



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

**Desarrollo de un Método de Ordenamiento
Vectorial para la extensión de los Operadores Básicos
en Morfología Matemática a Imágenes vectoriales**

Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de
Venezuela por la **Br. Yorley Angélica
Acevedo Peña** para optar al título de
Licenciada en Matemática.

Tutor: Wuilian J. Torres C.

Caracas, Venezuela
Febrero 2012

A Jehová
mis padres y hermanos

Índice general

1. Preliminares: Imagen Digital	2
1.1. Introducción	2
1.2. Adquisición de la Imagen	2
1.3. Almacenamiento de la Imagen	3
1.4. Imágenes en Tonos de Gris	4
1.5. Imágenes a Color	5
1.6. Imagen Multidimensional	6
2. Representación del Color	9
2.1. Introducción	9
2.2. Espacio RGB	9
2.3. Espacio CMY	11
2.4. Espacio YIQ, YUV	12
2.5. Espacio HSI	13
2.6. Espacio CIE	14
3. Morfología Matemática. Retículo	15
3.1. Introducción	15
3.2. Nociones de Teoría de Conjuntos	16
3.3. Relaciones de Orden	18
3.4. Retículo	19
3.5. Fundamentos de Morfología Matemática	20
3.5.1. Dilatación	20
3.5.2. Erosión	22
3.5.3. Apertura	25
3.5.4. Cierre	27
3.5.5. Gradiente	29
3.6. Propiedades de los Operadores Básicos de Morfología	30

3.6.1.	Dualidad	30
3.6.2.	Crecimiento	30
3.6.3.	Extensividad y Antiextensividad	30
4.	Ordenamiento Vectorial	32
4.1.	Introducción	32
4.2.	Orden Lexicográfico	33
4.3.	Medida de la Distancia	33
4.4.	Entrelazado de Bits	34
5.	Ordenamiento SML	36
5.1.	Introducción	36
5.2.	Ordenamiento SML	36
5.3.	Vectores ordenados en cada Fase	47
5.4.	Distorsión del Ordenamiento SML	49
5.4.1.	Estudio Comparativo	51
6.	Operadores Morfológicos en Imágenes Vectoriales	59
6.1.	Dilatación	60
6.2.	Erosión	65
6.3.	Apertura	70
6.4.	Cierre	72
6.5.	Gradiente	74

Agradecimientos

Son cortos los recuerdos de mi infancia, casi inmemorables. Pero siempre que cierro mis ojos para recordar algo de mi infancia la mayoría de veces te veo a ti madre, enseñándome a leer, escribir, sumar, vistiéndome, jugando conmigo y mis hermanos, siempre con la constancia que te caracteriza, es por esta y muchas razones que te dedico una meta más del transcurso de mi vida, este Trabajo Especial de Grado, sin el ánimo que me dabas para lograrla, igual la hubiera cumplido, pues me enseñaste a ser perseverante, pero con esa fuerza se me hizo más ameno el camino. Siempre que puedo le doy gracias a Jehová por haberme dado una familia tan única como la nuestra, le doy gracias también, por permitirme compartir todo este tiempo contigo, mi padre y hermanos, por estar ahí con nosotros cuidándonos, por colocar en mi camino buenos amigos como lo son: Reyfel Mendoza, Witney Castillo, Leimar Torres, Antonietta Imbriano, Sr. Conchetta Yovine, Francisco Fernandez, Brenda Gómez, Dorysbel Peña, entre otros.

También quiero agradecer a todos los docentes que colaboraron en mi formación, y a los cuales les tome un cariño especial, entre estos, el profesor Tomás Guardia y el profesor Wuilian Torres, este último mi tutor, al cual doy gracias por su buena tutoria en este trabajo, por su paciencia y comprensión.

Agradezco también a todas aquellas personas que de alguna u otro forma contribuyeron en mi proceso de formación como persona, a todos ustedes mil gracias.

Introducción

El presente Trabajo Especial de Grado se orienta al estudio e investigación de la extensión de las operaciones morfológicas básicas que se aplican a imágenes en escala de gris e imágenes binarias a imágenes multidimensionales o vectoriales que poseen un mismo tipo de información en cada uno de sus canales. El principal aporte de este trabajo es proponer un nuevo método de ordenamiento vectorial para la aplicación de operaciones morfológicas en imágenes vectoriales o multicanales (imágenes a color, resonancia magnética, rayos X, satelital, etcétera).

La Morfología Matemática es una técnica para el análisis y tratamiento de las estructuras geométricas, basada en la teoría de conjuntos, teoría de retículos, topología y funciones aleatorias, donde toda operación morfológica es el resultado de una o más operaciones de conjuntos. En el análisis de imágenes digitales, enfocado en la geometría de los objetos presentes en estas se utiliza un elemento de referencia denominado “Elemento Estructurante”, cuyas propiedades geométricas son conocidas (línea, cuadrado, punto, rombo, disco, etcétera).

Los operadores utilizados en Morfología Matemática (erosión, dilatación) se han desarrollado principalmente para imágenes bidimensionales, bien sean binarias o en tono de gris. La necesidad establecer un orden total introduce dificultades para su extensión a imágenes multidimensionales o multicanales. Diversos autores han propuesto métodos (Orden Lexicográfico, Medida de la Distancia, Entrelazado de Bits, etcétera) para el procesamiento morfológico de imagen 3d (imágenes a color), pero poco se han propuesto para imágenes multidimensionales.

En este trabajo se introducen algunos métodos morfológicos para su aplicación en imágenes multidimensionales, para ello se plantea un método

de ordenamiento para vectores k -dimensionales al cual se le ha denominado SML (Suma, Máximo, Lexicográfico), el cual es utilizado para definir los operadores morfológicos.

En el primer Capítulo se introducen los conceptos relacionados con la imagen digital: imagen 2d (binaria y tonos de gris), imagen 3d (color) e imagen multidimensional o multicanal, y se da el concepto matricial de imagen digital. En el Capítulo II, se presenta las características de los espacios de color: RGB, CMY, YIQ, HSI, CIE. En el Capítulo III se recopila la base conceptual de la Morfología Matemática: fundamentos de teoría de conjunto, relaciones de orden, retículo, propiedades de las operaciones morfológicas, erosión, dilatación, apertura, cierre. En el Capítulo IV se presentan algunas técnicas de ordenamiento vectorial que se han desarrollado para imágenes a color. El Capítulo V comprende la definición del Ordenamiento SML, con base al Orden Lexicográfico, para el procesamiento de imágenes multicanal, también en este se presenta un estudio comparativo sobre la distorsión que presenta el ordenamiento con otros métodos conocidos dentro de la literatura. Este trabajo culmina con el Capítulo VI, donde se muestra la aplicación del Ordenamiento SML en operadores morfológicos en imágenes multidimensionales, utilizando los algoritmos creados en MATLAB.

Capítulo 1

Preliminares: Imagen Digital

1.1. Introducción

Una imagen digital es una representación bidimensional de una escena, que puede ser capturada por un instrumento electrónico como: cámaras fotográficas, rayos X, resonancia magnética, satélites, entre otros. Las imágenes digitales 2d están definidas en el espacio discreto, en particular del espacio $\mathbb{R}^2$ a el espacio $\mathbb{Z}^2$, estas se pueden representar en niveles de grises. Las imágenes 3d permiten representar el color.

1.2. Adquisición de la Imagen

Para la adquisición digital de imagen se necesita un dispositivo físico sensible a un rango específico del espectro de energía electromagnética (como las bandas de rayos X, ultravioleta, visible o infrarrojo (ver figura 1.1)) y que produzca una señal eléctrica de salida proporcional al nivel de energía detectado, o de un dispositivo digitalizador que convierte la señal de salida del sistema sensible a forma digital [4].

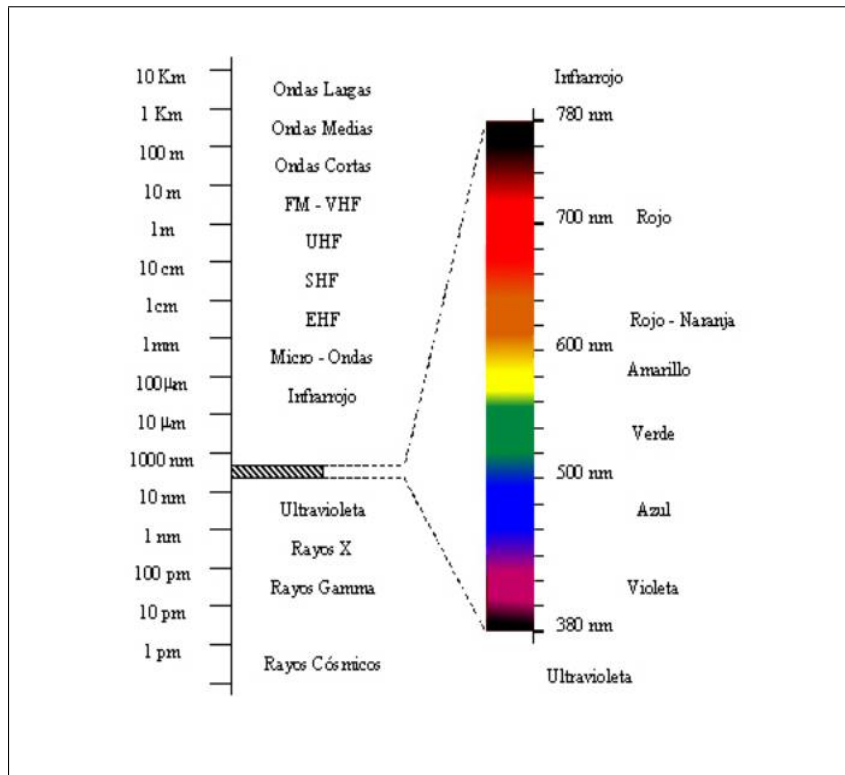


Figura 1.1: Banda del espectro de energía electromagnética.

1.3. Almacenamiento de la Imagen

El almacenamiento digital para la aplicación del procesamiento de imágenes se basa en tres categorías:

- (a) Almacenamiento a corto plazo, para ser empleado durante el procesamiento (emplea la memoria de la computadora, o memorias temporales).
- (b) Almacenamiento en línea, para una reutilización relativamente rápida.
- (c) Almacenamiento en archivo (formato jpg, png, tiff,bmp, gif, etc.).

1.4. Imágenes en Tonos de Gris

Una imagen digital I en tonos de gris, también denominada monocanal, es una asignación de un valor numérico o nivel digital proporcional a la iluminación de cada punto de la escena. Donde esta asignación se le hace a cada píxel de cada entrada de una matriz asociada a la imagen, caracterizada por una función:

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

donde cada posición $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ corresponde a un punto en la imagen, el cual es denominado píxel, al cual se le asigna un valor numérico entre el mínimo (negro) y valor máximo (blanco) [4], denominado comúnmente nivel de gris.

La representación matricial de una imagen digital I con n filas y m columnas es la siguiente:

$$I = \begin{pmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} & \cdots & f_{(1,m)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} & \cdots & f_{(2,m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(n,1)} & f_{(n,2)} & \cdots & f_{(n,m)} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

En la figura 1.2 se muestra la intensidad de tonos de gris de los píxeles asociados a una imagen de tamaño 8x8.

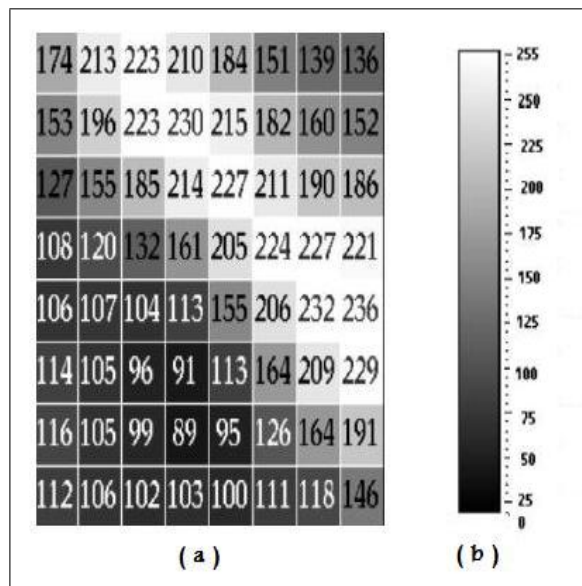


Figura 1.2: (a)Imagen digital de 8x8 píxeles. (b)Escala de niveles de grises.

1.5. Imágenes a Color

Una imagen digital en color es una función que depende de dos variables con valor tridimensional, la cual esta compuesta por tres matrices y es caracterizada por una función:

$$f : Z^2 \rightarrow Z^3 \quad (1.3)$$

donde cada posición $(x, y) \in Z^2$ corresponde a un punto en la imagen, el cual esta representado por un vector de tres componentes: $V = (I_1, I_2, I_3)$, donde I_1, I_2, I_3 corresponden a los niveles digitales de las componentes rojo, verde y azul respectivamente.

1.6. Imagen Multidimensional

También denominada imagen multicanal o imagen vectorial, consiste en un arreglo de imágenes de un solo canal (cada una en tono de gris o binaria) definidas en un mismo dominio, donde cada píxel es representado por un vector cuya dimensión depende del número de canales presentes en la imagen vectorial. En otras palabras, sea f una imagen multidimensional con k canales, se define un vector k -dimensional con la misma posición por canal de uno de los píxel (p), es decir:

$$f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_k(p)) \quad (1.4)$$

En la figura 1.3 se da un ejemplo de imagen vectorial de tres canales (imagen a color), la cual es separada en sus componente crómicas rojo, verde y azul. Así como también un vector asociado a uno de los píxeles por cada canal.

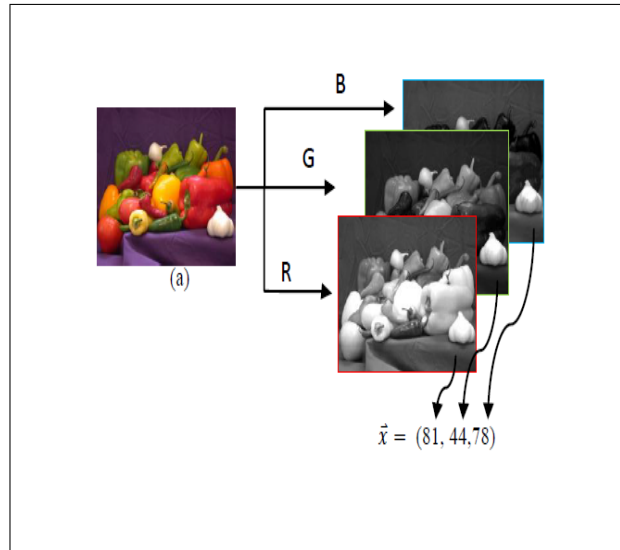


Figura 1.3: (a) Imagen a descomponer en sus tres canales.

