores más grandes en la dirección positiva del eje real. Seguidamente definiremos dos funciones auxiliares,

$$a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} \tag{5.32}$$

y

$$b(r) = ra'(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} + r^2\frac{f''(r)}{f(r)} - r^2\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2 \tag{5.33}$$

El resultado principal es el siguiente:

Teorema 5.5 (Haymann). *Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ una función* admisible. *Sea r_n la raíz real positiva de la ecuación $a(r_n) = n$, para cada $n = 1, 2, \ldots,$ donde $a(r)$ está dada por la ecuación anterior (5.32).Entonces*

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n\sqrt{2\pi b(r_n)}} \text{ cuando } n \to +\infty \tag{5.34}$$

donde $b(r)$ está dado por la ecuación (5.32) anterior.

Se notará que el método en si mismo está disponible para aplicarlo directamente. Lo que a menudo presenta dificultad es determinar si la función $f(z)$ es admisible para el método o no. Antes de explicar la noción de *función admisible*, apliquemos el teorema a $f(z) = e^z$ asumiendo, en un acto de fé, que es admisible.

Ejemplo 22 (**La función** e^z(continuación)). Primero, mediante la fórmula (5.32), calculemos $a(r) = r$. Seguidamente usamos $a(r_n) = n$, para determinar la sucesión $\{r_n\}$, resultando $r_n = n$. Estos números r_n son los mismos que aquellos que encontramos anteriormente en la condición (5.29). Ellos son simplemente los valores de r en los cuales el mínimo de $f(r)/r^n$ ocurre.

Seguidamente encontramos $b(r) = r$ mediante (5.33), y el resultado de Haymann en (5.34) se presenta como

$$\frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{n^n\sqrt{2n\pi}}$$

que es nuevamente la fórmula de Stirling, pero esta vez en su forma exacta.

Daremos ahora una definición precisa de la clase de las funciones admisibles. Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ regular en $|z| < R$, donde $0 < r < \infty$. Supongamos que

(a) existe un $R_0 < R$ tal que

$$f(r) > 0 \qquad (R_0 < r < R),$$

y

(b) existe una función $\delta(r)$ definida para $R_0 < r < R$ tal que $0 < \delta(r) < \pi$ para para esos r y tal que, cuando $r \to R$ uniformemente para $|\theta| \leq \delta(r)$, tenemos

$$f(re^{i\theta}) \sim f(r)e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)},$$

y

(c) unifomemente para $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$ tenemos

$$f(re^{i\theta}) = \frac{o(f(r))}{\sqrt{b(r)}} \qquad (r \to R),$$

y

(d) cuando $r \to R$ tenemos $b(r) \to +\infty$, donde $a(r), b(r)$ están definidos por (5.32) y (5.33) respectivamente. Entonces diremos que $f(z)$ es *admisible* y el dispositivo del teorema (5.29) está disponible para determinar el crecimiento asintótico de los coeficientes $\{a_n\}$.

Sin embargo, no siempre es necesario apelar a la definición de admisibilidad para asegurarse que una función es admisible. Veamos algunos teoremas que establecen condiciones suficientes para la admisibilidad, condiciones que son mucho más fáciles de verificar que las definiciones formales anteriores.

(1) Si $f(z)$ es admisible, también lo es $e^{f(z)}$.
(2) Si f y g son admisibles en $|z| < R$, también lo es fg.
(3) Sea f admisible en $|z| < R$. Sea P un polinomio con coeficentes reales que satisface $P(R) > 0$, si $R < 0$, y que tiene el coeficiente del mayor exponente positivo, si

$R = +\infty$. Entonces $f(Z)P(z)$ es admisible.

(4) Sea P un polinomio de coeficientes reales, y sea f admisible en $|z| < R$. Entonces $f + P$ es admisible, y si el coeficiente del mayor exponente es positivo, entonces $P[f(z)]$ es también admisible.

(5) Sea $P(z)$ un polinomio no constante con coeficientes reales, y sea $f(z) = e^{P(z)}$. Si $[z^n]f(z) > 0$ para todo n suficientemente grande, entonces $f(z)$ es admisible en el plano.

Ejemplo 23. Sea t_n el número de involuciones de n letras, esto es, el número de permutaciones de n letras cuyos ciclos tienen longitudes ≤ 2. Encontremos el comportamiento asintótico de $\{t_n\}$.

