



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES UTILIZANDO MÉTODOS GEOMÉTRICOS

*Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por el
Br. Alfonso Garmendia para optar al título de
Licenciado en Matemática.*

Tutor: Dr. Mauricio Angel.

Caracas, Venezuela

Julio, 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Estudio de ecuaciones diferenciales utilizando métodos geométricos**”, presentado por el **Br. Alfonso Garmendia**, titular de la Cédula de Identidad **18.269.302**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Mauricio Angel

Tutor

Dr. Tomás Guardia

Jurado

Dr. Juan Guevara

Jurado

*A mi familia, a mis amigos
y a todo aquel que sienta curiosidad
por ésta ciencia-arte de
las matemáticas.*

Agradecimiento

Siempre me he sentido seguro, de alcanzar las exigencias que se han presentado en mi Carrera, sin embargo, la razón de este hecho ha sido el constante apoyo, de mi familia, de mis amigos y de mis profesores, por esta razón quiero dedicar y agradecer a todos ellos, que me han acompañado a lo largo del camino. A mi familia, en especial a Carmen Alicia González, mi mamá, a Gadir Garmendia, mi papá, a Nathalia, Andrea y Ariana, mis hermanas, a mis abuelos, Adela González y Euridici González y Berta Gravier y Gabriel Garmendia. A mis amigos, en especial a Sandy Velorio, a Lorenzo Castagno, a Carlos González, a Ysamar Meza, a Freysimar Solano, a Rodrigo Anzola, a Alejandro Figueroa, a Verónica Martín, a Irela Hamasaki, a Jade Nuñez, a María Bas y a Javier Machado. A mis profesores, en especial a Angel Mauricio, que siempre estuvo dispuesto a aclarar dudas, a Carolina Bessega, quien me ayudo a encontrar este tema de tesis, a Cristina Balderrama, que respondía mis dudas antes de que llegara a preguntar, a Tomás Guardia, que también estuvo muy dispuesto a ayudarme y a Juan Guevara, Angel Padilla y Jean Piero Suárez que me dieron ánimos y confianza para continuar en mi carrera.

Además quiero agradecer a lo que me ha inspirado en mi Carrera, a la Universidad Central de Venezuela que en ella vencí gran parte de mis sombras, sombras de conocimiento, sombras sociales y sombras de madurez, al pasar por sus obras siempre quedo inspirado, y me siento muy lastimado viendo que el tiempo las va desgastando. Además a los grandes músicos, como Ludwig Van Beethoven, Franz Liszt, Antonio Lauro y Alirio Díaz. A los grandes escritores como Oscar Wilde, Aquiles Nazoa y Julio Verne. Y por último a los grandes científicos, como Carl Friedrich Gauss, Jacinto Convit y Humberto Fernández Moran.

Finalmente, y no por menos importante, quiero agradecer a Dios, cuya presencia está implícita en todo lo que he escrito.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares de álgebra	3
1. Anillos y módulos	3
2. Álgebra tensorial	8
3. Álgebra exterior	11
Capítulo 2. Preliminares de geometría diferencial	14
Parte I: Variedades y campos	14
1. Conceptos básicos	14
2. Derivadas de Lie	24
Parte II: Formas diferenciales	29
3. Fibrado de formas diferenciales	29
4. Cálculo sobre formas diferenciales	32
5. Teorema de Frobenius	38
Capítulo 3. Método de simetrías de Lie	42
1. Álgebras y Grupos de Lie	42
2. Simetrías de Lie	43
3. Resolución de ecuaciones diferenciales usando simetrías de Lie	46
Capítulo 4. Método de la característica de Cartan-Monge y problema de Cauchy	53
1. Cono de Monge	53
2. Problema de Cauchy para una EDP con dos variables	58
3. Método de la característica de Cartan-Monge	61
Capítulo 5. Fibrados de jets	65
1. Introducción y definición de fibrados de jet	65
2. Formalismo de fibrados de jets para las ecuaciones diferenciales y sus soluciones	68

3. Prolongación y proyección de una ecuación diferencial	72
4. Formalismo de fibrados de jets para simetrías y características de una ecuación	77
Bibliografía	79
Índice alfabético	80

Introducción

La teoría de ecuaciones diferenciales es una de las más extensas dentro de las matemáticas. El objetivo de esta teoría siempre ha sido hallar la solución de estas ecuaciones. Para tal fin una gran variedad de métodos se han desarrollado. Sin embargo, no existe una teoría general para resolverlas. Cada método de resolución de ecuaciones tiene sus particularidades.

Uno de los métodos para buscar, si bien no necesariamente la solución general, al menos cierta clase de soluciones, y que abarca una gran cantidad de ecuaciones, es el de simetrías de Lie. Introducido por S. Lie y luego desarrollado por E. Noether y E. Cartan, estudia las ecuaciones y sus soluciones dentro del formalismo de la geometría diferencial y acciones de grupos de Lie.

Otro método para estudiar ecuaciones diferenciales, fue el desarrollado por D.L. Blackmore, N.K. Prykarpats'ka, V.H. Samolienko, E. Wachincki y M. Pytel-Kudela, que consiste en encontrar curvas características para las diversas ecuaciones diferenciales.

Y por último tenemos un método introducido por D. Spencer y desarrollado por A. Vinogradov. En este caso se usó el formalismo de fibrados de jets y álgebra homológica, a fin de hacer un estudio global de las ecuaciones.

En el presente trabajo nos proponemos a revisar estos métodos álgebra-geométricos y, sin pretender resolver todas las ecuaciones, presentar al menos un esquema común para estos métodos. Con este fin estudiaremos principalmente los fundamentos básicos de geometría diferencial y revisaremos los diferentes aspectos algebraicos tales como: grupos y álgebras de Lie. Luego veremos el método de Lie y el de Cartan-Monge, y los aplicaremos a la resolución de diversas ecuaciones diferenciales. Y por último presentaremos el formalismo de fibrados de jets y mostraremos que los procedimientos de Lie y de Monge provienen de la misma idea.

Usaremos • para marcar el fin de las definiciones y ☆ para el fin de las demostraciones y cálculos. Las referencias cruzadas, se indicaran por tres números separados por puntos. El primero

indica el número del capítulo, el segundo el número de la sección, y el tercero el número de la misma.

Usaremos los símbolos usuales de teoría de conjuntos, (unión, intersección, pertenece, etc...), además los símbolos usuales del cálculo (derivada parcial con respecto a una variable, la matriz jacobiana, etc...), los símbolos usuales de álgebra lineal (producto interno, L.I., base, $\oplus$ para suma directa, etc...), los símbolos usuales de combinatoria (S_k para el grupo de permutaciones, sg para signo, etc) y los símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, para denotar a los números enteros, reales y complejos, respectivamente.

Para los resultados que se presenten sin demostración, indicaremos la referencia donde se puede hallar la misma.

Capítulo 1

Preliminares de álgebra

En este capítulo revisaremos los conceptos básicos preliminares de álgebra, necesarios para entender la estructura algebraica de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales presentados en este trabajo.

Las referencias que seguiremos en este capítulo son [2], [5], [8], [9],[10], [12], [1].

1. Anillos y módulos

El álgebra moderna consiste en el estudio de estructuras, las cuales están compuestas por una clase de elementos y una clase de aplicaciones entre estos elementos. Empezaremos por la estructura más básica. Decimos que es básica pues sólo consta de un conjunto y una aplicación binaria.

DEFINICIÓN 1.1. Un **grupo** consta de los siguientes datos:

- (1) Un conjunto no vacío G .
- (2) Una operación binaria $*$: $G \times G \rightarrow G$ generalmente denominada multiplicación.

Los cuales deben satisfacer las siguientes propiedades:

- (1) $x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall x, y, z \in G,$.
- (2) Existe $e \in G$ tal que $e * x = x \quad \forall x \in G$.
- (3) Para cada $x \in G$ existe $x^{-1} \in G$ tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. •

OBSERVACIÓN 1.2. Se suele denotar al grupo solamente por G , sin embargo, si se quiere ser más explícito, se denotará como $(G, *)$, indicando así, no sólo el conjunto, si no también su multiplicación.

EJEMPLO 1.3.

- (1) $(\mathbb{Z}, +)$ siendo $+$ la suma usual, es un grupo.
- (2) Las matrices junto con la suma usual, es un grupo.
- (3) Las rotaciones en un plano forman un grupo.

(4) Las rotaciones en general no forman un grupo, pues no cumplen con la asociatividad.

Ahora supongamos que tenemos un grupo dado, por ejemplo $\mathbb{Z}$ junto con la operación usual $+$, este grupo, posee ciertos subconjuntos que, junto con ésta operación, siguen siendo grupos, como por ejemplo los pares. Por otro lado nuestro grupo podría estar contenido en otro grupo mas grande, por ejemplo para $\mathbb{Z}$ tenemos a $\mathfrak{A}$, por lo tanto, para poseer un marco de definiciones completo, necesitamos la siguiente.

DEFINICIÓN 1.4. Dado un grupo $(G, *)$, un **subgrupo** S es un subconjunto de G , tal que $(S, *)$ es un grupo.

Nota: De ser S un subgrupo de G , lo denotaremos por $S \triangleleft G$. •

OBSERVACIÓN 1.5. Para que un subconjunto de un grupo, sea un subgrupo, no hace falta ver si la operación cumple la asociatividad, dado que, siendo la misma aplicación de G , esta propiedad es heredada, por lo tanto, un subgrupo de un grupo dado $(G, *)$, es un subconjunto $S \subseteq G$, que junto con la operación $*$, cumple las siguientes propiedades:

- Para cada $x \in S$ existe $x^{-1} \in S$ tal que $x * x^{-1} = e$.
- Para todo $x, y \in S$ tenemos que $x * y \in S$.

DEFINICIÓN 1.6. Un **grupo abeliano** es un grupo $(G, *)$, que para todo $x, y \in G$, se tiene:

$$x * y = y * x.$$

Nota: Cuando un grupo es abeliano, su operación binaria se llama **suma**, se denota por el símbolo $+$ en vez del $*$ acostumbrado y el símbolo 0 indica el elemento neutro. •

A pesar de las muchas propiedades que puede cumplir un grupo, y lo interesante de su estructura, siempre hemos visto dos operaciones, la suma y la multiplicación usual, así introducimos una nueva estructura, con dos operaciones, sobre un conjunto.

DEFINICIÓN 1.7. Un **anillo** consta de 3 datos:

- Un conjunto R .
- Una aplicación binaria $+: R \times R \rightarrow R$.
- Una aplicación binaria $*: R \times R \rightarrow R$.

Que cumplen, para todo $x, y, z \in R$, las siguientes condiciones:

- $(R, +)$ es un grupo abeliano.
- $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ y $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$.

Nota: Al igual que con los grupos, se suele denotar al anillo simplemente por el símbolo R de su conjunto, pero si se quiere ser explícito, se puede denotar por $(R, +, *)$, para dar referencia de sus operaciones. •

DEFINICIÓN 1.8. Un **subanillo** de un anillo R , es un subconjunto $S \subseteq R$, tal que junto con las mismas aplicaciones binarias heredadas de R , es un anillo.

Nota: De ser S un subanillo de R , lo denotaremos por $S \prec R$. •

OBSERVACIÓN 1.9. De manera análoga a los grupos, para que un subconjunto de un anillo sea un subanillo, no hace falta ver si la operación cumple todas las propiedades, dado que siendo la misma aplicación de R , estas propiedades son heredadas, por lo tanto un subanillo de un anillo dado $(R, +, *)$, es un subconjunto $S \subseteq R$, que junto con la operación $*$, cumple las siguientes propiedades:

- $(S, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$.
- Para todo $x, y \in S$ tenemos que $x * y \in S$.

Y consecuentemente tenemos la definición explícita de agregar la propiedad “abeliana” a los anillos.

DEFINICIÓN 1.10. Un **anillo conmutativo** es un anillo, que para todo $x, y \in R$, se tiene:

$$x * y = y * x.$$

•

Aún nos falta un elemento muy importante, que no aparece reflejado en la definición de anillo, el elemento neutro para la operación $*$, agregaremos la siguiente definición, para los anillos como $\mathbb{Z}$, que posean este elemento neutro.

DEFINICIÓN 1.11. Sea R un anillo, diremos que R es un **anillo con unidad**, si existe un elemento $1 \in R$ (que para simplificar denotaremos siempre como 1), tal que, para todo $a \in R$, tenemos que $a * 1 = 1 * a = a$. •

En este momento, hemos llegado a una estructura que cumple con las expectativas de $\mathbb{Z}$, es decir, las operaciones de los anillos abelianos con unidad, cumplen con las características algebraicas de $\mathbb{Z}$. Hay que aclarar, no estamos diciendo que un anillo abeliano posea todas las propiedades de $\mathbb{Z}$, solamente que las propiedades que cumple la suma y el producto usual para cualquier par de elementos, son las mismas que cumple las operaciones de algún anillo abeliano, para todo par de sus elementos. Sin embargo, no hemos llegado al punto de completar las propiedades de $\mathfrak{A}$, así continuemos presentando ciertas definiciones, de propiedades para las operaciones, que cumpla $\mathfrak{A}$ y no $\mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 1.12. Sea R un anillo con unidad, diremos que $a \in R$ es **invertible** a izquierda (a derecha) si existe $b \in R$, tal que $a * b = 1$ ($b * a = 1$). •

DEFINICIÓN 1.13. Sea R un anillo, decimos que un elemento no nulo $a \in R$ es un **divisor de cero** a izquierda (a derecha), si existe un elemento no nulo $b \in R$, tal que, $a * b = 0$ ($b * a = 0$). •

DEFINICIÓN 1.14. Sea R un anillo, diremos que R es **de característica** $p > 0$ si existe $a \in R$ tal que $\sum_{n=0}^p a = 0$. •

DEFINICIÓN 1.15. Sea R un anillo con unidad diremos que:

- R es un **dominio de integridad**, si no tiene divisores de cero.
- R es de **dominio de división** si tiene unidad y todo elemento es invertible.
- R es un **cuerpo** si es dominio de división y abeliano. •

EJEMPLO 1.16.