En la figura 1.4 se muestra un ejemplo de imagen vectorial de cuatro canales (imagen multispectral de un cultivo de arroz de 8 bits).

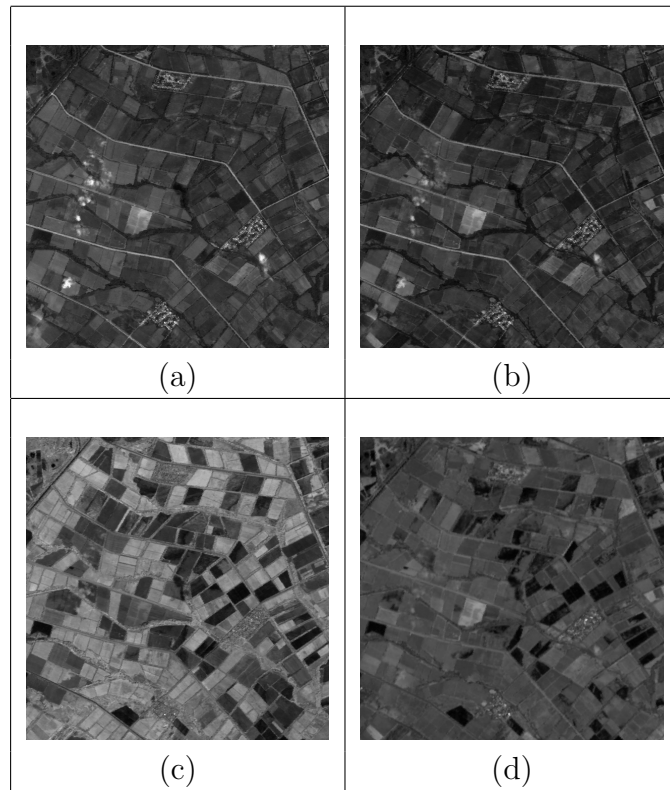


Figura 1.4: (a) canal 1. (b) canal 2. (c) canal 3. (d) canal 4.

En la figura 1.5 se da un ejemplo de imagen vectorial de ocho canales (imagen de resonancia magnética de 16 bits).

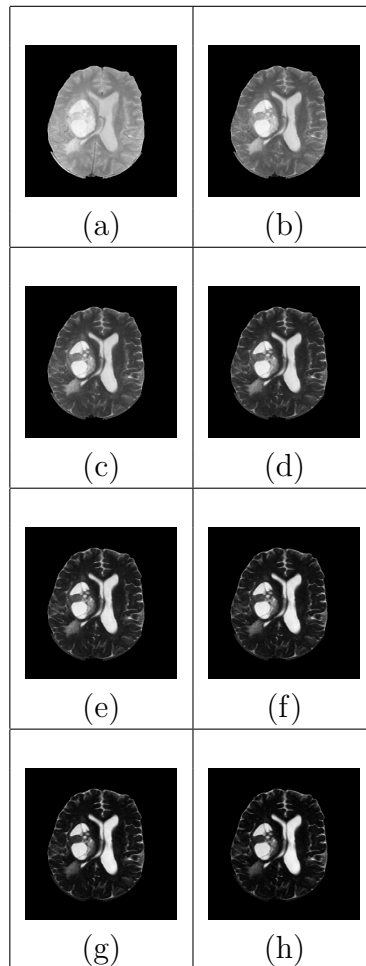


Figura 1.5: (a) canal 1. (b) canal 2. (c) canal 3. (d) canal 4. (e) canal 5. (f) canal 6. (g) canal 7. (h) canal 8.

Capítulo 2

Representación del Color

2.1. Introducción

El color puede ser representado en un espacio 3d, diferentes modelos permiten ordenar, manipular y representar en forma de puntos a los colores. En la actualidad hay una gran cantidad de modelos de espacios de color, entre estos tenemos los siguientes:

- Espacio RGB.
- Espacio CMY.
- Espacio YIQ.
- Espacio HSI.
- Espacio CIE.

2.2. Espacio RGB

En el espacio RGB (Red, Green, Blue) el color aparece especificado mediante cantidades positivas de rojo, verde y azul. A este espacio de color se le pueden asociar tres matrices, donde la primera matriz contiene información de los tonos rojos presentes en la imagen, la segunda matriz contiene los tonos verdes y la tercera los tonos azules (figura 2.1).

La figura 2.1 muestra la descomposición de la imagen original (a) en sus tres componentes de color, rojo (imagen (b)), verde (imagen (c)), azul (imagen (d)), donde su representación es en tonos de gris. Las zonas claras corresponden a mayor intensidad de una componente y las zonas más oscuras a la ausencia de intensidad. Por ejemplo en la figura 2.1 (b) correspondiente a la componente roja, las zonas blancas corresponden a la cantidad de color rojo que se encuentra en la imagen original, y las zonas oscuras nos dan la información de la ausencia del color rojo en la imagen original.



Figura 2.1: (a) Imagen original. (b) Canal rojo. (c) Canal verde. (d) Canal azul.

Al separar una imagen digital a color en sus tres colores primarios, es decir, las matrices que la componen, su representación matemática viene dada por:

$$f_1 : Z^2 \rightarrow Z \text{ tal que } X = (x, y) \rightarrow I_1 \quad (2.1)$$

$$f_2 : Z^2 \rightarrow Z \text{ tal que } X = (x, y) \rightarrow I_2 \quad (2.2)$$

$$f_3 : Z^2 \rightarrow Z \text{ tal que } X = (x, y) \rightarrow I_3 \quad (2.3)$$

donde la expresión (2.1) corresponde a los tonos rojos, la expresión (2.2) a los tonos verdes y la expresión (2.3) a los tonos azules.

Ahora bien, el conjunto de todos los colores se puede representar en forma de cubo (figura 2.2).

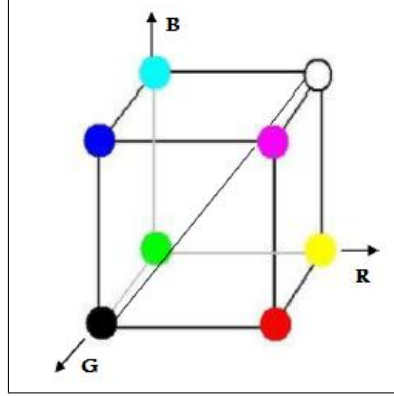


Figura 2.2: Representación espacial del espacio RGB.

La figura 2.2 es la representación gráfica del espacio a color RGB. Donde Cada color es un punto de la superficie o del interior de este. En la gráfica la coordenada $(0,0,0)$ corresponde al color verde, el $(0,0,1)$ corresponde al color azul, el $(0,1,0)$, corresponde al color negro, el $(1,1,1)$ corresponde al color mangeta, el $(1,0,1)$ corresponde al color blanco, el $(0,1,1)$ corresponde al azul oscuro, el $(1,1,0)$ corresponde al color rojo, y el $(0,0,1)$ corresponde al color amarillo. La escala de grises estaría situada en la diagonal que une al color blanco con el negro.

2.3. Espacio CMY

El espacio CMY (Cyan, Magenta, Yellow), los colores cyan, magenta y amarillo son los primarios y los secundarios el rojo, verde y azul (figura 2.3). Este espacio se obtiene al realizar la transformación lineal del modelo RGB. Esta conversión se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

donde las componentes de ambos modelos se distribuye en un rango $[0, 1]$.

En la figura 2.3 se puede apreciar los colores cyan, magenta y amarillo, que al combinarlos dan los colores secundarios verde (combinación de amarillo con cyan), rojo (combinación de magenta con amarillo), y azul (combinación de cyan con magenta). El color negro resulta de la combinación de los tres colores primarios de este modelo.

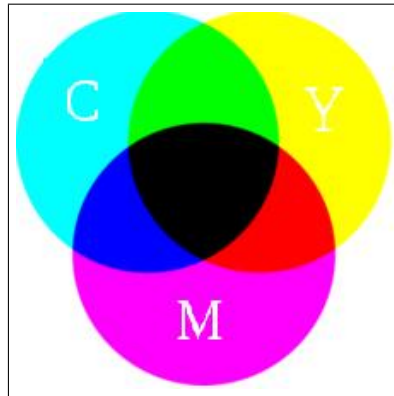


Figura 2.3: Modelo sustractivo Cyan (C), Magenta (M) y Amarillo (Y).

2.4. Espacio YIQ, YUV

Los espacios de color YIQ, YUV son empleados actualmente en la radiodifusión de la señal de televisión. La componente Y representa la información de luminancia y es el único componente utilizado por los televisores monocromos (blanco y negro). I y Q contienen la información del brillo. El sistema YIQ tiene la ventaja de utilizar las características de la respuesta del ojo humano al color. El ojo es más sensible a los cambios en el rango naranja-azul (I) que en el rango púrpura-verde (Q), así se requiere menos ancho de banda para Q que para I. En el espacio YUV, las componentes U y V son las coordenadas X e Y en el espacio de color.

2.5. Espacio HSI

Los modelos cromáticos HSI, HLS y HSV codifican el color en sus componentes cromáticas, matiz (hue), saturación (saturation) y la componente de brillo que de acuerdo al modelo utilizado recibe el nombre de valor: HSV, intensidad: HSI, luminancia: HLS.

La familia de espacios HSI se derivan del modelo RGB a partir de una transformación de coordenadas. En los modelos HSI los colores se distinguen unos de otros por su tono (matiz, que es la longitud de onda dominante (color principal)), intensidad (nivel de luminosidad), y saturación (que es la pureza de color o mezcla de luz blanca con el color dominante) [5], este modelo posee aspecto cilíndrico (figura 2.4), de forma que la saturación se corresponde con un valor de distancia radial, mientras que el tono es función de ángulo en el sistema de coordenadas polares.

En la figura 2.4 se muestra la representación gráfica del espacio HSI, donde la intensidad es la distancia a lo largo del eje perpendicular al plano de coordenadas polares. Generalmente el color rojo (R) corresponde a un matiz de 0 grados, el color verde (G) a un matiz de 120 grados y el azul (B) a un matiz de 240 grados, el color cian (C) a un matiz de 180 grados.

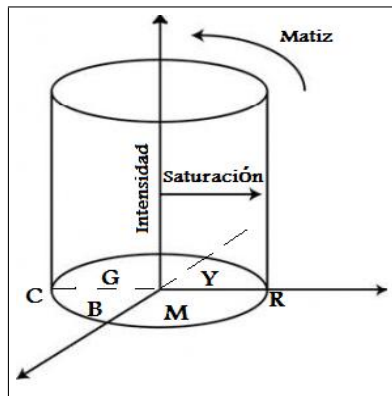


Figura 2.4: Representación del espacio HSI.

2.6. Espacio CIE

Los modelos de color CIELAB y CIELUV son espacios producidos por la CIE (Comisión Internacional de L'Eclairage) para definir estándares que permitan comparar características de los equipos de visualización. El propósito de ambos espacios es producir un espacio de color donde un cambio de la misma cantidad en un valor de color debe producir un cambio casi de la misma importancia visual que otros espacios de color. Lo anterior puede mejorar la reproducción de tonos cuando se almacenan colores en valores de precisión limitada.

En la figura 2.5 se muestra el diagrama de cromaticidad CIE.

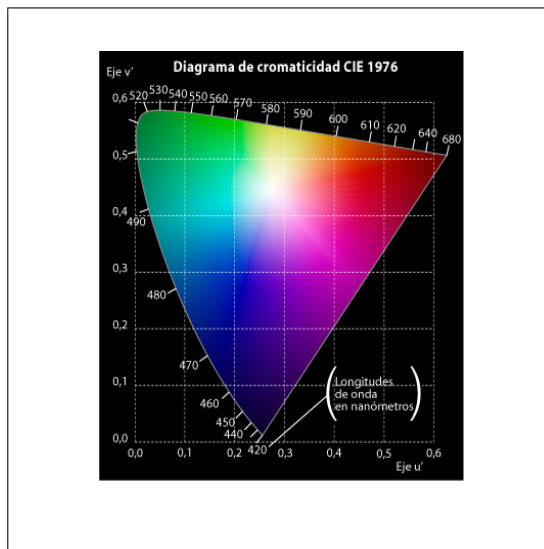


Figura 2.5: Espacio CIE.

Capítulo 3

Morfología Matemática. Retículo

3.1. Introducción

La Morfología Matemática surge a raíz de las investigaciones hechas en los años sesenta por G. Matheron y J. Serra quienes se basaron en los primeros trabajos realizados por Minkowski [Minkowski, 1897] [Minkowski, 1901], y Hadwiger [Hadwiger,1957], [Hadwiger,1959] en teoría de conjuntos. La Morfología Matemática analiza los objetos presentes en la imagen mediante el uso de procesos no lineales derivados de la comparación de la imagen a procesar con un patrón geométrico sencillo (línea, punto, cuadrado, círculo, etcétera) denominado “Elemento Estructurante”(figura 3.1), el cual es un objeto de referencia de dimensiones pequeñas. Por tanto esta es una herramienta que permite el análisis de imágenes cuando la topología y la estructura geométrica de los objetos presentes en ella son los parámetros importantes para su caracterización.

<pre> 1 1 1 1 1 1 1 1 1 </pre>	<pre> 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 </pre>	<pre> 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 </pre>
(a) Cuadrado 3x3	(b) Rombo	(c) Disco

Figura 3.1: Ejemplos de elementos estructurantes.

3.2. Nociones de Teoría de Conjuntos

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas ($A, B, C, \dots$) y los elementos de dichos conjuntos con letras minúsculas ($a, b, c, \dots$).

- Un conjunto B está bien definido si existe un criterio que permita decidir si, dado un elemento x cualquiera, la proposición $x \in B$ es verdadera o falsa.
- Un objeto matemático no puede ser a la vez un conjunto y elemento de este conjunto, es decir, la proposición $x \in x$ es siempre falsa.

Definición 3.1. Dos conjuntos son iguales si están formados por los mismos elementos:

$$X = Y \iff (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ y } y \in Y \Rightarrow y \in X) \quad (3.1)$$

La igualdad de conjuntos es reflexiva, simétrica y transitiva. El conjunto vacío será denotado por ϕ .