Por (A.14)del **Apendice** la *fge* de la sucesión $\{t_n\}$ es

$$f(z) = \sum_{\geq 0} \frac{t_n}{n!} z^n = e^{z+\frac{1}{2}z^2}$$

Por el criterio (5) anterior, $f(z)$ es claramente Haymann admisible en todo el plano. Por lo tanto el teorema 4 aplica. Para usarlo primeramente calculamos las funciones $a(r), b(r)$ de (5.32) y (5.33). Encontramos que

$$a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} = r + r^2$$

y

$$b(r) = ra'(r) = r + 2r^2$$

Seguidamente hacemos a r_n la solución real positiva de la ecuación $a(r_n) = n$, que en este caso es la ecuación

$$r_n + r_n^2 \tag{5.35}$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \\ &= \sqrt{n}\left\{1+\frac{1}{4n}\right\}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2} \\ &= \sqrt{n}\left\{1+\frac{1}{8n}-\frac{1}{128n^2}+\cdots\right\}-\frac{1}{2} \\ &= \sqrt{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}-\frac{1}{128n^{3/2}}+\cdots. \end{aligned} \tag{5.36}$$

de esta manera tenemos una buena localización de r_n para este caso. En la tercera igualdad hemos usado la familiar serie $(1+x)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} x^k$

Ahora se verá que todo lo que se tiene que hacer es insertar cosas en la estimación de Haymann (5.34), y eso es todo, pero hay una pequeña sutileza que requerirá un poco de atención. Si echamos un mirada a (5.34) es claro que necesitaremos una estimación asintótica de clase ' $\sim$ ' para $f(r_n)$, $b(r_n)$, y r_n^n.

Tomemos una a la vez.

Primero,

$$f(r_n) = e^{r_n+\frac{1}{2}r_n^2} = e^{\frac{1}{2}(r_n+n)} = e^{n/2}e^{r_n/2}$$

aqui hemos usado (5.35). Pero en virtud de (5.36) tenemos

$$\begin{aligned} e^{r_n/2} &= \exp\left\{\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{1}{4}+O(n^{-1/2})\right\} \\ &\sim e^{\frac{1}{2}\sqrt{n}-\frac{1}{4}} \qquad (n\to\infty), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f(r_n) \sim \exp\left\{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n}-\frac{1}{4}\right\} \qquad (n\to\infty). \tag{5.37}$$

Hasta aqui todo bien. Seguidamente, en la lista, está $b(r_n)$, y esto es fácil ya que

$$b(r_n) = r_n + 2r_n^2 \sim 2r_n^2 \sim 2n \qquad (n\to\infty) \tag{5.38}$$

La última es la más difícil, y esto es

$$\begin{aligned} r_n^n &= \left\{\sqrt{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}-\cdots\right\}^n \\ &= n^{\frac{n}{2}}\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}-\cdots\right\}^n \end{aligned} \tag{5.39}$$

Lo que queremos hacer ahora es justamente encontrar un término del comportamiento asintótico de la expresión entre llaves a la n-sima potencia, y por supuesto, tenemos la dificultad de manejar la n-sima potencia.
Para ilustrar el método en un contexto simple, consideremos $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ¿Cómo se comporta esto para n grande?. ¿Se aproxima a 1?. Sabemos que no; en efecto se aproxima a e. Por lo tanto la relación asintótica correcta es

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e \qquad (n \to \infty).$$

Por lo tanto, aunque $1+\frac{1}{n} \sim 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$. En general *no se pueden elevar ambos lados de una igualdad asintótica a la n-sima potencia y esperar que eso continue siendo cierto.*
Veamos un ejemplo algo más complicado, ¿cómo prodriamos tratar con

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n ? \tag{5.40}$$

¿Cómo se comporta cuando n es grande?. La mejor manera de encarar esas preguntas es en primer lugar reemplazar $(1+\cdots)^n$ por $\exp\{n\log(1+\cdots)\}$. Seguidamente se expande el logaritmo usando la serie de potencias

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n},$$

para obtener

$$\begin{aligned}(1+\cdots)^n &= \exp\{n\log(1+\cdots)\}\\ &= \exp\left(n\left\{(\cdots)-(\cdots)^2/2+(\cdots)^3-\cdots\right\}\right).\end{aligned}$$

La serie infinita en el argumento del exponencial debe ahora ser interrumpida exactamente en el lugar correcto. *Los términos pueden ser ignorados comenzando por el primero que al ser multiplicado por n se aproxime a cero.* En síntesis podemos ignorar todos aquellos términos de la serie infinita que son $o(n^{-1})$.

En el ejemplo (5.40) tenemos

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left\{n\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}\\ &= \exp\left\{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+O\left(n^{-3/2}\right)\right)\right\}\\ &\sim \exp\left\{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}\right)\right\}\\ &= \exp\left\{\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Ahora que tenemos al sujeto en cintura, podemos retornar al problema real como está planteado en (5.39). Encontramos ahora que

$$\begin{aligned}\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}-\cdots\right\}^n &= \exp\left\{n\log\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}-\cdots\right)\right\}\\ &= \exp\left\{n\left(\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}\right)^2+O\left(n^{-3/2}\right)\right)\right\}\\ &\sim \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right).\end{aligned}$$

Porlo tanto de (5.39)

$$r_n^n \sim r^{n/2}\exp(-\sqrt{n}/2). \tag{5.41}$$

Que finaliza la estimación de las tres cantidades necesarias para el teorema de Hayman. Colocando (5.37), (5.38) y (5.41) en (5.34) se obtiene el resultado

$$a_n=\frac{t_n}{n!}\sim\frac{e^{\frac{n}{2}+\sqrt{n}-\frac{1}{4}}}{2n^{\frac{n}{2}}\sqrt{n\pi}}.$$

Finalmente si multiplicamos por $n!$ y usamos la fórmula de Stirling, obtenemos para el número de involuciones de n letras

$$t_n\sim\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n}-\frac{1}{4}}. \tag{5.42}$$

APÉNDICE A

1. Números de Bell.

En Analisis Combinatorio, el n-simo *número de Bell*, llamado así en honor a Eric Temple Bell, es el número total de particiones de un conjunto con n elementos. Comenzando con $b_0 = b_1 = 1$, los primeros números de Bell son **1, 1, 5, 15, 52, 203, 877, 4140,...** , y están dados por

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$$

o por la recurrencia

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

También como

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

, donde $S(n,k)$ son los *números de Stirling* de segunda clase.