- (1) $\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad y no de división.
- (2) Las matrices $n \times n$, en $\mathfrak{A}$, invertibles, con la multiplicación usual, son un dominio de división y no un cuerpo.
- (3) $\mathfrak{A}$ es un ejemplo de cuerpo.

A continuación, presentaremos otras propiedades de importancia algebraica, que puede cumplir algún subanillo de un anillo mayor, con respecto a los elementos del anillo mayor.

DEFINICIÓN 1.17. Sea R un anillo e $I \prec R$, diremos que I es un **ideal** a izquierda (a derecha) de R , si para todo $a \in R$ y $i \in I$, tenemos que, $a * i \in I$ ($i * a \in R$).

Nota: De no especificar si un ideal es a izquierda o a derecha se tomara como si fuese a ambos lados. •

DEFINICIÓN 1.18. Sea R un anillo e I un ideal de R , diremos que I es un **ideal maximal**, si para cualquier otro ideal J , tal que $I \subseteq J$, tenemos que $I = J$ ó $J = R$. •

EJEMPLO 1.19.

- (1) Los múltiplos de cualquier número $z \in \mathbb{Z}$ en los enteros es un ejemplo de ideal. Si z no es primo, es fácil notar que estará contenido en los múltiplos de su descomposición prima.
- (2) Los múltiplos de algun primo $p \in \mathbb{Z}$ en los enteros, es un ejemplo de ideal maximal.

Para finalizar la revisión de las estructuras algebraicas, presentamos la noción de acción sobre un conjunto.

DEFINICIÓN 1.20. Sea G un grupo y X un conjunto, una **acción a izquierda** (a derecha) de G sobre X es una función $\theta : G \times X \rightarrow X$ ($\theta : X \times G \rightarrow X$) tal que:

- (1) $\theta(e, x) = x$ $(\theta(x, e) = x)$.
- (2) $\theta(g_1 * g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x))$ $(\theta(x, g_1 * g_2) = \theta(\theta(x, g_1), g_2))$. •

EJEMPLO 1.21. Las rotaciones de un objeto en un plano, es una acción del grupo de rotaciones sobre el objeto como conjunto.

DEFINICIÓN 1.22. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X , para cada $x \in X$ definimos la **órbita de x** como:

$$O(x) = \{\theta(g, x) / g \in G\}.$$

Y el **estabilizador de x** como:

$$G(x) = \{g \in G / \theta(g, x) = x\}.$$

•

Ahora volviendo con la idea de generalizar las estructuras conocidas, definimos una, que depende de otra, esta es equivalente a la que posee $\mathfrak{N}^n$, con respecto a $\mathfrak{N}$.

DEFINICIÓN 1.23. ¹ Sea R un anillo, un R -**módulo** a izquierda (a derecha) es un grupo abeliano M , junto con una acción a izquierda $\circ : R \times M \rightarrow M$ ($\circ : M \times R \rightarrow M$), tal que para todo $a, b \in M$ y $r, s \in R$, tenemos que:

- $r \circ (a + b) = r \circ a + r \circ b$ $((a + b) \circ r = a \circ r + b \circ r),$
- $(r + s) \circ a = r \circ a + s \circ a$ $(a \circ (r + s) = a \circ r + a \circ s),$
- $(r * s) \circ a = r \circ (s \circ a)$ $(a \circ (r * s) = (a \circ r) \circ s),$
- si R tiene unidad 1 $1 \circ a = a$ $(a \circ 1 = a).$ •

DEFINICIÓN 1.24. Sea F un cuerpo, una F -**álgebra** es un espacio vectorial A sobre F , que junto con una operación bilineal $\cdot : A \times A \rightarrow A$, es un anillo. •

EJEMPLO 1.25. Sea F un cuerpo, y M un conjunto no vacío, la colección de todas las funciones de M a F es una F -álgebra con las operaciones canónicas heredadas de F .

2. Álgebra tensorial

Sean R un cuerpo, V y W dos R -espacios vectoriales, dado el siguiente subgrupo, $G \prec V \times W$, generado por todos los elementos de la forma:

$$(v_1, w_1 + w_2) - (v_1, w_1) - (v_1, w_2),$$

$$(v_1 + v_2, w_1) - (v_1, w_1) - (v_2, w_1),$$

$$(v_1, \alpha w_1) - \alpha(v_1, w_1),$$

$$(\alpha v_1, w_1) - \alpha(v_1, w_1),$$

para todo $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ y $\alpha \in R$.

El producto tensorial de V con W , está el dado por el siguiente cociente:

$$V \otimes W := \frac{V \times W}{G}$$

LEMA 1.26. Sea R un cuerpo, para todo U, V y W tres R -espacios vectoriales, se tiene que:

$$U \otimes (V \otimes W) \simeq (U \otimes V) \otimes W$$

Demostración:

La demostración se puede encontrar en el capítulo VI sección siete del libro [1]. ☆

¹Cuando R es un cuerpo cualquier R -módulo es lo que conocemos como R espacio vectorial

DEFINICIÓN 1.27. Sea R un cuerpo y V un R -espacio vectorial de dimensión n , el espacio tensorial de orden k en V se denota por $V^{\otimes k}$ ó $\otimes^k V$, y se define como el producto tensorial consigo mismo k veces:

$$V^{\otimes k} := V \otimes (\dots (V \otimes V) \dots).$$

•

TEOREMA 1.28. Sea V un R -espacio vectorial de dimensión n con un producto interno, entonces $\dim(V^{\otimes k}) = n^k$.

Demostración:

Consideremos una base ortonormal de V , $\{e_1, \dots, e_n\}$. Denotando a $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ como la clase de $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ para $1 \leq i_j \leq n$. Dado $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$ que representa la clase de $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ podemos notar que

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k = \sum_i \left(\prod_{j=1}^k \langle v_j, e_{i_j} \rangle \right) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}.$$

Y por otro lado, dado que los e_{i_j} son todos ortonormales, tomando un elemento $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, resulta imposible escribirlo como combinación de los otros, así el conjunto:

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$$

es una base, que esta constituida por la combinación de los n elementos de la base de V en k casillas disponibles. ☆

OBSERVACIÓN 1.29. Denotaremos la base de $V^{\otimes k}$ como $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}_{i \leq n^k}$.

TEOREMA 1.30. Sea V un R -espacio vectorial de dimensión n con un producto interno, entonces $(V^{\otimes k})^* \simeq (V^*)^{\otimes k}$

Demostración:

Consideremos una base ortonormal de V , $\{e_1, \dots, e_n\}$ y la base dual $\{T_1, \dots, T_n\}$. Se puede notar que la siguiente función $L: (V^*)^{\otimes k} \rightarrow (V^{\otimes k})^*$ definida por:

$$L(T_{i_1} \otimes \dots \otimes T_{i_k}) = F_{i_1, \dots, i_k}$$

siendo $F_{i_1, \dots, i_k}(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}) = \delta_{ij}$. Es un isomorfismo entre espacios vectoriales. ☆

Una función k -lineal dada $\omega : V^k \rightarrow R$, no necesariamente es un elemento de $(V^k)^*$, de hecho, tomando la base canónica de V^k , $\{(e_1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, e_n)\}$, se puede ver que para todo elemento de la base, $(0, \dots, 0, e_i, 0, \dots, 0)$, se tiene:

$$\omega(0, \dots, 0, e_i, 0, \dots, 0) = 0,$$

Lo que implica, que de ser lineal, ω es cero. Así tenemos el siguiente:

TEOREMA 1.31. *Sea V un R -espacio vectorial de dimensión n con un producto interno, entonces el espacio de todas las funciones k -lineales de V , V^{kl*} , es isomorfo al espacio tensorial de orden k de V^* .*

Demostración:

Se puede notar que la siguiente función $L : (V^*)^{\otimes k} \rightarrow V^{kl*}$ definida por:

$$L(T_{i_1} \otimes \dots \otimes T_{i_k}) = F_{i_1, \dots, i_k}$$

siendo $F_{i_1, \dots, i_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \delta_{ij}$. Es un isomorfismo entre espacios vectoriales. ☆

De la misma manera, que el producto cartesiano, tenemos

DEFINICIÓN 1.32. Sea R un cuerpo y V un R -espacio vectorial, $x \in \otimes^k V$ y $y \in \otimes^l V$ tal que:

$$x := \sum x_j e_{1j} \otimes \dots \otimes e_{kj}$$

$$y := \sum y_i e_{1i} \otimes \dots \otimes e_{li}$$

se define el producto tensorial de x con y como:

$$x \otimes y := \sum \sum x_j y_i e_{1j} \otimes \dots \otimes e_{kj} \otimes e_{1i} \otimes \dots \otimes e_{li}$$

con lo que $x \otimes y \in \otimes^{k+l} V$ •

OBSERVACIÓN 1.33. Dado que $\otimes^1 V = V$, es análogo construir los k espacios tensoriales, utilizando el producto tensorial, como:

$$\otimes^2 V = V \otimes V$$

$$\otimes^3 V = \otimes^2 V \otimes V$$

$$\vdots$$

$$\otimes^k V = \otimes^{k-1} V \otimes V$$

DEFINICIÓN 1.34. Sea R un cuerpo y V un R -espacio vectorial, definimos el algebra tensorial de V como:

$$\otimes^* V := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (\otimes^k V)$$

Donde el producto es el producto tensorial. •

3. Álgebra exterior

Análogo al espacio tensorial, dado un espacio vectorial V , tomaremos ahora el subgrupo antisimétrico de orden k , $G_k \prec V^{\otimes k}$, generado por todos los elementos de la forma:

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k + \text{sig}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

para $v_1, \dots, v_k \in V$ y $\sigma \in S_k$. Siendo S_k el grupo de todas las permutaciones en k elementos y $\text{sig}(\sigma)$ el signo de la permutación σ .

DEFINICIÓN 1.35. Sea R un cuerpo y V un R -espacio vectorial, el **espacio exterior de orden k** en V se denota por $V^{\wedge k}$ ó $\wedge^k V$, y se define como:

$$V^{\wedge k} := V^{\otimes k} / G_k.$$

donde G_k es el subgrupo antisimétrico de orden k . •

TEOREMA 1.36. Sea V un R -espacio vectorial de dimensión n con un producto interno, entonces $\dim(V^{\wedge k}) = \binom{n}{k}$

Demostración:

Consideremos una base ortonormal de V , $\{e_1, \dots, e_n\}$. Haciendo el procedimiento análogo a la demostración del teorema 1.28, tenemos que los elementos $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}$, que representan a la clase de equivalencia de la base $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$, generan al espacio exterior. Sin embargo, la condición de antisimetría, hace a las permutaciones y repeticiones linealmente dependientes. De esta manera, tenemos que el número de elementos de la base corresponde a la combinación de las n bases de V , en k espacios, sin repeticiones ni permutaciones. ☆

OBSERVACIÓN 1.37. Denotaremos la base de $V^{\otimes k}$ como $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{i \leq \binom{n}{k}}$

TEOREMA 1.38. Sea V un R -espacio vectorial de dimensión n con un producto interno, entonces $(V^{\wedge k})^* \simeq (V^*)^{\wedge k}$

Demostración:

Consideremos una base ortonormal de V , $\{e_1, \dots, e_n\}$ y la base dual $\{T_1, \dots, T_n\}$. Se puede notar que la siguiente función $L : (V^*)^{\wedge k} \rightarrow (V^{\wedge k})^*$ definida por:

$$L(T_{i_1} \wedge \dots \wedge T_{i_k}) = F_{i_1, \dots, i_k}$$

siendo $F_{i_1, \dots, i_k}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \delta_{ij}$. Es un isomorfismo entre espacios vectoriales. ☆

Análogo al caso del álgebra tensorial tenemos el siguiente:

TEOREMA 1.39. *Sea V un R -espacio vectorial de dimensión n con un producto interno, entonces el espacio de todas las funciones k -lineales y antisimétricas de V , V^{kas*} , es isomorfo al espacio exterior de orden k de V^* .*

Demostración:

Se puede notar que la siguiente función $L : (V^*)^{\wedge k} \rightarrow V^{kas*}$ definida por:

$$L(T_{i_1} \wedge \dots \wedge T_{i_k}) = F_{i_1, \dots, i_k}$$

siendo:

$$F_{i_1, \dots, i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} \text{sig}(\sigma) & \text{si } \exists \sigma \in S^k : (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = (e_{\sigma(j_1)}, \dots, e_{\sigma(j_k)}), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es un isomorfismo entre espacios vectoriales. ☆

De la misma manera que el producto tensorial tenemos

DEFINICIÓN 1.40. Sea R un cuerpo y V un R -espacio vectorial, $x \in \wedge^k V$ y $y \in \wedge^l V$ se define el producto exterior de x con y como:

$$x \wedge y := x \otimes y - y \otimes x$$

con lo que $x \otimes y \in \otimes^{k+l} V$ •

OBSERVACIÓN 1.41.

- (1) Dado un espacio vectorial V de dimensión n , tenemos que $V^{\otimes k} = 0$ para todo $k > n$, pues su dimensión es cero y por que no hay forma de no repetir elementos linealmente dependientes.

