

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Método Analítico para la estimación del Capital Económico en Portafolios de Crédito

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Alejandro Marcano** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Prof. Maicol Ochoa.

Caracas, Venezuela

Marzo de 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Método Analítico para la estimación del Capital Económico en Portafolios de Crédito**”, presentado por el **Br. Alejandro Marcano**, titular de la Cédula de Identidad **18.111.375**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Prof. Maicol Ochoa
Tutor Principal

Prof. Luis Paredes
Jurado

Prof. Jose B. Hernandez
Jurado

Agradecimiento

A mi familia Guillermina, Eunice, Vane, Camucha y Bellota, por todo el apoyo incondicional que me han aportado durante mi vida, especialmente a mis padres que han hecho todo lo posible para que pudiera tener la oportunidad de estudiar lo que me apasiona. A mi esposa Karla por darme determinación y motivación en todo momento.

A mis amigos Antonio, Daniel y Eliezer con quienes he compartido buenos momentos e interesantes charlas fisicomatemáticas. A Maicol (UCAB) y a Stella y Miguel (IVIC) por la guía que me dieron durante mi carrera.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Introducción a la Matemática Financiera	2
1. Teoría Económica	2
2. Teoría de Riesgo	9
3. Índices de Concentración	14
4. Modelo de Múltiples Factores de Merton	16
Capítulo 2. Modelo de Ajuste de Múltiples Factores	18
1. Aproximación Analítica para el VaR_q	18
2. Aproximación Analítica para el ES_q	30
Capítulo 3. Robustez del Modelo de Ajuste de Múltiples Factores	31
1. Modelo Simplificado	31
2. Composición del Portafolio de Referencia	31
3. Robustez de la aproximación del EC_q	33
4. Discusión	35
Apéndice A. Cuentas, cuentas y más cuentas	36
1. Derivadas de $\alpha_q(L_\varepsilon)$	36
2. Cálculo de la correlación condicional de los r_n	38
Apéndice B. Programación en R del Modelo Simplificado	41
1. Simulaciones de Monte Carlo	41
2. Modelo de Ajuste de Múltiples Factores Simplificado	42
3. Data de MSCI	45
Apéndice. Bibliografía	46

Introducción

El capital económico es la reserva monetaria que debe tener una institución financiera para sustentar posibles pérdidas futuras. Éste se suele estimar mediante el método de Monte Carlo (MC). Una desventaja importante de este método es el tiempo y el recurso computacional que requiere.

En el presente trabajo se desarrollará un modelo analítico denominado *Modelo de Ajuste de Múltiples Factores* y en sucesivo se referirá a éste como el modelo AMF. Dicho modelo estima el capital económico de una manera bastante eficaz y además es una buena aproximación a la estimación hecha por el método de MC.

Se analizará bajo cuáles condiciones el modelo AMF es apropiado y se presentará un sencillo programa para su aplicación basado en una simplificación del modelo original. La importancia del modelo AMF recae en que, a diferencia de las medidas usuales de riesgo como el VaR_q , éste mide el riesgo de concentración de manera significativa y representativa.

Introducción a la Matemática Financiera

El objetivo de este capítulo es presentar, de una manera breve y precisa, los conceptos y resultados esenciales para entender el modelo AMF a estudiar en el capítulo 2. Se dará un recorrido por los conceptos y objetos económicos que están relacionados con el tema de estudio, para luego comenzar a entrelazar conceptos matemáticos con términos financieros. Se finalizará con los modelos básicos y usuales para el cálculo del riesgo.

1. Teoría Económica

1.1. Fundamentos.

En la matemática financiera interesa la construcción y aplicación de modelos y herramientas matemáticas para la solución de problemas económicos de índole financiera. Además, se busca sentar las bases teóricas de modelos económicos ya existentes que carecen de formalidad matemática. Pero antes, es necesario conocer los conceptos básicos del mundo económico.

DEFINICIÓN 1.1. Un *mercado* es un mecanismo por medio del cual los compradores y los vendedores interactúan para intercambiar bienes y servicios.

Existen diversos tipos de mercado, como el mercado laboral, el mercado libre, el mercado financiero, entre otros. En lo que resta del trabajo se estará bajo el contexto de un *mercado financiero*, el cual es un mecanismo en donde se comercian instrumentos financieros (bonos, acciones, entre otros) entre el inversionista y la institución emisora o un intermediario. Pero, ¿qué es un instrumento financiero?

DEFINICIÓN 1.2. Un *instrumento financiero* es un activo comerciable de cualquier tipo, ya sea dinero en efectivo, evidencia de propiedad en alguna entidad o cualquier otro documento financiero con fuerza legal.

Éste presenta cuatro características primordiales:

- (i) La **liquidez** es la facultad de un instrumento para ser convertido en efectivo en corto tiempo con una pérdida mínima o sin pérdida alguna en su valor de mercado.
- (ii) El **riesgo** es la incertidumbre de obtener el rendimiento esperado (o pérdida) al invertir en un determinado instrumento financiero.
- (iii) La **rentabilidad** simboliza la eficiencia histórica de alguna empresa, institución o instrumento financiero.
- (iv) El **plazo** es el período durante el cual no se puede disponer del monto invertido hasta que se cumpla dicho intervalo de tiempo, previamente acordado. Se le suele referir de la siguiente manera: si su duración es de 0 a 6 meses es de *corto plazo*, de 6 meses a 2 años es de *mediano plazo* y mayor a 2 años es de *largo plazo*.

Algunos ejemplos de instrumentos financieros son:

Acción: es un instrumento financiero que representa la propiedad, y en general, los derechos de voto en una sociedad anónima. Una determinada proporción de las acciones de una compañía da a su propietario el derecho a esa parte de los votos, de los beneficios netos y de los instrumentos de la sociedad anónima. Se dice que es un instrumento de renta variable, ya que su rendimiento puede variar con el tiempo.

Bono: certificado portador de intereses emitido por el Estado o por una sociedad anónima, que promete pagar un interés y devolver una suma del dinero en una fecha futura especificada a largo plazo. Se dice que es un instrumento de renta fija, ya que su rendimiento se suele fijar al momento del acuerdo.

Opción: es un instrumento financiero que da a su comprador el derecho, mas no la obligación, de comprar (o vender) un determinado bien o activo a un precio predefinido hasta una fecha de plazo concreta. Si el ejercicio de la opción solo se puede ejecutar en la fecha de vencimiento se dice que es una *opción europea*. Si se puede ejecutar en cualquier momento desde el día de la compra hasta el día de vencimiento se dice que es una *opción americana*.

Préstamo: es un instrumento de deuda en el cual una persona o institución (prestamista) entrega a otra (prestatario) una cantidad de dinero, en donde el prestatario está obligado a pagar una cantidad igual de dinero al prestamista en un momento posterior. Por lo general, el dinero se devuelve en cuotas regulares y, además, bajo un costo denominado interés.

En los mercados financieros las personas o empresas que interactúan se denominan *participantes*, cumpliendo cada uno un rol según su interés, necesidad y deber.

Los distintos participantes son:

Emisor: es una organización, empresa, institución u otros que emiten instrumentos financieros con la finalidad de cubrir su necesidad inmediata de capital.

Inversionista: persona natural o jurídica que busca que su exceso de capital genere rendimiento al invertirlo en diversos instrumentos financieros.

Intermediario financiero: es una institución que canaliza el superávit de fondos con el déficit de fondos. Por ejemplo, un banco transforma depósitos bancarios en préstamos bancarios.

Autoridades reguladoras: son instituciones de carácter gubernamental o no gubernamental que someten a las instituciones financieras a ciertos requisitos, restricciones y directrices, con el objetivo de mantener la integridad del sistema financiero. Por ejemplo, en Venezuela existe la Superintendencia de las Instituciones del Sector Bancario (SUDEBAN).

El término *mercado financiero* engloba el intercambio de cualquier tipo de instrumento financiero. Sin embargo, se suele dividir o clasificar según la naturaleza de los instrumentos financieros a transferir. Se definirán los de mayor interés:

Mercado de Valores: es una entidad pública, no necesariamente un lugar físico, usada para la negociación de acciones de empresas y diversos instrumentos financieros a un precio acordado, que son los que se cotizan en bolsa, así como en negocios privados.

Mercado de Deudas: se caracteriza por la compra y venta de instrumentos financieros de corto y mediano plazo, como por ejemplo los bonos.

Mercado de Capitales: se caracteriza por la compra y venta de instrumentos financieros de mediano y largo plazo, como por ejemplo las acciones y las obligaciones. Este mercado contiene al Mercado de Valores.

La clasificación anterior se complementa agregando si el mercado es primario o secundario. Esto se refiere a en qué fase se realiza la negociación. De manera más precisa, se dice que es un *mercado primario* si el instrumento financiero es negociado directamente del emisor al inversionista, representando esto un movimiento de efectivo para el emisor. Se dice que

es un *mercado secundario* si el instrumento se negocia dos o más veces, proporcionando liquidez entre inversionistas sin que el emisor intervenga.

Al momento de invertir, una institución selecciona, según su criterio, un grupo de instrumentos financieros en los cuales destina una parte del capital excedente de su patrimonio esperando que el valor de éstos aumente para así obtener beneficios, formando así un *portafolio de inversión*.

DEFINICIÓN 1.3. Un *portafolio de inversión* es un conjunto de instrumentos financieros en los cuales se invierte.

De esta manera, se considera dicho conjunto como el objeto de estudio al cual se le analizarán sus beneficios y posibles pérdidas, en lugar de considerar cada instrumento por separado. Así se puede obtener un mejor control de la inversión ya que, por ejemplo, si se deseara minimizar pérdidas, una manera de lograrlo es eligiendo instrumentos que presenten comportamientos opuestos en distintos escenarios del mercado. Es decir, si el valor de uno de ellos baja, el valor de otro sube, compensando así las posibles pérdidas.

Además, se asume lo siguiente:

SUPOSICIÓN 1.4. *Los inversionistas tienen una conducta racional al momento de seleccionar su portafolio de inversión buscando siempre obtener la máxima rentabilidad posible bajo el menor riesgo.*

Aunque la suposición anterior es discutible, dado que existen inversionistas dispuestos a aceptar mayor riesgo para obtener un mayor beneficio, se considerará válida para homogeneizar y simplificar el criterio para la elección de portafolios de los inversionistas en el modelo.

El presente trabajo se enfocará en los *portafolios de crédito*, es decir, portafolios conformados por préstamos que otorga, generalmente, una institución bancaria a diversos clientes. El riesgo asociado a este tipo de portafolios se denomina *riesgo de crédito*. En la construcción de un portafolio de crédito surgen las siguientes preguntas: ¿Cuál es la distribución más apropiada del capital bancario para minimizar el riesgo de pérdida debido al incumplimiento de algunos de los clientes? ¿cuál es el monto necesario para que la institución pueda sobrevivir un incumplimiento masivo por parte de los clientes? ¿de qué manera

está relacionado el incumplimiento de un cliente con el de otros?. La teoría de riesgo tiene, en parte, como objetivo responder estas preguntas.

1.2. El Marco Regulatorio en el Sector Bancario.

El Primer Acuerdo de Basilea publicado en 1988, conocido como **Basilea I**, sentó las bases para el criterio del capital mínimo a nivel internacional y los bancos pasaron a ser objeto de los *requisitos de capital regulatorio*. El capital regulatorio son los fondos que debe tener una institución bancaria para absorber pérdidas y asegurar la liquidez. Basilea I se enfocaba principalmente en el riesgo de crédito, propone que los bancos deben mantener al menos 8% de fondos en relación con sus inversiones. Las inversiones se ponderan según su grado de riesgo, determinado de la siguiente manera:

Tabla 1

Ponderación en %	0	10	50	100
Categoría	Estado	Banco	Hipoteca	Empresas y particulares

Y los fondos requeridos se calculaban como

$$\text{Capital Regulatorio} = \text{Valor ponderado de la inversión} \times 8\%$$

Sin embargo, Basilea I tenía una gran debilidad: no era sensible a la variación del riesgo.