2. Teoremas Principales de Conteo.

Algunas Definiciones Importantes.

Supongamos que tenemos un conjunto abstracto $\mathcal{P}$ de imagenes.

Definición 11. Una carta $\mathcal{C}(S,p)$ es un par consistente de un conjunto finito S (el conjunto etiqueta) de enteros positivos, y una imagen $p \in \mathcal{P}$. El *peso* de $\mathcal{C}$ es $n = |S|$. Una carta de peso n es llamada *estándard* si su conjunto etiqueta es $[n] = \{1, 2, \ldots, \}$.

Definición 12. Una *mano* H es un conjunto de cartas cuyos conjuntos etiqueta forman una partición de $[n]$ para algún n. Esto significa que si n denota la suma de los pesos de las cartas en la mano, entonces los conjuntos etiqueta de las cartas en H son disjuntos dos a dos, no vacios y su unión es n.

Definición 13. El *peso de una mano* es la suma de los pesos de las cartas en la mano.

Definición 14. El *reetiquetado* de una carta $\mathcal{C}(S,p)$ con un conjunto S', está definido si $|S'| = |S$, y es la carta $\mathcal{C}(S',p)$. Si $|S'| = [|S|]$ entonces tenemos un reetiquetado estándar de la carta.

Definición 15. Un *deck* es un conjunto finito de cartas estándar cuyos pesos son todos el mismo y cuyas imagenes son todas diferentes. El *peso del deck* es el peso común de todas las cartas en el deck.

Definición 16. Una familia exponencial $\mathcal{F}$ es una colección de decks $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \ldots$ donde para cada $n = 1, 2, \ldots,$ el *deck* $\mathcal{D}_n$ es el deck de peso n.

Si $\mathcal{F}$ es una familia exponencial, escribiremos d_n por el número de cartas en el deck $\mathcal{D}_n$, y llamaremos $\mathcal{D}(x)$ a la *fge* de la sucesión $\{d_n\}_1^\infty$, el deck enumerador de la familia.
Sea $\mathcal{F}$ una familia exponencial. Para cada $n \geq 0$ y $k \geq 1$, denotemos con $h(n,k)$ el número de manos H de peso n que consisten de k cartas, y son tales que cada carta en la mano es un reetiquetado de alguna carta en algún *deck* en $\mathcal{F}$. Están permitidas las repeticiones. Esto es, tenemos permitido tomar varias copias de la misma carta de un *deck* y reetiquetar esas copias con diferentes conjuntos etiqueta. ¿Cómo podemos expresar $h(n,k)$ en términos de $d_1, d_2, d_3 \ldots,$ donde d_i es el número de cartas diferentes en el *deck* $\mathcal{D}_i (i \geq 1)$?.
Si $h(n,k)$ es el número de manos H de peso n que tienen exactamente k cartas, entonces introducimos la función generatriz a 2-variables

$$\mathcal{H} = \sum_{n,k \geq 0} h(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k. \tag{A.1}$$

Este es un generador de tipo mixto; es la función generatriz de una *sop* con respecto a la variable y y una *fge* con respecto a x. Lo llamaremos un enumerador de mano a dos variables de la familia.
Si $h(x) = \sum_k h(n,k)$ es el número de manos de peso n sin considerar el número de cartas, escribiremos $\mathcal{H}(x)$ en lugar de $\mathcal{H}(x,1)$ para representar la *fge* de $\{h(n)\}$. Es un enumerador de $\mathcal{F}$ de una variable.
Sean $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ dos familias exponenciales cuyos conjuntos imagenes son P' y P'' son disjuntos. Formemos una tercera familia $\mathcal{F}$, y escribimos $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \bigoplus \mathcal{F}''$, como sigue:

fijamos $n \geq 1$. De $\mathcal{F}'$ tomamos todas las cartas d'_n del *deck* $\mathcal{D}'_n$ y formamos una pila; tomamos todas las cartas d''_n de $\mathcal{D}''_n$ y las agregamos a la pila que contendrá $d_n = d'_n + d''_n$ cartas diferentes. Se repite la operación para cada n.