Definición 3.2. X es subconjunto de Y si todos los elementos de X pertenecen a Y :

$$X \subseteq Y \iff (x \in X \Rightarrow x \in Y) \quad (3.2)$$

Definición 3.3. Si X e Y son dos conjuntos arbitrarios, se denomina intersección de X e Y , y se denota con $X \cap Y$, al conjunto definido por:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \in Y\} \quad (3.3)$$

Si $X \cap Y = \emptyset$, se dice que los conjuntos X e Y son disjuntos. La intersección es conmutativa, asociativa e idempotente ($X \cap X = X$).

Definición 3.4. Se llama unión o reunión de dos conjuntos X e Y y se denota $X \cup Y$, al conjunto cuyos elementos pertenecen al menos a uno de los conjuntos dados.

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\} \quad (3.4)$$

Al igual que la intersección de conjuntos, la unión de conjuntos es conmutativa, asociativa e idempotente ($X \cup X = X$).

Definición 3.5. La diferencia de X e Y , la componen los elementos que pertenecen a X pero que no están incluidos en Y .

$$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \notin Y\} \quad (3.5)$$

En general esta operación no es conmutativa.

Definición 3.6. El complemento de un subconjunto X , contenido en un conjunto de referencia Y se define como:

$$X^c = \{x \in Y \mid x \notin X\} \quad (3.6)$$

Definición 3.7. Sean X y B dos conjuntos pertenecientes a $\mathbb{R}^2$, definimos la suma y resta de Minkowski de la siguiente manera:

$$X \oplus B = \bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha \quad (3.7)$$

$$X \ominus B = \bigcap_{\alpha \in B} X_\alpha \quad (3.8)$$

donde

$$X_h = \{x + h \mid x \in X\} \quad (3.9)$$

h es un vector que pertenece a $\mathbb{R}^2$ [6].

3.3. Relaciones de Orden

Definición 3.8. Dado un conjunto X no vacío, una relación binaria $\leq$ en X es un Orden Parcial si para todo $x, y, z \in X$ se satisfacen la siguientes propiedades:

- $x \leq x$, (Reflexiva).
- $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisimétrica).
- $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitiva).

Un conjunto con una relación de este tipo se denotará como $(X, \leq)$. El conjunto será totalmente ordenado si satisface que:

- Para todo x, y pertenecientes a X se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Por ende $(X, \leq)$ tendrá una relación de orden de tipo total.

Definición 3.9. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $S \subset X$, con $S \neq \emptyset$.

- Un elemento $x \in S$, es el menor elemento de S (mínimo) si $x \leq y$ para todo $y \in S$.
- Un elemento $y \in S$, es el mayor elemento de S (máximo) si $x \leq y$ para todo $x \in S$.
- Un elemento $x \in X$, es cota inferior de S si $x \leq y$ para todo $y \in S$.
- Un elemento $y \in X$, es cota superior de S si $x \leq y$ para todo $x \in S$.
- Un elemento $x \in X$, es ínfimo de S si y sólo si es cota inferior de S y para toda cota inferior y de S se verifica que $y \leq x$ (es la mayor de las cotas inferiores).

- Un elemento $y \in X$, es supremo de S si y sólo si es cota superior de S y para toda cota superior x de S se verifica que $y \leq x$ (es la menor de las cotas superiores).

Es importante hacer notar que una relación binaria en el conjunto X que solo sea reflexiva y transitiva no podrá conocerse como relación de orden, sino de preorden.

3.4. Retículo

Definición 3.10. Un conjunto $(X, \leq)$ es un orden reticulado o un retículo si dados dos elementos cualesquiera a y b de X , siempre existe: la menor de las cotas superiores de $\{a, b\}$, llamada el supremo de a y b , denotado $a \vee b$ y también la mayor de las cotas inferiores de $\{a, b\}$, llamado el ínfimo de a y b , denotado $a \wedge b$.

Definición 3.11. Un retículo X es completo si todo subconjunto de X posee ínfimo y supremo.

Teorema 3.4.1. Sea $(X, \leq)$ un orden reticulado. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- Idempotencia

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

- Conmutatividad

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

- Asociatividad

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

- Absorción

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (y \vee z) = x$$

3.5. Fundamentos de Morfología Matemática

La Morfología Matemática opera sobre conjuntos que conforman un retículo completo, es decir, conjuntos que cumplen con relaciones de orden en sus niveles digitales y que posean un ínfimo y un supremo. Las imágenes binarias y en niveles de gris tienen la particularidad que en estas se pueden definir relaciones de orden mientras que, en las imágenes multidimensionales, se plantean problemas para definir el ínfimo y el supremo. Los operadores básicos de la Morfología Matemática son, la Dilatación y Erosión asociados al elemento estructurante [9].

3.5.1. Dilatación

La Dilatación en las imágenes de niveles de gris se obtiene al desplazar el elemento estructurante sobre toda la imagen y reemplazando el píxel central por el máximo de los niveles digitales incluidos dentro del elemento estructurante. En términos de teoría de conjunto, la dilatación de un conjunto X por un elemento estructurante D , se denota por $\delta_D(X)$, y es el conjunto de puntos $x \in X$, tal que, D_x intersecta a X (ecuación (3.10)) donde el conjunto dilatado siempre contiene al original.

$$\delta_D(X) = \{x : D_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (3.10)$$

En el caso de imágenes digitales, la expresión de la dilatación para una imagen $f \in \{0, 1\}$ dado un elemento estructurante $D \in \mathbb{R}^2$, viene dada por el máximo de las traslaciones de f por α (ecuación (3.11)).

$$\delta_D(f) = \bigvee_{\alpha \in D} f_\alpha \quad (3.11)$$

Ahora bien, como el conjunto a trabajar en las imágenes digitales es acotado, entonces el concepto de supremo pasa a ser el de máximo, por lo que la ecuación anterior se expresa de la siguiente manera:

$$\delta_D(f)(x, y) = \max_{(c, t) \in D} \{f(x + c, y + t)\} \quad (3.12)$$

En la figura (3.2) se muestra un ejemplo de dilatación para una imagen binaria realizado con un elemento estructurante plano que tiene forma cuadrada 3x3.

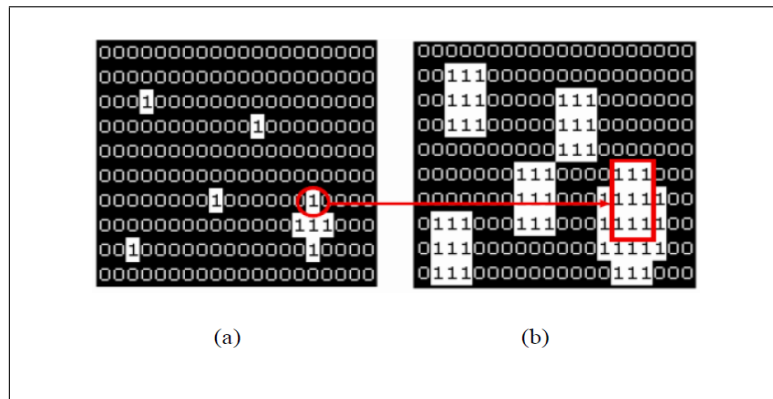


Figura 3.2: (a) Imagen original. (b) Imagen dilatación

En la figura (3.3) se muestra la dilatación para una imagen en escala de grises con un elemento estructurante en forma de un disco de radio 3. En donde en la imagen dilatada (b) se destacan los colores claros de la imagen original (a).



Figura 3.3: (a) Imagen original. (b) Imagen dilatación.

3.5.2. Erosión

La Erosión en las imágenes de niveles de gris, se obtiene al desplazar el elemento estructurante sobre la imagen y reemplazando el píxel central por el mínimo de los niveles digitales incluidos dentro del elemento estructurante. En términos de teoría de conjuntos, la erosión de un conjunto X por un elemento estructurante D , se denota por, $\varepsilon_D(X)$, y es el conjunto de puntos x , tal que, el conjunto erosionado siempre está contenido en el original (ecuación (3.13)).

$$\varepsilon_D(X) = \{x : D_x \subseteq X\} \quad (3.13)$$

En el caso de imágenes digitales, la expresión de la erosión para una imagen digital $f \in \{0, 1\}$ dado un elemento estructurante D , viene dada por, el mínimo de todas la traslaciones de f por α (ecuación (3.14)).

$$\varepsilon_D(f) = \bigwedge_{\alpha \in D} f_\alpha \quad (3.14)$$

Ahora bien, como el conjunto a trabajar en las imágenes digitales es acotado, entonces el concepto de ínfimo pasa a ser el de mínimo, por lo que la ecuación anterior se expresa de la siguiente manera:

$$\varepsilon_D(f)(x, y) = \min_{(c, t) \in D} \{f(x + c, y + t)\} \quad (3.15)$$

En la figura (3.4) se muestra un ejemplo de erosión para una imagen binaria con un elemento estructurante plano en forma de cuadrado 3x3.

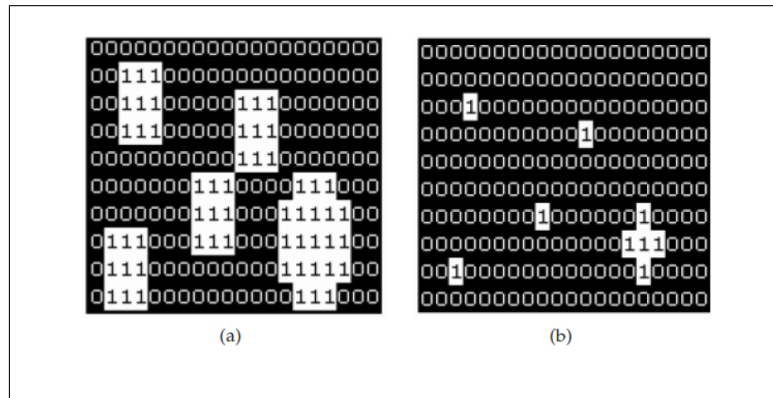


Figura 3.4: (a) Imagen original. (b) Imagen erosión.

En la figura (3.5) se muestra la erosión para una imagen en escala de grises con un elemento estructurante en forma de un disco de radio 3 píxeles. En donde en la imagen erosionada (b) se destacan los colores oscuros de la imagen original (a).



Figura 3.5: (a) Imagen original. (b) Imagen erosión.

Estos operadores morfológicos pueden simplificar los datos presentes

en la imagen, preservar las características esenciales y eliminar aspectos irrelevantes de la misma. Estos son la base de cualquier transformación morfológica. Cualquier transformación o algoritmo incluirá una erosión o una dilatación o ambas primitivas en su implementación.

3.5.3. Apertura

La apertura permite identificar los objetos en una imagen binaria f que pueden contener un elemento estructurante D , se denota por $\gamma_D(f)$ y se define como la erosión de f por D , seguida de la dilatación por el mismo elemento estructurante, la expresión de apertura para una imagen f viene dada por:

$$\gamma_D(f) = \delta_D(\varepsilon_D(f)) \quad (3.16)$$

Cuando partimos de un conjunto X , su apertura es la unión de todas las versiones del elemento estructurante trasladadas que caben dentro de X :

$$\gamma_D(f) = \bigcup \{D_x : D_x \subseteq X, x \in \mathbb{R}^2\} \quad (3.17)$$

En la figura (3.6) se muestra un ejemplo de apertura para un conjunto A dado un elemento estructurante B en forma de disco.

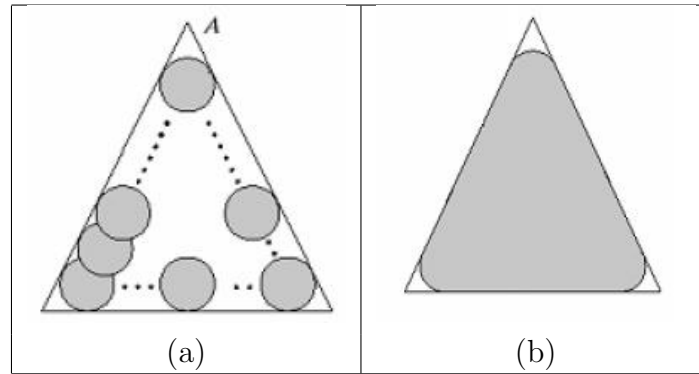


Figura 3.6: (a) Conjunto A. (b) Imagen apertura.

En la figura (3.7) se muestra un ejemplo de apertura para una imagen binaria con un elemento estructurante plano y cuadrado de 3x3.

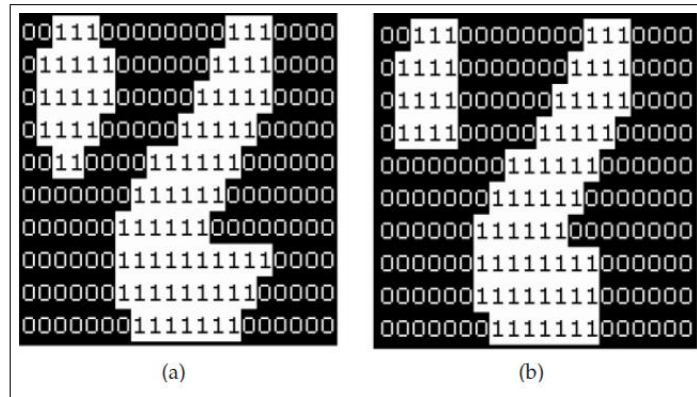


Figura 3.7: (a) Imagen original. (b) Imagen apertura.

En la figura (3.8) se muestra la apertura para una imagen en escala de grises con un elemento estructurante en forma de un disco de radio 5.



Figura 3.8: (a) Imagen original. (b) Imagen apertura.

3.5.4. Cierre

El cierre de una imagen f por un elemento estructurante D se denota por $\phi_D(f)$ y se define como la dilatación de f por D , seguida de la erosión por el mismo elemento estructurante, la expresión de cierre para una imagen f viene dada por:

$$\phi_D(f) = \varepsilon_D(\delta_D(f)) \quad (3.18)$$

El cierre de un conjunto X , se define como:

$$\phi(f) = [\bigcup \{D_x : D_x \subseteq X^c, x \in \mathbb{R}^2\}]^c \quad (3.19)$$

o de forma equivalente, se puede expresar el cierre como la intersección de todas la traslaciones del complemento del elemento estructurante que caben dentro de X .

$$\phi_D(f) = \bigcap \{D_x^c : X \subseteq D_x^c, x \in \mathbb{R}^2\} \quad (3.20)$$

En la figura (3.9) se muestra un ejemplo de cierre para un conjunto A dado un elemento estructurante B en forma de disco.