En 2001 se da lugar al Segundo Acuerdo de Basilea, conocido como **Basilea II**, que se apoya en tres *pilares* fundamentales:

Pilar I: Establece los detalles para el cálculo del riesgo de crédito, el riesgo de mercado y el riesgo operacional. Con respecto al riesgo de crédito el nuevo acuerdo es más flexible y sensible al riesgo. La institución puede elegir entre seguir el enfoque estándar, que es el más conservador, o un enfoque más avanzado que se le llama *Métodos de rating internos (Internal Rating Based IRB)*. El primer enfoque consiste en tomar los rating de riesgo proporcionados por agencias de calificación como Standard & Poor's, Moody's o Fitch Ratings. En el enfoque IRB el banco mide el riesgo por sí mismo, sin embargo, este método solo puede ser aplicado si es aprobado por las autoridades supervisoras. En el enfoque conservador, el valor del capital regulatorio suele ser del 9%.

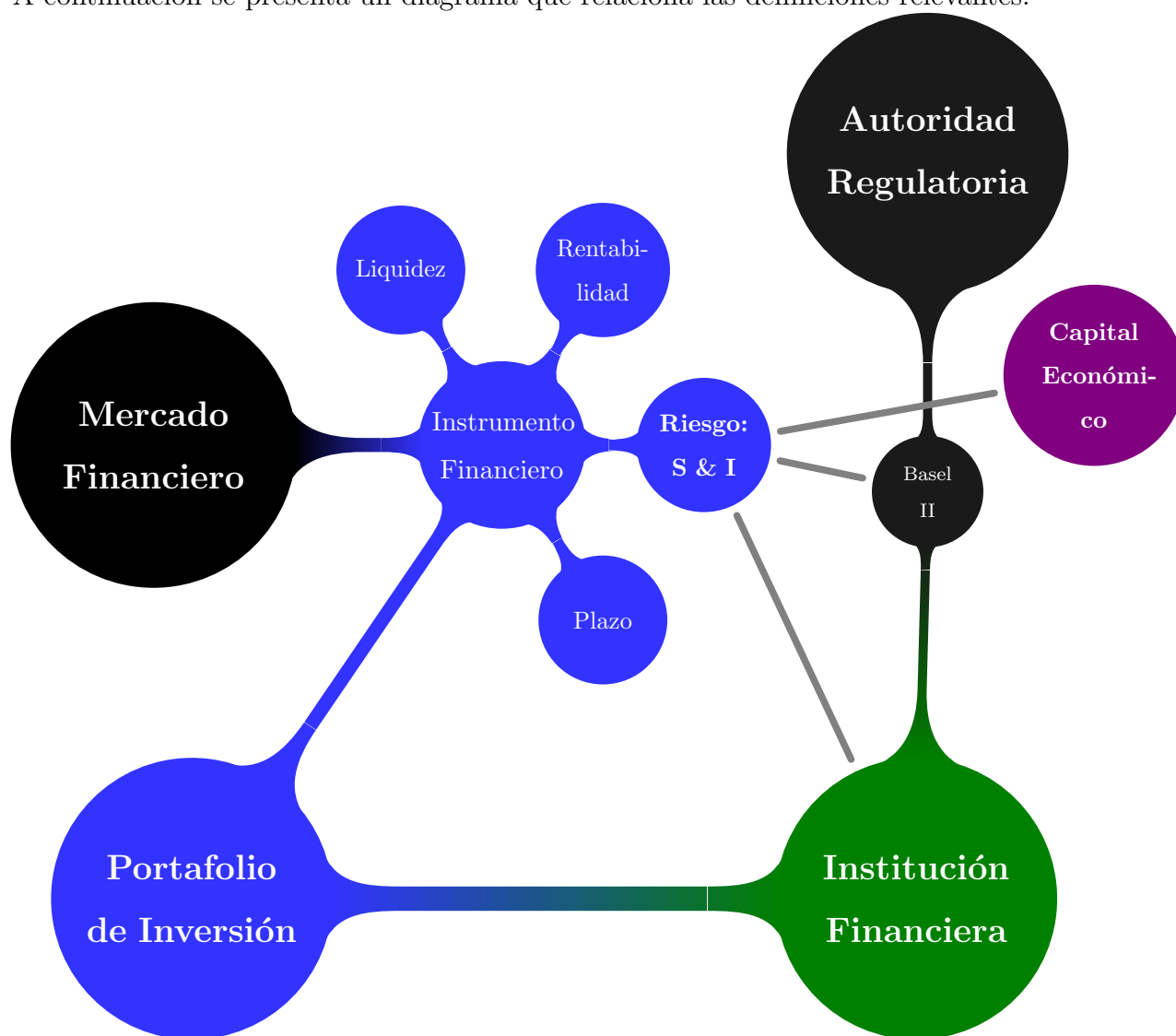
Pilar II: Establece los principios del proceso de revisión supervisora de la suficiencia de capital, el cual es ejecutado por las autoridades supervisoras. Consiste, esencialmente, en evaluar y auditar la conformidad de las regulaciones respecto a los métodos y

transparencia que son necesarios para que al banco le sea permitido usar rating internos.

Pilar III: Busca establecer la disciplina de mercado a través de la exigencia de transparencia en los reportes financieros de los bancos.

Vale destacar que ninguno de los acuerdos tiene fuerza legal, son más bien una guía para las autoridades supervisoras de cada país en el tema del sector bancario.

A continuación se presenta un diagrama que relaciona las definiciones relevantes:



Por otro lado, se considerará la clasificación de sectores denominada Clasificación Mundial Global Estándar, GICS por sus siglas en inglés, desarrollada por las empresas *Standard & Poor's* y *Morgan Stanley Capital International* (MSCI).

En la tabla 2 se presenta dicha clasificación.

Tabla 2

GICS	
Sectores	Grupos de la Industria
A: Energía	Energía
B: Materiales	Materiales
C: Industriales	Bienes de Equipo Servicio Comerciales y Profesionales Transportes
D: Productos de Consumo No Básico	Automóviles y Componentes Bienes de Consumo Duradero y Confección Servicios al Consumidor Medios de Comunicación Venta al Por Menor
E: Productos de Primera Necesidad	Venta de Alimentos y Productos de Primera Necesidad Alimentos, Bebidas y Tabaco Productos Domésticos y Personales
F: Salud	Equipos y Servicios Médicos Productos Farmacéuticos, Biotecnología y Ciencias de la Salud
G: Finanzas	Entidades Bancarias Entidades Financieras Diversas Seguros Bienes Inmobiliarios
H: Tecnología de la Información	Software y Servicios Equipo Tecnológico y Maquinarias Semiconductores y Equipo Relacionado
I: Servicios de Telecomunicaciones	Servicios de Telecomunicaciones
J: Servicios de Utilidad Pública	Servicios de Utilidad Pública

2. Teoría de Riesgo

2.1. Variables de Riesgo.

La principal dificultad al modelar el riesgo de crédito surge del hecho que en general los eventos de incumplimiento son poco comunes y ocurren inesperadamente. Cuando un evento de incumplimiento ocurre, puede llevar a significar pérdidas importantes. Se comenzará con una descripción de las variables para el cálculo del riesgo establecidas en el Pilar I de Basilea II.

La incertidumbre de que un deudor incumpla con su contrato es medida por su **probabilidad de incumplimiento (probability of default PD)**, la cual, por razones comparativas, está dada bajo un horizonte de tiempo.

La asignación de una probabilidad de incumplimiento a cada deudor del portafolio de crédito del banco podrá resultar algo bastante complicado. Si la institución financiera posee la autorización de las autoridades, podría utilizar métodos de rating internos. De lo contrario, deberá tomar los rating de riesgo proporcionados por agencias de calificación como Standard & Poor's, Moody's o Fitch Ratings.

La **exposición en el momento de incumplimiento (exposure at default EAD)** denotará la cantidad del préstamo que está expuesta a pérdida en caso de incumplimiento.

La **pérdida en el momento de incumplimiento (loss given default LGD)** describe la severidad de la pérdida, ya que en el momento de incumplimiento es posible que el deudor pague una fracción del monto acordado, resultando así una pérdida parcial para el banco. Suele considerarse como constante con valor entre 45 % y 80 %.

En general, el riesgo de crédito puede separarse en **pérdidas esperadas (expected losses EL)**, las cuales pueden ser previstas y por lo tanto fácilmente manejables, y en **pérdidas inesperadas (unexpected losses UL)**, las cuales son más difíciles de cuantificar. A su vez, este último puede ser dividido en **riesgo sistemático (systematic risk)**, también llamado riesgo de contagio, y en **riesgo idiosincrático (idiosyncratic risk)**.

El primero se puede entender como el riesgo debido a la inestabilidad de sistema financiero o al posible colapso del sistema financiero; se debe a que existe una gran interdependencia entre las instituciones bancarias y el fallo de una institución o un grupo puede generar un efecto de contagio o de cascada a las otras. El segundo es el riesgo debido a la inestabilidad de un deudor en particular. El riesgo idiosincrático puede ser prácticamente eliminado con

una buena diversificación del portafolio. Por el contrario, el riesgo sistemático no puede ser eliminado, solo reducido.

El *capital económico (economic capital EC)* son los fondos retenidos para cubrir las pérdidas inesperadas. Aunque similares, el capital económico y el capital regulatorio no necesariamente son iguales. El primero es el calculado internamente por la institución bancaria y el segundo es el impuesto o sugerido por las autoridades supervisoras.

2.2. Esquema General del Modelo.

Para representar la incertidumbre sobre eventos futuros, se especificará un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ con espacio muestral Ω , σ -álgebra \mathcal{A} , medida de probabilidad \mathbb{P} y filtración $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$. Se fijará una fecha límite u horizonte de tiempo $T > 0$, que en general será igual a un año.

Se considerará también un portafolio con N prestamos a N clientes indexados por $n = 1, 2, \dots, N$. Se denotará por EAD_n a la exposición en el momento de incumplimiento del deudor n y por:

$$(1.1) \quad s_n = \frac{EAD_n}{\sum_{k=1}^N EAD_k},$$

su porción sobre la exposición total del portafolio. Se denotará por PD_n a la probabilidad de incumplimiento del deudor n . Sea LGD_n la pérdida en momento de incumplimiento del deudor n , y se denotará su esperanza y su varianza como $ELGD_n$ y $VLGD_n$ respectivamente.

Defínase por D_n la *indicatriz de incumplimiento del deudor n* , en el periodo de tiempo $[0, T]$, como:

$$D_n = \begin{cases} 1, & \text{si el deudor incumple} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}.$$

Entonces se modelará la *pérdida del portafolio* L_N como la variable aleatoria:

$$(1.2) \quad L_N = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n.$$

Como el índice N se refiere a la cantidad de deudores del portafolio, se podrá omitir a menos que haya alguna ambigüedad. Se usará el subíndice n para referirse a la pérdida debido al deudor n .

Se considerará válido lo siguiente:

SUPOSICIÓN 1.5. *La exposición en el momento de incumplimiento EAD_n , la pérdida en el momento de incumplimiento LGD_n y la probabilidad de incumplimiento PD_n de cualquier deudor n son independientes.*

Note que no se está asumiendo que los indicadores de diferentes deudores n y m sean no correlacionados.

Siguiendo el esquema anterior, se tendrá que la pérdida esperada EL_n estará dada por la esperanza de la variable de pérdida L_n del deudor n . Como EAD_n , LGD_n y D_n son independientes, EAD_n constante y D_n de Bernoulli se tiene que:

$$(1.3) \quad EL_n = \mathbb{E}[L_n] = EAD_n \cdot ELGD_n \cdot PD_n.$$

Entonces, por la aditividad de la esperanza tenemos que EL viene dado por:

$$(1.4) \quad EL = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot ELGD_n \cdot PD_n.$$

Las pérdidas inesperadas UL_n se determinarán a través de la varianza de L_n .

$$(1.5) \quad UL_n = \sqrt{\mathbb{V}[L_n]} = \sqrt{\mathbb{V}[EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n]}.$$

En el caso en que LGD_n y D_n son no correlacionadas se tiene que:

$$(1.6) \quad UL_n = EAD_n \sqrt{VLGD_n \cdot PD_n + ELGD_n^2 \cdot PD_n \cdot (1 - PD_n)}.$$

A diferencia de la esperanza, la varianza es aditiva solo si las variables consideradas son no correlacionadas dos a dos (teorema de Bienaymé), lo cual en la práctica casi nunca ocurre. Para el caso en que las variables están correlacionadas se tiene la siguiente expresión para las pérdidas inesperadas:

$$(1.7) \quad UL = \sqrt{\mathbb{V}[L]} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N EAD_n \cdot EAD_k \cdot \text{Cov}[LGD_n \cdot D_n; LGD_k \cdot D_k]}.$$

2.3. Algunas Medidas de Riesgo.

A continuación se presentarán, de manera breve, algunas de las medidas de riesgo más usadas por las instituciones financieras.