El Lema Fundamental del Conteo Etiquetado. Sean $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ dos familias exponenciales y sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \bigoplus \mathcal{F}''$ su *fusión*. Además sean $\mathcal{H}'(x,y)$, $\mathcal{H}''(x,y)$, $\mathcal{H}(x,y)$ los respectivos enumeradores de mano de estas familias. Entonces

$$\mathcal{H}(x,y) = \mathcal{H}'(x,y)\mathcal{H}''(x,y).$$

No se demostrará este Lema, solamente destacaremos el importante resultado que es clave en la demostración y que será de uso frecuente

$$\begin{aligned} h(n,k) &= \sum_{n',k'} \binom{n}{n'} h'(n',k')h''(n-n',k-k') \\ &= \left[\frac{x^n}{n!}y^k\right] \mathcal{H}'(x,y)\mathcal{H}''(x,y) \end{aligned} \tag{A.2}$$

La idea principal es la de que el proceso de fusión de familias y el de multiplicación de funciones generatrices exponenciales corresponden exactamente. El hecho de que en la ecuación (A.2) la variable n' en la suma esté presente en el coeficiente binomial al comienzo mientras que k' no está, resulta de la naturaleza mixta de la función generatriz que fue elegida con la variable x como representante de la *fge* y la variable y como representante de la *sop*.

Teorema A.1 (La fórmula exponencial). *Sea $\mathcal{F}$ una familia exponencial cuyos enumeradores de* deck *y mano son $\mathcal{D}(x)$ y $\mathcal{H}(x,y)$ respectivamente. Entonces*

$$\mathcal{H}(x,y) = e^{y\mathcal{D}(x)}. \tag{A.3}$$

En detalle el número de manos de peso n y k cartas es

$$h(n,k) = \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left\{\frac{\mathcal{D}(x)^k}{k!}\right\}. \tag{A.4}$$

Sumando (A.3) sobre todos los k obtenemos el siguiente

Corolario 1. *Sea $\mathcal{F}$ una familia exponencial, sea $\mathcal{D}(x)$ la* fge *de la sucesión $\{d_n\}_0^\infty$ de tamaños de los* decks*, y sea $\mathcal{H}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{h_n\}_0^\infty$, donde h_n es el número de manos de peso n. Entonces*

$$\mathcal{H}(x) = e^{\mathcal{D}(x)}. \tag{A.5}$$

Por otro lado sumando (A.3) solamente sobre aquellos k que están en un conjunto dado T obtenemos

Corolario 2 (La fórmula exponencial con número restringido de cartas.). *Sea T un conjunto de enteros positivos, sea $e_T(x) = \sum_{n \in T} x^n/n!$, y sea $h_n(T)$ el número de manos cuyo peso es n y cuyo número de cartas pertenece al conjunto admisible T entonces*

$$\{h_n(T)\}_0^\infty \overset{fge}{\longleftrightarrow} e_T(\mathcal{D}(x)) \tag{A.6}$$

Veamos algunas familias exponenciales de uso frecuente:
Consideremos el conjunto de todas las permutaciones. Veamos primero cómo son las cartas. En una carta se mostraran n puntos arreglados un un círculo, los puntos estarán etiquetados con el conjunto $[n]$, en algún orden, y se colocarán flechas alrededor del círculo, todas en el sentido horario, para indicarnos que los puntos están arreglados en una secuencia circular horaria.
Establecemos así la parte que corresponde a la imagen de la carta. Adicionalmente hay un conjunto S de n enteros positivos en la carta.
Se reconoce fácilmente que una carta como esa corresponde a una permutación cíclica de los elementos de S, es decir una permutación de S que tiene un cíclo simple. Por ejemplo la carta cuya imagen se muestra en la figura, y cuyo conjunto es $S = \{2, 4, 7, 9, 10\}$, representa la permutación cíclica

$$2 \to 7 \to 4 \to 10 \to 9 \to 2$$

del conjunto S.
¿Cuál es el *deck* de esas cartas?. Las cartas en un deck son cartas estándar, y consisten de una muestra de cada carta estándar distinta, de un peso dado. En este caso el n-simo deck $\mathcal{D}_n$ contiene exactamente $(n-1)!$, una por cada permutación cíclica de $[n]$.
Hasta ahora hemos representado las permutaciones con un cíclo. Ellas son los bloques a partir de los cuales se construyen todas las permutaciones, usando manos de cartas.
Entonces, ¿cómo es una mano en este caso?. Una mano es una colección de cartas, y en cada carta hay dos cosas: una permutación cíclica y un conjunto etiqueta. Los conjuntos etiqueta son disjuntos dos a dos y su unión es $\{1, 2, \cdots, n\}$. La cardinalidad de cada conjunto etiqueta en cada carta, corresponde a la permutación cíclica que es mostrada ?. La colección de todas las cartas en la mano representa una permutación de n letras. Los cíclos de esta permutación

so los que se muestran en las cartas individuales de la mano después de que los cíclos en cada carta hayan sido reetiquetados, de una manera que preserva el orden, con los elementos del conjunto de etiquetas en la carta.

Como cada permutación de n letras tiene una única descomposición en cíclos, vemos que esas *manos de peso n corresponden exactamente a las permutaciones de n letras.* Por lo tanto al conjunto de todas las permutaciones es una familia exponencial. Lo designaremos $\mathcal{F}_2$.