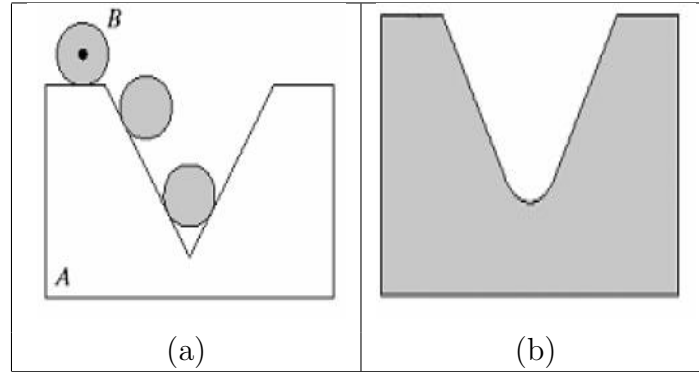


Figura 3.9: (a) Conjunto A. (b) Imagen cierre.

En la figura (3.10) se muestra un ejemplo de cierre para una imagen binaria con un elemento estructurante plano y cuadrado.

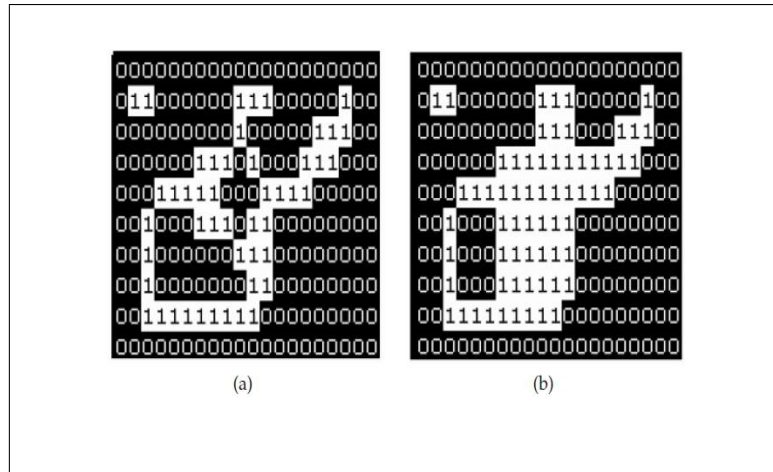


Figura 3.10: (a) Imagen original. (b) Imagen cierre.

En la figura (3.11) se muestra el cierre para una imagen en escala de grises con un elemento estructurante en forma de disco de radio 3.



Figura 3.11: (a) Imagen original. (b) Imagen cierre.

3.5.5. Gradiente

El gradiente es el resultado de la diferencia del operador dilatación con el operador erosión, este es un operador morfológico que al ser aplicado a una imagen f bien sea binaria o en tonos de gris, da como resultado el borde de los objetos presentes en dicha imagen, el cual se denota por $\rho_D(f)$. La expresión de gradiente dado un elemento estructurante D viene dada por:

$$\rho_D(f) = \delta_D(f) - \varepsilon_D(f) \quad (3.21)$$

Para conjuntos, la expresión de gradiente viene dada por la ecuación (3.22)

$$\rho_D(X) = \delta_D(X) \setminus \varepsilon_D(X) \quad (3.22)$$

En la figura (3.12) se muestra el resultado de calcular el gradiente para una imagen en escala de grises con un elemento estructurante en forma de disco de radio 5.



Figura 3.12: (a) Imagen original. (b) Imagen gradiente.

3.6. Propiedades de los Operadores Básicos de Morfología

3.6.1. Dualidad

Tanto el Cierre como la Apertura de un conjunto X dado un elemento estructurante D , se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\phi_D(X) = [\gamma_D(X^c)]^c \quad (3.23)$$

$$\gamma_D(X) = [\phi_D(X^c)]^c \quad (3.24)$$

Esto se debe a que el operador cierre y el operador apertura son duales con respecto a la complementación. Análogamente esta propiedad de dualidad con respecto a la complementación también la cumple la erosión y la dilatación.

$$\varepsilon_D(X) = [\delta_D(X^c)]^c \quad (3.25)$$

$$\delta_D(X) = [\varepsilon_D(X^c)]^c \quad (3.26)$$

3.6.2. Crecimiento

Los operadores de erosión y dilatación son crecientes, es decir, preservan el orden presente en la estructura del retículo. Esto es, dadas dos imágenes f y g

$$\text{Si } f \leq g \Rightarrow \varepsilon(f) \leq \varepsilon(g) \quad (3.27)$$

$$\text{Si } f \leq g \Rightarrow \delta(f) \leq \delta(g) \quad (3.28)$$

3.6.3. Extensividad y Antiextensividad

El operador erosión cumple con la propiedad de antiextensividad [11], esto es dada una imagen f se cumple que:

$$\varepsilon(f) \leq f \quad (3.29)$$

Mientras que, el operador dilatación cumple con la propiedad de extensividad [11], esto es:

$$f \leq \delta(f) \quad (3.30)$$

De la desigualdades(3.29) y (3.30), se tiene que:

$$\varepsilon(f) \leq f \leq \delta(f) \tag{3.31}$$

Capítulo 4

Ordenamiento Vectorial

4.1. Introducción

La Morfología Matemática requiere del establecimiento de una relación de orden que permita identificar, el máximo y el mínimo presentes en una imagen (bien sea: binaria, en escala de gris o multicanal). Por lo tanto aplicar los operadores de morfología matemática a imágenes multicanal se dificulta, debido a la naturaleza vectorial de las mismas [6].

Para poder extender los Operadores Morfológicos que se aplican a imágenes en escala de gris y binarias a imágenes a multicanal se han planteado distintos tipos de ordenamiento para definir un orden entre los píxeles asociados a la imagen, el primer ordenamiento para imágenes multicanal fue el de Aproximación Marginal, que consiste en procesar cada una de los canales de la imagen tricromática por separado aplicando el mismo criterio de procesamiento a cada uno de estos para luego unirlos, trayendo como consecuencia la aparición de tonalidades que no están presentes en la imagen original, por lo cual no es un método confiable, después se plantearon otros métodos entre los cuales destacan: Orden Lexicográfico, Entrelazado de Bits, y por Medida de la Distancia.

4.2. Orden Lexicográfico

Este orden es también conocido como orden de diccionario, y cumple con la definición de orden total que se basa en la asignación de prioridades a una de las componentes, en donde si dos vectores tienen los mismos valores se pasa a comparar la siguiente componente y así sucesivamente (ver definición 4.1).

Definición 4.1. Dados dos vectores $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{Z}^3$, se pueden comparar si satisfacen la siguiente condición:

$$\vec{X} \leq \vec{Y} \iff \begin{cases} \text{si } x_1 < y_1 \\ \text{si no } x_1 = y_1 \text{ y } x_2 < y_2 \\ \text{si no } x_1 = y_1, x_2 = y_2 \text{ y } x_3 < y_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

4.3. Medida de la Distancia

Se basa en la distancia Euclídea de los píxeles con respecto a un píxel de referencia que se haya establecido, por lo general el píxel a tomar como referencia es el origen del espacio.

Definición 4.2. Dados dos vectores $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{Z}^3$, se pueden comparar si satisfacen la siguiente condición:

$$\vec{X} \leq \vec{Y} \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \quad (4.2)$$

Este método es un preorden, ya que, si se consideran los vectores $p = (0, 0, 1)$, $q = (1, 0, 0)$, $r = (0, 1, 0)$ como su medida de distancia es igual, se les asigna el mismo índice de orden a pesar de que $p \neq q \neq r$, entoces no se garantiza la unicidad del supremo o el ínfimo, pues, la inversa de un índice de orden no es única.

4.4. Entrelazado de Bits

Es un tipo de ordenamiento vectorial [2], donde se tratan las diferentes componentes del píxel asociado a la imagen de la forma más simétrica posible (le da casi la misma prioridad a cada uno de las componentes). Este método de ordenación es un orden total que codifica los bits (Dígitos binarios) de los elementos presentes en la imagen de tal manera que, apoyándose en la representación binaria de las señales (cada una representada en ocho bits), se forma un escalar de veinticuatro bits (24 bits) mezclando valores.

El método por entrelazado de bits para el espacio RGB construye un índice de orden, que va a constar de tres bits; para el primer bit se dispone en primer lugar del píxel de mayor peso del canal rojo (R), en segundo lugar, del píxel de mayor peso del canal verde (G), y en tercer lugar, del píxel de mayor peso del canal azul (B). A continuación se procede a componer el segundo bit del índice de orden, tomando en cuenta en primer lugar el segundo píxel de mayor peso del canal rojo, en segundo lugar, el segundo píxel de mayor peso del canal verde, y en tercer lugar, el segundo píxel de mayor peso del canal azul (B), así hasta llegar al último bit del índice de orden [10].

En la figura 4.1 se ilustra la codificación y decodificación de un píxel de color RGB por entrelazado de bits.

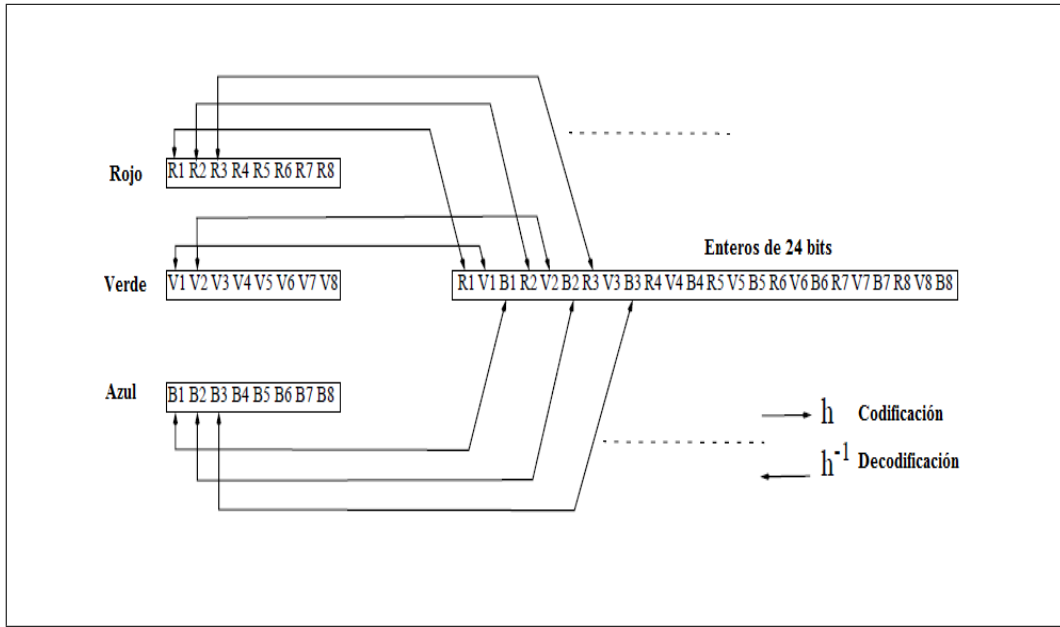


Figura 4.1: Entrelazado de bits para un vector en el espacio RGB.

Capítulo 5

Ordenamiento SML

5.1. Introducción

Al no existir un orden natural entre vectores, es necesario definir un retículo que garantice un orden total.

En este capítulo se presenta la metodología propuesta para el ordenamiento de vectores multidimensionales, que se ha denominado SML(Suma, Máximo, Lexicográfico) que se basa en el orden lexicográfico con un retículo orientado a la suma y máximos presentes en los vectores asociados a la imagen multicanal.

5.2. Ordenamiento SML

Sean X, Y dos vectores en $\mathbb{Z}^n$, se define un nuevo ordenamiento que consta de tres fases, donde se le da prioridad a cada una de estas, es decir, para ordenar los vectores se le da prioridad a la primera fase, luego a la segunda fase y, por último a la tercera fase.

- **Primera Fase:** Dados dos vectores $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{Z}^n$, para ordenarlos se da prioridad a la suma de las componentes (S) de cada uno de los vectores, es decir, si $S_X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, es menor que $S_Y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, se tiene que $X < Y$.

La suma de las componentes del vector genera un plano que lo denominaremos π (plano de sumas constantes). En el caso de tres dimensiones, si se consideran tres planos π_1, π_2, π_3 , en $\mathbb{Z}^3$ cuyos vectores tienen sumas iguales, donde $\pi_1 < \pi_2 < \pi_3$, como se muestra en la figura (5.1), se tiene que un vector $X_1 \in \pi_1$ va a ser menor que un vector $Y_1 \in \pi_2$ y menor que un vector $Z_1 \in \pi_3$.

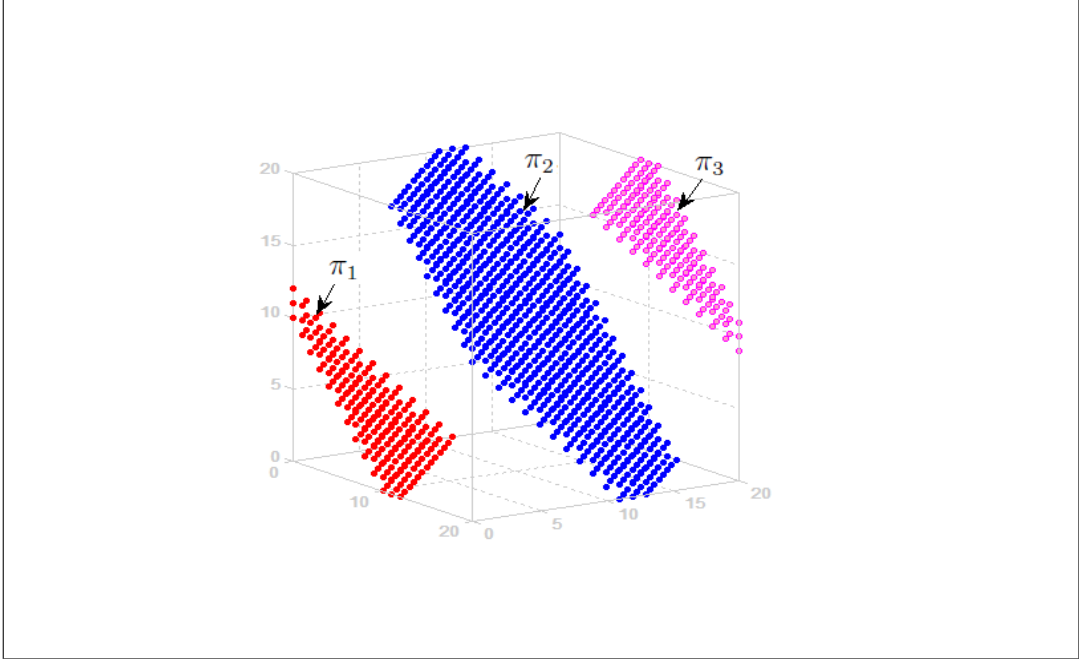


Figura 5.1: Comparación con tres planos de suma.