DEFINICIÓN 1.6 (Valor en Riesgo). Dado un nivel de confianza $q \in (0, 1)$, el Valor en Riesgo (Value-at-Risk VaR) de un portafolio con variable de pérdida L al nivel de confianza

q está dado por el menor valor x tal que la probabilidad de que L exceda a x no sea mayor que $(1 - q)$. Formalmente:

$$\text{VaR}_q(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L > x) \leq 1 - q\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq q\},$$

donde $F_L = \mathbb{P}(L \leq x)$ es la función de distribución de L .

El VaR_q no es más que el cuantil a nivel q de la distribución de pérdida. En algunos casos se usará la notación alternativa $\alpha_q(L) := \text{VaR}_q(L)$. Para F_L es continua y estrictamente creciente entonces $\alpha_q(L) = F^{-1}(q)$. Por ejemplo, si $L \sim N(\mu, \sigma^2)$, es decir, tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 entonces mediante un simple cálculo se tiene para un q dado que:

$$(1.8) \quad \text{VaR}_q(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(q),$$

donde Φ es la función de distribución de la normal estándar y Φ^{-1} el q -cuantil de Φ .

Note que el VaR no da información sobre la severidad de las pérdidas que ocurren con una probabilidad menor a $1 - q$. Si la distribución de pérdida tiene una cola pesada esto resultará muy problemático. Además, no es subaditivo, lo que contradice el principio de que mientras más diversificado esté el portafolio, menor debería ser su riesgo.

Se declarará a continuación un resultado útil para el cálculo del q -cuantil de variables aleatorias con una forma particular.

PROPOSICIÓN 1.7. *Sea $g(x)$ una función monótonamente decreciente y X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Entonces*

$$\alpha_q(g(X)) = g(\alpha_{1-q}(X)) = g(\Phi^{-1}(1 - q))$$

DEMOSTRACIÓN.

Note que

$$\begin{aligned} \alpha_q(g(X)) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(g(X) \geq x) \leq 1 - q\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(x)) \leq 1 - q\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \Phi(g^{-1}(x)) \leq 1 - q\} \\ &= g(\Phi^{-1}(1 - q)) = g(\alpha_{1-q}(X)) \end{aligned}$$

□

En respuesta a la poca sensibilidad del VaR_q con respecto a la forma de las colas de las distribuciones, se tiene la siguiente medida de riesgo que sí toma en cuenta los eventos con probabilidad menor a $1 - q$.

DEFINICIÓN 1.8 (Déficit Esperado). Para una variable de pérdida L con $\mathbb{E}[|L|] < \infty$ y una función de distribución F_L , el déficit esperado (expected shortfall ES) al nivel de confianza $q \in (0, 1)$ es definido como:

$$\text{ES}_q(L) = \frac{1}{1 - q} \int_q^1 \text{VaR}_u(L) du.$$

Por su definición $\text{ES}_q \geq \text{VaR}_q$. Para el caso en que L sea integrable con función de distribución continua se tiene que:

$$(1.9) \quad \text{ES}_q(L) = \mathbb{E}[L | L \geq \text{VaR}_q(L)] = \frac{\mathbb{E}[L \cdot \mathbf{1}_{\{L \geq \text{VaR}_q(L)\}}]}{1 - q}.$$

Si $L \sim N(\mu, \sigma^2)$, para un q dado se tiene que:

$$(1.10) \quad \text{ES}_q = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q}.$$

Donde ϕ es la función de densidad de la distribución normal estándar.

DEFINICIÓN 1.9 (Capital Económico). Se define el capital económico EC_q para un nivel de confianza q como:

$$\text{EC}_q = \text{VaR}_q - EL.$$

Puede ser interpretado como el capital apropiado para cubrir pérdidas inesperadas en el $q\%$ de los casos, donde se asume un horizonte de tiempo de un año. En el peor de los casos, un banco puede perder por completo su portafolio de créditos en un año dado. Guardar fondos para cubrir un evento tan poco probable es económicamente ineficiente. Los bancos quieren invertir la mayor parte de su capital en instrumentos fructíferos; tienen una fuerte iniciativa de minimizar los fondos retenidos. He aquí el problema de administración de riesgo en una institución financiera: buscar el balance entre sostener el suficiente capital para cumplir con sus responsabilidades y responder en momentos de crisis y, por otro lado, invertir parte del capital para obtener ganancias.

3. Índices de Concentración

Una forma particular del riesgo de crédito es conocido como *riesgo de concentración*. El riesgo de concentración en portafolios de créditos surge de una distribución desigual de los préstamos a prestatarios individuales (*concentración de nombre*) o a una distribución desigual de los préstamos según el sector industrial o a la región geográfica (*concentración de sector o de territorio*).

Ahora se presentará una visión general de medidas de concentración simples que suelen usarse como índices de referencia de concentración por su fácil cálculo.

DEFINICIÓN 1.10 (Grado de Concentración). Se considerará un portafolio con porciones de exposición $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_N$ donde $\sum_{n=1}^N s_n = 1$. El grado de concentración (CR_k) del portafolio se definirá como la suma de las porciones de exposición de los k más grandes préstamos del portafolio, es decir:

$$CR_k(s_1, \dots, s_N) = \sum_{i=1}^k s_i.$$

Aunque de sencillo cálculo, posee numerosas deficiencias. Por ejemplo, la medida solo toma en consideración el tamaño de los préstamos más no su distribución. Por otro lado, el valor de k tiene un gran impacto en el valor del índice; sin embargo, es elegido de manera arbitraria por el gestor de riesgos. Además, los cambios de la composición del portafolio pueden pasar inadvertidos según la elección de k .

Construyendo una *curva de concentración* se evitará la dependencia de la elección de k , donde a cada valor k se le asignará la altura CR_k . Si la curva de concentración de un portafolio A está por debajo de la curva de concentración de otro portafolio B, se dirá que A presenta más concentración que B. Sin embargo, las curvas de concentración se intersectan en la mayoría de los casos.

Una definición estrechamente relacionada con la curva de concentración es la *curva de Lorenz*.

DEFINICIÓN 1.11 (Curva de Lorenz). Dada una sucesión de datos ordenados $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_N$, la curva empírica de Lorenz es definida, para $q \in (0, 1)$, como la interpolación

lineal entre los puntos $L(0) = 0$ y:

$$L(q) = L(n/N) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sum_{j=1}^N A_j}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

si se considera una función de densidad f , entonces la curva analítica de Lorenz estará definida por:

$$L(q) = \frac{\int_{-\infty}^q t f(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt}.$$

La igualdad entre la curva de Lorenz y la distribución se alcanzará cuando se considere una distribución uniforme, es decir, todos los prestatarios recibirán préstamos idénticos. En contraste, si se le otorgará solamente el préstamo a un cliente, la curva de Lorenz estará representada por una delta de dirac $\delta(x)$ con su peso en $x = 1$.

De manera análoga a la curva de concentración, con la curva de Lorenz no se podrá comparar portafolios con curvas que se intersecten. En el caso que no se intersecten, el portafolio con la curva más baja presenta mayor concentración. Otro índice usado, relacionado con la curva de Lorenz, es el coeficiente de Gini.

DEFINICIÓN 1.12 (Coeficiente de Gini). Para un portafolio de N préstamos con porciones de exposición s_1, \dots, s_N el coeficiente empírico de Gini es definido como:

$$G(s_1, \dots, s_N) = \frac{\sum_{n=1}^N (2n-1)s_n}{N} - 1,$$

y el coeficiente analítico de Gini por:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(q) dq,$$

donde $L(q)$ es la curva analítica de Lorenz.

El coeficiente de Gini es la proporción del área entre la distribución uniforme en $(0, 1)$ y la curva de Lorenz con respecto al área total bajo la distribución uniforme. Un valor del coeficiente cercano a cero significa que el portafolio está bien diversificado. Si el valor es cercano a 1, el portafolio presentará una alta concentración.

Por último se definirá el índice de Herfindahl-Hirschman.

DEFINICIÓN 1.13 (Índice de Herfindahl-Hirschman). Dado un conjunto de datos A_1, \dots, A_N (en el caso de un portafolio las porciones de exposición s_1, \dots, s_N) se define el Índice de

Herfindahl-Hirschman (HHI) como:

$$\text{HHI} = \frac{\sum_{n=1}^N A_n^2}{(\sum_{n=1}^N A_n)^2} = \sum_{n=1}^N s_n^2.$$

De los índices anteriores, el que resultará de mayor utilidad práctica para comparar de manera rápida la concentración entre dos portafolios es el HHI, debido a que el índice HHI de dos portafolios siempre serán comparables, ya que son escalares reales y, por otro lado, considera a todos los préstamos del portafolio.

4. Modelo de Múltiples Factores de Merton

Bajo el contexto de la matemática financiera, se deseará explicar el éxito financiero de una empresa en función de diversos factores subyacentes que influyen de manera global. Los modelos de factores posibilitarán interpretar la correlación entre la variable de pérdida y estos factores subyacentes. Más aún, permiten ajustar el esfuerzo computacional que podrá ser controlado por el número de factores que se consideran en el modelo.

Se considerará un portafolio con N prestatarios y cada uno tiene un único préstamo con una exposición EAD_n . La porción de cada deudor vendrá dada por $s_n = \frac{EAD_n}{\sum_{k=1}^N EAD_k}$. Se precisa un plazo $T > 0$. Se define $V_t^{(n)}$ como el valor activo del deudor n en el tiempo $t \leq T$. Para cada deudor se definirá un umbral C_n tal que el deudor respectivo incumple en el tiempo $[0, T]$ si $V_T^{(n)} \leq C_n$.

Sea

$$(1.11) \quad D_n = \mathbb{1}_{\{V_T^{(n)} < C_n\}} = \mathbb{1}_{\{r_n < c_n\}} \sim \text{Bern}(1; \mathbb{P}[r_n < c_n]), \text{ para } n = 1, 2, \dots, N.$$

Donde c_n es el umbral correspondiente a C_n después de cambiar a $V_T^{(n)}$ por r_n el beneficio logarítmico del activo del n -ésimo prestador ($r_n = \log(V_T^{(n)} / V_0^{(n)})$).

SUPOSICIÓN 1.14. La ganancia de los activos r_n dependerá linealmente de K factores de riesgo con distribución normal estándar: X_1, \dots, X_K que afecta el incumplimiento de los prestatarios de manera sistemática así como de un riesgo idiosincrático ε_n también con distribución normal estándar. Más aún, ε_n es independiente de cada uno de los factores sistemáticos X_k para todo $k = 1, \dots, K$ y los ε_n son no correlacionados.

Con esta suposición se tendrá que r_n admite la siguiente representación

$$(1.12) \quad r_n = \beta_n Y_n + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n.$$

Donde Y_n denotará el *factor compuesto* de la empresa y ε_n representará el impacto idiosincrático. El factor de carga β_n ilustra la sensibilidad del prestatario n al riesgo sistemático, por lo tanto, captura la correlación lineal entre r_n y Y_n . Además, $Y_n = \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} X_k$. Los pesos α_{nk} describen la dependencia del deudor n al factor k . Para asegurar que Y_n tenga varianza unitaria se asumirá que $\sum_{k=1}^K \alpha_{nk}^2 = 1$.