- (2) Dado que $\wedge^1 V = V$, tambien se pueden construir los k espacios exteriores, usando el producto exterior, como:

$$\begin{aligned}
 \wedge^2 V &= V \wedge V \\
 \wedge^3 V &= \wedge^2 V \wedge V \\
 &\vdots \\
 \wedge^n V &= \wedge^{n-1} V \wedge V \\
 \wedge^{n+1} V &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

- (3) Si realizamos inducción, el producto exterior en términos de la base, se puede ver para

$$\begin{aligned}
 x &:= \sum x_j e_{1j} \wedge \dots \wedge e_{kj}, \\
 y &:= \sum y_i e_{1i} \wedge \dots \wedge e_{ki},
 \end{aligned}$$

como:

$$x \wedge y := \sum \sum x_j y_i e_{1j} \wedge \dots \wedge e_{kj} \wedge e_{1i} \wedge \dots \wedge e_{ki}.$$

DEFINICIÓN 1.42. Sea R un cuerpo y V un R -espacio vectorial, definimos el algebra exterior de V como:

$$\wedge^* V := \bigoplus_{k=1}^n (\wedge^k V)$$

Donde el producto es el producto exterior. •

Capítulo 2

Preliminares de geometría diferencial

En este capítulo revisaremos los conceptos básicos preliminares de geometría diferencial necesarios para entender la estructura geométrica en los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales presentados en este trabajo.

Éste capítulo está dividido en dos partes. La primera parte se introducirán definiciones como n -variedad, fibrados, campos vectoriales, una forma y tensores, enfocándonos principalmente en los campos y sus operaciones. Se introducirá la definición de derivada de Lie y su aplicación inmediata a ecuaciones diferenciales. En la segunda parte, se repasarán los conceptos de una-forma, se introducirá el concepto de formas diferenciales y el teorema de Frobenius. Las referencias que seguiremos en este capítulo son [2], [8], [9],[10], [12], [5], [13] y [15].

Parte I: Variedades y campos

Dada una superficie cualquiera, por ejemplo una lámina de hierro, y alguna función de ésta a $\mathfrak{R}$, como la que indica la carga eléctrica de cada punto sobre la lámina. Si se desea estudiar el comportamiento de esta función, es decir: ¿cuáles son sus puntos críticos?, ¿cómo varía con respecto al tiempo?, entre otras cosas, necesitaríamos un concepto de derivada sobre la superficie. En esta primera parte del capítulo que se presentan los conceptos que dotan a un espacio topológico de una noción de derivada.

1. Conceptos básicos

Siguiendo la idea anterior, para dotar a una superficie de un concepto de diferenciabilidad necesitamos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.1. Sea M un espacio topológico y $p \in M$. Una **carta local** de p es un homeomorfismo φ de un entorno de $p \in U \subseteq M$ a un subconjunto abierto de un espacio euclídeo. Se denotará a φ como un par (U, φ) , para indicar su dominio. •

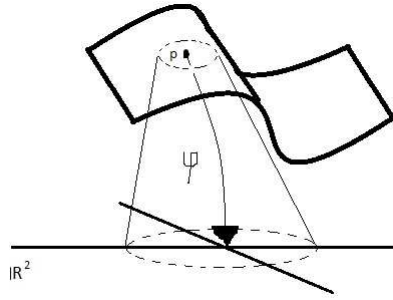


FIGURA 2.1. Carta local

OBSERVACIÓN 2.2. En la definición anterior si el espacio euclídeo es de dimensión n diremos que p es de dimensión n . En la figura 2.1, se muestra una carta local para el punto p , de dimensión dos, de una lámina.

DEFINICIÓN 2.3. Sea M un espacio topológico, diremos que M es **localmente euclídeo** si para todo punto en M existe una carta local. •

DEFINICIÓN 2.4. Un atlas C^k en un espacio topológico M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) / i \in I\}$ tal que:

- (1) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
- (2) Para todo par de cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ se tiene que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un difeomorfismo de grado k .

DEFINICIÓN 2.5. Sea M un espacio topológico, se dice que **un atlas sobre M es maximal** si es el único atlas sobre la variedad que contenga todas sus cartas, es decir, cada carta de M que satisfaga la condición 2 de la definición 2.4 pertenece al atlas. •

DEFINICIÓN 2.6. Sea M espacio topológico de Hausdorff segundo numerable y localmente euclídeo, diremos que M junto con un atlas C^∞ maximal sobre M es una **n -variedad diferenciable** si todo punto de M es de dimensión n •

TEOREMA 2.7. *Sea M espacio topológico de Hausdorff segundo numerable y localmente euclídeo si existe un atlas C^∞ sobre M entonces existe un atlas C^∞ sobre M maximal.*

Demostración:

La demostración de este teorema se puede encontrar en el primer capítulo de [15]



EJEMPLO 2.8.

- (1) Sobre las matrices $n \times m$, la función biyectiva canónica a $\mathfrak{R}^{n \times m}$, dota a las matrices con una topología y a su vez es un atlas diferenciable, que define un atlas maximal, las matrices junto con este atlas es una $n \times m$ -variedad.

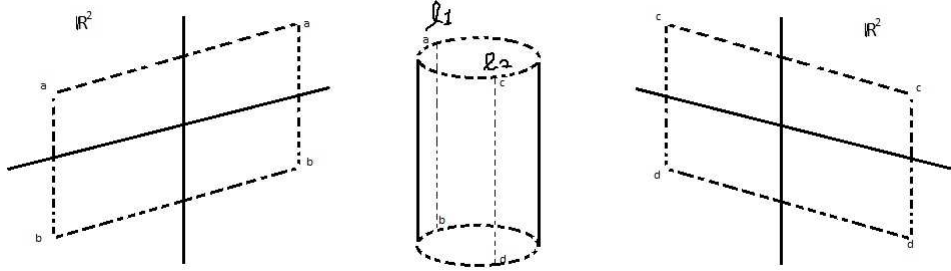


FIGURA 2.2. Variedad

- (2) Sea C el cilindro $S_1 \times (0, l)$, siendo S_1 la circunferencia de radio 1, se definen las cartas: $\varphi_1 : C - l_1 \rightarrow (0, l) \times (0, 2\pi)$ y $\varphi_2 : C - l_2 \rightarrow (0, l) \times (0, 2\pi)$ siendo l_1 y l_2 dos rectas del cilindro dadas por $l_j = \text{theta}_j \times (0, l)$ para $j \in \{1, 2\}$, tal como se muestra en la figura 2.2, tal que para $p \in C$, tenemos que $\varphi_1(p) = (l_p, \theta_{1p})$ siendo l_p la distancia desde el fondo del cilindro hasta el punto p y $\theta_{1p} = d(l_1, p)$ ó la mínima distancia de p a l_1 y $\varphi_2(p) = (l_p, \theta_{2p})$ donde θ_{2p} es lo análogo con respecto a θ_{1p} , el cilindro con la topología usual y estas dos cartas, es una 2-variedad.

Recordando el problema planteado, para derivar en cierto espacio topológico que cumpla con las condiciones de variedad, debemos dotar a éste, de un atlas C^∞ maximal.

DEFINICIÓN 2.9. Sean M y N una m -variedad y una n -variedad respectivamente, y $f : M \rightarrow N$ una función entre variedades, diremos que f es diferenciable en un punto $p \in M$ si para todo par de cartas, (U_i, φ_i) en M y (O_j, μ_j) en N , la función $\mu_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es diferenciable. •

Sin embargo, a pesar de la definición anterior, al igual que en $\mathfrak{R}^n$, se quiere una noción aún más precisa de derivada, es decir cómo varía la función en alguna dirección. Siendo así se define:

DEFINICIÓN 2.10. Una **curva diferenciable** sobre una n -variedad M es una función continua y diferenciable cuyo dominio es un subconjunto de $\mathfrak{R}$ e imagen en un subconjunto de M . •

De esta forma, se puede componer curva con función, tal como se ilustra en la figura 2.3, obteniendo otra función de $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{N}$, derivable en el sentido usual. Es decir, si $g : \mathfrak{N} \rightarrow M$ una curva, $f : M \rightarrow \mathfrak{N}$ una función y (U, φ) una carta en $g(t)$, se tiene que

$$\frac{d(f(g(t)))}{dt} = \frac{d(f(\varphi^{-1}(\varphi(g(t))))}{dt} = \left\langle \left(\frac{\partial(f(\varphi^{-1}))}{\partial x_i}(g(t)) \right)_{i \leq n}, \frac{d\varphi(g(t))}{dt} \right\rangle,$$

donde $\langle, \rangle$ representa el producto interno usual en $\mathfrak{N}^n$.

Tomando una función en general, se evidencia que el operador derivada a través de la curva g es:

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i \leq n}, \frac{d\varphi(g(t))}{dt} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(g(t))_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Como $\frac{\varphi(g(t))_i}{dt}$, puede tomar cualquier valor en $\mathfrak{N}$, se puede ver a esta derivada como un vector del espacio vectorial en $\mathfrak{N}$ libremente generado por la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i \leq n}$.

Así, ya teniendo la curva, definimos la “dirección de la curva” como un vector.

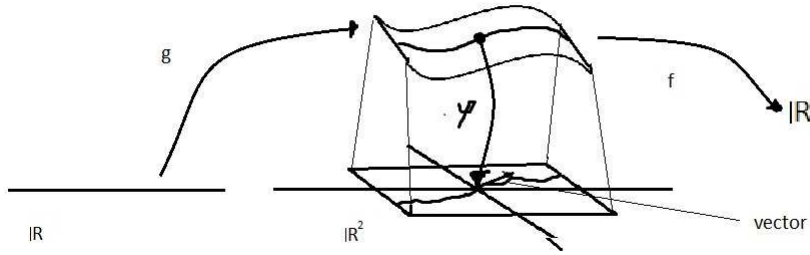


FIGURA 2.3. Vector

DEFINICIÓN 2.11. Sea M una n -variedad, $p \in M$, y (U_i, φ_i) una carta de p . Si se consideran todas las curvas que pasan por p y coinciden en U_i , un **vector tangente** en p es el vector tangente a éstas curvas en $\mathfrak{N}^n$ imagen por φ_i . •

DEFINICIÓN 2.12. Sea M una n -variedad y $p \in U_i$. El **espacio tangente** al punto p se define como el conjunto de todos los vectores tangentes a p y se designa como T_p . •

TEOREMA 2.13. Dada una n -variedad M , para cualquier punto $p \in M$, tenemos que su espacio tangente es isomorfo a $\mathfrak{N}^n$, $T_p \simeq \mathfrak{N}^n$.

Demostración:

Por el Teorema de existencia y unicidad de EDO, para toda combinación de la forma

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, se puede encontrar una curva tal que $\frac{\varphi(g(t))_i}{dt} = \alpha_i$. Por lo tanto hay un isomorfismo entre T_p y $\mathfrak{R}^n$, entonces T_p con la suma y producto por escalar usual en $\mathfrak{R}^n$ es un espacio vectorial. ☆

Nota: se denotará a la base de este espacio por $\{\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{x_i}\}_{i \leq n}$ en vez de la base canónica de $\mathfrak{R}^n$.

En la figura 2.4 se muestra el plano tangente a un punto p sobre una lámina.

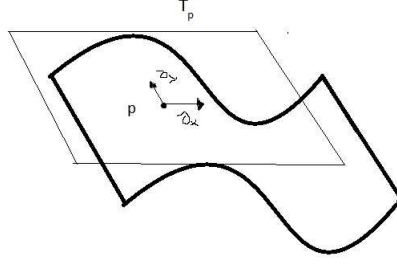


FIGURA 2.4. Espacio tangente

DEFINICIÓN 2.14. Sea M una variedad y p un elemento en M , al **dual del espacio tangente**, es decir a las transformaciones lineales de T_p a $\mathfrak{R}$ se denota por T_p^* . •

EJEMPLO 2.15. Considere alguna función f de un entorno U de p a R , y un vector $v \in T_p$ la derivada de f en la dirección de v es un real, así f genera canónicamente una función de U a $\mathfrak{R}$ que fácilmente se puede ver que cumple con las condiciones de operador lineal, así f genera un elemento de T_p^* que se denotará por df y se le llama gradiente de f en p .

OBSERVACIÓN 2.16. La base canónica de T_p^* , se denotará como $\{dx_i\}_{i \leq n}$ y corresponde con la base dual de T_p es decir $dx_i(\partial_{x_j}) = \delta_{ij}$. Note que dx_i coincide con el elemento generado por la función proyección a x_i .

Las definiciones anteriores se aplican a cada punto de la variedad, mas no sobre toda esta, así se tienen las siguientes definiciones para englobar, sobre toda la variedad, al espacio tangente y cotangente de cada punto. Empezaremos definiendo una estructura abstracta, para luego definir la extensión de los espacios tangente y cotangente a toda la variedad.

DEFINICIÓN 2.17. Un **fibrado** sobre una variedad M consiste en lo siguiente:

- (1) Una variedad F

- (2) Un conjunto de espacios vectoriales $F_p : p \in M$
- (3) Una función $\Pi : F \rightarrow M$

Tal que se satisfaga lo siguiente:

- (1) Para cada $p \in M$ se tiene que $F_p \simeq \Pi^{-1}(p)$ es decir son homeomorfos e isomorfos como espacios vectoriales.
- (2) Si $U \subseteq M$ un entorno de $p \in M$ entonces F es localmente trivial, es decir $\Pi^{-1}(U)$ es homeomorfo a $F_p \times U$. •

Ahora presentaremos, finalmente, la extensión del espacio tangente a un punto, para toda la variedad, como un ejemplo de fibrado.

DEFINICIÓN 2.18.