- **Segunda Fase:** Dados dos vectores W, W' en $\mathbb{Z}^n$ con $S_W = S_{W'}$, se procede a ordenarlos considerando el valor máximo de cada uno de los vectores de manera que, si el valor máximo de las componentes W_i de W es mayor que el valor máximo de las componentes W'_i de W' , entonces $W' < W$, con $i = 1, \dots, n$. En caso que los valores del máximo de ambos vectores sean iguales, se compara el siguiente máximo, si estos también son iguales, se compara el máximo que les sigue, así sucesivamente hasta que el valor de uno de los máximos de un vector sea más grande que el del otro vector.

En la figura (5.2) se muestra parte del plano π (plano de sumas constantes) en $\mathbb{Z}^3$, donde los vectores tienen suma y primer máximo iguales. Los vectores de máximo pequeño se encuentran ubicados en el centro del plano (color azul (W_1)), mientras que los vectores de máximo más grandes corresponden al cian (W_2), amarillo (W_3), y rojo (W_4), esto es, $W_1 < W_2 < W_3 < W_4$.

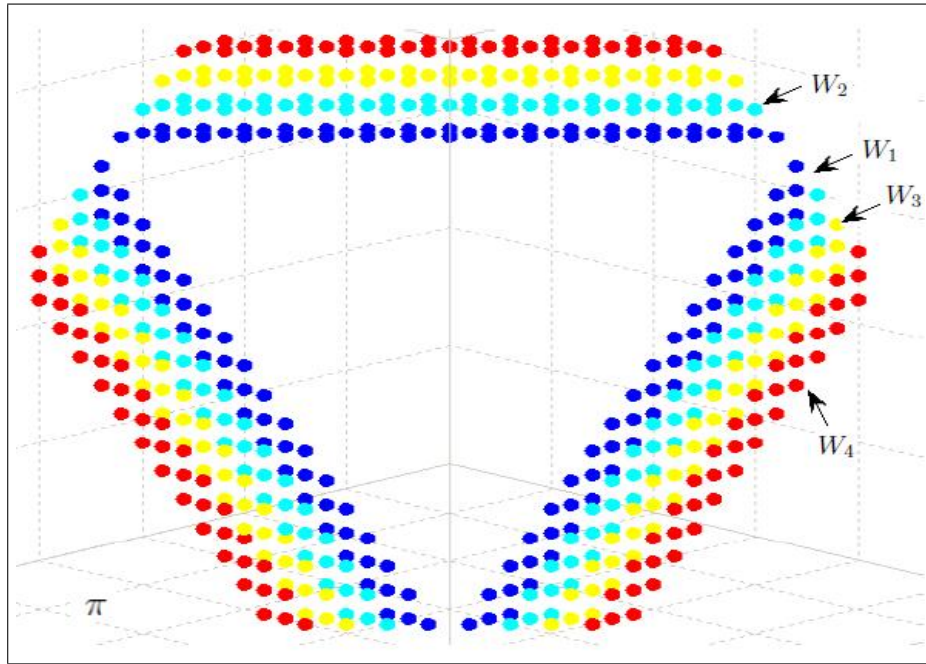


Figura 5.2: Comparacion de máximos.

Cuando el máximo de las componentes de dos vectores son iguales, se compara el siguiente máximo, en la figura 5.3 se muestra la distribución de los vectores de uno de los planos de la figura 5.2 donde los vectores con segundo máximo mayor se encuentran ubicados en el centro de cada uno de los extremos del triángulo (plano π), y los de mayor valor se encuentran más cerca de los vértices. Los vectores que tienen las mismas componentes pero con orden diferente, no pueden ser ordenados, en la figura estos son los vectores de posición: a , b , c , d , e , y f , los cuales se proceden a ordenar en la tercera fase.

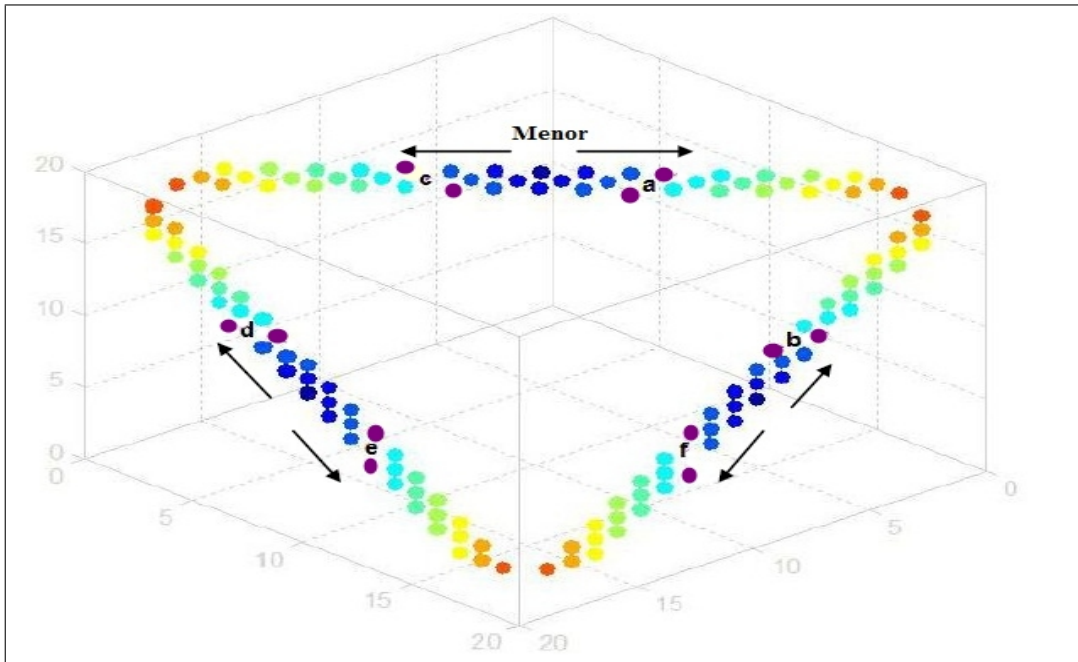


Figura 5.3: vectores ordenados por segundo máximo.

- **Tercera Fase:** Dados dos vectores T, T' en $\mathbb{Z}^n$ con suma y máximos iguales, se proceden a ordenar siguiendo el orden lexicográfico dándole prioridad a cada una de sus componentes. Donde $T < T'$ si la primera componente de T es mayor que la primera componente de T' , sino se considera la segunda componente, si son iguales se le da prioridad a la tercera, así sucesivamente hasta que una de las componentes de T es mayor que la de T' .

$$S_{\vec{X}} = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \quad (5.1)$$

$$S_{\vec{Y}} = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i \quad (5.2)$$

$$\vec{X} < \vec{Y} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{si, } S_{\vec{X}} < S_{\vec{Y}} \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}} \text{ y } x'_1 < y'_1 \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}}, x'_1 = y'_1 \text{ y } x'_2 < y'_2 \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}}, x'_1 = y'_1, x'_2 = y'_2 \text{ y } x'_3 < y'_3 \\ \vdots \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}}, x'_{n-2} = y'_{n-2} \text{ y } x'_{n-1} < y'_{n-1} \\ \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}}, x'_{n-1} = y'_{n-1} \text{ y } x_1 < y_1 \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}}, x'_{n-1} = y'_{n-1}, x_1 = y_1 \text{ y } x_2 < y_2 \\ \vdots \\ \text{si no, si } S_{\vec{X}} = S_{\vec{Y}}, x'_{n-1} = y'_{n-1}, x_{n-2} = y_{n-2} \text{ y } x_{n-1} < y_{n-1} \end{array} \right.$$

Veamos que este ordenamiento es un retículo completo

■ **Propiedad Reflexiva.**

Como $S_{\vec{x}}$ no puede ser menor estricto que $S_{\vec{x}}$ y tampoco $x'_i < x'_i$, $x_i < x_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces por definición de este ordenamiento $\vec{X} = \vec{X}$, por tanto es reflexiva.

■ **Propiedad Antisimétrica.**

Supongamos que,

$$(x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n) \quad (5.3)$$

y

$$(y_1, \dots, y_n) < (x_1, \dots, x_n) \quad (5.4)$$

De la desigualdad (5.3) y (5.4) se tiene que,

$$S_{\vec{x}} < S_{\vec{y}} \quad (5.5)$$

y

$$S_{\vec{y}} < S_{\vec{x}} \quad (5.6)$$

Entonces por (5.5) y (5.6), $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$.

Como $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$ y $x'_1 < y'_1$ (por 5.3), $y'_1 < x'_1$ (por 5.4). Entonces $x'_1 = y'_1$.

Si $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$, $x'_1 = y'_1$ y $x'_2 < y'_2$, $y'_2 < x'_2$. Entonces $x'_2 = y'_2$.

Así sucesivamente se tiene que, $x'_{i-1} = y'_{i-1}$, con $i = 1, \dots, n$.

Como $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$, $x'_{i-1} = y'_{i-1}$ y $x_1 < y_1$, $y_1 < x_1$. Entonces $x_1 = y_1$.

Si $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$, $x'_{i-1} = y'_{i-1}$, $x_1 = y_1$ y $x_2 < y_2$, $y_2 < x_2$. Entonces $x_2 = y_2$.

Así sucesivamente se tiene que, $x_{i-1} = y_{i-1}$.

Ahora bien, como $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$, $x'_{i-1} = y'_{i-1}$ y $x_{i-1} = y_{i-1}$, con $i = 1, \dots, n$. Entonces por definición de este ordenamiento se tiene que, $\vec{X} = \vec{Y}$. Por tanto es antisimétrica.

■ **Propiedad Transitiva.**

Sean $\vec{Z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\vec{Z}' = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{Z}^n$, donde $\vec{Z}'$ el vector ordenado de forma decreciente de $\vec{Z}$, con :

$$S_{\vec{Z}} = \sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \quad (5.7)$$

Supongamos que,

$$(x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n) \quad (5.8)$$

y

$$(y_1, \dots, y_n) < (z_1, \dots, z_n) \quad (5.9)$$

De la desigualdad (5.8) y (5.9) se tiene que,

$$S_{\vec{x}} < S_{\vec{y}} \quad (5.10)$$

y

$$S_{\vec{y}} < S_{\vec{z}} \quad (5.11)$$

entonces $S_{\vec{x}} < S_{\vec{z}}$ y por definición de este ordenamiento, se obtiene que $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Ahora bien, supongamos que $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$, $S_{\vec{x}} = S_{\vec{y}}$, entonces:

Si $x'_1 < y'_1$ y $y'_1 < z'_1$, se tiene que $x'_1 < z'_1$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Si $x'_1 = y'_1$ y $y'_1 < z'_1$, se tiene que $x'_1 < z'_1$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Si $x'_1 = y'_1$, $y'_1 = z'_1$ y $x'_2 < y'_2$, $y'_2 < z'_2$, se tiene que $x'_2 < z'_2$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Si $x'_1 = y'_1$, $y'_1 = z'_1$ y $x'_2 = y'_2$, $y'_2 < z'_2$, se tiene que $x'_2 < z'_2$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Así sucesivamente se tiene que,

Si $x'_{i-1} = y'_{i-1}$, $y'_{i-1} = z'_{i-1}$ y $x_1 < y_1$, $y_1 < z_1$, se tiene que $x_1 < z_1$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Si $x'_{i-1} = y'_{i-1}$, $y'_{i-1} = z'_{i-1}$ y $x_1 = y_1$, $y_1 < z_1$, se tiene que $x_1 < z_1$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Si $x'_{i-1} = y'_{i-1}$, $y'_{i-1} = z'_{i-1}$, $x_1 = y_1$, $y_1 = z_1$ y $x_2 < y_2$, $y_2 < z_2$, se tiene que $x_2 < z_2$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$.

Así sucesivamente se tiene que,

Si $x'_{i-1} = y'_{i-1}$, $y'_{i-1} = z'_{i-1}$, $x_{i-1} = y_{i-1}$, $y_{i-1} < z_{i-1}$, se tiene que $x_{i-1} < z_{i-1}$, y por definición de este ordenamiento $(x_1, \dots, x_n) < (z_1, \dots, z_n)$. Por tanto es transitiva.

Ahora bien, por definición de este ordenamiento para todo $\vec{X}, \vec{Y}$ pertenecientes a $\mathbb{Z}^n$, se cumple que $\vec{X} \leq \vec{Y}$ o $\vec{Y} \leq \vec{X}$. Por lo tanto, la relación de orden SML es un orden total, por ende un retículo completo.

Ejemplo de vectores ordenados por SML.

Consideremos cuatro vectores $X = (9, 7, 8)$, $Y = (5, 8, 3)$, $Z = (7, 8, 9)$, $W = (9, 5, 7)$ en $\mathbb{Z}^3$, se ordenan por SML de la siguiente manera:

Se construye una matriz que depende de la dimensión del vector, en este ejemplo la dimensión del vector es tres, entonces se tiene una matriz asociada que tendrá siete columnas y tantas filas como vectores se tengan, en este caso cuatro filas.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 24 & 9 & 8 & 7 & 9 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 5 & 3 & 5 & 8 & 3 \\ 24 & 9 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 21 & 9 & 5 & 7 & 9 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

donde la primera columna de la matriz corresponde a la suma de las componentes de los vectores, la columna dos hasta la cuatro a las componentes ordenadas de forma decreciente, y la columna cinco hasta la siete al vector original.