Se supondrá $T = 1$ y PD_n será la probabilidad de incumplimiento del deudor n . Se tiene que $PD_n = \mathbb{P}(r_n < c_n)$. Reemplazando la condición $r_n < c_n$ por $\beta_n Y_n + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n < c_n$ y haciendo manipulaciones algebraicas de manera conveniente, como $r_n \sim N(0, 1)$, se obtiene

$$(1.13) \quad PD_n(Y_n) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \beta_n Y_n}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} \right).$$

Esta es una expresión de la probabilidad de incumplimiento condicional con respecto a los factores de riesgo sistemáticos. La ecuación anterior en términos de los factores X_k en un punto $x = (x_1, \dots, x_K)$ específico quedaría como

$$(1.14) \quad PD_n(x) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \beta_n \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} x_k}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} \right).$$

Recordando la expresión de L del modelo general se tiene que la proporción de pérdida (sustituyendo EAD_n por s_n) vendrá dada por

$$L = \sum_{n=1}^N s_n LGD_n \mathbb{1}_{\{r_n < \Phi^{-1}(PD_n)\}}.$$

Entonces la proporción esperada de pérdidas viene dado por la esperanza condicional de L . Como se ha asumido que D_n es independiente a LGD_n se obtiene

$$(1.15) \quad \mathbb{E}[L|X_1, \dots, X_K] = \sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \beta_n \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} x_k}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} \right).$$

Finalmente, para estimar el q -cuantil de L se realizarán simulaciones de Monte Carlo generando valores de r_n a través de la ecuación (1.12). En la sección 1 del apéndice B se encuentra un pequeño programa para dicha simulación.

Modelo de Ajuste de Múltiples Factores

En el presente capítulo se presentará un método analítico para calcular el Valor en Riesgo (VaR) y el Déficit Esperado (ES) de un portafolio, para así poder dar un estimado del Capital Económico. La idea general del modelo será la siguiente: se desea calcular el q -cuantil de L , la pérdida del portafolio. Se construirá una variable \bar{L} de manera tal que su q -cuantil pueda ser calculado de manera analítica y sea cercano a $\alpha_q(L)$. Por último, se hará una expansión de Taylor de segundo orden para aproximarse al valor de $\alpha_q(L)$.

1. Aproximación Analítica para el VaR $_q$

Se partirá de un modelo de múltiples factores de Merton como el presentado en el capítulo anterior. Se considerará un portafolio con N prestatarios y se asumirá que cada uno tiene un préstamo principal con exposición y severidad correspondientes EAD_n y LGD_n . La porción o el peso de un cierto préstamo n se define como $s_n = \frac{EAD_n}{\sum_{i=1}^N EAD_i}$. Un deudor n incumple, con probabilidad PD_n , si el rendimiento de sus activos cae por debajo de un cierto umbral para un horizonte de tiempo dado. Además, el rendimiento del prestatario n es una variable aleatoria r_n con distribución normal estándar y

$$(2.1) \quad r_n = \beta_n Y_n + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n,$$

donde ε_i es el impacto idiosincrático con distribución normal estándar. Las constantes β_n miden la sensibilidad del deudor n al riesgo sistemático.

Sea \bar{L} como en (1.15), pero para el caso de un único factor (ya que bajo este supuesto se puede calcular de manera analítica la distribución de pérdidas). Entonces

$$(2.2) \quad \bar{L} = h(\bar{X}) = \sum_{n=1}^N s_n \cdot ELGD_n \cdot PD_n(\bar{X}),$$

donde \bar{X} es el factor único de riesgo sistemático con distribución normal estándar. Más aún, para el caso de un único factor, la probabilidad de incumplimiento condicional en $\bar{X} = x$

puede ser calculada como

$$(2.3) \quad PD_n(x) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \omega_n x}{\sqrt{1 - \omega_n^2}} \right),$$

esto se deduce de (1.13), donde ω_n es el coeficiente de sensibilidad del prestatario n al factor \bar{X} .

Como $\Phi(x)$ es monótonamente creciente entonces $PD_n(x)$ es monótonamente decreciente para todo n . Entonces si $x < y$ se tiene que $PD_n(x) > PD_n(y)$ para todo n y así

$$h(x) = \sum_{n=1}^N s_n \cdot ELGD_n \cdot PD_n(x) > \sum_{n=1}^N s_n \cdot ELGD_n \cdot PD_n(y) = h(y).$$

Como $h(\bar{X})$ es una función monótonamente decreciente sobre \bar{X} , por la proposición 1.7 se tiene que $\alpha_q(\bar{L})$ se puede calcular como

$$(2.4) \quad \alpha_q(\bar{L}) = h(\alpha_{1-q}(\bar{X})) = h(\Phi^{-1}(1 - q)).$$

Para relacionar la variable \bar{L} con la pérdida del portafolio L , se asumirá que el factor de riesgo \bar{X} y los factores de riesgo independientes X_1, \dots, X_K cumplen que

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^K b_k X_k,$$

donde $\sum_{k=1}^K b_k^2 = 1$ para preservar la varianza unitaria de \bar{X} .

Para determinar \bar{L} falta especificar los valores de ω_n y de b_k . Una condición intuitiva para poder conseguir dichos coeficientes es asumir que $\bar{L} = \mathbb{E}(L|\bar{X})$. Para calcular $\mathbb{E}(L|\bar{X})$ se representa el riesgo compuesto Y_n del prestatario n como

$$(2.5) \quad Y_n = \nu_n \bar{X} + \sqrt{1 - \nu_n^2} \eta_n,$$

donde η_n tiene una distribución normal estándar e independiente de \bar{X} , y

$$\begin{aligned}
\nu_n &= \text{Corr}(Y_n, \bar{X}) = \frac{\mathbb{E}((Y_n - \mathbb{E}(Y_n))(\bar{X} - \mathbb{E}(\bar{X})))}{\sqrt{\mathbb{V}(Y_n)\mathbb{V}(\bar{X})}} \\
&= \mathbb{E} \left(Y_n \bar{X} - \bar{X} \mathbb{E}(Y_n) - Y_n \mathbb{E}(\bar{X}) + \mathbb{E}(Y_n) \mathbb{E}(\bar{X}) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=1}^K \alpha_{nj} X_j \right) \left(\sum_{k=1}^K b_k X_k \right) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \alpha_{nj} b_k X_j X_k \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{k,j=1; k \neq j}^K \alpha_{nj} b_k X_j X_k + \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} b_k X_k^2 \right) \\
&= \sum_{k,j=1; k \neq j}^K \alpha_{nj} b_k \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k) + \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} b_k \mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} b_k.
\end{aligned}$$

(2.6)

Sustituyendo (2.5) en (2.1) se tiene

$$(2.7) \quad r_n = \beta_n \nu_n \bar{X} + \left(\beta_n \sqrt{1 - \nu_n^2} \eta_n + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n \right).$$

Note que el término de la derecha es independiente a \bar{X} . Además

$$\mathbb{E} \left(\beta_n \sqrt{1 - \nu_n^2} \eta_n + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n \right) = 0 \text{ y } \mathbb{V} \left(\beta_n \sqrt{1 - \nu_n^2} \eta_n + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n \right) = 1 - \beta_n^2 \nu_n^2.$$

Entonces se puede reescribir (2.1) como

$$(2.8) \quad r_n = \beta_n \nu_n \bar{X} + \sqrt{1 - \beta_n^2 \nu_n^2} \gamma_n,$$

donde γ_n es una variable aleatoria que tiene distribución normal estándar y es independiente de \bar{X} . Como

$$\mathbb{E}(r_n | \bar{X}) = \beta_n \nu_n \bar{X} \text{ y } \mathbb{V}(r_n | \bar{X}) = 1 - \beta_n^2 \nu_n^2,$$

la esperanza condicional de L es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L|\bar{X}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^N s_n LGD_n D_n \middle| \bar{X}\right) = \sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \mathbb{E}(D_n|\bar{X}) \\
&= \sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \mathbb{P}(r_n \leq c_n|\bar{X}) \\
&= \sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \mathbb{P}\left(\frac{r_n - \beta_n \nu_n \bar{X}}{\sqrt{1 - \beta_n^2 \nu_n^2}} \leq \frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \beta_n \nu_n \bar{X}}{\sqrt{1 - \beta_n^2 \nu_n^2}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \beta_n \nu_n \bar{X}}{\sqrt{1 - \beta_n^2 \nu_n^2}}\right).
\end{aligned}$$

(2.9)

Comparando (2.2) y (2.9) se tiene que $\bar{L} = \mathbb{E}(L|\bar{X})$ para cualquier descomposición de portafolio si y solo si se cumple la siguiente condición sobre los coeficientes de carga

$$(2.10) \quad \omega_n = \beta_n \nu_n = \beta_n \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} b_k.$$

En lo siguiente se asumirá que la relación anterior siempre se cumple.

Como ω_n depende de b_k y α_{nk} , cualquiera de los dos tendrá que ser especificado. Ya que $\alpha_q(\bar{L})$ depende de b_k , estos últimos deben ser elegidos de manera tal que la diferencia entre $\alpha_q(\bar{L})$ y $\alpha_q(L)$ se minimice para así obtener una buena aproximación. Una manera intuitiva de lograr esto es maximizar la correlación entre Y_n y \bar{X} para todo n . Una correlación cercana a 1 enfatiza que el factor \bar{X} (del modelo con único factor) y los factores Y_n (los del modelo de Múltiples Factores) son influenciados por la misma información llevando así a una pequeña diferencia entre $\alpha_q(\bar{L})$ y $\alpha_q(L)$. Esto se logra mediante un análisis de correlación canónica y origina el siguiente problema de optimización para obtener a b_k .

$$\text{Maximizar } u(b_1, \dots, b_k) = \left(\sum_{n=1}^N d_n \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} b_k\right) \text{ sujeto a } \sum_{k=1}^K b_k^2 = 1.$$

Cuya solución es

$$b_k = \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{\lambda} \alpha_{nk},$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Sin embargo, este problema produce otra variable indefinida, llamada d_n . Según [6], una de las elecciones más eficientes es

$$d_n = s_n \cdot ELGD_n \cdot \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \beta_n \Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} \right).$$

Ya construída la variable \bar{L} , se procederá a hacer la expansión de Taylor. Se considerará la variable $U := L - \bar{L}$, denominada *variable perturbadora*. La *variable perturbada* es definida como

$$L_\varepsilon = \bar{L} + \varepsilon(L - \bar{L}),$$

note que para $\varepsilon = 1$ se tiene que $L_\varepsilon = L$.

Para obtener la expansión de Taylor de segundo orden se prosigue de la siguiente manera: se hace la expansión de segundo orden de la función cuantil $\alpha_q(L_\varepsilon)$ en función de ε y alrededor de \bar{L} , luego se evalúa en $\varepsilon = 1$.

Haciendo el desarrollo se obtiene que

$$(2.11) \quad \alpha_q(L_\varepsilon) = \alpha_q(\bar{L}) + \frac{d\alpha_q(\bar{L})}{d\varepsilon}(L_\varepsilon - \bar{L}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha_q(\bar{L})}{d\varepsilon^2}(L_\varepsilon - \bar{L})^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Evalutando (2.11) en $\varepsilon = 1$ se tiene

$$(2.12) \quad \alpha_q(L) = \alpha_q(\bar{L}) + \frac{d\alpha_q(\bar{L})}{d\varepsilon}(U) + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha_q(\bar{L})}{d\varepsilon^2}(U)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Por otro lado

$$(2.13) \quad \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\alpha_q(\bar{L} + \varepsilon U)) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d\alpha_q(\bar{L} + \varepsilon U)}{d\varepsilon} U \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d\alpha_q(\bar{L})}{d\varepsilon} U.$$

De manera análoga

$$(2.14) \quad \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d^2\alpha_q(\bar{L})}{d\varepsilon^2} U^2.$$

Sustituyendo (2.13) y (2.14) en (2.12) se obtiene

$$(2.15) \quad \alpha_q(L) = \alpha_q(\bar{L}) + \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Para calcular el término de primer orden de la expansión de Taylor se usará el lema A.1 del apéndice. Note que para $\varepsilon = 1$ se tiene que $L_\varepsilon = L$. Considerando $X = \bar{L}$ y $Y = L - \bar{L}$

se tiene

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} &= \mathbb{E} (L - \bar{L} | \bar{L} + \varepsilon(L - \bar{L}) = \alpha_q(L_\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \mathbb{E} (L - \bar{L} | \bar{L} = \alpha_q(\bar{L})) = \mathbb{E} (L - \bar{L} | h(\bar{X}) = h(\Phi^{-1}(1 - q))) \\
&= \mathbb{E} (L - \mathbb{E}(L | \bar{X}) | \bar{X} = \Phi^{-1}(1 - q)) = \mathbb{E}(L | \bar{X}) - \mathbb{E}(L | \bar{X}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se usó que $\bar{L} = \mathbb{E}(L | \bar{X})$.