- (1) Si de esta manera se toma a $F_p = T_p$ a $F = \bigsqcup_{p \in M} T_p$ (ver definición 2.11) y por último a Π definido de manera canónica, se obtiene lo que se llama el **fibrado tangente**.
- (2) Si de esta manera se plantea a $F_p = T_p^*$ a $F = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*$ y por ultimo a Π definido de manera canónica, se obtiene lo que se define el **fibrado tangente dual**. •

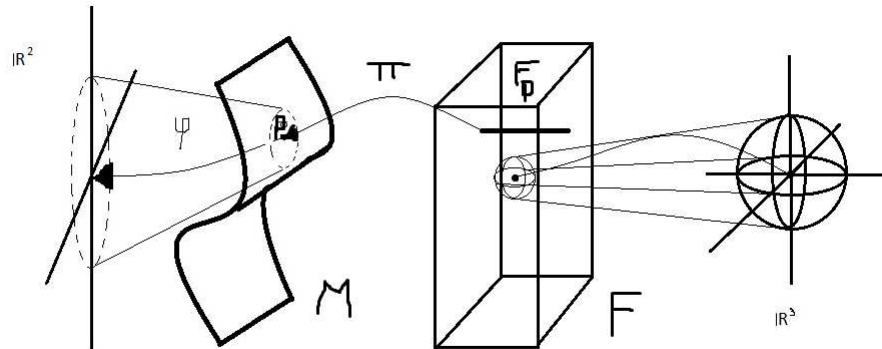


FIGURA 2.5. Fibrado

En la figura 2.5 se ilustra los componentes de un fibrado, las dos variedades, M y F , con sus respectivas cartas, la proyección Π y el espacio F_p asociado a un $p \in M$.

Regresemos a nuestro ejemplo de la lámina de hierro, tomando a cada punto con una carga eléctrica, al someter la lamina a un campo eléctrico, genera un “movimiento” de cargas sobre la lámina, generando diferentes caminos o curvas para cada punto, y derivando estos caminos tenemos además vectores tangentes para cada punto, como se muestra en la figura 2.6.

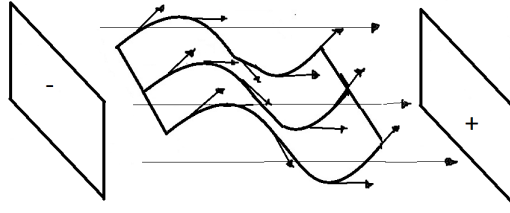


FIGURA 2.6. Campo vectorial

DEFINICIÓN 2.19. Sea M una variedad, un **campo vectorial** en M es una función que le asigna a cada punto $p \in M$ un elemento en su correspondiente T_p .

Nota: Se denota el conjunto de todos los campos vectoriales por $\mathcal{X}(M)$ •

OBSERVACIÓN 2.20.

- (1) Un campo vectorial se puede ver como una sección del fibrado tangente.
- (2) Por la misma razón de que para cada punto p en una variedad M , T_p es un espacio vectorial en $\mathfrak{R}$, se puede concluir que $\mathcal{X}(M)$ es un $C^\infty(M, \mathfrak{R})$ -módulo.

EJEMPLO 2.21.

- (1) El interior de un edificio rectangular se puede ver como una 3-variedad, haciendo un isomorfismo con un paralelepípedo abierto en $\mathfrak{R}^3$, sobre este, la gravedad es un campo vectorial, a cada punto del edificio le define el vector $(0, 0, g) = g\partial_z$ donde $g = 9,8$ es la gravedad.
- (2) La atmósfera se puede ver como una 3-variedad, el viento es un campo vectorial, que a cada punto le asigna la dirección del viento.
- (3) El espacio entre las laminas de un capacitor es una 3-variedad, el campo electrico es un campo vectorial, que le asigna a cada punto la dirección de la diferencia del potencial.

DEFINICIÓN 2.22. Sea M una variedad, una **uno-forma** en M es una función que le asigna a cada punto $p \in M$ un elemento en su T_p^* . •

Nota: Se denotará al conjunto de todas las uno-formas sobre M por $\mathcal{A}(M)$.

OBSERVACIÓN 2.23.

- (1) Toda uno-forma aplicada a un campo vectorial genera una función $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$.
- (2) Se puede notar que $\mathcal{A}(M)$ con la suma usual y el producto por escalar usual forman un espacio vectorial que coincide con el dual de $\mathcal{X}(M)$.

EJEMPLO 2.24. Toda función $f : M \rightarrow R$ genera una uno-forma a la cual se designará por df . A esta función se le llama gradiente de f .

OBSERVACIÓN 2.25. Una uno-forma se puede ver como una sección sobre el fibrado tangente dual.

Si sobre una misma variedad, existen dos atlas diferentes, que definen la misma estructura diferenciable sobre la variedad, se tiene que las cartas de un atlas con respecto al otro son diferenciables. Esto implica que existe un difeomorfismo entre ambos sistemas, es decir entre la variedad con un atlas y la variedad con el otro. Si se presentan funciones, curvas y campos vectoriales para una variedad y se cambia el atlas de la variedad, todas cambiarán. Para saber como cambian estas funciones, se presentan las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.26. Sean M y N dos variedades difeomorfas a través de φ se definen el **push-forward** de:

- Una función $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ como:

$$\varphi^* f = f(\varphi^{-1}).$$

- Una curva $g : \mathfrak{R} \rightarrow M$ como:

$$\varphi^* g = \varphi(g(t)).$$

•

DEFINICIÓN 2.27. Sean M y N dos variedades difeomorfas a través de φ se definen el **pull-back** de:

- Una función $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ como:

$$\varphi_* f = f(\varphi).$$

- Una curva $g : \mathfrak{R} \rightarrow N$ como:

$$\varphi_* g = \varphi^{-1}(g(t)).$$

•

Con respecto a cómo varía un campo con el difeomorfismo, se necesita observar el efecto del campo en la variedad, así si con los vectores se procede ahora del modo inverso, es decir teniendo un campo vectorial se quiere su curva.

DEFINICIÓN 2.28. Sea M una n -variedad y $X \in \mathcal{X}(M)$. Una **curva integral** de X en $p \in M$ es una curva g en p tal que:

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = X(g(t))$$

•

Si ahora se quiere extender esta curva integral, a un subconjunto abierto U_0 de la variedad se tiene.

DEFINICIÓN 2.29. Sea M una n -Variedad y $X \in \mathcal{X}(M)$. Un **flujo** de X en $p \in M$ es un triplete (U_0, a, F) donde:

- $p \in U_0 \subset M$ es abierto, y $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ o $a = \infty$.
- $F : U_0 \times (-a, a) \rightarrow M$ es de clase C^k
- para cada $u \in U_0$ $c_u : I_a \rightarrow M$ definida como $c_u = F(u, t)$ es una curva integral de X en el punto u .
- si $F_t : U_0 \rightarrow M$ definida como $F_t(u) = F(u, t)$ entonces para cada $t \in I_a$ $F_t(U_0)$ es abierto y F_t es un difeomorfismo C^∞ .

•

OBSERVACIÓN 2.30. Un flujo completo es un flujo que cubre a toda la variedad es decir donde $U_0 = M$.

De esta manera, se tiene que el flujo cambia la variedad, por tanto teniendo $X \in \mathcal{X}(M)$ y $Y \in \mathcal{X}(N)$ con flujos F_t^X y F_t^Y respectivamente y $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades tal que:

$$\varphi(F_t^X) = F_t^Y.$$

Entonces por regla de la cadena tenemos que:

$$Y = \frac{\partial F_t^Y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(F_t^X)}{\partial t} = J\varphi \cdot \frac{\partial F_t^X}{\partial t} = J\varphi \cdot X,$$

donde J representa el jacobiano.

OBSERVACIÓN 2.31. Como φ es un difeomorfismo se tiene que $J\varphi$ es una matriz invertible.

Así, se ha encontrado cómo cambian los campos al aplicar un difeomorfismo.

DEFINICIÓN 2.32. Sean M y N dos n -variedades y $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades, se define el **push-forward** de $X \in \mathcal{X}(M)$ a través de φ como

$$\varphi^*X = J\varphi X(\varphi^{-1}).$$

Y el **pull-back** como

$$\varphi_*X = J\varphi^{-1}X(\varphi).$$

•

El push forward da lugar al siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{X}(N) \\ F^X \downarrow & & \downarrow F^Y \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Analogamente se tiene la siguiente función. Para una función diferenciable entre variedades $\varphi : M \rightarrow N$ se suele denotar como $T\varphi : TM \rightarrow TN$ ¹ a la función, tal que para $v \in T_p$ se tiene:

$$T\varphi(v) = J(\varphi)_p \cdot v$$

Dando lugar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{(J\varphi)} & TN \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Por otro lado, como para una variedad M y campo $X \in \mathcal{X}(M)$, el flujo de X en un $t \in \mathfrak{R}$ fijo F_t^X , es un difeomorfismo entre M y M que en cierta forma “arrastra” a todos los puntos

¹Esta función se utiliza en el capítulo 5, por tanto no se recomienda pasarla por alto

durante el tiempo t o volviendo a el ejemplo de la lámina, como si se dejara el campo eléctrico t segundos actuando sobre la lámina, éste campo “arrastra” a los puntos. Así cualquier función, curva u otro campo, estará siendo “arrastrado” hacia adelante en el tiempo por el push-forward de F_t^X o hacia atrás por el pull-back de F_t^X .

DEFINICIÓN 2.33. Sea M una variedad, y $X \in \mathcal{X}(M)$ se define como función, curva o campo arrastrado por X en un tiempo t como el push forward del flujo de X en t de una función, curva o campo. •

OBSERVACIÓN 2.34. Facilmente se puede observar que una función, curva o campo arrastrado hacia atras, es decir con un tiempo negativo, a través del campo X coincide con el pull-back de la función, curva o campo de X en el tiempo en positivo.

DEFINICIÓN 2.35. Sea M una variedad un **tensor** $\binom{m}{n}$ en M , es una función $n + m$ lineal que asigna a n campos y m uno formas un valor real. •

EJEMPLO 2.36. El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ extendido a T_p es un **tensor** $\binom{0}{2}$.

OBSERVACIÓN 2.37.

- (1) Se puede notar que el espacio de todos los tensores $\binom{m}{n}$ sobre M , con la suma usual y la multiplicación por escalar usual es un espacio vectorial.
- (2) El espacio de todos los tensores $\binom{m}{n}$ sobre una k -variedad M es isomorfo al espacio tensorial $\mathcal{X}(M)^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}(M)^{\otimes m}$.
- (3) A través del isomorfismo con $\mathcal{X}(M)^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}(M)^{\otimes m}$ se puede definir un producto en el espacio de todos los tensores $\binom{m}{n}$ sobre una k -variedad M .

2. Derivadas de Lie

DEFINICIÓN 2.38. Sea M una variedad y $X \in \mathcal{X}(M)$, se define la **derivada de Lie de una función** f en un punto $p \in M$ a través de X como la derivada de f en la dirección de X , es decir:

$$\mathcal{L}_X f(p) = df(X)(p) = Jf \cdot X$$

donde J representa el Jacobiano •

OBSERVACIÓN 2.39. Como dijimos antes, $df(X) = \mathcal{L}_X f$ es una función de M a $\mathbb{R}$.

TEOREMA 2.40. (Fórmula de la derivada de Lie para funciones): Sea M una variedad, $X \in \mathcal{X}(M)$, F_t el flujo de X y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. entonces

$$\frac{\partial F_{t*}f}{\partial t} = F_{t*}\mathcal{L}_X f.$$

Demostración:

Por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{t*}f}{\partial t}(p) &= \frac{\partial f(F_t)}{\partial t}(p) \\ &= J(f)(F_t(p)) \cdot \frac{\partial F_t}{\partial t}(p) \\ &= J(f)(F_t(p)) \cdot X(F_t(p)) \\ &= df(X)(F_t(p)) \\ &= \mathcal{L}_X f(F_t(p)) \\ &= (F_{t*}\mathcal{L}_X f)(p) \end{aligned}$$

☆

PROPOSICIÓN 2.41. Sea M una variedad, $X \in \mathcal{X}(M)$ y F_t el flujo de X . Consideremos la siguiente EDO

$$(2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_X f$$

Con condición inicial $f(t, m) = g(m)$ para todo $m \in M$. Tenemos que $f = F_{t*}g$ es una solución del problema 2.1.

Demostración:

Por regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F_{t*}g}{\partial t} = (F_{t*}\mathcal{L}_X g) = \mathcal{L}_X(F_{t*}g) = \mathcal{L}_X f$$

☆

Un campo vectorial no sólo “arrastra” a una curva si no también a un campo de esta forma introduciremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.42. Sea M una variedad, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se define la **derivada de Lie del campo** Y a través del campo X como:

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{\partial F_t^{X*} Y}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

•

Esta definición, puede resultar algo complicada, a fin de ilustrar una forma mas sencilla, seguiremos el siguiente:

LEMA 2.43. Sea M una variedad, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se tiene que:

$$\frac{\partial F_t^{X*} Y}{\partial t} \Big|_{t=0} = (JX)Y - (JY)X.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t^{X*} Y}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (JF_t^X) \cdot Y(F_{-t}^X) \\ &= \frac{\partial (JF_t^X)}{\partial t} \cdot Y(F_0^X) + (JF_0^X) \cdot \frac{\partial Y(F_{-t}^X)}{\partial t} \\ &= (J \frac{\partial F_t^X}{\partial t}) \cdot Y + (JY) \cdot (\frac{\partial F_{-t}^X}{\partial t}) \\ &= (JX)Y - (JY)X. \end{aligned}$$

☆

Del lema 2.43, definimos la siguiente operación sobre $\mathcal{X}(M)$ para alguna variedad dada M .