Como el valor de la suma del vector X , como de Z es mayor que la de Y y W , por definición del ordenamiento X y Z son mayores que Y y W , pero la suma del vector X es igual a la suma del vector Z ($S_X = S_Z$), entonces se procede a comparar el valor de la segunda columna que corresponde al máximo del vector, como el máximo de X y Z son iguales, se compara el siguiente valor máximo que corresponde a la tercera columna, como son iguales se compara los valores de la cuarta columna, como también estos valores son iguales, se utiliza el orden lexicográfico con prioridad en el mismo orden que se presentan las componentes de los vectores, es decir, se compara el valor de la quinta columna que corresponde a la primera entrada del vector original, siendo mayor el valor del vector X , por lo tanto el vector X es mayor que el vector Z y este es mayor al vector Y y al vector W ; por último, como la

suma del vector W es mayor a la suma del vector Y ($S_W > S_Y$), se tiene que W es mayor que Y , quedando ubicados de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} & \text{Matriz Original} & & & & & & \\ 24 & 9 & 8 & 7 & 9 & 7 & 8 & \\ 16 & 8 & 5 & 3 & 5 & 8 & 3 & \\ 24 & 9 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 & \\ 21 & 9 & 5 & 7 & 9 & 7 & 5 & \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} & \text{Matriz SML} & & & & & & \\ 16 & 8 & 5 & 3 & 5 & 8 & 3 & \\ 21 & 9 & 5 & 7 & 9 & 7 & 5 & \\ 24 & 9 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 & \\ 24 & 9 & 8 & 7 & 9 & 7 & 8 & \end{array} \right)$$

En conclusión,

$$Y < W < Z < X$$

5.3. Vectores ordenados en cada Fase

En el siguiente estudio se cuantifico en imágenes reales de distintos tamaños los vectores que son ordenados en cada una de las fases del Orden SML, considerando para este estudio una ventana de tamaño: 3x3, 5x5 y, 7x7. Para la realización del mismo se utilizaron las imágenes de la figura 1.3, figura 1.4 y figura 1.5, tomando en cuenta para estas últimas los canales uno, tres, y cuatro.

En el cuadro 5.1 se evidencia la poca cantidad de vectores asociados a una imagen a color, de 384 filas por 512 columnas, que fueron comparados por el Orden Lexicográfico clásico, donde la mayoría de estos fueron ordenados en la primera y segunda fase del Orden SML con más de 81,1 % y 18,4 % respectivamente, mientras que menos del 0,07 % llegaron a ser ordenados por el Orden Lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
S	81.17 %	81.34 %	81.47 %
M	18.78 %	18.6 %	18.46 %
L	0.05 %	0.06 %	0.056 %

Cuadro 5.1: Comparación de porcentajes de vectores para una imagen a color.

En el cuadro 5.2 se muestra el porcentaje de vectores asociados a una imagen de resonancia magnética, de 512 filas y 448 columnas, que fueron ordenados en cada una de las fases del Orden SML, donde más del 94,8 % de vectores se ordeno en la primera fase y más del 5 % en la segunda fase, mientras que en la tercera fase ningún vector llegó a se comparado por el lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
S	95 %	94.95 %	94.87 %
M	5 %	5.05 %	5.13 %
L	0 %	0 %	0 %

Cuadro 5.2: Comparación de porcentajes de vectores para una imagen de resonancia magnética.

En el cuadro 5.3 se evidencia la poca cantidad de vectores asociados a una imagen satelital, de 601 filas y 601 columnas, que fueron ordenados por lexicográfico con menos del 0,04 %, mientras que más del 74,8 % fueron ordenados por la primera fase y más del 24,9 % en la segunda fase del Orden SML.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
S	75.04 %	74.9 %	74.81 %
M	24.94 %	25.07 %	25.16 %
L	0.02 %	0.03 %	0.03 %

Cuadro 5.3: Comparación de porcentajes de vectores para una imagen satelital.

5.4. Distorsión del Ordenamiento SML

Al no existir un orden natural para vectores, cualquier estrategia de ordenamiento que se proponga presenta un inconveniente, al cual se le ha denominado distorsión o error de ordenamiento (D), consiste, en que dos vectores que han sido ordenados cercanos por SML se van a encontrar lejos en distancia Euclídea o viceversa, dos vectores distantes al ser ordenados presentan distancia Euclídea pequeña. En el caso de imágenes a color esta distorsión causa la aparición de tonalidades corridas (colores superpuestos) en la imagen después de aplicarle los operadores morfológicos.

Se propone una forma de cuantificar esta distorsión, basándose en la distancia Manhattan entre el orden obtenido de los vectores por el método bajo análisis con respecto al orden de ellos en base a la distancia a uno de estos, el mínimo (definición 5.1).

Definición 5.1. Sea n el número de vectores presentes en una ventana de una imagen, y N el número de secciones en que se divide la imagen. Sean p_{ij} y r_{ij} las posiciones asignadas por el ordenamiento SML, y el ordenamiento de los vectores por distancia respecto al menor, en la i -ésima ventana de la j -ésima sección de la imagen, respectivamente. Entonces la distorsión viene dada por:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N} \quad (5.12)$$

con

$$d_i = \frac{\sum_{j=1}^n |p_{ij} - r_{ij}|}{(n - 1)} \quad (5.13)$$

Definición 5.2. Dadas las matrices A y B. Con $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

la mayor de las distorsión viene dada por:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{a-1} |A(i) - B(i)| + \sum_{i=a+1}^n |A(i) - B(i)|}{n-1} \quad (5.14)$$

donde $a = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $\lceil \cdot \rceil$ es la función parte entera.

Definición 5.3. El normalizador de la distorsión viene dada por:

$$\hat{D} = \frac{D}{m} \quad (5.15)$$

donde $\hat{D} \in [0, 1]$

5.4.1. Estudio Comparativo

Para caracterizar la distorsión en el Ordenamiento SML, se ha realizado un estudio comparativo usando el normalizador de la distorsión (definición 5.3), con los ordenamientos Entrelazado de Bits (E. Bits) y lexicográfico (L), dándole prioridad a los distintos canales de una imagen a color, una imagen de resonancia magnética, y una imagen satelital; se consideró el efecto en el ordenamiento de la vecindad de cada píxel. Para este estudio se utilizaron elementos estructurantes de diversos tamaños e imágenes de igual tamaño (172,032). En cada caso se consideró el efecto de asignar un orden de prioridad diferente a los canales.

Estudio comparativo de una imagen a color

En el cuadro 5.4 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen a color en el orden de canales: R-G-B. En donde, para un elemento estructurante de tamaño 3x3 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden Lexicográfico, seguido del orden SML, y por último el Orden Entrelazado de Bits. Usando un elemento estructurante de tamaño 5x5 y, 7x7 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden Lexicográfico, seguido del Orden Entrelazado de Bits, y el Orden SML.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.2003	0.2593	0.2411
E. Bits	0.2220	0.2584	0.2260
L	0.1229	0.1421	0.1259

Cuadro 5.4: Comparación de error de vectores en una imagen a color dando prioridad a los canales R-G-B (Rojo-Verde-Azul).

En el cuadro 5.5 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen a color en el orden de canales: B-R-G. En donde, para un elemento estructurante de tamaño 3x3, 5x5 y 7x7 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del orden Entrelazado de Bits, y el Orden Lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.2003	0.2593	0.2411
E. Bits	0.2318	0.2829	0.2775
L	0.2684	0.3404	0.3127

Cuadro 5.5: Comparación de error de vectores en una imagen a color dando prioridad a los canales B-R-G (Azul-Rojo-Verde).

En el cuadro 5.6 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen a color en el orden de canales: G-B-R. En donde, para cada uno de los distintos tamaños utilizados de elemento estructurante, el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del orden Entrelazado de Bits, y el Orden Lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.2003	0.2593	0.2411
E. Bits	0.2361	0.2876	0.2615
L	0.2984	0.3709	0.3379

Cuadro 5.6: Comparación de error de vectores en una imagen a color dando prioridad a los canales G-B-R (Verde-Azul-Rojo).

Para la imagen de la figura 1.3 se puede concluir, que el ordenamiento que genera poca distorsión en la prioridad original de los canales es el lexicográfico, mientras que considerando una prioridad distinta el ordenamiento que generó poca distorsión es el Orden SML.

Imagen Satelital

En el cuadro 5.7 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen a satelital en el orden de canales: uno-dos-tres. En donde, para un elemento estructurante de tamaño 3x3 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden Lexicográfico, seguido del orden SML, y el Orden Entrelazado de Bits. Usando un elemento estructurante de tamaño 5x5, el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden Lexicográfico, seguido del Orden SML, y el Orden Entrelazado de Bits. Para una ventana de tamaño 7x7 el método de ordenamiento que introdujo menos distorsión es el Orden Lexicográfico, seguido del método de ordenamiento SML.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.2100	0.2897	0.2888
E. Bits	0.2411	0.3321	0.3139
L	0.1501	0.2078	0.2056

Cuadro 5.7: Comparación de error de vectores en una imagen a satelital dando prioridades a los canales uno-dos-tres.

En el cuadro 5.8 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen satelital en el orden de canales: dos-tres-uno. En donde, para un elemento estructurante de tamaño 3x3 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden Entrelazado de Bits, seguido del orden SML, y el Orden Lexicográfico. Usando un elemento estructurante de tamaño 5x5 y 7x7 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del Orden Entrelazado de Bits, y Lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.2100	0.2897	0.2888
E. Bits	0.2048	0.2991	0.2980
L	0.2482	0.3737	0.3755

Cuadro 5.8: Comparación de error de vectores en una imagen satelital dando prioridad a los canales dos-tres-uno.

En el cuadro 5.9 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen a satelital en el orden de canales: tres-uno-dos. En donde, para cada uno de los distintos tamaños utilizados de elemento estructurante, el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del orden Entrelazado de Bits, y lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.2100	0.2897	0.2888
E. Bits	0.2658	0.3606	0.3506
L	0.2968	0.4172	0.3723

Cuadro 5.9: Comparación de error de vectores en una imagen a satelital dando prioridad a los canales tres-uno-dos.

Del estudio realizado a la imagen de la figura 1.4, se concluye que el orden que generó poca distorsión en la mayoría de los distintos tamaños de ventana que se consideraron y en las distintas prioridades de canales fue el Orden SML.

Imagen de Resonancia Magnética

En el cuadro 5.10 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen de resonancia magnética en el orden de canales: uno-dos-tres. En donde, para un elemento estructurante de tamaño 3x3, 5x5 y 7x7 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del Orden Lexicográfico y el Orden Entrelazado de Bits.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.0694	0.0876	0.0826
E. Bits	0.1037	0.1452	0.1401
L	0.0741	0.1014	0.0975

Cuadro 5.10: Comparación de error de vectores en una imagen de resonancia magnética dando prioridad a los canales uno-dos-tres.

En el cuadro 5.11 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen de resonancia magnética en el orden de canales: dos-uno-tres. En donde, para cada uno de los distintos tamaños utilizados de elemento estructurante, el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del orden Entrelazado de Bits y el Orden Lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.0694	0.0876	0.0826
E. Bits	0.0895	0.1288	0.1247
L	0.1100	0.1714	0.1744

Cuadro 5.11: Comparación de error de vectores en una imagen de resonancia magnética dando prioridad a los canales dos-uno-tres.

En el cuadro 5.12 se observa los resultados de la distorsión generada por los ordenamientos a estudio, de una imagen de resonancia magnética en el orden de canales: tres- dos-uno. En donde, para un elemento estructurante de tamaño 3x3, 5x5, y 7x7 el ordenamiento que generó poca distorsión fue el Orden SML, seguido del Orden Entrelazado de Bits y el Orden Lexicográfico.

ORDEN	3x3	5x5	7x7
SML	0.0694	0.0876	0.0826
E. Bits	0.1021	0.1478	0.1447
L	0.1229	0.1883	0.1905

Cuadro 5.12: Comparación de error de vectores en una imagen de resonancia magnética dando prioridad a los canales tres-dos-uno.

Del estudio realizado a la imagen de la figura 1.5, se concluye que el orden que generó poca distorsión en los distintos tamaños de ventana que se consideraron y en las distintas prioridades de canales fue el Orden SML.

Capítulo 6

Operadores Morfológicos en Imágenes Vectoriales

Una vez definido el esquema de ordenamiento (SML) para los vectores representativos de la imagen multicanal, es posible determinar máximos y mínimos y en consecuencia, definir los operadores morfológicos básicos para imágenes vectoriales o multicanales: erosión y dilatación.

En este Capítulo se mostrará los resultados de aplicar el ordenamiento SML en Operadores Morfológicos en Imágenes multicanales. Los algoritmos que se utilizaron para la creación de los operadores morfológicos (dilatación, erosión, apertura, cierre, y gradiente) en imágenes Vectoriales se realizaron en el lenguaje de programación MATLAB (Laboratorio de Matrices), el cual es un software matemático compuesto por un conjunto de herramientas de programación, que se utiliza para trabajar con Álgebra, Estadística, Procesamiento Digital de Imágenes, Ecuaciones Diferenciales, Modelado del Mar, etcétera, pues MATLAB no contiene las herramientas necesarias para procesar morfológicamente las mismas.

Es importante hacer notar que la imagen multicanal debe poseer un mismo tipo de información en cada uno de sus canales.

6.1. Dilatación

En la figura (6.1) se muestra la dilatación de una imagen a color donde se puede observar que los círculos de color blanco aumenta su tamaño sobre los de color azul y marrón. La razón de este resultado es que el color blanco es $p = (255, 255, 255)$, entonces $S_p = 755$, el marrón es $q = (165, 42, 0)$, entonces $S_q = 207$, y el azul es $r = (0, 0, 255)$, entonces $S_r = 255$, por lo que la intensidad del blanco es mayor que la intensidad de los otros colores, y la del azul es mayor que la del marrón, por eso los círculos de color marrón en algunas regiones aparece pegados a los círculos de color azul.

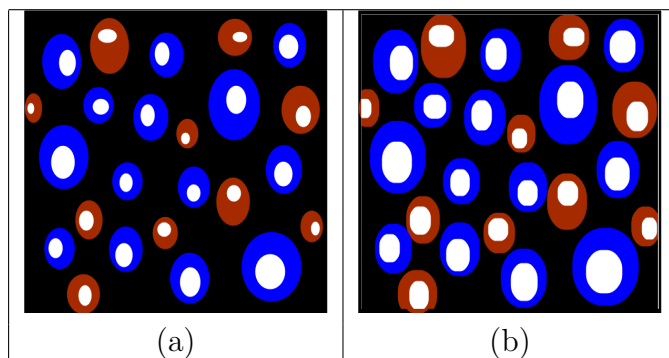


Figura 6.1: (a) Imagen original. (b) Imagen dilatada con un elemento estructurante en forma de disco de radio 7.