Entonces el primer término se anula para cualquier nivel de confianza q . Basta solo conseguir una expresión para el término de segundo orden de la expansión de Taylor. Para esto se usará el lema A.2 del apéndice, considerando $X = Y = L - \bar{L} = U$, $Z = \bar{L}$ y $k = \alpha_q(L_\varepsilon)$. Además $g = f_{\bar{L}}$ es la función de densidad de \bar{L} . Como $\mathbb{E} (L - \bar{L} | \bar{L} = \alpha_q(\bar{L})) = 0$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} (\alpha_q(L_\varepsilon)) &= \mathbb{E} (L - \bar{L} | \bar{L} + \varepsilon(L - \bar{L}) = \alpha_q(L_\varepsilon)) \\
&= \mathbb{E}(U | \bar{L} = \alpha_q(L_\varepsilon)) - \varepsilon \left. \frac{\partial \log f_{\bar{L}}(z)}{\partial z} \right|_{z=\alpha_q(L_\varepsilon)} \text{Cov}(U, U | \bar{L} = \alpha_q(L_\varepsilon)) \\
&\quad - \varepsilon \left. \frac{\partial}{\partial z} \text{Cov}(U, U | \bar{L} = z) \right|_{z=\alpha_q(L_\varepsilon)} \\
&= -\varepsilon \left(\frac{\left. \frac{\partial f_{\bar{L}}(z)}{\partial z} \right|_{z=\alpha_q(L_\varepsilon)} \mathbb{V}(U | \bar{L} = \alpha_q(L_\varepsilon)) + f_{\bar{L}}(\alpha_q(L_\varepsilon)) \left. \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{V}(U | \bar{L} = z) \right|_{z=\alpha_q(L_\varepsilon)}}{f_{\bar{L}}(\alpha_q(L_\varepsilon))} \right) \\
&= -\varepsilon \left(\frac{1}{f_{\bar{L}}(\alpha_q(L_\varepsilon))} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial z} (f_{\bar{L}}(z) \cdot \mathbb{V}(U | \bar{L} = z)) \right|_{z=\alpha_q(L_\varepsilon)} \right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, derivando la expresión anterior en función de ε y luego evaluando en $\varepsilon = 0$ se tiene que

$$(2.16) \quad \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = - \frac{1}{f_{\bar{L}}(\alpha_q(\bar{L}))} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial z} (f_{\bar{L}}(z) \cdot \mathbb{V}(U | \bar{L} = z)) \right|_{z=\alpha_q(\bar{L})}.$$

En la expresión anterior solo falta determinar $\mathbb{V}(U | \bar{L} = \alpha_q(\bar{L})) = \mathbb{V}(U | \bar{X} = \Phi^{-1}(1 - q))$. Recordemos que $\bar{L} = h(\bar{X})$ es una función decreciente sobre \bar{X} . En particular, esto implica

que la varianza condicional de L dado \bar{X} es la misma que la varianza condicional de $U = L - \bar{L}$ dado \bar{X} , es decir $\sigma^2(x) := \mathbb{V}(L|\bar{X} = x) = \mathbb{V}(U|\bar{X} = x)$.

Denotemos por $F_{\bar{L}}(z)$ a la distribución de \bar{L} . Considerando $z = h(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\bar{L}}(h(x)) &= \mathbb{P}(\bar{L} \leq h(x)) = \mathbb{P}(h(\bar{X}) \leq h(x)) \\ &= \mathbb{P}(\bar{X} \geq x) = 1 - \Phi(x), \end{aligned}$$

derivando se obtiene

$$f_{\bar{L}}(h(x)) = -\frac{\phi(x)}{h'(x)}.$$

De manera tal que (2.16) se puede reescribir como

$$(2.17) \quad \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} (\alpha_q(L_\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{h'(\alpha_{1-q}(\bar{X}))}{\phi(\alpha_{1-q}(\bar{X}))} \cdot \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi(x)}{h'(x)} \cdot \sigma^2(x) \right) \right|_{x=\alpha_{1-q}(\bar{X})}.$$

De lo anterior y de (2.15) se obtiene que

$$(2.18) \quad \Delta\alpha_q = \alpha_q(L) - \alpha_q(\bar{L}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma^2(x) \cdot \left(\frac{h''(x)}{h'(x)} + x \right) - \frac{d}{dx} \sigma^2(x) \right) \Big|_{x=\alpha_{1-q}(\bar{X})}.$$

Tanto $h'(x)$ como $h''(x)$ pueden obtenerse fácilmente. Basta determinar $\sigma^2(x)$ y $\frac{d}{dx}\sigma^2(x)$. Usando la fórmula de la varianza condicional, podemos descomponer a $\sigma^2(x)$ en

$$(2.19) \quad \sigma^2(x) = \underbrace{\mathbb{V} \left(\mathbb{E}(L|\{X_1, \dots, X_K\}) \Big| \bar{X} = x \right)}_{\sigma_\infty^2(x)} + \underbrace{\mathbb{E} \left(\mathbb{V}(L|\{X_1, \dots, X_K\}) \Big| \bar{X} = x \right)}_{\sigma_{GA}^2(x)}.$$

El término $\sigma_\infty^2(x)$ representa la diferencia entre el modelo de múltiples factores y el modelo de único factor. Este término disminuye a medida que el factor \bar{X} se va pareciendo más a los factores independientes $\{X_1, \dots, X_K\}$. Para este primer término se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1. *El término $\sigma_\infty^2(x)$ de la varianza condicional está dado por:*

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \sigma_\infty^2(x) &= \sum_{n,m=1}^N s_n s_m \cdot ELGD_n ELGD_m \\ &\quad \cdot \left(\Phi_2 \left(\Phi^{-1}(PD_n(x)), \Phi^{-1}(PD_m(x)), \nu_{nm}^{\bar{X}} \right) - PD_n(x) PD_m(x) \right), \end{aligned}$$

donde $\Phi_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ es una distribución normal bivalente y $\nu_{nm}^{\bar{X}}$ es la correlación condicional dada \bar{X} entre el rendimiento del préstamo n y del préstamo m . Más aún, la derivada de $\sigma_\infty^2(x)$ está dada por

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \sigma_\infty^2(x) &= 2 \sum_{n,m=1}^N s_n s_m \cdot ELGD_n ELGD_m \cdot PD'_n(x) \\ &\cdot \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_m(x)) - \nu_{nm}^{\bar{X}} \cdot \Phi^{-1}(PD_n(x))}{\sqrt{1 - (\nu_{nm}^{\bar{X}})^2}} \right) - PD_m(x) \right) \\ &+ \sum_{n=1}^N s_n^2 ELGD_n^2 PD'_n(x) (1 - 2 \cdot PD_n(x)), \end{aligned}$$

donde $PD'_n(x)$ denota la derivada de $PD_n(x)$ con respecto a x .

DEMOSTRACIÓN.

Considerando la expresión de $\mathbb{E}(L|X_1, \dots, X_K)$ como en (1.15), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\mathbb{E}(L|X_1, \dots, X_K)|\bar{X}) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(L|X_1, \dots, X_K)^2 | \bar{X} \right) - \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(L|X_1, \dots, X_K) | \bar{X} = x \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} | X_1, \dots, X_K) \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{m=1}^N s_m ELGD_m \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} | X_1, \dots, X_K) | \bar{X} \right) \\ &\quad - \left[\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N s_n ELGD_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} | X_1, \dots, X_K) | \bar{X} \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \mathbb{E} \left(\sum_{m=1}^N s_m ELGD_m \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} | X_1, \dots, X_K) | \bar{X} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N s_n ELGD_n s_m ELGD_m \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} | X_1, \dots, X_K) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} | X_1, \dots, X_K) | \bar{X} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N s_n ELGD_n s_m ELGD_m \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} | X_1, \dots, X_K) | \bar{X} \right) \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} | X_1, \dots, X_K) | \bar{X} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N s_n ELGD_n s_m ELGD_m \\
&\quad \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \mathbb{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} | X_1, \dots, X_K) \middle| \bar{X} \right) \\
&\quad - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N s_n ELGD_n s_m ELGD_m \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \middle| \bar{X} \right) \\
&\quad \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} \middle| \bar{X} \right) \\
&= \sum_{n,m=1}^N s_n ELGD_n s_m ELGD_m \left[\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \mathbb{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} \middle| \bar{X} \right) \right. \\
&\quad \left. - PD_n(x) PD_m(x) \right],
\end{aligned}$$

y recordando que los r_n tienen distribución normal condicional sobre \bar{X} con correlación $\nu_{nm}^{\bar{X}}$ (calculada en la sección 2 del apéndice A) se tiene que

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \mathbb{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} \middle| \bar{X} \right) = \Phi_2 \left(\Phi^{-1}(PD_n(x)), \Phi^{-1}(PD_m(x)), \nu_{nm}^{\bar{X}} \right).$$

Lo que prueba la primera parte del teorema.

Para calcular la derivada de σ_∞^2 note que para $n = m$ se tiene

$$\Phi_2 \left(\Phi^{-1}(PD_n(x)), \Phi^{-1}(PD_n(x)), \nu_{nn}^{\bar{X}} \right) = PD_n(x).$$

Por otro lado, una distribución binormal estándar y matriz de correlación ν_{12} puede ser escrita como

$$\Phi_2(x_1, x_2, \nu_{12}) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\nu_{12}^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 - 2\nu_{12}xy}{2(1-\nu_{12}^2)}\right) dx dy.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_2(x_1, x_2, \nu_{12}) &= \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\nu_{12}^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + y^2 - 2\nu_{12}x_1y}{2(1-\nu_{12}^2)}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\nu_{12}^2}} \exp\left(-\left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{(y - \nu_{12}x_1)^2}{2(1-\nu_{12}^2)}\right)\right) dy \\
&= \Phi\left(\frac{(x_2 - \nu_{12}x_1)}{\sqrt{1-\nu_{12}^2}}\right) \cdot \phi(x_1).
\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_2 \left(\Phi^{-1}(PD_n(x)), \Phi^{-1}(PD_m(x)), \nu_{nm}^{\bar{X}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{(\Phi^{-1}(PD_m(x)) - \nu_{nm}^{\bar{X}} \Phi^{-1}(PD_n(x)))}{\sqrt{1 - (\nu_{nm}^{\bar{X}})^2}} \right) \cdot \phi \left(\Phi^{-1}(PD_n(x)) \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\Phi^{-1}(PD_n(x)) \right) \\
&= \Phi \left(\frac{(\Phi^{-1}(PD_m(x)) - \nu_{nm}^{\bar{X}} \Phi^{-1}(PD_n(x)))}{\sqrt{1 - (\nu_{nm}^{\bar{X}})^2}} \right) \cdot PD'_n(x),
\end{aligned}$$

de donde finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \sigma_\infty^2 &= \sum_{n,m=1}^N \sum_{n \neq m} s_n ELGD_n s_m ELGD_m \\
&\quad \cdot \left[\Phi \left(\frac{(\Phi^{-1}(PD_m(x)) - \nu_{nm}^{\bar{X}} \Phi^{-1}(PD_n(x)))}{\sqrt{1 - (\nu_{nm}^{\bar{X}})^2}} \right) \cdot PD'_n(x) \right. \\
&\quad - PD'_n(x) PD_m(x) - PD_n(x) PD'_m(x) - PD_n(x) PD'_m(x) - PD'_n(x) PD_m(x) \\
&\quad \left. + \Phi \left(\frac{(\Phi^{-1}(PD_n(x)) - \nu_{nm}^{\bar{X}} \Phi^{-1}(PD_m(x)))}{\sqrt{1 - (\nu_{nm}^{\bar{X}})^2}} \right) \cdot PD'_m(x) \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^N s_n^2 ELGD_n^2 PD'_n(x) (1 - 2 \cdot PD_n(x)) \\
&= 2 \sum_{n,m=1}^N \sum_{n \neq m} s_n ELGD_n s_m ELGD_m PD'_n(x) \\
&\quad \cdot \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_m(x)) - \nu_{nm}^{\bar{X}} \cdot \Phi^{-1}(PD_n(x))}{\sqrt{1 - (\nu_{nm}^{\bar{X}})^2}} \right) - PD_m(x) \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^N s_n^2 ELGD_n^2 PD'_n(x) (1 - 2 \cdot PD_n(x)).
\end{aligned}$$

Lo que prueba la segunda parte del teorema. □

El término de la derecha de (2.19), denotado por σ_{GA}^2 , se le denominará *ajuste granular* y representa el efecto de diversificación del portafolio. Mientras el número de clientes en el portafolio sea mayor y el portafolio esté más diversificado, σ_{GA}^2 tenderá a 0. Para este término se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2. *El término σ_{GA}^2 de la varianza condicional viene dado por*

$$(2.22) \quad \sigma_{GA}^2 = \sum_{n=1}^N s_n^2 \left((ELGD_n^2 + VLGD_n) PD_n(x) - ELGD_n^2 \cdot (PD_n(x))^2 \right).$$

Más aún, la derivada de $\sigma_{GA}^2(x)$ está dada por

$$(2.23) \quad \frac{d}{dx} \sigma_{GA}^2 = \sum_{n=1}^N s_n^2 PD_n'(x) \left((ELGD_n^2 + VLGD_n) - 2 \cdot ELGD_n^2 \cdot PD_n(x) \right).$$

DEMOSTRACIÓN.