DEFINICIÓN 2.44. Sea M una variedad, el **corchete de Lie para campos vectoriales** es una operación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$[X, Y] = (JX) \cdot Y - (JY) \cdot X$$

•

OBSERVACIÓN 2.45.

- (1) $\mathcal{X}(M)$ junto con el corchete de Lie es un algebra de Lie (Ver capítulo 3).

- (2) Sea M una variedad, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ y una función $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ como $\mathcal{L}_X f$ es una función de M a $\mathfrak{R}$, se tiene:

$$\mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_Y(Jf \cdot X) = J(Jf \cdot X) \cdot Y = J(Jf) \cdot X \cdot Y + Jf \cdot JX \cdot Y$$

de esta forma el corchete de Lie $[X, Y]$ se puede ver tambien como el campo que cumple con lo siguiente:

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}(f) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f)$$

- (3) Con un cálculo análogo al lema 2.43 podemos ver que $\frac{\partial F_{t*}^X Y}{\partial t}|_{t=0} = [X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ •

Para extender la derivada a toda la variedad tenemos

TEOREMA 2.46. (*Formula de derivada de Lie para campos vectoriales*): Sea M una variedad, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ y F_t el flujo de X . Entonces

$$\frac{\partial F_{t*} Y}{\partial t} = F_{t*} \mathcal{L}_X Y$$

Demostración:

$$\frac{\partial F_{t*} Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} F_{t+s*} Y = F_{t*} \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} F_{s*} Y = F_{t*} \mathcal{L}_X Y$$

☆

De este teorema surge naturalmente el siguiente.

COROLARIO 2.47. : Sea M una variedad, $X \in \mathcal{X}(M)$ y F_t el flujo de X . Entonces

$$F_{t*} X = X$$

Demostración:

$$\frac{\partial F_{t*} X}{\partial t} = F_{t*} \mathcal{L}_X X = [X, X] = 0$$

Por tanto $F_{t*} X$ no varía con el tiempo, es decir

$$F_{t*} X = F_{0*} X = X$$

☆

OBSERVACIÓN 2.48. De la misma manera se puede ver que $F_t^* X = X$.

PROPOSICIÓN 2.49. Sea M una variedad, $X \in \mathcal{X}(M)$ y F_t el flujo de X . Consideremos la siguiente EDP

$$(2.2) \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = [X, Y]$$

Con condición inicial $Y(t, m) = G(m)$ para todo $m \in M$, tenemos que $Y = F_t^* G$ es una solución del problema 2.2.

Demostración:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial F_t^* G}{\partial t} = F_t^* [X, G] = [F_t^* X, F_t^* G] = [X, Y].$$

☆

EJEMPLO 2.50. Sea el siguiente problema de EDP

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = (x+y) \frac{\partial u_1}{\partial x} - (x+y) \frac{\partial u_1}{\partial y} - u_1 - u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = (x+y) \frac{\partial u_2}{\partial x} - (x+y) \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_1 + u_2 \end{cases}$$

Con condición inicial:

$$\begin{cases} u_1(0, x, y) = x \\ u_2(0, x, y) = y^2 \end{cases}$$

Si definimos los siguientes campos $U_t(x, y) = (u_1(t, x, y), u_2(t, x, y))$, $G(x, y) = U_0(x, y) = (x, y^2)$ y

$X(x, y) = (x+y, -(x+y))$ tenemos exactamente el mismo problema que en la propocición anterior y como X posee el siguiente flujo completo

$$F_t^X(x, y) = ((x+y)t + x, -(x+y)t + y)$$

la solución para el problema 2.3 es $Y = F_{t*}^X G$ es decir:

$$\begin{cases} u_1(t, x, y) = [(x+y)t + x](1-t) - t[y - (x+y)t]^2 \\ u_2(t, x, y) = t[(x+y)t + x] + (t+1)[y - (x+y)t]^2 \end{cases}$$

☆

Parte II: Formas diferenciales

Las formas diferenciales son muy importantes para la teoría de ecuaciones diferenciales, ya que a partir de éstas se puede definir de una manera mucho mas elegante las ecuaciones.

Además, en geometría se puede generalizar el sentido de “volumen” para variedades utilizando las formas diferenciales, con este volumen definimos una medida, y con la medida, una integral.

3. Fibrado de formas diferenciales

Para una variedad M , recordemos las siguientes definiciones dadas en la sección 1 de la parte I de éste capítulo de preliminares de geometria diferencial:

- (1) Una **uno-forma** en M es una función que le asigna a cada punto $p \in M$ un elemento en T_p^* •
- (2) Un **tensor** $\binom{m}{n}$ en M es una función $n+m$ lineal que asigna a n campos y m uno formas un valor real. •

Como dijimos antes, a través de las uno formas se define un sentido de volumen, siguiendo este principio, daremos la definición de formas diferenciales.

Como sabemos, en $\mathbb{R}^2$, un paralelogramo se puede definir usando dos vectores, por otro lado con la suma y la multiplicación usual, tenemos que la función área $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que para $v, w \in \mathbb{R}^2$ se tiene a $\|\alpha(v, w)\|$ como el área del paralelogramo formado por los vectores v, w , cumple con las siguientes propiedades:

- (1) α es lineal en cada una de sus coordenadas.
- (2) Para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(u, u) = 0$.

Con estas dos condiciones, se puede demostrar, haciendo $u = w + v$ en la segunda condición, que se cumple esta tercera condición:

$$\alpha(v, w) = -\alpha(w, v),$$

que es equivalente a la condición dos.

Por otro lado, haciendo el procedimiento análogo en $\mathfrak{R}^3$, para el volumen de un paralelepípedo formado por 3 vectores, tenemos que la función α , que ahora representa un volumen, debe cumplir con las siguientes propiedades:

- (1) α es lineal en cada una de sus coordenadas.
- (2) Para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{R}^3$ y σ una permutación de tres elementos se tiene:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (-1)^{\text{sig}(\sigma)} \alpha(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Sucesivamente, podemos generalizar estas propiedades, de la función “volumen” α , a un espacio n -dimensional, como:

- (1) α es lineal en cada una de sus coordenadas.
- (2) Debe ser antisimétrico, es decir, para todo $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{R}^n$ y σ una permutación de n elementos se tiene:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{\text{sig}(\sigma)} \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

De estas propiedades surge la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.51. Sea M una n -variedad, una **k-forma diferencial** en M es un tensor $\binom{0}{k}$ antisimétrico. •

OBSERVACIÓN 2.52.

- (1) Sea M una n -variedad, dado un tensor del tipo $\binom{0}{2}$ ω , se puede construir una 2-forma α sobre M , de la siguiente manera. Para $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ definimos a:

$$\alpha_p(X_1, X_2) = \frac{1}{2} [\omega_p(X_1, X_2) - \omega_p(X_2, X_1)],$$

y sucesivamente para un tensor $\binom{0}{k}$ ϕ , se puede definir una k -forma en M α , con $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ como:

$$\alpha_p(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \left[\sum_{\sigma \in S_n} \phi_p(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \right].$$

- (2) Los tensores $\binom{0}{k}$ sobre M se pueden ver como elementos en $(\mathcal{X}(M)^{\otimes k})^* = \mathcal{A}(M)^{\otimes k}$ y por tanto las k -formas diferenciales se pueden ver como elementos en $\mathcal{A}(M)^{\wedge k}$.

Dada una n -variedad M , las k -formas serían las funciones k -lineales y antisimétricas de $\mathcal{X}(M)^k$ a $\mathfrak{R}$, y como $\mathcal{X}(M)^* = \mathcal{A}(M)$ tenemos que el espacio de las k -formas sobre M , coincide con $(\mathcal{X}(M)^{\wedge k})^* = \mathcal{A}(M)^{\wedge k}$ (ver álgebra exterior), así que tomando la base canónica de $\mathcal{X}(M)$

denotada por $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}\}$, la base canónica de $\mathcal{A}(M)^{\wedge k}$ serían las k-formas $\{dx_{1j} \wedge \dots \wedge dx_{kj}\}_{j \leq \binom{n}{k}}$ que cumplen con:

$$dx_{1j} \wedge \dots \wedge dx_{kj}(\partial_{x_{1i}}, \dots, \partial_{x_{ki}}) = \begin{cases} (-1)^{sig(\sigma)} & \text{si } \exists \sigma \in S_n / (x_{1i}, \dots, x_{ki}) = (x_{\sigma(1)j}, \dots, x_{\sigma(k)j}) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

de esta manera podemos escribir a cualquier k-forma ω sobre M como:

$$\omega(p) = \sum \omega(p)_{1j, \dots, kj} dx_{1j} \wedge \dots \wedge dx_{kj},$$

con $\omega(p)_{1j, \dots, kj} : M \rightarrow \mathfrak{R}$ una funciones para todo j .

Veamos ahora que una k-forma esta bien definida para cualquier cambio de carta, sea M una n-variedad, y para un punto $p \in M$ tengo dos sistemas de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ con $\varphi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ la función cambio de coordenadas de la primera a la segunda, asi para todo i :

$$dx_i = \sum_{j \leq n} \frac{dx_i}{dy_j} dy_j,$$

es decir dada una 1-forma ω escrita en las coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ al cambiar sus coordenadas es correspondiente a $J(\varphi)^{-1} \cdot \omega$. Por otro lado para un vector $v \in T_p$ escrito en las coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ al cambiar sus coordenadas es correspondiente a $J(\varphi) \cdot v$ por lo que:

$$J(\varphi)^{-1} \cdot \omega(J(\varphi) \cdot v) = J(\varphi)^{-1} \cdot J(\varphi) \cdot \omega(v) = \omega(v),$$

con esto probamos que las 1-formas no dependen de la base, en general una k-forma se escribe como el producto exterior de las 1-formas (ver capítulo 1 sección 3), asi que la demostración se extiende para las k-formas de manera natural.

OBSERVACIÓN 2.53.

- (1) Nótese que toda k-forma con $k \geq n$ es cero, pues dado que solamente hay n vectores linealmente independientes una combinación mayor al numero de elementos que hay, repetirá algún elemento de la base.
- (2) Para cada punto $p \in M$ tenemos que las k-formas evaluadas en p forman un $\mathfrak{R}$ -espacio vectorial de dimension $\binom{n}{k}$, y por la observación anterior, podemos formar hasta n $\mathfrak{R}$ -espacios vectoriales en p correspondientes a los n espacios $\mathcal{A}(M)^{\wedge k}$.

Como acabamos de observar, para cada punto $p \in M$ tenemos n espacios vectoriales de k -formas diferenciales en p , llamados $T_p^{\wedge k*}$ y al espacio de las formas diferenciales en p se le designará como $T_p^{\wedge*}$ y está definido por:

$$T_p^{\wedge*} := \bigoplus_{k=1}^n T_p^{\wedge k*},$$

y para toda la variedad

$$T_M^{\wedge*} := \bigsqcup_{p \in M} T_p^{\wedge*}.$$

DEFINICIÓN 2.54. Sea M una n -variedad, sustituyendo en la definición 2.17 a $F_p = T_p^{\wedge*}$ y $F = T_M^{\wedge*}$ tenemos lo que se llama el fibrado de formas diferenciales. •

DEFINICIÓN 2.55. Sea M una variedad, una sección suave del fibrado de las formas diferenciales es una forma diferencial. •

OBSERVACIÓN 2.56.

- (1) Al espacio de todas las k -formas diferenciales lo denotaremos por $\mathcal{A}^k(M) := \mathcal{A}(M)^{\wedge k}$.
- (2) Al espacio de todas las formas diferenciales lo denotaremos por $\mathcal{A}^*(M)$.
- (3) Note que $\mathcal{A}^*(M) := \bigoplus_{k=1}^n \mathcal{A}^k(M)$.

4. Cálculo sobre formas diferenciales

4.1. Pull-back y Push-forward. Lo primero que nos interesa saber es la forma en que un difeomorfismo “mueve” a las formas diferenciales entre los espacios difeomorfos, para esto tomemos a M y N dos n -variedades con $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo.

Sean $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$, entonces $\omega(X_1, \dots, X_k) : M \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función y en el capítulo 2 vimos como actuaban los difeomorfismos sobre las funciones, por tanto:

$$\varphi^*(\omega(X_1, \dots, X_k))_{(p)} = \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))},$$

entonces lo mas natural es decir que:

$$(\varphi^*\omega)(\varphi^*X_1, \dots, \varphi^*X_k)_{(p)} = \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}.$$

Con lo que se tiene la siguiente

DEFINICIÓN 2.57. Sean M y N dos n -variedades, $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(N)$ se define el **push-forward** de ω como:

$$(\varphi^* \omega)(Y_1, \dots, Y_k)_{(p)} = \omega(\varphi_* Y_1, \dots, \varphi_* Y_k)_{(\varphi^{-1}(p))}.$$

•

Analogamente, sean $\gamma \in \mathcal{A}^k(N)$ y $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(M)$, tenemos a $\gamma(Y_1, \dots, Y_k) : M \rightarrow \mathbb{R}$ como función, por lo que se sigue:

$$\varphi_*(\gamma(Y_1, \dots, Y_k))_{(p)} = \gamma(Y_1, \dots, Y_k)_{(\varphi(p))},$$

por lo que es natural ver que:

$$(\varphi_* \gamma)(\varphi_* Y_1, \dots, \varphi_* Y_k)_{(p)} = \gamma(Y_1, \dots, Y_k)_{(\varphi(p))}.$$

y por último tenemos la siguiente:

DEFINICIÓN 2.58. Sean M y N dos n -variedades, $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, $\gamma \in \mathcal{A}^k(N)$ y $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}(M)$ se define el **pull-back** de γ como:

$$(\varphi^* \gamma)(X_1, \dots, X_k)_{(p)} = \gamma(\varphi^* X_1, \dots, \varphi^* X_k)_{(\varphi(p))}.$$

•

4.2. Producto exterior. Ahora prosigamos con otra operación básica entre las formas diferenciales, el producto exterior, este producto es una operación binaria $\wedge$ que si ω es una k -forma y γ una l -forma $\omega \wedge \gamma$ es una $k+l$ -forma, y es el inducido como algebra exterior de $\mathcal{A}(M)$ o $\mathcal{X}(M)^*$.