¿Cuántas cartas hay en un deck $\mathcal{D}_n$?. Hay $d_n = (n-1)!$ de ellas. Ahora bien qué es el número $h(n,k)$ de manos de peso n y k cartas. Una tal mano representa una permutación de n letras y k cíclos. Por lo tanto en este caso $h(n,k)$ es el número de permutaciones de n letras que tiene k cíclos.

Aplicaremos el **Teorema1** a la familia exponencial $\mathcal{F}_2$. Oservamos que el *deck* $\mathcal{D}_n$ contiene $d_n = (n-1)!$ cartas. La funciòn generatriz exponencial de la sucesión $\{(n-1)!\}_1^\infty$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(x) &= \sum_{n\geq 1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{x}{n} \\
&= \log\frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Ahora por el **Teorema1** tenemos

$$\mathcal{H}(x,y) = \exp\{y\log\frac{1}{1-x}\} \tag{A.7}$$

En esta familia exponencial $h(n,k)$ es el número de permutaciones de n letras que tiene k cíclos, y es llamado el número de *Stirling* de primera clase. Usaremos la notación estándar $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ para estos números (en contraste con la más conocida $s(n,k)$), reservando $h(n,k)$ para situaciones generales. Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} y^k &= \left[\frac{x^n}{n!}\right](1-x)^{-y} \\
&= n!\binom{y+n-1}{n} \\
&= y(y+1)\cdots(y+n-1),
\end{aligned} \tag{A.8}$$

en la tercera igualdad de la cadena hemos usado la fórmula familiar

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{n} x^n.$$

Así, pues, el número de permutaciones de n letras con varios números de cíclos son los coeficientes en la expansión de la función factorial ascendente $y(y+1)\cdots(y+n-1)$.
El enumerador de manos de k cartas es obviamente

$$\frac{1}{k!}\left\{\log\frac{1}{1-x}\right\}^k \qquad (k=1,2,\ldots)$$

lo que nos dice que los números de *Stirling* están también dados por

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \left[\frac{x^n}{n!}\right]\frac{1}{k!}\left\{\log\frac{1}{1-x}\right\}^k. \tag{A.9}$$

3. Particiones de Conjunto.

Introduciremos una nueva familia exponencial que designarems por $\mathcal{F}_3$, como sigue: primero, para cada $n \geq 1$, en el $\mathcal{D}_n$ hay justamente una carta de peso n. En esa carta puede haber cualquier figura y hay también un conjunto etiqueta.
¿Cómo son las manos?. Hay una mano H correspondiente a cada partición del conjunto $[n]$. En efecto, dada una tal partición, tomemos sus conjuntos y reetiquetemos los conjuntos etiqueta en las cartas en la mano. Entonces las cartas están únicamente determinadas ya que solamente hay una carta de cada peso.
Por lo tanto en esta familia exponencial el número de manos de peso n que tienen k cartas es igual al número de particiones del conjunto $[n]$ en k clases. Pero ya nos hemos encontrado con esto, en el estudio de los números de *Stirling* de segunda clase $(S(n,k), \{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \})$.
Para aplicar la fórmula exponencial calculemos primero la *fge* del número d_n de cartas en cada en cada *deck*. Todos estos números son 1, si $n \geq 1$ y 0 en caso contrario, por lo tanto

$$\mathcal{D}(x) = \sum_n d_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

Ahora por la *fórmula exponencial* el numerador de manos es

$$\mathcal{H}(x,y) = e^{y(e^x-1)}, \tag{A.10}$$

y en particular

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left\{\frac{(e^x-1)^k}{k!}\right\}. \tag{A.11}$$

Comparando este resultado con la función generatriz de (2.12) del **Cap.2** de los números de *Bell* encontramos que hay un refinamiento de aquella función generatriz. e^{e^x-1} no solamente genera el número de particiones de n-conjuntos, sino que además, cada término de la expansión

$$e^{e^x-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

tiene una significación con respecto al número de clases en las particiones.
Como cierre veamos un resultado interesante que se usará en el **Cap.5** y lo produce la aplicación del **Corolario2** al problema que se trata en el siguiente:

EJEMPLO 24. Sean S y T conjuntos fijos de enteros positivos. Sea $f(n;S,T)$ el número de particiones de $[n]$ cuyos tamaños estan todos en S y cuyos números de clase están en T. Entonces es iinmediato que $\{f(n;S,T)\}_{n\geq 0}$ tiene *fge* $e_T(e_s(T))$ donde $e_S(x) = \sum_{s\in S} x^s/s!$

3.1. Involuciones. Fijemos m y n. ¿Cuantas permutaciones σ de n letras satisfacen $\sigma^m = 1$, donde 1 es la permutación identidad?.
Para contestar a esta pregunta, necesitamos el siguiente:

LEMA 5. *Para que $\sigma^m = 1$ es necesario y suficiente que las longitudes de todos los ciclos de σ sean divisores de m.*

DEMOSTRACION 14. Consideremos un ciclo C de σ, de longitud r. Sea i una letra en C. Entonces por definición de ciclo, $\sigma^m(i)$ es una letra en C que encontraremos comenzando en i y moviendo m posiciones en el ciclo C, esto es la letra que está a $m \mod r$ pasos en torno a C de i. Pero $\sigma^m(i) = i$. Por lo tanto $m \mod r = 0$ es decir r divide a m. Entonces m es un multiplo de la longitud de cada ciclo de C. El reciproco es inmediato y la demostración termina.