Recuerde que

$$L = \sum_{n=1}^N s_n \cdot LGD_n \cdot \mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}}.$$

Además las LGD_n son independientes entre ellas mismas e independientes de las D_n , entonces en la siguiente expresión los términos cruzados ($n \neq m$) se anulan, obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(L|\{X_1, \dots, X_k\}) &= \mathbb{E}(L \cdot L|\{X_1, \dots, X_k\}) - \mathbb{E}(L|\{X_1, \dots, X_k\})\mathbb{E}(L|\{X_1, \dots, X_k\}) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N s_n LGD_n \mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \cdot \sum_{m=1}^N s_m LGD_m \mathbf{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \\ &\quad - \left[\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N s_n LGD_n \mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{m=1}^N s_m LGD_m \mathbf{1}_{\{r_m \leq \Phi^{-1}(PD_m)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^N s_n^2 \mathbb{E} \left(LGD_n^2 \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \cdot \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^N s_n^2 \left(\mathbb{E} \left(LGD_n \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \right)^2 \cdot \left(\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^N s_n^2 \mathbb{E} \left(LGD_n^2 \cdot \mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^N s_n^2 \left(\mathbb{E} \left(LGD_n \cdot \mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \middle| \{X_1, \dots, X_k\} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Tomando la esperanza condicional sobre \bar{X} se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_{GA}^2 &= \sum_{n=1}^N s_n^2 \left(VLGD_n \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \mid \{X_1, \dots, X_k\} \right) \mid \bar{X} \right) \right. \\
&\quad \left. - ELGD_n^2 \mathbb{E} \left(\mathbb{V} \left(\mathbf{1}_{\{r_n \leq \Phi^{-1}(PD_n)\}} \mid \{X_1, \dots, X_k\} \right) \mid \bar{X} \right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^N s_n^2 (VLGD_n \cdot PD_n(x) - ELGD_n^2 \cdot PD_n(x) \cdot (1 - PD_n(x))) \\
&= \boxed{\sum_{n=1}^N s_n^2 ((ELGD_n^2 + VLGD_n)PD_n(x) - ELGD_n^2 \cdot (PD_n(x))^2)}.
\end{aligned}$$

Lo que prueba la primera parte del teorema.

Derivando se tiene

$$\frac{d}{dx} \sigma_{GA}^2 = \boxed{\sum_{n=1}^N s_n^2 PD_n'(x) ((ELGD_n^2 + VLGD_n) - 2 \cdot ELGD_n^2 \cdot PD_n(x))}.$$

□

Luego, el término de (2.18), llamado *término de corrección* puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\Delta \alpha_q &= \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_\infty^2(x) \cdot \left(\frac{h''(x)}{h'(x)} + x \right) - \frac{d}{dx} \sigma_\infty^2(x) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{GA}^2(x) \cdot \left(\frac{h''(x)}{h'(x)} + x \right) - \frac{d}{dx} \sigma_{GA}^2(x) \right] \Big|_{x=\alpha_{1-q}(\bar{X})} \\
&= \Delta \sigma_q^\infty + \Delta \sigma_q^{GA}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión $\alpha_q(\bar{L}) + \Delta \alpha_q(L)$ resulta ser una buena aproximación de $\alpha_q(L)$.

2. Aproximación Analítica para el ES_q

Un resultado directo de los teoremas anteriores es una extensión del modelo anterior para el déficit esperado.

COROLARIO 2.3. *Sea L una variable de pérdida, se tiene que*

$$(2.24) \quad \begin{aligned} ES_q(L) &= \frac{1}{1-q} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(1-q)} h(y)\phi(y)dy \\ &+ \frac{1}{2(1-q)} \int_q^1 \left(\sigma^2(x) \cdot \left(\frac{h''(x)}{h'(x)} + x \right) - \frac{d}{dx}\sigma^2(x) \right) \Big|_{x=\Phi^{-1}(1-s)} ds, \end{aligned}$$

donde q, h, σ y σ^2 están definidos como en la sección anterior.

DEMOSTRACIÓN.

Como $\alpha_q(L) = \alpha_q(\bar{L}) + \Delta\alpha_q(L)$ y

$$ES_q = \mathbb{E}(L|L \geq \alpha_q(L)) = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \alpha_s(L) ds,$$

entonces

$$ES_q = \frac{1}{1-q} \int_q^1 (\alpha_s(\bar{L}) + \Delta\alpha_s(L)) ds = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \alpha_s(\bar{L}) ds + \frac{1}{1-q} \int_q^1 \Delta\alpha_s(L) ds,$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} \int_q^1 \alpha_s(\bar{L}) ds &= ES_q(\bar{L}) = \mathbb{E}(\bar{L}|\bar{L} \geq \alpha_q(\bar{L})) \\ &= \mathbb{E}(h(\bar{X})|h(\bar{X}) \geq \alpha_q(h(\bar{X}))) \\ &= \mathbb{E}(h(\bar{X})|h(\bar{X}) \geq h(\Phi^{-1}(1-q))) \\ &= \mathbb{E}(h(\bar{X})|\bar{X} \leq \Phi^{-1}(1-q)) \\ &= \frac{1}{1-q} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(1-q)} h(y)\phi(y)dy. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{1}{1-q} \int_q^1 \Delta\alpha_s(L) ds = \frac{1}{2(1-q)} \int_q^1 \left(\sigma^2(x) \cdot \left(\frac{h''(x)}{h'(x)} + x \right) - \frac{d}{dx}\sigma^2(x) \right) \Big|_{x=\Phi^{-1}(1-s)} ds,$$

con todos los términos definidos de manera análoga a la sección anterior.

□

Robustez del Modelo de Ajuste de Múltiples Factores

En este capítulo se adaptará el modelo anterior a una versión práctica considerando algunas suposiciones que simplifican el cómputo del $\alpha_q(L)$. Luego se realizará un análisis de robustez del modelo mediante la variación de parámetros relevantes y comparándolo con el valor obtenido del $\alpha_q(L)$ a través de simulaciones de Monte Carlo. Conviene recordar que el capital económico viene dado por $EC_q = \alpha_q(L) - EL$, así que una vez estimado el q -cuantil de la distribución de pérdida, inmediatamente se puede obtener un valor estimado del capital económico.

1. Modelo Simplificado

Se considerará un portafolio de N prestatarios. Se asumirá que el número de factores compuestos $Y_{s(n)}$ coincide con el número de factores independientes X_k y además cada $Y_{s(n)}$ representa un sector en específico, donde $s(n) = s$ es el sector al cual pertenece el prestatario n . Además, se considerará la porción sobre la exposición de cada deudor como $s_n = \frac{1}{N}$ para todo n y se denotará por N_s la cantidad de prestatarios pertenecientes al sector s . Se tendrá una probabilidad de incumplimiento uniforme para cada sector, es decir, $PD_{s(n)} = PD_n$ para todo n ; y también una pérdida dada incumplimiento LGD constante y uniforme para cada sector s , es decir, $LGD_{s(n)} = LGD_n$ para todo n .

2. Composición del Portafolio de Referencia

Antes de presentar la composición del portafolio a estudiar, vale resaltar que los datos usados fueron extraídos de la referencia [3], ya que proviene de los índices publicados por MSCI y el rendimiento histórico de dichos índices están disponibles solo a clientes de MSCI. Por esto y con el espíritu de presentar un ejemplo lo más fiel posible a la realidad, se usará la composición de portafolio presentada en [3], donde el sector Industrial se despliega y se considera cada grupo de industrias como un sector; y, por otro lado, se excluye el sector financiero, obteniendo así un total de 11 sectores.

El portafolio de referencia presenta el grado de concentración y la distribución promedio de los portafolios de bancos alemanes. Se considerará un total de $N = 600$ prestatarios con el siguiente número de exposiciones por sector (se asume un cierto monto unidad, entonces la exposición total de un sector vendría dada por *Número de exposiciones* \times *Monto Unidad*).

Tabla 3

Sectores	Número de exposiciones	% exposición
Energía	1	0 %
Materiales	36	6 %
Bienes de Equipo	69	12 %
Servicios Comerciales	202	34 %
Transportes	43	7 %
Productos de Consumo No Básico	90	15 %
Productos de Primera Necesidad	39	7 %
Salud	55	9 %
Tecnología de la Información	19	3 %
Servicios de Telecomunicaciones	6	1 %
Servicios de Utilidad Pública	40	7 %

Se supondrá una probabilidad de incumplimiento uniforme para todos los prestatarios de $PD = 2\%$ y una pérdida dada incumplimiento $LGD = 45\%$ también para todos los prestatarios. Con los datos históricos de los sectores obtenidos de MSCI, se estimará la matriz de correlación Σ de los sectores. Dicha matriz se encuentra en el Apéndice B.

Recuerde que los $Y_{s(n)}$ dependen linealmente de los X_k con coeficientes respectivos $\alpha_{s(n)k}$. Para determinar estos coeficientes se calculará la descomposición de Cholesky de la matriz Σ ; luego, los coeficientes de k -ésima columna pasan a ser los $\alpha_{s(n)k}$ y así para todo k . Note que de esta manera se cumple que $\sum_{k=1}^K \alpha_{s(n)k}^2 = 1$. Además, al simular los factores X_k para obtener los valores de los factores compuestos $Y_{s(n)}$, el sistema $\{Y_{s(n)}\}$ tendrá una matriz de correlación similar a Σ , es decir, los factores compuestos se comportarán de manera similar a los sectores.

Finalmente, se tomará un coeficiente de peso del riesgo sistemático uniforme para todos los prestatarios de $\beta = \beta_n = 0,5$ y un nivel de confianza de $q = 99,9\%$.

Se denotará por EC_{sim} al capital económico obtenido por simulaciones de Monte Carlo y por EC_{AMF} al generado por el modelo de ajuste de múltiples factores.

3. Robustez de la aproximación del EC_q

En esta sección se estudiará el impacto de los distintos parámetros relevantes del modelo AMF a capital económico estimado comparándolo con lo obtenido mediante simulaciones de Monte Carlo. Se comenzará con el impacto de la distribución de los préstamos en los distintos sectores. Se considerarán seis portafolios donde cada uno tendrá una concentración más acentuada que el anterior. En la siguiente tabla se muestran las composiciones de estos portafolios, sus HHI y EC_q respectivos. PFR denotará al portafolio de referencia.