DEFINICIÓN 2.59. Sea M una variedad, el producto exterior es una operación binaria $\wedge : \mathcal{A}^*(M) \times \mathcal{A}^*(M) \rightarrow \mathcal{A}^*(M)$ tal que para $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\gamma \in \mathcal{A}^l(M)$

$$\omega \wedge \gamma := \omega \otimes \gamma - \gamma \otimes \omega.$$

•

OBSERVACIÓN 2.60.

- (1) Se nota facilmente que el producto exterior es lineal en cada coordenada, asociativo y antisimétrico.

- (2) Si escribimos a las formas en términos de su base tenemos para todo par de tensores $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\gamma \in \mathcal{A}^l(M)$ que :

$$\omega := \sum f_{1j, \dots, kj} x_{1j} \wedge \dots \wedge x_{kj},$$

$$\gamma := \sum g_{1i, \dots, li} x_{1i} \wedge \dots \wedge x_{li},$$

y por tanto:

$$\omega \wedge \gamma := \sum \sum f_{1j, \dots, kj} g_{1i, \dots, li} x_{1j} \wedge \dots \wedge x_{kj} \wedge x_{1i} \wedge \dots \wedge x_{li}.$$

- (3) Y que para $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathcal{X}(M)$ se tiene:

$$\omega \wedge \gamma(X_1, \dots, X_{k+n}) := \sum_{\sigma \in S_{k+n}} \text{sig}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \cdot \gamma(X_{\sigma(n+1)}, \dots, X_{\sigma(k+n)}).$$

- (4) Se cumple para todo par de tensores $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\gamma \in \mathcal{A}^l(M)$ que:

$$\omega \wedge \gamma = (-1)^{kl} \gamma \wedge \omega.$$

Ahora veamos como se comporta el pull-back y el push forward, junto con el producto exterior.

PROPOSICIÓN 2.61. Sean M y N dos n -variedades, $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}^*(M)$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}^*(N)$ entonces las siguientes propiedades se cumplen:

- (1) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\varphi^*\omega_1) \wedge (\varphi^*\omega_2).$
- (2) $\varphi_*(\gamma_1 \wedge \gamma_2) = (\varphi_*\gamma_1) \wedge (\varphi_*\gamma_2).$

Demostración: La demostración de esta propocición se puede encontrar en [13] y en [15].

4.3. Derivada exterior. En esta subsección, se quiere definir un operador derivada, que no cambie las características de las formas diferenciales, para una n -variedad M , definimos el operador derivada “d”, para una cero forma f como:

$$d(f) = \langle (\nabla f), (dx_1, \dots, dx_n) \rangle = df,$$

y extendiendo para cualquier k -forma, $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ escrita en terminos de la base de la siguiente manera

$$\omega = \sum_{i \leq \binom{n}{k}} f_i(x_{1i} \wedge \dots \wedge x_{ki}),$$

definimos:

$$\begin{aligned}
 d(\omega) &= \sum_{i \leq \binom{n}{k}} (df_i) \wedge (x_{1i} \wedge \dots \wedge x_{ki}) \\
 &= \sum_{i \leq \binom{n}{k}} (\langle \nabla f_i, (x_1, \dots, x_n) \rangle) \wedge (x_{1i} \wedge \dots \wedge x_{ki}) \\
 &= \sum_{i \leq \binom{n}{k}} \sum_{j \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x_j \wedge x_{1i} \wedge \dots \wedge x_{ki}.
 \end{aligned}$$

Y se extiende naturalmente para todo elemento de $\mathcal{A}^*(M)$. Este operador cumple con varias identidades que lo caracterizan ¹, estas son:

- (1) $d(\omega + \gamma) = d\omega + d\gamma$.
- (2) $d(\omega \wedge \gamma) = (d\omega) \wedge \gamma + (-1)^k \omega \wedge d\gamma$ siendo $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$.
- (3) $d(d\omega) = 0$.

Si ahora definimos el siguiente operador para $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ como:

$$\begin{aligned}
 (\bar{d}\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \right).
 \end{aligned}$$

Se puede probar que este nuevo operador cumple con las igualdades (1), (2) y (3) que caracterizan a d , por lo que $\bar{d}$ y d son iguales ².

Usando la segunda definición de d se puede mostrar, que dadas dos variedades M y N y $\varphi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades, para todo $\omega \in \mathcal{A}^*(M)$ y $\gamma \in \mathcal{A}^*(N)$, se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.
- (2) $\varphi_*(d\gamma) = d(\varphi_*\gamma)$.

¹la demostración se puede ver en los libros [2], [13] y en [15]

²una demostración sin usar el hecho de que d es el unico operador que cumple las propiedades, se encuentra en [13]

DEFINICIÓN 2.62.

- (1) Sea M una n -variedad, una forma cerrada sobre M es una forma diferencial $\omega \in \mathcal{A}^*(M)$ tal que $d\omega = 0$. •
- (2) Sea M una n -variedad y $\omega \in \mathcal{A}^*(M)$ se dice que ω es una forma exacta sobre M si existe $\gamma \in \mathcal{A}^*(M)$ tal que $\omega = d\gamma$. •

Obviamente toda forma exacta es cerrada, y se puede comprobar que en $\mathbb{R}^n$ toda forma cerrada es exacta, sin embargo no en toda variedad ésto último ocurre.

4.4. Producto interno y derivadas de Lie. En esta subsección definiremos los operadores que dependen de un campo, de esta manera proseguimos. Sea M una n -variedad y $X \in \mathcal{X}(M)$ definimos la siguiente aplicación lineal:

$$i(X) : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M),$$

para todo elemento $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ como:

$$(i(X)\omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(X, X_1, \dots, X_k).$$

y para $k = 0$ definimos $i(X) = 0$, a este operador le llamaremos el producto interno de ω con X .

OBSERVACIÓN 2.63.

- (1) Como dijimos el operador $i(X)$ es lineal, es decir, para $\omega, \gamma \in \mathcal{A}^k(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que:

$$(i(X))(f\omega + g\gamma) = f(i(X))(\omega) + g(i(X))(\gamma).$$

- (2) Note que para $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\gamma \in \mathcal{A}^l(M)$ se tiene:

$$(i(X))(\omega \wedge \gamma) = ((i(X))\omega) \wedge \gamma + (-1)^k \omega \wedge ((i(X))\gamma).$$

Ahora definamos la derivada de lie del campo $X \in \mathcal{X}(M)$, con flujo $F_t : M \rightarrow M$, como es usual, para $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ como:

$$\mathcal{L}_X \omega := \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (F_t^* \omega).$$

LEMA 2.64. Sea M una n -variedad, $X, X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ campos y $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ una k -forma entonces:

$$\mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_k) = X\omega(X_1, \dots, X_k) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k).$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_k) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (F_t^* \omega)(X_1, \dots, X_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\omega(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\omega(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}) - \omega(X_1, \dots, X_k)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)}{t} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} + \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} + X(\omega(X_1, \dots, X_k)).
\end{aligned}$$

Llamaremos al primer límite A y lo resolvemos por separado:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega(\varphi_* X_1, \varphi_* X_2, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega(X_1, \varphi_* X_2, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} \right) + \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega(X_1, \varphi_* X_2, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega(X_1, X_2, \dots, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} \right) \\
&\quad + \dots + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(X_1, \dots, X_{k-1}, \varphi_* X_k)_{(\varphi^{-1}(p))} - \omega(X_1, \dots, X_k)_{(\varphi^{-1}(p))}}{t} \\
&= \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X_i, X], \dots, X_k) = - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k).
\end{aligned}$$

Y por último tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (F_t^* \omega)(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k).$$



OBSERVACIÓN 2.65. Es usual definir a la derivada de Lie de una forma diferencial, como el resultado del teorema y luego demostrar que coincide con una derivada.

5. Teorema de Frobenius

Empecemos con una definición.

DEFINICIÓN 2.66. Sea M una m -variedad, se dice que un subconjunto $N \subseteq M$ es una **subvariedad** de dimension n (una n -subvariedad) de M si para cada punto $p \in N$ existe alguna carta (φ_p, U_p) en M tal que:

- (1) $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$.
- (2) $\varphi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$.

Nota: Las cartas que cumplen con esta condicion son llamadas cartas principales, o coordenadas principales. •

TEOREMA 2.67. Sea M una m -variedad y $H \in C^\infty(M)$ la subvariedad $H^{-1}(0) = N \subset M$ es una $m - 1$ -variedad.

Demostración: La demostración se puede encontrar en el capítulo 3 sección 5 del libro [15].

Bajo esta definición se puede imaginar que, dada una variedad M y un campo en $\mathcal{X}(M)$, la curva integral de éste campo coincide con una subvariedad, cuyo plano tangente en un punto es generado por el valor del campo en este punto. Tratando de extender este hecho, teniendo una familia de campos sobre M , ¿podrá existir alguna subvariedad integral, tal que su plano tangente en cada punto, coincida con el espacio libremente generado por los vectores de estos campos en el punto?.

El teorema de Frobenius da condiciones a la familia de campos, para que exista esta subvariedad.

DEFINICIÓN 2.68. Sea M una n -variedad, una **distribución** $\mathcal{D}$ de dimensión r sobre M , consiste en una asignación, para cada punto $p \in M$ un subespacio de dimención r , $\mathcal{D}_p \subseteq T_p$, tal que existe un conjunto $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(M)$ de campos sobre M , tal que $\{X_1(p), \dots, (X_r(p))\}$ es base para $\mathcal{D}_p$. •

DEFINICIÓN 2.69. Sea M una m -variedad, se dice que una distribución $\mathcal{D}$ sobre M es **completamente integrable** si existe una subvariedad N tal que para todo $p \in N$ se tiene que $T_p N \cong \mathcal{D}_p$.

Nota: de ser integrable llamaremos a esta superficie como la integral de $\mathcal{D}$. •

PROPOSICIÓN 2.70. Sea $\mathcal{D}$ una distribución en una n -variedad dada M , si $\mathcal{D}$ es completamente integrable, entonces para cualquier par de campos vectoriales X, Y en $\mathcal{D}$, su corchete $[X, Y]$ debe pertenecer a $\mathcal{D}$.

Demostración:

Suponiendo que N es la superficie integral de $\mathcal{D}$, es decir, la subvariedad de M que cumple con la definición 2.69, ambos campos serán campos de N y pensándolo como una variedad completamente distinta, tendremos que su corchete debe pertenecer a los campos de N y por tanto a $\mathcal{D}$. ☆

Basados en la propocicion 2.70 tenemos la siguiente

DEFINICIÓN 2.71. Una distribución $\mathcal{D}$ de una m -variedad dada M se dice que es **involutiva**, si para cada par de campos vectoriales $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ en $\mathcal{D}$ se tiene que $[X, Y]$ pertenece a $\mathcal{D}$. •

OBSERVACIÓN 2.72. Es sencillo ver que si $\mathcal{D}$ es involutiva en una variedad M , para cualquier subvariedad de M abierta U su restricción sera involutiva en U .

TEOREMA 2.73. (Teorema de Frobenius) Una distribución $\mathcal{D}$ en una n -variedad dada M es completamente integrable, si y sólo si, es involutiva. ☆

Demostración: la demostración se puede encontrar en el capítulo 2 de [13], en el capítulo 3 de [2] y en el capítulo 4 de [15].

5.1. Teorema de Frobenius para formas diferenciales. Ahora presentaremos el mismo teorema, en términos de formas diferenciales, en lugar de campos vectoriales o distribuciones. Empecemos por hacer una equivalencia entre distribuciones y formas diferenciales, de esta forma si $\mathcal{D}$ es una distribucion de dimension n sobre una m -variedad dada M , consideraremos el siguiente conjunto:

$$I^k(\mathcal{D}) := \{\omega \in \mathcal{A}^k(M) / \omega(X_1, \dots, X_k) = 0 \quad \forall \quad X_i \in \mathcal{D}\},$$

y sea

$$I(\mathcal{D}) := \bigoplus_{k=1}^n I^k(\mathcal{D}).$$

Se puede ver claramente que $I(\mathcal{D})$ es un ideal de $\mathcal{A}^*(M)$ utilizando el producto $\wedge$, así tenemos el siguiente.