Regresemos al problema. Consideremos la familia exponencial $\mathcal{F}_4$ en la que las cartas son las usuales para los cíclos de permutación, pero un las que los únicos *decks* posibles son aquellos cuyos pesos son divisores de m. Entonces $d_r = (r-1)!$ si $r \setminus m$, y 0 si no. Entonces

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{r\geq 1} d_r x^r/r! = \sum_{d/m} \frac{x^d}{d}. \tag{A.12}$$

Por la fórmula exponencial tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.2. *Fijemos $m > 0$. El número de permutaciones de n letras cuya m-sima potencia es la permutación identidad tiene la función generatriz*

$$\exp\left(\sum_{d/m} \frac{x^d}{d}\right). \tag{A.13}$$

Tratemos un caso especial de este Teorema. Tomemos $m = 2$. Estamos hablando entonces de una permutación cuyo cuadrado es 1. Estas son llamadas *involuciones*. Las involuciones solamente pueden tener ciclos de longitudes 1 ó 2, por el Lema anterio. Si t_n es el número de involuciones de n letras, entonces por (A.12)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{t_n}{n!} x^n = \exp(x + \frac{1}{2}x^2) \tag{A.14}$$

4. Grafos.

4.0.1. *Grafos 2-regulares.* Cuantos grafos etiquetados no dirigidos hay en n vertices, con cada vertice de grado 2 (también llamados 2-regulares). Un tal grafo es la unión disjunta de ciclos no dirigidos, así tenemos una familia exponencial $\mathcal{F}_5$ en la que las cartas están formadas por ciclos no dirigidos, en lugar de ciclos dirigidos, como en el caso de las permutaciones.
Para $n \leq 2$ no hay ciclos dirigidos. Para $n \geq 3$ el número d_n de cartas en el $n-simo$ deck es el número de arreglos circulares no dirigidos de n letras, y ese número es $(n-1)!/2$. Por lo tanto la generatriz del tamaño del *deck* es

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(x) &= \sum_{n\geq 3} \frac{(n-1)!}{2n!} x^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\log \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2}\right\} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2}}{\sqrt{1-x}}.
\end{aligned}$$

4.1. Contando Arboles Etiquetados. Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos. Cabe la siguiente pregunata: ¿Cuántos árboles etiquetados (de manera estandar) de n vertices hay?.
Se intentará responder a esta pregunta en la forma de uno de los más famosos resultados en combinatoria, a saber:

TEOREMA A.3. *Para cada* $n \geq 1$ *hay exactamente* n^{n-2} *árboles etiquetados de* n *vertices.*

Aún cuando se conocen muchas demostraciones de este Teorema, la que se logra a través de las funciones generatrices, mediante el uso de la fórmula exponencial, es particularmente encantadora (ver Ejem 1 en cap.4).
Comencemos la fantasia!. Un árbol *enraizado* es un árbol que tiene un vértice distinguible llamado la *raíz*. Es claro que, hay n veces tantos árboles etiquetados enraizados de n vertices como árboles haya, por lo tanto la demostración estará terminada si podemos contar los árboles enraizados.
Sea t_n el número de árboles (con etiquetas estándar) enraizados de n vertices para $n \geq 1$. Definamos la familia exponencial $\mathcal{F}_7$ como sigue. Las cartas corresponden a los árboles estiquetados enraizados. En una carta $\mathcal{C}(S,p)$, p es una imagen de un árbol estiquetado enraizado de $|S|$ vertices, y S es un conjunto de etiquetas.
¿Cómo es una mano en $\mathcal{F}_7$?. Una mano corresponde a *un bosque enraizado etiquetado*, que es un grafo etiquetado en el que cada uno de sus componentes conexos es un árbol enraizado. La fórmula exponencial nos dirá cuantos bosques hay si sabemos cuántos árboles hay o viceversa.
Consideremos la fórmula exponencial

$$\mathcal{H}(x) = e^{\mathcal{D}(x)}, \tag{A.15}$$

donde $\mathcal{H}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{f_n\}, \mathcal{D}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{t_n\}$ y f_n es el número de bosques enraizados de n vertices. Ahora (A.15) es una ecuación en dos funciones desconocidas. Para obtener otra usamos un hecho que fue descubierto por Polya, a saber que

$$t_{n+1} = (n+1)f_n. \tag{A.16}$$

DEMOSTRACION 15. Para probar (A.16), sea F un bosque etiquetado enraizado de n vertices. Introduzcamos un nuevo vertice v, y asignemosle una etiqueta j, con $1 \leq j \leq n+1$

reetiquetemos F con el conjunto $1, 2, \ldots j-1, j+1, \ldots, n+1$, preservando el orden de las etiquetas. Además dibujemos aristas entre v y las raices de los componentes de F, y enraicemos el árbol resultante en v. El resultado es un árbol etiquetado enraizado de $n+1$ vertices. Cuando variamos la etiqueta j, se producen $n+1$ árboles enraizados correspondientes a cada bosque enraizado F. La construcción es fácilmente reversible, por lo tanto cada árbol enraizado de $n+1$ vertices se produce exactamente 1 vez, lo que prueba (A.16)