En la figura (6.2) se observa el resultado de aplicar la dilatación con el ordenamiento SML a una imagen en color, donde aquellas regiones que tienen tonalidades claras se resaltan más que aquellas que tienen tonalidades algo oscuras, ya que, el resultado en cada puntos de la imagen es el máximo de todos los valores presenten dentro del elemento estructurante. Se puede apreciar también que en algunas áreas de la imagen (ver figura 6.3) el color verde se superpone en el color rojo, esto se debe, a que, por ejemplo un vector $p = (195, 171, 46)$ en la área de color rojo tiene $S_p = 412$, y un vector $q = (250, 92, 68)$ en el borde verde cercano al rojo tiene $S_q = 411$, por lo que el vector p es el más idóneo para ser utilizado como máximo (razonamiento deducido por el ordenamiento SML) para aplicar la dilatación, por ende la tonalidad verde va a predominar más que la tonalidad roja.



Figura 6.2: (a) Imagen original. (b) Imagen dilatada.

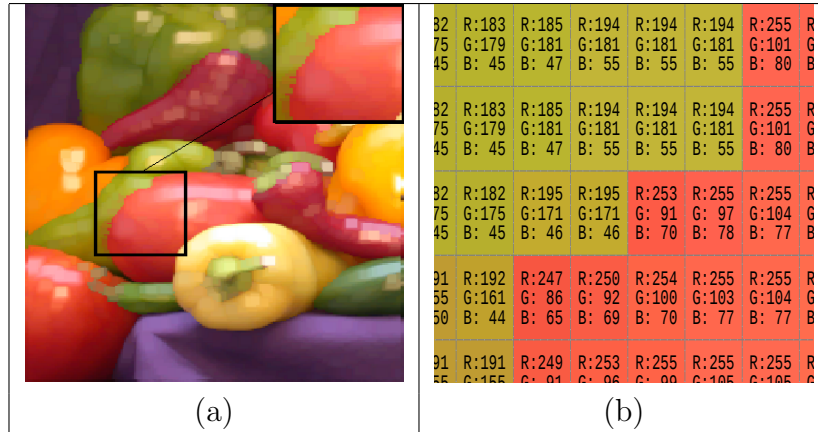


Figura 6.3: (a) Imagen dilatada. (b) Vectores asociados a los píxeles por canal de una sección de la imagen.

En la figura 6.4 se muestra una imagen satelital de tres canales de una región de cultivos de arroz. En la figura 6.5, figura 6.6, y figura 6.7 se muestra la dilatación para la imagen de la figura 6.4, realizada con un elemento estructurante cuadrado de 5x5, utilizando el ordenamiento SML.

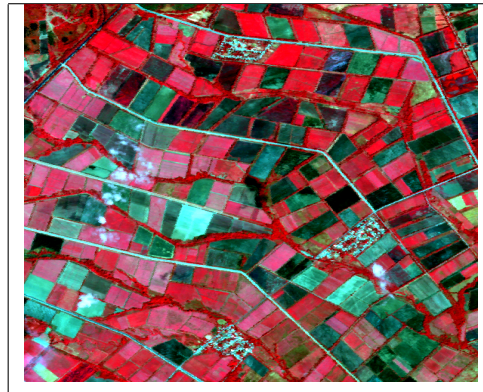


Figura 6.4: Imagen satelital.

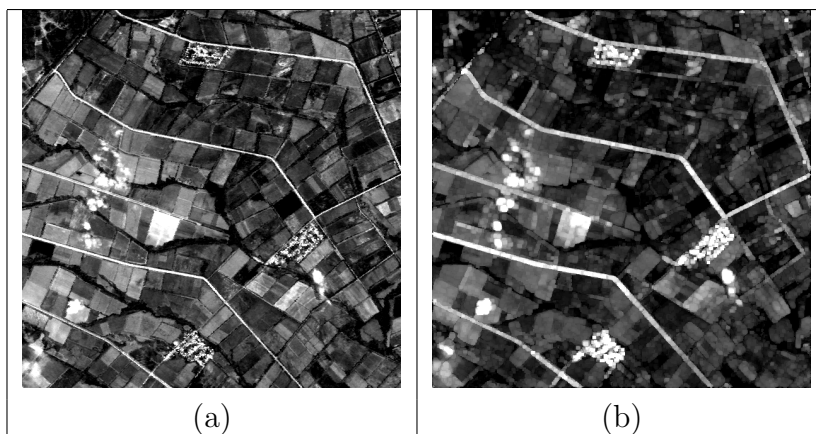


Figura 6.5: (a)Canal 1. (b) Imagen dilatada.

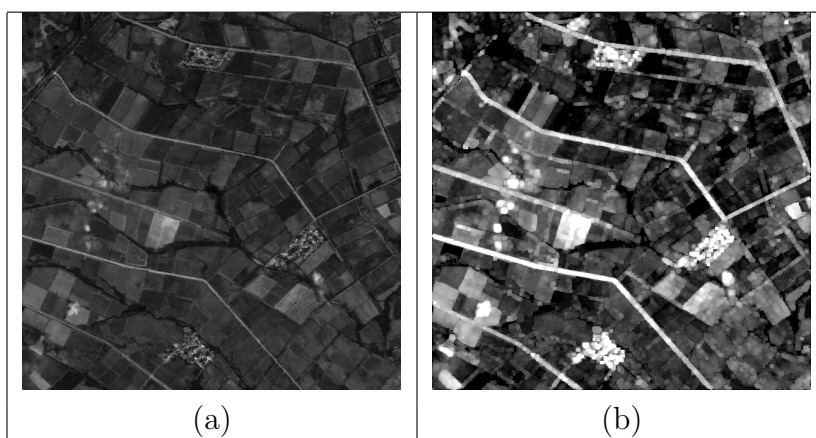


Figura 6.6: (a)Canal 2. (b) Imagen dilatada.

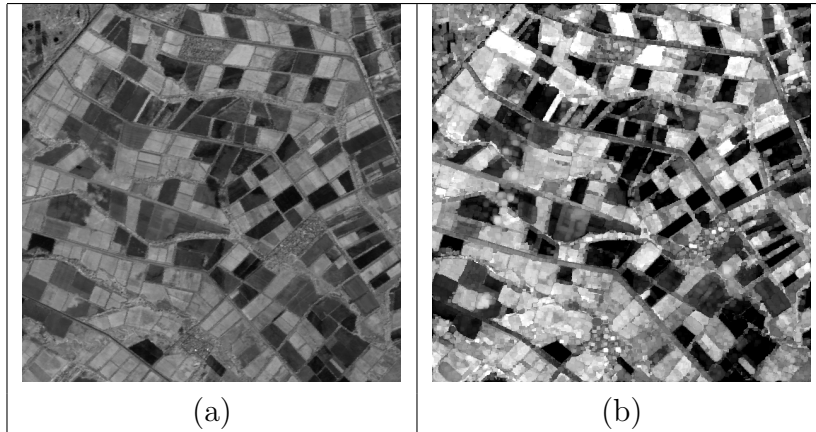


Figura 6.7: (a) Canal 3. (b) Imagen dilatada.

6.2. Erosión

En la figura (6.8) se muestra la erosión de una imagen a color con el ordenamiento SML. En este resultado se puede observar que el color negro $(0, 0, 0)$ es el mínimo de la imagen, y es por ello que actúa sobre todos los objetos presentes en la imagen a color, disminuyendo su geometría. Los círculos de color blanco disminuyen debido a que la intensidad del color blanco es $p = (255, 255, 255)$, entonces $S_p = 755$, y la del marrón es $q = (165, 42, 0)$, entonces $S_q = 207$, por lo que la intensidad del color marrón es tomada como mínimo. Por otra parte la tonalidad azul es $r = (0, 0, 255)$, entonces $S_r = 255$, por lo que en el caso de los círculos blancos con azul la tonalidad azul es tomada como mínimo.

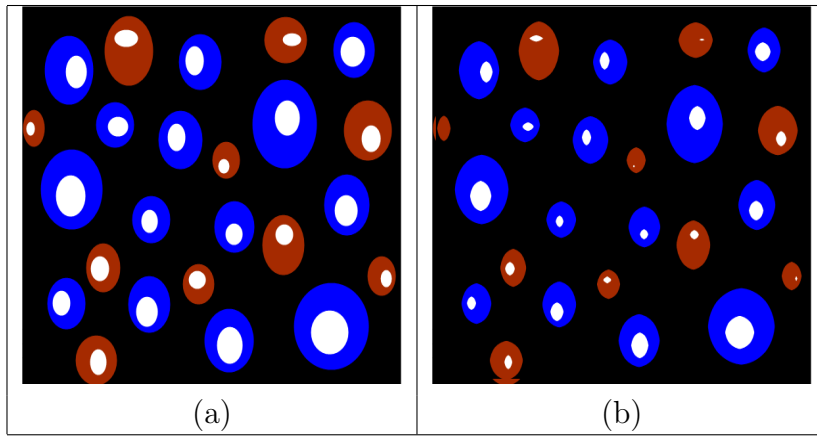


Figura 6.8: (a) Imagen original. (b) Imagen erosionada con un elemento estructurante en forma de disco de radio 7.

En la figura (6.9) se observa el resultado de aplicar la erosión con el ordenamiento SML a una imagen en color, donde aquellas regiones que tienen tonalidades algo oscuras se resaltan más que aquellas que tienen tonalidades claras. Se puede apreciar también que en algunas áreas de la imagen (ver figura 6.10) el color rojo se superpone en el verde, esto se debe, a que, por ejemplo un vector $p = (215, 97, 34)$ en la área de color rojo tiene $S_p = 346$, y un vector $q = (167, 161, 51)$ en el borde verde cercano al rojo tiene $S_q = 379$, por lo que el vector p es el más idóneo para ser utilizado como mínimo (razonamiento deducido por el ordenamiento SML) para aplicar la erosión, por ende la tonalidad roja va a predominar más que la tonalidad verde.



Figura 6.9: (a) Imagen original. (b) Imagen erosionada.

CAPÍTULO 6. OPERADORES MORFOLÓGICOS EN IMÁGENES VECTORIALES

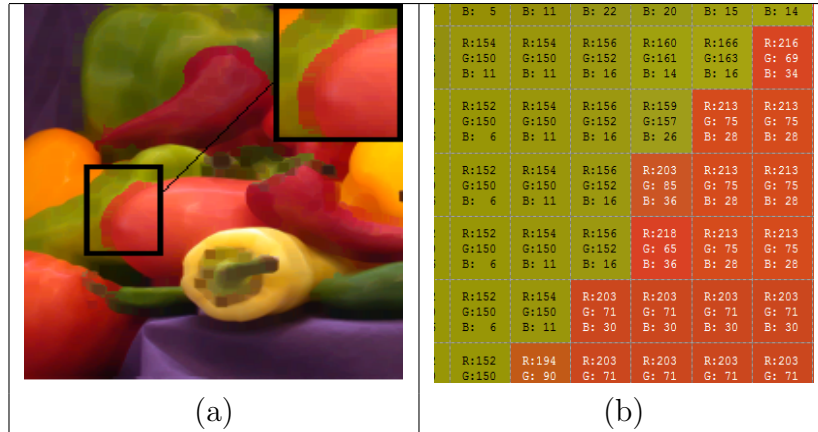


Figura 6.10: (a) Imagen erosionada. (b) Vectores asociados a los píxeles por canal de una sección de la imagen.

En la Figura (6.11), Figura (6.12), y Figura (6.13) se muestra la erosión para tres de los ocho canales de una imagen de resonancia magnética, con un elemento estructurante en forma de un disco de radio 5.

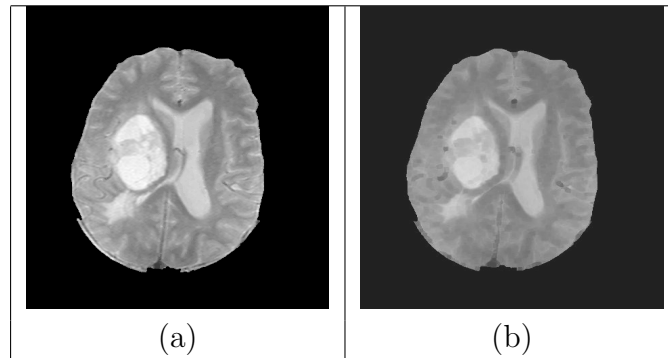


Figura 6.11: (a) Imagen original canal 1. (b) Imagen erosión canal 1.

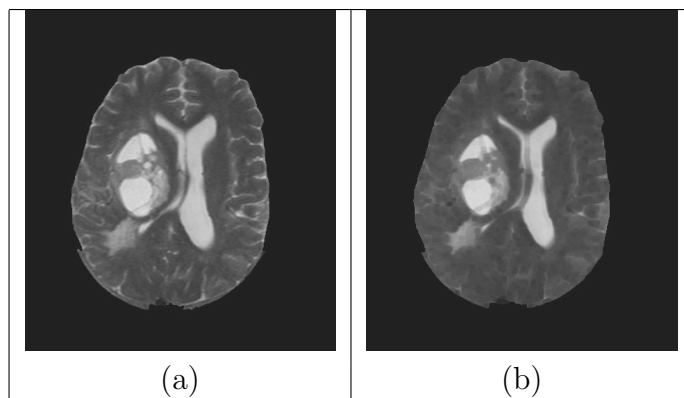


Figura 6.12: (a) Imagen original canal 2. (b) Imagen erosión canal 2.

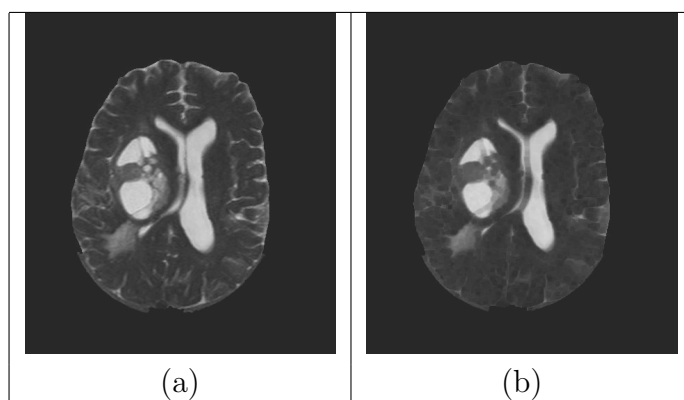


Figura 6.13: (a) Imagen original canal 3. (b) Imagen erosión canal 3.