Tabla 4

Sectores	PFR	PF1	PF2	PF3	PF4	PF5	PF6
Energía	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Materiales	6 %	4 %	3 %	2 %	1 %	1 %	0 %
Bienes de Equipo	12 %	41 %	61 %	74 %	83 %	88 %	100 %
Servicios Comerciales	34 %	23 %	15 %	10 %	7 %	5 %	0 %
Transportes	7 %	5 %	3 %	2 %	2 %	1 %	0 %
Productos de Consumo No Básico	15 %	10 %	7 %	5 %	3 %	2 %	0 %
Productos de Primera Necesidad	7 %	4 %	3 %	2 %	1 %	1 %	0 %
Salud	9 %	6 %	4 %	3 %	2 %	1 %	0 %
Tecnología de la Información	3 %	2 %	2 %	1 %	1 %	1 %	0 %
Servicios de Telecomunicaciones	1 %	1 %	1 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Servicios de Utilidad Pública	7 %	5 %	3 %	2 %	1 %	1 %	0 %
HHI	0,176	0,238	0,402	0,559	0,690	0,780	1
EC_{sim}	8,0 %	8,9 %	9,8 %	10,4 %	10,9 %	11,1 %	11,7 %
EC_{AMF}	7,8 %	9,1 %	10,5 %	11,6 %	12,5 %	13,1 %	14,4 %

Note que el modelo AFM es más sensible a la concentración del portafolio que el método de MC, obteniendo valores más conservadores para altos valores del HHI. Sin embargo, para bajos índices de concentración, ambos modelos se comportan de manera similar.

Se estudiará a continuación el impacto del factor β . Este factor estima la sensibilidad del prestatario n al riesgo sistemático; por lo tanto, un pequeño valor de β indica poca influencia del riesgo sistemático sobre su rendimiento y un alto valor indica, en cambio, una alta influencia del riesgo sistemático sobre su rendimiento. Para el portafolio de referencia se tiene la siguiente tabla

Tabla 5

PFR	$\beta = 0,05$	$\beta = 0,15$	$\beta = 0,35$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,65$	$\beta = 0,85$	$\beta = 0,95$
EC_{sim}	1,0 %	1,5 %	4,3 %	8,0 %	13,4 %	24,4 %	31,5 %
EC_{AMF}	0,3 %	1,1 %	3,9 %	7,8 %	13,9 %	27,8 %	36,9 %

Se observa que para una alta dependencia al riesgo sistemático, el modelo AFM presenta nuevamente valores muchos más conservadores. Incluso hasta un 4% o más por arriba del método de MC. Lo contrario ocurre para valores de β cercanos a cero. Los valores del AFM caen por debajo de los del método de MC, de hecho, *empíricamente* se observa que si $\beta \rightarrow 0$ entonces $EC_{AFM} \rightarrow 0$, lo que implicaría que las pérdidas inesperadas tienden a cero. Por supuesto, tener un caso real donde $\beta \rightarrow 0$ se verifique es muy poco probable.

Se proseguirá ahora con el análisis del parámetro N , el número de prestatarios. Para esto, se considerarán portafolios con la misma distribución de exposiciones que el portafolio de referencia pero con distintos números de prestatarios. En la siguiente tabla se presenta un resumen de lo obtenido.

Tabla 6

PFR	$N = 60$	$N = 300$	$N = 600$	$N = 1000$	$N = 3000$
EC_{sim}	9,6 %	8,3 %	8,0 %	7,9 %	7,9 %
EC_{AMF}	7,9 %	7,8 %	7,8 %	7,8 %	7,8 %

Note que para grandes valores de N , ambas estimaciones se acercan y tienden a tomar el mismo valor. Sin embargo, para pequeños valores de N , en otras palabras, para portafolios con pocos prestatarios, la diferencia entre los modelos puede llegar a ser significativa. Por lo cual, la aplicación del AFM por parte de instituciones financieras o bancarias con portafolios relativamente pequeños puede no ser tan apropiada, ya que puede llevar a éstas a reservar un capital menor de lo necesario para cubrir una pérdida inesperada, provocando así un colapso económico de la institución. Esto representa un punto débil para el modelo AMF.

Finalmente, se compararán los modelos aplicados al portafolio de referencia, pero bajo dos distintas matrices de correlación: la original Σ y otra matriz Σ' que presenta correlaciones más altas entre los sectores. Ambas matrices se encuentran en el Apéndice B.

Tabla 7

PFR	Σ	Σ'
EC_{sim}	8,0%	9,0%
EC_{AMF}	7,9%	9,1%

El modelo de AMF se comporta de manera esperada, ya que bajo una mayor correlación entre los sectores, obtenemos un mayor valor del capital económico.

4. Discusión

Una de las bondades del AFM es la versatilidad de sus parámetros, en el sentido de que como permite asignar coeficientes específicos a cada sector y a cada prestamista, se pueden representar de manera más precisa portafolios reales. Sin embargo, esto implica otro problema: la estimación de los parámetros. No siempre son fáciles de estimar y no existe manera única de hacerlo. Por ejemplo, como ya se ha señalado, los datos usados para estimar la matriz de correlación de los sectores fueron obtenidos a partir de los índices de MSCI; sin embargo, no toda actividad financiera o sector industrial tiene asociado un índice por lo cual no se tiene una referencia histórica para poder estimar los parámetros que representen a dicho sector o actividad en el modelo. En estos casos entran los préstamos a particulares y también las hipotecas. Este problema siempre se presenta en modelos basados en datos de índice del mercado.

Por otro lado, el modelo AFM ofrece una buena aproximación del capital económico y de una manera más sencilla y menos costosa, en lo que a tiempo de cómputo se refiere, que el método de MC. Además, el capital económico estimado para el portafolio de referencia, que presenta la estructura promedio de portafolios de bancos alemanes, es compatible con Basilea II. Esto facilita a bancos y autoridades supervisoras la determinación del capital económico. Por último, es importante resaltar que el modelo AFM se comporta de manera más apropiada para portafolio de gran tamaño.

Apéndice A

Cuentas, cuentas y más cuentas

1. Derivadas de $\alpha_q(L_\varepsilon)$

LEMA A.1. *Sea (X, Y) un vector bivariado continuo. Consideremos el q -cuantil $Q(q, \varepsilon)$ definido como $Q(q, \varepsilon) = \alpha_q(X + \varepsilon \cdot Y)$ para algún $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(q, \varepsilon) = \mathbb{E}(Y | X + \varepsilon \cdot Y = Q(q, \varepsilon)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x, y)$ la función de densidad conjunta de (X, Y) . Se tiene que

$$\mathbb{P}(X + \varepsilon \cdot Y > Q(q, \varepsilon)) = q \iff \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{Q(q, \varepsilon) - \varepsilon y}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = q.$$

Derivando respecto a ε se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial Q(q, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - y \right) f(Q(q, \varepsilon) - \varepsilon y, y) dy = 0.$$

De donde

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(q, \varepsilon) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(Q(q, \varepsilon) - \varepsilon y, y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(Q(q, \varepsilon) - \varepsilon y, y) dy} = \mathbb{E}(Y | X + \varepsilon \cdot Y = Q(q, \varepsilon)).$$

□

LEMA A.2. *Sea (X, Y, Z) un vector aleatorio continuo, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | Z + \varepsilon Y = k) &= \mathbb{E}(X | Z = k) - \varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \Big|_{z=k} \text{Cov}(X, Y | Z = k) \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \text{Cov}(X, Y | Z = z) \Big|_{z=k} + \varepsilon \mathbb{E}(Y | Z = k) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{E}(X | Z = z) \Big|_{z=k} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x, y, z)$ la función de densidad de probabilidad conjunta del vector (X, Y, Z) , y $f(x, y | z) = \frac{f(x, y, z)}{g(z)}$ a la función de densidad de probabilidad condicional de X, Y dado $Z = z$. La esperanza condicional viene dada por

$$\mathbb{E}(X | Z + \varepsilon Y = k) = \frac{\iint xy f(x, y, k - \varepsilon y) dx dy}{\iint f(x, y, k - \varepsilon y) dx dy}.$$

Se considerará la expansión de Taylor de segundo orden, tanto en la integral del numerador como en la del denominador, interpretándolas como funciones de ε y haciendo la expansión alrededor de $\varepsilon = 0$, se obtiene:

$$\mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) = \frac{\iint xf(x, y, k)dxdy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy - \varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Ahora bien, realizando manipulaciones algebraicas se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) &= \frac{\iint xf(x, y, k)dxdy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy - \varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{\iint xf(x, y, k)dxdy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy \left(1 - \frac{\varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy}\right)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{\iint xf(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy} - \varepsilon \frac{\iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy} \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon) \left(1 - \varepsilon \frac{\iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy}\right) \\ &\quad + \mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) \varepsilon \frac{\iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k)dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy} \\ &= \mathbb{E}(X|Z = k) - \varepsilon \frac{\iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k) \frac{f(x, y, k)}{f(x, y, k)} dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy} \\ &\quad + \varepsilon \frac{\iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, k) \frac{f(x, y, k)}{f(x, y, k)} dxdy}{\iint f(x, y, k)dxdy} (\mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) - \mathcal{O}(\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Considerando la aproximación $\mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) - \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathbb{E}(X|Z = k)$ y que $\frac{\partial}{\partial z} \frac{f(x, y, k)}{f(x, y, k)} = \frac{\partial \log f}{\partial z}(x, y, k)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) &= \mathbb{E}(X|Z = k) - \varepsilon \mathbb{E} \left(XY \frac{\partial \log f}{\partial z}(x, y, k) \middle| Z = k \right) \\ &\quad + \varepsilon \mathbb{E} \left(Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(x, y, k) \middle| Z = k \right) \mathbb{E}(X|Z = k) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \mathbb{E}(X|Z = k) - \varepsilon \text{Cov} \left(X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y, k) \middle| Z = k \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log f}{\partial z}(x, y, k) &= \frac{\partial \log(f(x, y|z)g(z))}{\partial z} \Big|_{z=k} = \frac{\partial(\log f(x, y|z) + \log g(z))}{\partial z} \Big|_{z=k} \\ &= \frac{\partial \log f}{\partial z}(x, y|k) + \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \Big|_{z=k}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Z + \varepsilon Y = k) &= \mathbb{E}(X|Z = k) - \varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \Big|_{z=k} \text{Cov} \left(X, Y \Big| Z = k \right) \\ &\quad - \varepsilon \text{Cov} \left(X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|k) \Big| Z = k \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Por otro lado, se calcula la derivada de la covarianza condicional. Realizando manipulaciones similares a las usadas anteriormente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \text{Cov}(X, Y|Z = k) &= \frac{\partial}{\partial z} (\mathbb{E}(XY|Z = k) - \mathbb{E}(X|Z = k)\mathbb{E}(Y|Z = k)) \\ &= \mathbb{E}(XY \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|k)|Z = k) - \mathbb{E}(X|Z = k)\mathbb{E}(Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|k)|Z = k) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{E}(X|Z = k)\mathbb{E}(Y|Z = k) \\ &= \text{Cov} \left(X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|k) \Big| Z = k \right) - \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{E}(X|Z = k)\mathbb{E}(Y|Z = k). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Sustituyendo la expresión (A.2) en la ecuación (A.1) se obtiene el resultado. □

2. Cálculo de la correlación condicional de los r_n

A continuación se calculará una expresión para la correlación condicional

$$\nu_{nm}^{\bar{X}} = \frac{\text{Cov}(r_n, r_m|\bar{X})}{\sqrt{\mathbb{V}(r_n|\bar{X})}\sqrt{\mathbb{V}(r_m|\bar{X})}}.$$

De 2.8 se tiene $r_n = \beta_n \nu_n \bar{X} + \sqrt{1 - \beta_n^2 \nu_n^2} \gamma_n$.