La sucesión $f_n = t_{n+1}/(n+1)$ tiene la función generatriz exponencial

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{f_n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{t_{n+1}}{(n+1)!} x^n \\ &= \frac{1}{x}\mathcal{D}(x).\end{aligned}$$

Si combinamos este resultado con (A.15) obtenemos

$$\mathcal{D}(x) = xe^{\mathcal{D}(x)}. \tag{A.17}$$

5. Cartas No Etiquetadas y Manos.

Consideremos ahora problemas en los que no hay conjuntos de etiquetas de los que preocuparse. Esto pareciera simplificar las cosas, y así ocurre en algunos casos pero no en todos. Nos ocuparemos ahora del problema de cuantas estructuras, las manos, pueden ser construidas con los bloques de construción representados por las cartas.

Una carta $\mathcal{C}(n, p)$ tiene ahora solamente su peso n y su imagen p. Para cada $n = 1, 2, \ldots$ hay un *deck* $\mathcal{D}_n$ que contiene d_n cartas, todas de peso n. en la presente situación, una mano es un multiconjunto de cartas que se construye de la manera siguiente: de un *deck* cualquiera $\mathcal{D}_n$ sacamos varias copias de una misma carta $\mathcal{C}(r, p')$, varias copias de otra carta $\mathcal{C}(r, p'')$ y así sucesivamente; esta operación la repetimos extrayendo cartas de otros *deck*, etc.

La sucesión de cartas en la mano así formada no tiene ninguna significación. Lo que importa es cuales cartas han sido seleccionadas y con que multiplicidad. El peso de una mano es la suma de los pesos de las cartas en la mano, tomando en cuenta sus multiplicidedes. Como antes $h(n, k)$ es el número de manos de peso n que contiene exactamente k cartas y asumimos que

$$\mathcal{H}(x,y) = \sum_{n,k} h(n,k)x^n y^k. \tag{A.18}$$

Notemos que $n!$ falta en la forma que hemos asumido para la función generatriz. En lugar de la forma mixta *fge-sop* que estudiamos antes para conteos etiquetados, la forma de *sop* es la más indicada para tratar el conteo no etiquetado.

Se necesita un nombre genérico para los sistemas que con este enfoque se consideraran. Se llamaran *prefabs* en lugar de familias exponenciales, que aplicaba en el caso etiquetado, y lo representaremos con la letra $\mathcal{P}$.

Así un *prefab* $\mathcal{P}$ consiste de una sucesión de *decks* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ a partir de los cuales formaremos las manos como se indicó antes. En $\mathcal{P}$ asumimos $\mathcal{D}(x) \overset{sop}{\longleftrightarrow} \{d_n\}_1^\infty$.

El principal problema es encontrar la relación funcional entre $\mathcal{H}(x,y)$ y $\mathcal{D}(x)$. Consideremos un *prefab* $\mathcal{P}$ que consiste de un solo *deck* $\mathcal{D}_r$ y supongamos que este *deck* contiene una sola carta.

En este *prefab* una mano H es una cosa muy simple. Consiste de un número k de copias de una única carta y su peso será $n = rk$. Por lo tanto en este *prefab* el número $h(n,k)$ de manos de peso n que tienen exactamente k cartas es 1 si $n = rk$ y 0 en otro caso. Así

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x,y) &= \sum_{n,k} h(n,k)x^n y^k \\ &= \sum_{k\geq 0} 1.x^{rk}y^k \\ &= \frac{1}{1-yx^r}. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Como antes definiremos la operación de *fusión*: si $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ son *prefabs* cuyos conjuntos imagen son disjuntos, entonces por su *fusión* $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \bigoplus \mathcal{P}''$ entendemos el *prefab* cuyo *deck* $\mathcal{D}_n$, para cada n, es la unión de los *decks* correspondientes de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$. Si había d'_n, d''_n cartas, respectivamente, en aquellos dos *decks*, entonces hay $d_n = d'_n + d''_n$ cartas en $\mathcal{D}_n$.

El Lema Fundamental del Conteo No Etiquetado. Sean $\mathcal{H}'(x,y)$, $\mathcal{H}''(x,y)$ y $\mathcal{H}(x,y)$ los enumeradores de mano de los *prefabs* $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ y $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \bigoplus \mathcal{P}''$ respectivamente. Entonces $\mathcal{H} = \mathcal{H}'\mathcal{H}''$.

Prueba. Consideremos una mano $H \in \mathcal{P}$, de peso n y conteniendo exactamente k cartas.