LEMA 2.74. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución de dimensión n sobre una m -variedad dada M , entonces $I(\mathcal{D})$ es localmente el ideal generado por $r = m - n$ uno-formas linealmente independientes sobre M . Es decir para $p \in M$ existen $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathcal{A}(M)$, tal que toda forma diferencial $\omega \in I(\mathcal{D})$ existen $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathcal{A}^*(M)$ únicos, tal que ω se puede escribir como:*

$$\omega = \sum_{i=1}^n \theta_i \wedge \omega_i.$$

Demostración:

Para $p \in M$, por definición de distribución, podemos encontrar n campos vectoriales $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(M)$ linealmente independientes que generen $\mathcal{D}$, luego, para un entorno de $p \in U$, podemos completar la base para $\mathcal{X}(U)$ utilizando los vectores principales $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_m \in \mathcal{X}(U)$, luego tomamos la base dual de esta base $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathcal{A}(U)$ tal que:

$$\omega_i(X_j) = \delta_{ij}.$$

Facilmente se puede ver que el conjunto $\{X_{n+1}, \dots, X_m\}$ genera al ideal $I(\mathcal{D})$. ☆

PROPOSICIÓN 2.75. *Sea M una m -variedad y $\mathcal{D}$ una distribución sobre M , $\mathcal{D}$ es involutiva si y sólo si $I(\mathcal{D})$ es un ideal diferencial de $\mathcal{A}^*(M)$, es decir si $I(\mathcal{D})$ es un ideal y si para todo $\omega \in I(\mathcal{D})$ se tiene $d\omega \in I(\mathcal{D})$ o lo que es lo mismo:*

$$dI(\mathcal{D}) \subseteq I(\mathcal{D}).$$

Demostración:

Usando

$$\begin{aligned} (\bar{d}\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \right), \end{aligned}$$

se puede ver que si es involutiva se cumple $dI(\mathcal{D}) \subseteq I(\mathcal{D})$ pues $(d\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = 0$. Y el hecho de que si $dI(\mathcal{D}) \subseteq I(\mathcal{D})$ es involutiva se puede ver, tomando las uno-formas que generan a $I(\mathcal{D})$ y volviendo a utilizar la definición anterior ya que para una uno forma $\omega \in I(\mathcal{D})$ tenemos:

$$(d\omega)(X, Y) = \frac{1}{2}(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])) = 0,$$

por lo que:

$$\omega([X, Y]) = 0,$$

y por último $[X, Y] \in \mathcal{D}$. ☆

De esta manera, utilizando la proposición anterior se tiene el siguiente

TEOREMA 2.76. (Teorema de Frobenius) Sea $\mathcal{D}$ una distribucion sobre una n -variedad dada M , $\mathcal{D}$ es integrable si y solo si $I(\mathcal{D})$ es un ideal diferenciable de $\mathcal{A}^*(M)$. ☆

Podemos escribir esos resultados de una forma mas práctica usando como generadores de $I(\mathcal{D})$ al conjunto $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathcal{A}(M)$.

Es decir, dado un sistema de la forma

$$\omega_1 = \dots = \omega_r = 0^3,$$

éste sistema tiene una solución, es decir existe una subvariedad tal que estas condiciones ocurran, si y sólo si para todo ω_i existen r formas $\omega_{ij} \in \mathcal{A}(M)$ tal que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^r \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$

.

Si por otro lado procedemos del modo inverso y tenemos una subvariedad $N \subset M$ de una m -variedad M , dada por la condición $H(N) = 0$ para $H \in C^\infty(M)$, entonces por el teorema 2.67 tendríamos que la dimensión de N es $m - 1$, con lo que el espacio $\mathcal{A}(N)$ tiene dimensión $m - 1$, así cualquier uno forma que se anule en N , debe estar relacionada con dH en N , es decir, esta uno-forma, restringida a N debe ser combinación lineal de dH restringida a N , y por la condición de integrabilidad lo mismo ocurre para las formas de orden superior, todas deben pertenecer a $\langle dH \rangle$.⁴

³Éste sistema es llamado sistema Pfaffiano de ecuaciones

⁴Esta observación, aunque pareciera fuera de lugar, es necesaria para el capítulo 4

Capítulo 3

Método de simetrías de Lie

El objetivo de este capítulo, es estudiar algunos métodos geométricos, para resolver ecuaciones diferenciales. Principalmente se introducirán los conceptos de álgebras y grupos de Lie, luego de simetría de una ecuación diferencial, y por último se explicará un método de resolución de ecuaciones diferenciales utilizando estos conceptos.

Las referencias que se seguirán en este capítulo son: [2], [12], [8], [9], [10], [5], [11].

1. Álgebras y Grupos de Lie

DEFINICIÓN 3.1. Sea A un espacio vectorial, y $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ una operación bi-lineal, diremos que $(A, [\cdot, \cdot])$ es un **álgebra de Lie** si para todo $a, b, c \in A$ se tiene que:

(1) $[a, a] = 0$

(2) Se satisface la identidad de Jacobi, es decir:

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0$$

Nota: Si $(A, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie, llamaremos a la operación bilineal $[\cdot, \cdot]$, corchete de Lie sobre A . •

OBSERVACIÓN 3.2. De la primera condición de la definición anterior, se tiene que si $(A, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie, para todo $a, b \in A$ se cumple la siguiente igualdad:

$$[a, b] = -[b, a].$$

EJEMPLO 3.3.

(1) Sea A un álgebra, con operación binaria denotada por $\circ$, sobre esta definimos el corchete de Lie $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$, para todo $a, b \in A$, como:

$$[a, b] = a \circ b - b \circ a.$$

Así el par $(A, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie.

(2) $\mathfrak{R}^3$ con el producto vectorial usual como corchete de Lie, es un álgebra de Lie.

- (3) Dada una variedad M , $\mathcal{X}(M)$ con el corchete de Lie para campos vectoriales, es una álgebra de Lie.

DEFINICIÓN 3.4. Un **grupo de Lie** G , es una variedad diferenciable, que posee una estructura de grupo, tal que, las operaciones de multiplicación e inversión, son diferenciables, es decir, $\cdot : G \times G \rightarrow G$ es diferenciable y definiendo $f : G \rightarrow G$ como $f(g) = g^{-1}$ es diferenciable. •

EJEMPLO 3.5.

- (1) $\mathbb{R}^n$ con la estructura diferencial usual y la suma usual, es un grupo de Lie.
- (2) El plano tangente a un punto, es un grupo de Lie por su isomorfismo con $\mathbb{R}^n$.
- (3) Las matrices $n \times n$ como variedad de $R^{n \times m}$ y la multiplicación usual de matrices, es un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 3.6. Sea M una variedad y G un grupo de Lie, una **acción de** G sobre M es una acción de grupo $\phi : G \times M \rightarrow M$, diferenciable, es decir, para todo $g, g' \in G$ y $p \in M$ se tiene que:

- (1) $\phi_g : M \rightarrow M$ definida como $\phi_g = \phi(g, p)$ es un difeomorfismo entre variedades.
- (2) Siendo $e \in G$ la identidad de G e $Id(M)$ la función identidad de M se tiene la siguiente identidad $\phi_e = Id(M)$
- (3) $\phi_g \circ \phi'_g = \phi_{g \cdot g'}$
- (4) $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$
- (5) $\phi_p : G \rightarrow M$ definida como $\phi_p = \phi(g, p)$ es infinitamente diferenciable. •

EJEMPLO 3.7.

- (1) Todo grupo de Lie actúa sobre si mismo
- (2) Sea M una variedad y $X \in \mathcal{X}(M)$, el flujo de X es una acción del grupo de Lie $\mathbb{R}$ sobre M .

2. Simetrías de Lie

Una simetría es una aplicación sobre algún objeto que mantiene alguna propiedad, por ejemplo si a un cuadrado de lados indistinguibles se le aplican rotaciones de, $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ ó 2π , no cambian la forma en que percibimos el cuadrado.

De esta forma, dada una ecuación diferencial, las aplicaciones que usaremos como simetrías serán diffeomorfismos, es decir cambios de variables. Un cambio de coordenadas será una simetría si cumple la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.8. Dada una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y),$$

diremos que un cambio de coordenadas $\Gamma(x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ es una **simetría de la EDO**, si las nuevas variables $(\hat{x}, \hat{y})$ cumplen lo siguiente:

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y})$$

•

OBSERVACIÓN 3.9. Nóte que un grupo de Lie actuando sobre una variedad M , genera una familia de cambios de variables.

En este trabajo, no abarcaremos todos los tipos de simetrías posibles.

DEFINICIÓN 3.10. Dada una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$$

y G un grupo de Lie, diremos que una aplicación Γ de G sobre $\mathfrak{R}^2$ es una **simetría de Lie** para la EDO, si para cada $g \in G$, se tiene que $\Gamma_g := \Gamma(g, \vec{x})$ es una simetría de la EDO.

•

Nota: Para una EDO dada, nos concentraremos solamente en las simetrías de Lie, del grupo de Lie $\mathfrak{R}$.

Recuerde que todo flujo sobre $\mathfrak{R}^2$ es una acción de $\mathfrak{R}$ como grupo de Lie, y además, dada una acción de $\mathfrak{R}$ sobre $\mathfrak{R}^2$, las derivadas de las variables con respecto a su acción generan un campo, la acción sera el flujo de este campo, es decir, en este trabajo solo nos concentraremos en las simetrías en forma de flujo.

DEFINICIÓN 3.11. Sea $\Gamma : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ una simetría de Lie de $\mathfrak{R}$ sobre $\mathfrak{R}^2$, llamaremos al campo de Γ en t_0 , como:

$$X_{\Gamma t_0} := \frac{\partial \Gamma(t, x, y)}{\partial t} \Big|_{t=t_0}$$

•

Existen ciertas simetrías que nos dan información de la EDO, ilustraremos a continuación una muy importante. Si la siguiente EDO:

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r, s),$$

posee como simetría de Lie la siguiente aplicación:

$$\Gamma_t(r, s) \rightarrow (r, s + t),$$

entonces se tiene que:

$$\Omega(r, s + t) = \frac{d(s + t)}{dr} = \frac{ds}{dr} = \Omega(r, s),$$

por tanto, derivando con respecto a t , se obtiene que $\frac{\partial \Omega}{\partial s} = 0$, entonces Ω no depende de s y la ecuación diferencial nos queda de la siguiente forma:

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r),$$

cuya solución es:

$$s = \int \Omega(r) dr.$$

Observe que el campo de este flujo en $t = 0$ es

$$X_{\Gamma_0} = \frac{\partial F_t}{\partial t} = \partial_s.$$

DEFINICIÓN 3.12. Dada una EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y),$$

diremos que un cambio de coordenadas $\varphi(x, y) \rightarrow (r, s)$ es canónico, si y sólo si, el cambio de variables

$$\Gamma_t(r, s) \rightarrow (r, s + t)$$

es una simetría de Lie de la nueva EDO:

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r).$$

Nota: Las coordenadas s, r se llamarán coordenadas canónicas. •

La idea de este método, es encontrar el cambio de coordenadas canónico $\varphi : (x, y) \rightarrow (r, s)$, que a nuestro problema de EDO original lo envíe a otro problema de EDO de solución trivial, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \rightarrow \frac{ds}{dr} = \Omega(r).$$

De esta misma forma, se puede reducir el grado de una ecuación diferencial, es decir, si una EDO de grado n dada:

$$\frac{ds^{(n)}}{d^{(n)}r} = \Omega(r, s, s', \dots, s^{(n-1)}),$$

Tiene simetría de Lie la siguiente aplicación:

$$\Gamma_t(r, s) \rightarrow (r, s + t),$$

como antes se puede ver que Ω no dependerá de la coordenada s , por tanto nuestro sistema queda

$$\frac{ds^{(n)}}{d^{(n)}r} = \Omega(r, s', \dots, s^{(n-1)}),$$

y haciendo un cambio de variable $v = s'$ tendremos

$$\frac{dv^{(n-1)}}{d^{(n)}r} = \Omega(r, v, \dots, v^{(n-2)})$$

es decir un problema de un grado menor.

3. Resolución de ecuaciones diferenciales usando simetrías de Lie

Luego de leer la sección anterior, surge la siguiente duda ¿cómo se encuentra el cambio de coordenadas canónico?, en esta sección nos concentraremos en aclarar esta duda, en varios pasos.

Dada una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y),$$

Primero, hay que encontrar una simetría de Lie para la EDO Γ , luego calcular su campo, digamos que el campo de este flujo en cero será:

$$X_{\Gamma_0} = \frac{\partial \Gamma_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \partial_x + \frac{\partial \hat{y}}{\partial t} \partial_y = \xi \partial_x + \eta \partial_y$$

Teniendo este campo se sabe que el cambio de coordenadas canónico φ convierte a una simetría de la EDO original, a una simetría de la EDO canónica, de esta manera φ convierte el campo de Γ_t al campo canónico, es decir: como $\varphi(x, y) \rightarrow (r(x, y), s(x, y))$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial r}{\partial y} \eta\right) \partial_r &= 0 \cdot \partial_r \\ \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial s}{\partial y} \eta\right) \partial_s &= 1 \cdot \partial_s \end{aligned}$$

Resolviendo este problema de EDP se encuentra el cambio de coordenadas deseado φ .

OBSERVACIÓN 3.13. Recuerde que nuestro problema original puede ser cualquiera, no necesariamente lineal, así, que una EDP no necesariamente será más difícil que la EDO.

Ahora falta explicar cómo encontrar alguna simetría de Lie, y para ello usaremos una EDO de orden n .

Sea el siguiente problema de EDO:

$$(3.1) \quad \frac{\partial y^{(n)}}{\partial^{(n)} x} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Si $\Gamma_t : (x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ es una simetría de Lie para 3.1, con campo

$$X_{\Gamma_0} = \xi \partial_x + \eta \partial_y,$$

este flujo genera otro flujo en $\mathfrak{N}^{n+2}$ es decir

$$\Gamma_t : (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n)}),$$

para encontrar el flujo de este campo en función de ξ y η , puede ser complicado, con esta finalidad veremos el flujo como un polinomio de Taylor en variable t , es decir:

$$\hat{x} = x + t\xi + O(t^2)$$

$$\hat{y} = y + t\eta + O(t^2)$$

donde $O(t^2)$ representa a los términos que poseen ordenes mayores o iguales que t^2 .

Luego tenemos que:

$$\hat{y}' = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{d\hat{y}/dx}{d\hat{x}/dx} = \frac{y' + tD_x\eta + O(t^2)}{1 + tD_x\xi + O(t^2)} = y' + t(D_x\eta - y'D_x\xi) + O(t^2),$$

siendo D_x la derivada total con respecto a la variable x .