Donde γ_n una variable aleatoria que tiene distribución normal estándar y es independiente de \bar{X} . Además

$$\mathbb{E}(r_n|\bar{X}) = \beta_n \nu_n \bar{X} = \omega_n \bar{X} \text{ y } \mathbb{V}(r_n|\bar{X}) = 1 - \beta_n^2 \nu_n^2 = 1 - \omega_n^2.$$

Por otro lado, usando extensivamente la definición de Y_n y de \bar{X} , r_n se puede reescribir como:

$$r_n = \omega_n \bar{X} + \sum_{k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) X_k + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n$$

Como las variables con distribución normal estándar ε_n son no correlacionadas, tenemos para $n \neq m$ que $0 = \text{Corr}(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \mathbb{E}(\varepsilon_n \cdot \varepsilon_m) - \mathbb{E}(\varepsilon_n) \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_m) = \mathbb{E}(\varepsilon_n \cdot \varepsilon_m)$

Luego, para $n \neq m$ se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r_n, r_m | \bar{X}) &= \mathbb{E}((r_n - \mathbb{E}(r_n | \bar{X})) (r_m - \mathbb{E}(r_m | \bar{X})) | \bar{X}) = \mathbb{E}((r_n - \omega_n \bar{X}) (r_m - \omega_m \bar{X}) | \bar{X}) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) X_k + \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\sum_{j=1}^K (\beta_m \alpha_{mj} - \omega_m b_j) X_j + \sqrt{1 - \beta_m^2} \varepsilon_m \right) \middle| \bar{X} \right] \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j,k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) (\beta_m \alpha_{mj} - \omega_m b_j) X_j X_k \middle| \bar{X} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) X_k \cdot \sqrt{1 - \beta_m^2} \varepsilon_m \middle| \bar{X} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^K (\beta_m \alpha_{mj} - \omega_m b_j) X_j \cdot \sqrt{1 - \beta_n^2} \varepsilon_n \middle| \bar{X} \right) + \mathbb{E} \left(\sqrt{1 - \beta_n^2} \sqrt{1 - \beta_m^2} \varepsilon_n \varepsilon_m \middle| \bar{X} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j \neq k} (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) (\beta_m \alpha_{mj} - \omega_m b_j) X_j X_k \middle| \bar{X} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) (\beta_m \alpha_{mk} - \omega_m b_k) X_k^2 \middle| \bar{X} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) X_k \middle| \bar{X} \right) \sqrt{1 - \beta_m^2} \mathbb{E}(\varepsilon_m | \bar{X}) \xrightarrow{0} + \sqrt{(1 - \beta_n^2)(1 - \beta_m^2)} \mathbb{E}(\varepsilon_n \varepsilon_m | \bar{X}) \xrightarrow{0} \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^K (\beta_m \alpha_{mj} - \omega_m b_j) X_j \middle| \bar{X} \right) \sqrt{1 - \beta_n^2} \mathbb{E}(\varepsilon_n | \bar{X}) \xrightarrow{0} \\ &= \sum_{j \neq k} (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) (\beta_m \alpha_{mj} - \omega_m b_j) \mathbb{E}(X_j | \bar{X}) \mathbb{E}(X_k | \bar{X}) \xrightarrow{\mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k) = 0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^K (\beta_n \alpha_{nk} - \omega_n b_k) (\beta_m \alpha_{mk} - \omega_m b_k) \mathbb{V}(X_k | \bar{X}) \xrightarrow{\mathbb{V}(X_k) = 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_n \beta_m \left(\sum_{k=1}^K \alpha_{nk} \alpha_{mk} - \nu_m \cdot \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} b_k - \nu_n \cdot \sum_{k=1}^K \alpha_{mk} b_k + \nu_n \nu_m \sum_{k=1}^K b_k^2 \right) \\
&= \beta_n \beta_m \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} \alpha_{mk} - \omega_n \omega_m
\end{aligned}$$

Entonces

$$\nu_{nm}^{\bar{X}} = \frac{\beta_n \beta_m \sum_{k=1}^K \alpha_{nk} \alpha_{mk} - \omega_n \omega_m}{\sqrt{(1 - \omega_n^2)(1 - \omega_m^2)}}$$

Apéndice B

Programación en R del Modelo Simplificado

A continuación se presentan los programas desarrollados para la estimación del capital económico. Además, las matrices de correlación usadas en el capítulo 3.

1. Simulaciones de Monte Carlo

```
RNGkind(normal.kind="Box-Muller");
#Vector donde se colocara el muestreo
L=array(0,1000000);
#Matriz de correlacion de los sectores
M=array(c(100,50,42,34,45,46,57,34,10,31,69,50,100,87,61,75,84,62,30,56,73,66,
          42,87,100,67,83,92,65,32,69,82,66,34,61,67,100,58,68,40,8,50,60,37,
          45,75,83,58,100,83,68,27,58,77,67,46,84,92,68,83,100,76,21,69,81,66,
          57,62,65,40,68,76,100,33,46,56,66,34,30,32,8,27,21,33,100,15,24,46,
          10,56,69,50,58,69,46,15,100,75,42,31,73,82,60,77,81,56,24,75,100,62,
          69,66,66,37,67,66,66,46,42,62,100),c(11,11));
#Descomposicion de Cholesky de M (los factores de X_k son de la columnas k)
m=chol(M/100);
#Parametros y contador
q=.999;#Nivel de confianza
N=300;#Numero de prestatarios
beta=0.5;#Coef de riesgo sistematico
PD=0.02;#Prob de incumplimiento
LGD=.45;#Perdida dada incumplimiento
ead=c(1,18,35,101,22,45,20,28,10,3,20);#Portafolio de referencia
s=1;
while(s<=1000000) {
  #Generacion aleatoria de los factores
  X=rnorm(11);
```

```

#Factor compuesto (cada uno representa un sector bajo la suposicion)
Y=X*m;
#Simulacion de los rendimientos segun al sector que pertenezcan
r=array(0,N); p=1;
for (i in 1:11){
  if (ead[i]!=0) {r[p:(p+ead[i]-1)]=beta*Y[i]+sqrt(1-beta$wedge$2)*rnorm(ead[i]);
  p=p+ead[i];}
}
#Indicatriz de incumplimiento
r[r>qnorm(PD)]=0;
r[r<=qnorm(PD)]=1;
Dt=sum(r);
L[s]=(1/N)*LGD*Dt;
s=s+1;
}
alfa_L=quantile(L,q);
#Calculo de perdidas esperadas
EL=PD*LGD;
#Calculo del capital economico
EC=alfa_L-EL;
print(EC);

```

2. Modelo de Ajuste de Múltiples Factores Simplificado

```

#Portafolio con N prestamos en 11 distintos sectores distribuidos segun EAD
#Matriz de correlacion de los sectores
M=array(c(100,50,42,34,45,46,57,34,10,31,69,50,100,87,61,75,84,62,30,56,73,66,
42,87,100,67,83,92,65,32,69,82,66,34,61,67,100,58,68,40,8,50,60,37,
45,75,83,58,100,83,68,27,58,77,67,46,84,92,68,83,100,76,21,69,81,66,
57,62,65,40,68,76,100,33,46,56,66,34,30,32,8,27,21,33,100,15,24,46,
10,56,69,50,58,69,46,15,100,75,42,31,73,82,60,77,81,56,24,75,100,62,
69,66,66,37,67,66,66,46,42,62,100),c(11,11));
#Descomposicion de Cholesky de M (los factores de X_k son de la columnas k)
m=chol(M/100);

```

```

#Parametros
q=.999; N=600; beta=0.05; PD=0.02; LGD=.45;
ead=c(1,36,69,202,43,90,39,55,19,6,40);#Portafolio de referencia
EAD=(1/N)*ead;
clase=c(array(1,ead[1]),array(2,ead[2]),array(3,ead[3]),array(4,ead[4]),
        array(5,ead[5]),array(6,ead[6]),array(7,ead[7]),array(8,ead[8]),
        array(9,ead[9]),array(10,ead[10]),array(11,ead[11]));
#Coef de bar_X y X_k (vector). Usamos row porque sumamos los alfa_nk variando n
b=(rowSums(m))/(sqrt(sum(rowSums(m)^2)));
#Coef de peso de bar_X (vector).
#Multiplicamos por la izq para que quede la suma sobre k de b_k*alfa_nk
w=beta*(b*m)
#Probabilidad de incumplimiento condicional y su derivada (vector)
PDx=pnorm((array(qnorm(PD),c(1,11))-(qnorm(1-q))*w)
          /(sqrt(array(1,c(1,11))-w^2)));
PDx1=((w)/(sqrt(array(1,c(1,11))-w^2)))*(dnorm((array(qnorm(PD),c(1,11))
          -(qnorm(1-q))*w)/(sqrt(array(1,c(1,11))-w^2))));
PDx2=((w)/(array(1,c(1,11))-w^2))*(dnorm((array(qnorm(PD),c(1,11))
          -qnorm(1-q)*w)/(sqrt(array(1,c(1,11))-w^2))))
      *(array(qnorm(PD),c(1,11))-(qnorm(1-q))*w);
#Calculo de las h
h=sum(LGD*EAD*PDx); h1=-sum(LGD*EAD*PDx1); h2=-sum(LGD*EAD*PDx2);
#Calculo de la matriz de correlacion condicional
vx=array(0,c(N,N));
for (i in 1:N){
  for (j in 1:N){
    vx[i,j]=(beta^2*(sum(m[,clase[i]]*m[,clase[j]]))-w[clase[i]]*w[clase[j]])
            /(sqrt((1-w[clase[i]]^2)*(1-w[clase[j]]^2)))
  }
}
for (i in 1:N) {vx[i,i]=1}
#Calculo de sigma_inf y su derivada
s_inf=array(0,c(N,N));

```

```

for (i in 1:N){
  for (j in 1:N){
    s_inf[i,j]=pmnorm(c(qnorm(PDx[clase[i]]),qnorm(PDx[clase[j]])),c(0,0),
    array(c(1,vx[i,j],vx[i,j],1),c(2,2)))-PDx[clase[i]]*PDx[clase[j]]
      }
    }
sigma_inf=(1/N^2)*(beta^2)*sum(s_inf);
ds_inf=array(0,c(N,N));
for (i in 1:N){
  for (j in 1:N){
    ds_inf[i,j]=PDx1[clase[i]]*(pnorm((qnorm(PDx[clase[j]])-(vx[i,j])
    *qnorm(PDx[clase[i]]))/(sqrt(1-vx[i,j]^2)))-PDx[clase[j]])
      }
    }
for (i in 1:N){
  ds_inf[i,i]=PDx1[clase[i]]*(1-2*PDx[clase[i]])
  }
dsigma_inf=2*(1/N^2)*(beta^2)*sum(ds_inf);
#Calculo de sigma_ga y su derivada
sigma_ga=(1/N^2)*beta^2*sum(ead^2*PDx*(1-PDx));
dsigma_ga=(1/N^2)*beta^2*sum(ead^2*PDx1*(1-2*PDx));
#Calculo del VaR analitico
alfa_barL=h;
delta_barL=(1/2)*((sigma_inf+sigma_ga)
  *((h2)/(h1)-qnorm(1-q))-(dsigma_inf+dsigma_ga));
alfa_L=alfa_barL+delta_barL;
#Calculo de perdidas esperadas
EL=PD*LGD;
#Calculo del capital economico
EC=alfa_L-EL;
print(EC);

```


Bibliografía

- [1] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2005) International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A Revised Framework. Bank for International Settlements, Basilea.
- [2] MARKOWITZ H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance* 7 (1): 77-91.
- [3] DÜLLMANN K. AND MASSCHELEIN N. (2006) Sector Concentration in Loan Portfolios and Economic Capital. Discussion Paper Series 2 Banking and Financial Studies No 9\2006, Deutsche Bundesbank.
- [4] C. GOURIEROUX, J. P. LAURENT AND O. SCAILLET (2000) Sensitivity Analysis of Values at Risk. *Journal of Empirical Finance* 7 (3-4): 225-245.
- [5] MCNELL A., FREY R. AND EMBRECHTS P. (2005), *Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Series in Finance, Princeton University Press.
- [6] PYKHTIN M. (2004) Multi-Factor Adjustment. *Risk Magazine* 17 (3): 85-90.
- [7] ROBERT C. AND CASELLA G. (2010) *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Springer.
- [8] MARDIA K., KENT J. AND BIBBY J. (1979) *Multivariate Analysis*. Academic Press.
- [9] DEUTSCHE BUNDESBANK (2006) Concentration Risk in Credit Portfolios. Monthly Report June 2006.
- [10] LOÈVE M. (1977) *Probability Theory I*. Springer-Verlag.
- [11] MIKOSCH T. (1998) *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific.
- [12] SAMUELSON P. AND NORDHAUS W. (1948) *Economía*. McGraw-Hill Companies.