En la figura (6.14) se puede observar la erosión aplicada a una imagen satelital (figura 6.4) en uno de sus canales, con un elemento estructurante cuadrado de 5x5.

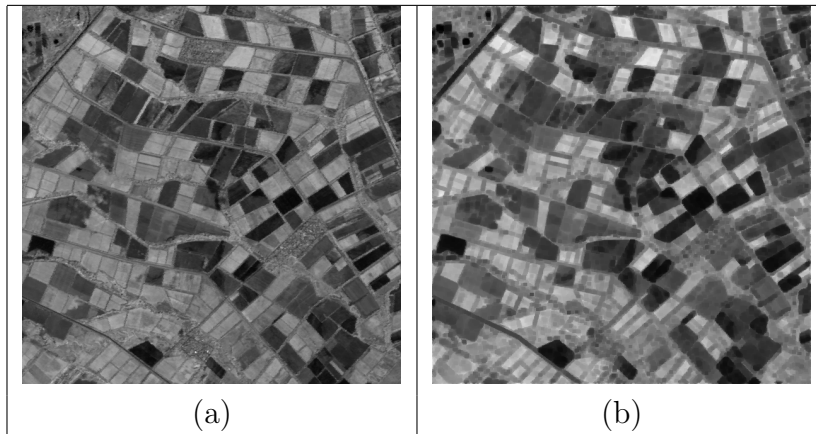


Figura 6.14: (a) Imagen original canal 3. (b) Imagen erosión canal 3.

6.3. Apertura

En la figura (6.15) se observa el resultado de aplicar la apertura con el ordenamiento SML a una imagen en color con un elemento estructurante en forma de disco de radio 15, en donde parte de los objetos presentes en la imagen fueron eliminados, ya que los mismos son casi del tamaño del elemento estructurante.

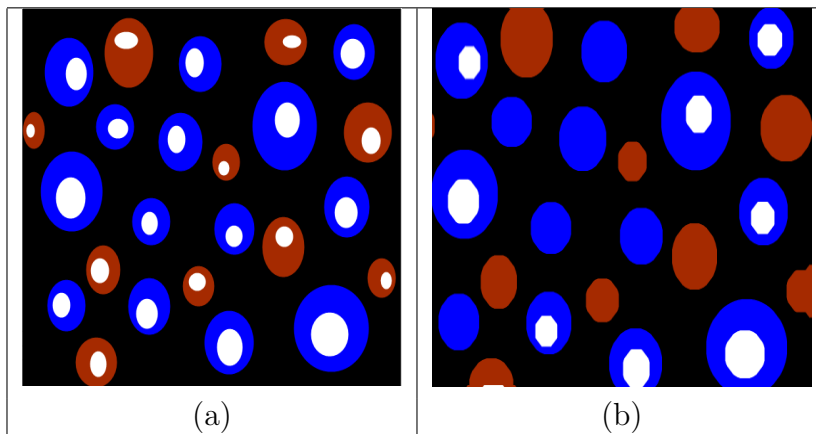


Figura 6.15: (a) Imagen original. (b) Imagen apertura.

En la figura (6.16) se muestra la apertura para uno de los canales de una imagen de resonancia magnética (a).

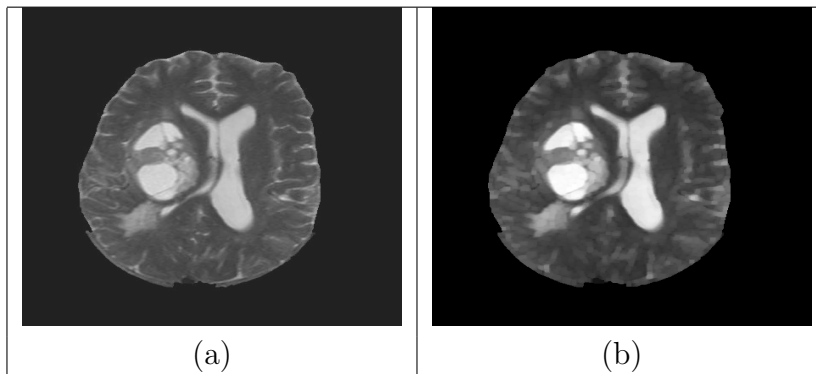


Figura 6.16: (a) Imagen original. (b) Imagen apertura.

En la figura (6.17) se muestra la apertura para uno de los canales de una imagen satelital, con un elemento estructurante cuadrado de 5x5, donde se puede observar que la región que está encerrada en el rectángulo negro (Imagen (b)) al aplicarle la apertura a la imagen original, los objetos presentes en esta área casi desaparecen.

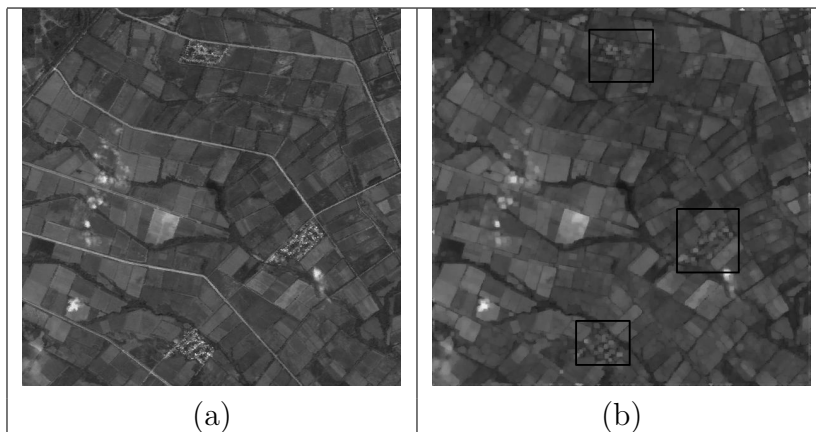


Figura 6.17: (a) Imagen original. (b) Imagen apertura.

6.4. Cierre

En la figura (6.18) se observa el resultado de aplicar el cierre con el ordenamiento SML a una imagen en color con un elemento estructurante en forma de disco de radio 5, en donde parte de los objetos presentes en la imagen tienden a unirse con los otros objetos, esto se debe, a que, el elemento estructurante es mayor que el espacio que hay de separación entre los objetos.

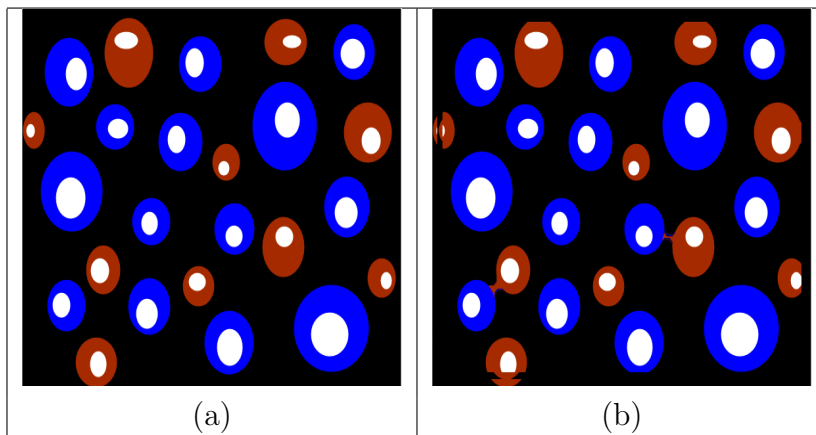


Figura 6.18: (a) Imagen original. (b) Imagen cierre.

En la figura (6.19) se muestra el cierre para uno de los canales de una imagen satelital, con un elemento estructurante cuadrado de 5x5, donde se puede observar que los objetos que se encuentran en el rectángulo se conectan entre si, mientras que en la imagen original (a) están separados.

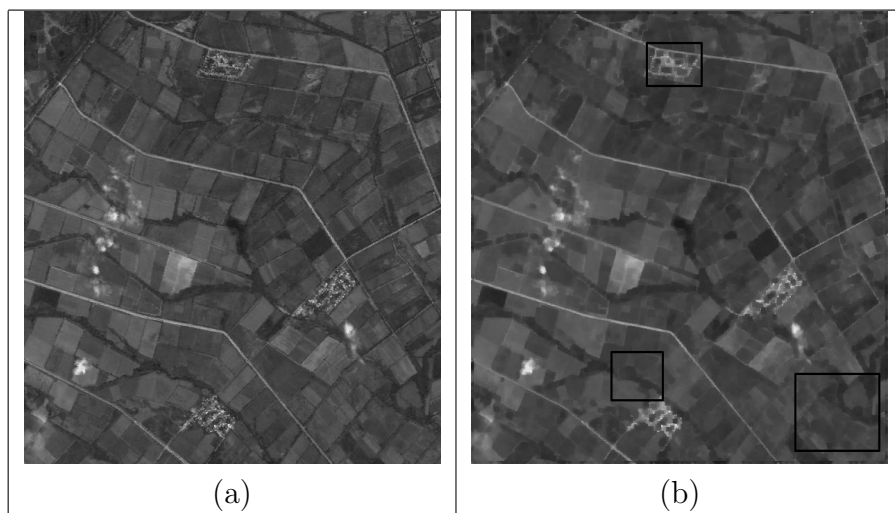


Figura 6.19: (a) Imagen original. (b) Imagen cierre.

6.5. Gradiente

En la figura (6.20), se puede observar el gradiente de una imagen a color (figura (6.18)(a)), y el gradiente de un canal de una imagen de resonancia magnética (figura (6.16)(a)).

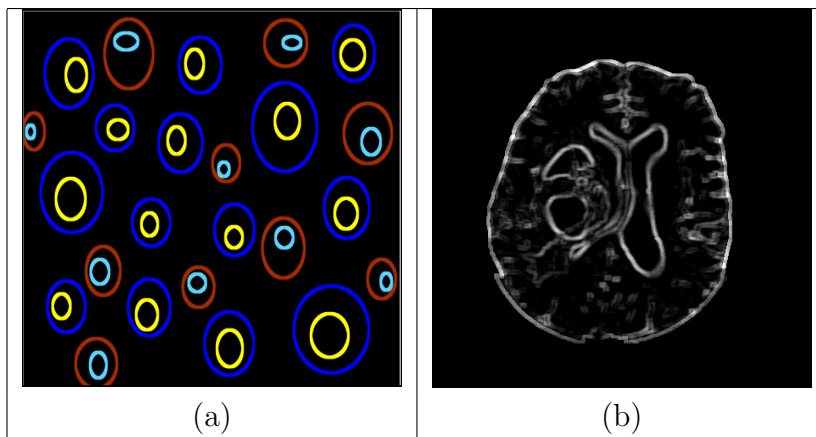


Figura 6.20: (a) Gradiente figura (6.18)(a). (b) Gradiente figura (6.16)(a).

En la figura (6.21) se puede observar el gradiente de un canal de una imagen satelital (figura (6.19)(a)), donde se refleja el borde de la imagen.

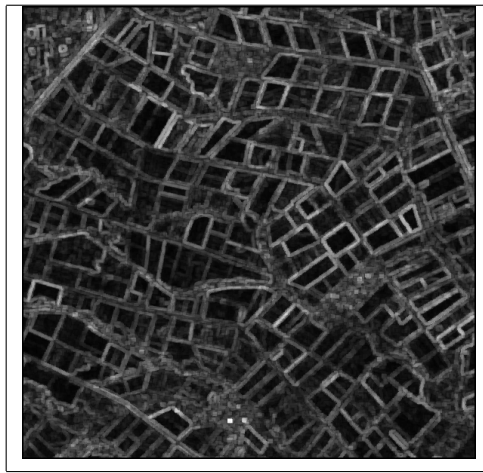


Figura 6.21: Gradiente figura (6.19)(a).

Conclusión

Una vez que se realizó una revisión de los trabajos realizados (en imágenes a color y en escala de grises) en Morfología Matemática para imágenes multicanales, se propone un nuevo ordenamiento basado en el orden lexicográfico que cumple con la definición de retículo orientado a la suma, donde los vectores asociados al los píxeles por canal son ordenados de acuerdo a la suma de los valores de sus componentes sin darle prioridad a ningunos de los canales presentes en la imagen multicanal. Solo los píxeles presentes en el vector cuya suma sea igual a la de otro vector, requieren la información de la segunda componente para ser ordenados en el espacio.

A continuación se resumen los resultados obtenidos:

- Se introdujo un nuevo sistema de clasificación (SML) de los vectores asociados a la imagen multidimensional o multicanal, el cual no depende del orden en que se tomen los canales de la misma.
- Se encontraron métodos para el procesamiento digital de imagen multidimensional, con el fin de aplicar las operaciones morfológicas básicas.
- Se presentaron algoritmos para el procesamiento digital de imagen multidimensional y la aplicación de la morfología matemáticas en estas.
- Se caracterizó el error presente en el ordenamiento SML, por medio de la comparación con otros métodos de ordenamiento expuestos en el Capítulo 4 de este Trabajo Especial de Grado (problema abierto para futuros estudios).
- El Orden SML es fácil de aplicar independientemente del número de canales de las imágenes y del número de bits con el que se representa cada píxel.

Bibliografía

- [1] BRUZUAL R., DOMÍNGUEZ M. *Espacios de Banach*. Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática, Universidad Central de Venezuela, 2003.
- [2] CHANNUSSOT J. *Approches Vectorielles ou marginales pour le traitement d'images multi-composantes*. (1998).
- [3] DUGUNDJI JAMES. *Topology*. Allyn and Bacon, INC, (1974).
- [4] GONZÁLES R., WOODS, EDDINS, S. *Digital Image Processing Using Matlab*. Prentice Hall, (2004).
- [5] AGOSTON G. *Color Theory and Its Application in Art and Design*, 19. Springer-Verlar, (1979) pp 9 y 44.
- [6] HEIJMANS HENK J.A.M. *Morphological Image Operators*. Academic Press, INC, (1994).
- [7] MATLAB. *The Language of Technical Computing*. (2001).
- [8] RENATO L. *Estructuras Ordenadas. Ordenes y Retículos*. Pontifica Universidad Católica de Chile, (1998).
- [9] SERRA J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. (1982).
- [10] ORTIZ F. *Procesamiento morfológico de imágenes en color. Aplicación a la reconstrucción geodésica. Tesis Doctoral*. Universidad de Alicante, (2002).
- [11] SOILLE P. *Morphological Image Analysis Principles and Applications*. Second Edition. Springer, (2010).