Algunas k' de esas cartas vienen de $\mathcal{P}'$, y su peso total es n', mientras que el resto $k-k'$ vienen de $\mathcal{P}''$, y su peso total debe ser $n-n'$. Así

$$h(n,k)=\sum_{n',k'} h'(n',k')h''(n-n',k-k').$$

Pero por una extraña coincidencia, esta es exactamente la relación que hay entre los coeficientes de la series de potencia de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}''$.

Armados con este Lema fundamental podemos ahora considerar *prefabs* $\mathcal{P}_r$ algo más complicados, conteniendo también *decks* no vacios $\mathcal{D}_r$, pero ahora con d_r cartas diferentes. Por inducción sobre $d_r = 1, 2, \ldots$ veremos que el enumerador de manos de este *prefab* es

$$\mathcal{H}(x,y)=\frac{1}{(1-yx^r)^{d_r}}. \tag{A.20}$$

Finalmente en un *prefab* general $\mathcal{P}$ en el que hay d_n cartas en el *deck* $\mathcal{D}_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ se tiene que $\mathcal{P}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ donde los $\mathcal{P}_n$ son como los que se han definido anteriomente. Tenemos entonces

Teorema A.4. *En un* prefab $\mathcal{P}$ *cuyo enumerador de manos es* $\mathcal{H}(x,y)$ *tenemos*

$$\mathcal{H}(x,y)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-yx^r)^{d_r}} \tag{A.21}$$

donde d_n *es el número de cartas en el* n*-simo* deck *con* $(n \geq 1)$.

Este es el análogo de la fórmula exponencial para el caso donde no hay etiquetas. Como en el caso de la fórmula exponencial, esta también tiene un número asombroso de aplicaciones elegantes, algunas de las cuales se discutiran más adelante. Hagamos algunos arreglos a (A.21) que nos permitan calcular los h a partir de los d, para ello echaremos mano del operador $yD\log$.

Tomemos log a ambos lados de (A.21)

$$\begin{aligned}\log \mathcal{H}(x,y) &= \sum_{s=1}^{\infty} \log \frac{1}{(1-yx^s)^{d_s}} \\ &= \sum_{s\geq 1} d_s \log \frac{1}{(1-yx^s)} \\ &= \sum_{s\geq 1} d_s \sum_{m\geq 1} \frac{y^m x^{sm}}{m} \\ &= \sum_{n,m\geq 1} d_{\frac{n}{m}} x^n \frac{y^m}{m},\end{aligned}$$

donde d_j se interpreta como 0 si su subindice no es un entero positivo.

Seguidamente diferenciamos con respecto a y y multiplicamos po $y\mathcal{H}$, obteniendo

$$y\frac{\partial \mathcal{H}(x,y)}{\partial y} = \mathcal{H}(x,y) \sum_{n,m\geq 1} x^n y^m d_{\frac{n}{m}}.$$

Finalmente, tomamos $[x^n y^m]$ a ambos lados, obteniendo

$$mh(n,m) = \sum_{r,m'\geq 1} h(n-rm', m-m')d_r \qquad (n,m\geq 1; h(n,0)=\delta_{n,0}). \tag{A.22}$$

Esta recurrencia se presenta en cualquier *prefab*, y permitae el cálculo numérico del contador de manos a partir del contador de *decks*.

A menudo los enumeradores de *decks* de 2-variables $\mathcal{H}(x,y)$ o $\{h(n,k)\}_{n,k\geq 0}$ dan mñas detalles de lo necesario. Si $h_n = \sum_k h(n,k)$ es el número de manos de peso n, sin importar las cartas que contenga, y si

$$\mathcal{H}(x) \xleftrightarrow{sop} \{d_n\}_1^{\infty},$$

entonces como $\mathcal{H}(x)$ se obtiene formalmente de $\mathcal{H}(x,y)$ reeemplazando y por1 el Teorema general del conteo (A.21) se transforma en

$$\mathcal{H}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^r)^{d_r}}. \tag{A.23}$$

La recurrencia (A.22) se puede reemplazar por

$$nh_n = D_m h_{n-m} \qquad (n\geq 1; h_0 = 1) \tag{A.24}$$

donde $D_m = \sum_{r\backslash m} r d_r (m = 1, 2 \ldots)$.

Bibliografía

[1] E.A. Bender, Asymptotic Method in Enumeration, *SIAM Review* ***16*** (1974), pp. 485-515.

[2] N.G. de Bruijn, Asymptotic Method in Analysis, North Holand, Amsterdam, 1958.

[3] L. Comtet, Advanced Combinatorics, Reidel, Dordrecht, 1974.

[4] W.K. Hayman, A generalisation of Stirling's formula, J. *Reine Angew. Mat.* **196**, Nos. 1/2 (1956), pp. 67-95.

[5] A.M. Odlyzco, Asymptotic Enumeration Methods, ATT Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974

[6] E.C. Titchmarsh, Theory of Functions, 2nd. ed., Oxford University Press, London, 1939.

[7] H.S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academy Press, 1990