Así, denotamos a

$$\eta^{(1)} = \frac{\partial \hat{y}'}{\partial t} \Big|_{t=0} = (D_x \eta - y' D_x \xi)$$

Y procediendo como antes:

$$\hat{y}'' = \frac{d\hat{y}'}{d\hat{x}} = \frac{d\hat{y}'/dx}{d\hat{x}/dx} = \frac{y'' + t D_x \eta^{(1)} + O(t^2)}{1 + t D_x \xi + O(t^2)} = y'' + t(D_x \eta^{(1)} - y' D_x \xi) + O(t^2)$$

Denotemos ahora a

$$\eta^{(2)} = \frac{\partial \hat{y}''}{\partial t} \Big|_{t=0} = D_x \eta^{(1)} - y' D_x \xi$$

Y haciendo este procedimiento sucesivamente obtenemos

$$\eta^{(k)} = \frac{\partial \hat{y}^{(k)}}{\partial t} \Big|_{t=0} = D_x \eta^{(k-1)} - y' D_x \xi.$$

Con esto, el campo de la extensión de Γ lo denotaremos por

$$X^{(n)} = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta^{(1)} \cdot \partial_{y'} + \dots + \eta^{(n)} \partial_{y^{(n)}}.$$

El campo de la simetría Γ , es decir $\xi \partial_x + \eta \partial_y$, se obtiene buscando las soluciones para ξ y η de la EDP:

$$X^{(n)}(y^{(n)} - \omega(x, y, y', \dots, y^{(n)})) = 0$$

EJEMPLO 3.14. Sea el siguiente problema de EDO:

$$y'' = \frac{y'}{y^2}$$

Como esta EDO es de orden 2, solo usaremos a $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$, coloquemos estos términos en función de ξ e η y tenemos:

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y (y')^2$$

$$\eta^{(2)} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) (y')^2 - \xi_{yy} (y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y''.$$

Buscamos las simetrías con la ecuación

$$\begin{aligned}
 X^{(2)}(y^{(2)} - \omega(x, y, y')) &= 0 \\
 \Rightarrow X^{(2)}(y^{(2)} - \frac{y'}{y^2}) &= 0 \\
 \Rightarrow X^{(2)}(y^{(2)}((y^{(2)}) - X^{(2)}\frac{y'}{y^2}) &= 0 \\
 \Rightarrow \eta^{(2)} - (\xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta^{(1)} \partial_y')(\frac{y'}{y^2}) &= 0 \\
 \Rightarrow \eta^{(2)} - \eta y' \frac{(-2)}{y^3} - \eta^{(1)} \frac{1}{y^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\eta^{(2)}$ y $\eta^{(1)}$ en la ecuación y acomodando términos queda de la siguiente manera:

$$\xi_{yy}(y')^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - 2\frac{\xi_y}{y^2})(y')^2 + (2\eta_{xy} - \xi_{xx} - \frac{\xi_x}{y^2} + 2\frac{\eta}{y^3})y' + \eta_{xx} - \frac{\eta_x}{y^2} = 0,$$

de donde se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 (y')^3: \quad \xi_{yy} &= 0 \\
 (y')^2: \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} - 2\frac{\xi_y}{y^2} &= 0 \\
 Y': \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - \frac{\xi_x}{y^2} + 2\frac{\eta}{y^3} &= 0 \\
 1: \quad \eta_{xx} - \frac{\eta_x}{y^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$\xi = c_1 2x + c_2$$

$$\eta = c_1 y$$

Siendo así, el campo original de Γ es:

$$X = (c_1 2x + c_2) \partial_x + c_1 y \partial_y$$

El cual es combinación lineal de los generadores infinitesimales:

$$X_1 = 2x \partial_x + y \partial_y$$

$$X_2 = \partial_x$$

Y como $[X_1, X_2] = -2X_2$, para encontrar el cambio de variable adecuado solamente usaremos a X_2 , y sustituyendo este campo en las condiciones que debe cumplir el cambio de variable canónico $\varphi(x, y) \rightarrow (r, s)$ tenemos el siguiente sistema de EDP

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial r}{\partial y} \eta &= 0 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial s}{\partial y} \eta &= 1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = 1\end{aligned}$$

Una solución sencilla para esto es $\varphi : (x, y) \rightarrow (r, s) = (y, x)$ de esta forma:

$$\begin{aligned}s' &= \frac{1}{y'} \\ \Rightarrow s'' &= -\frac{y''}{(y')^2} = -\frac{1}{(y')^2} \cdot \frac{y'}{y^2} \\ \Rightarrow s'' &= -\frac{1}{y'} \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{s'}{r^2}.\end{aligned}$$

Y haciendo el cambio de variable $v = s'$ nos queda:

$$v' = \frac{v}{r^2}.$$

Que, además de ser de un orden menor que el anterior, se puede resolver por separacion de variables. ☆

EJEMPLO 3.15. Sea el siguiente problema de EDO:

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + y^2$$

Como esta EDO es de orden 2, solo usaremos a $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$, coloquemos estos términos en funcion de ξ e η

Usando el cálculo correspondiente, tenemos:

$$\begin{aligned}\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (2\eta_{yy} - \xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_x - 2\xi_x - 3\xi_y y') \left(\frac{(y')^2}{y} - y^2 \right) \\ = \eta \left(-\frac{(y')^2}{y^2} - 2y \right) + \{ \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2 \} \left(\frac{2y'}{y} \right).\end{aligned}$$

de donde se obtienen las siguientes identidades:

$$(y')^3: \quad \xi_{yy} + \frac{1}{y}\xi_y = 0$$

$$(y')^2: \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} - \frac{1}{y}\eta_y + \frac{1}{y^2}\eta = 0$$

$$Y': \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + 3y^2\xi_y - 2\frac{\eta_x}{y} = 0$$

$$1: \quad \eta_{xx} - y^2(\eta_y - 2\xi_x) + 2y\eta = 0$$

Cuya solución es:

$$\xi = A(x) \ln|y| + B(x)$$

$$\eta = A'(x)y(\ln|y|)^2 + C(x)y \ln|y| + D(x)y$$

Donde A, B, C y D son funciones desconocidas a determinar, mas con un cálculo sencillo se puede ver que:

$$A(x) = 0 \quad B(x) = c_1 + c_2x$$

$$C(x) = 0 \quad D(x) = -c_2$$

de donde:

$$\xi = c_1 + c_2x$$

$$\eta = -2c_2y$$

Y el generador infinitesimal

$$X = (c_1 + c_2x)\partial_x - 2c_2y\partial_y$$

El cual es combinación lineal de los generadores infinitesimales:

$$X_1 = x\partial_x - 2y\partial_y$$

$$X_2 = \partial_x$$

Y como $[X_1, X_2] = X_2$, para encontrar el cambio de variable adecuado solamente usaremos a X_2 , y sustituyendo este campo en las condiciones que debe cumplir el cambio de variable canónico

$\varphi(x, y) \rightarrow (r, s)$ tenemos el siguiente sistema de EDP

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial r}{\partial y} \eta &= 0 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial s}{\partial y} \eta &= 1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = 1\end{aligned}$$

Una solución sencilla para esto es $\varphi : (x, y) \rightarrow (r, s) = (y, x)$ de esta forma:

$$\begin{aligned}s' &= \frac{1}{y'} \\ \Rightarrow s'' &= -\frac{y''}{(y')^2} = -\left(\frac{(y')^2}{y} - y^2\right)/(y')^2 \\ \Rightarrow s'' &= -\frac{1}{y} + \frac{y^2}{(y')^2} = -\frac{1}{r} + r^2(s')^2.\end{aligned}$$

Y haciendo el cambio de variable $v = s'$ nos queda:

$$v' = -\frac{1}{r} + r^2(v)^2..$$

Que es un orden menor que el anterior.



Capítulo 4

Método de la característica de Cartan-Monge y problema de Cauchy

Este método, consiste en reducir un problema de EDP, a un problema de Cauchy, buscando el campo característico de una curva característica que yace sobre la superficie solución.

Para simplificar la notación, dada una función " f ", denotaremos " f_x " como la derivada de f en función de x .

Las referencias que se seguirán en este capítulo son: [6], [4] , [3]

1. Cono de Monge

A continuación, ilustraremos la construcción del cono de Monge, a partir del siguiente problema de EDP de primer orden para la función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(4.1) \quad H(x, y, u, p, q) = 0$$

donde $p = u_x$, $q = u_y$, $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$ y $|H_p| + |H_q| > 0$.

Lo primero que se nota de este problema, es que cualquier solución debe estar embebida en la siguiente superficie:

$$S_H = \{(x, y, u, p, q) \in \mathbb{R}^5 / H(x, y, u, p, q) = 0\}$$

Más aun, como p y q están completamente determinadas por u , la solución se puede considerar como la superficie

$$\Sigma_H := \{(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Luego, para un punto fijo $(x_0, y_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$, se cumple lo siguiente:

(1) Si $(x_0, y_0, u_0) \in \Sigma_H$, su plano tangente viene dado por

$$T_{(x_0, y_0, u_0)} = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 / u - u_0 = (x - x_0)u_x + (y - y_0)u_y\},$$

es decir por:

$$T_{(x_0, y_0, u_0)} = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 / u - u_0 = (x - x_0)p + (y - y_0)q\}.$$

(2) Cada elemento del conjunto

$$S_{H(x_0, y_0, u_0)} := \{(p, q) \in \mathfrak{R}^2 / H(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0\},$$

genera un plano en $\mathfrak{R}^3$, que pasa por el punto (x_0, y_0, u_0) , dado por la ecuación:

$$u - u_0 = (x - x_0)p + (y - y_0)q.$$

De modo, que para cada punto de $\mathfrak{R}^3$, se tiene una familia de planos.

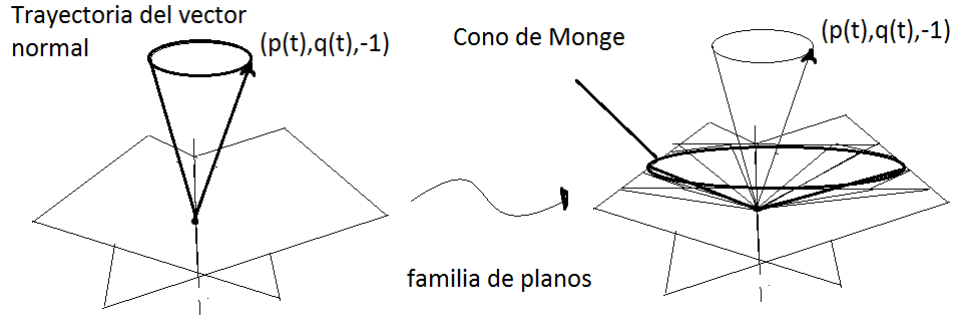


FIGURA 4.1. Cono de Monge

Esta familia de planos, alrededor de (x_0, y_0, z_0) , da lugar a una superficie, denominada **cono de Monge**, que denotaremos por $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$. Para formar esta superficie, procedemos con lo siguiente:

Para el punto $(x_0, y_0, u_0) \in \mathfrak{R}^3$, y una curva sobre $S_{H(x_0, y_0, u_0)}$, la familia de planos en $\mathfrak{R}^3$ generada, como se muestra en la figura 4.1, se describe de la siguiente manera:

$$u - u_0 = (x - x_0)p(t) + (y - y_0)q(t).$$

Si variamos t , tenemos:

$$u - u_0 = (x - x_0)p(t + \Delta t) + (y - y_0)q(t + \Delta t),$$

los puntos que forman parte de ambos planos poseen la siguiente propiedad

$$0 = (x - x_0) \left(\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} \right) + (y - y_0) \left(\frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} \right),$$

haciendo tender Δt a cero tendremos lo siguiente:

$$0 = (x - x_0) \frac{dp}{dt} + (y - y_0) \frac{dq}{dt}.$$

Como esto es para cualquier curva, tendremos la siguiente condición:

$$0 = (x - x_0) dp + (y - y_0) dq.$$

OBSERVACIÓN 4.1. En este caso de EDP de dos variables, sólo tendremos una curva, pues la condición $|H_p| + |H_q| > 0$, nos indica, por el teorema de la función implícita, que la solución de la ecuación $H(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0$, en un entorno de p , se puede escribir de la forma $(p, q(p))$, o viceversa.

Y si ahora tomamos una curva $(x(t), y(t), u(t))$ sobre $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$, se obtiene la siguiente igualdad:

$$0 = \frac{dx}{dt} dp + \frac{dy}{dt} dq,$$

y además existirán $(p, q) \in S_{H(x_0, y_0, u_0)}$, tal que

$$du = p dx + q dy.$$

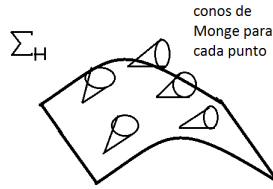


FIGURA 4.2. Conos tangentes para cada punto

Nótese, que para cada punto $(x_0, y_0, u_0) \in \Sigma_H$, se tiene que $T_{(x_0, y_0, u_0)}$ coincide con un plano tangente de $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$, es decir Σ_H y $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$ son tangentes en (x_0, y_0, u_0) , como se ilustra en la figura 4.2.

Veamos algunas propiedades que deben cumplir los vectores tangentes a los espacios $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$ y S_H con la siguiente construcción:

Como para $(x_0, y_0, u_0) \in \mathfrak{X}^3$ fijo se tiene

$$H(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0,$$

tenemos que, en S_H se cumple:

$$H_p dp + H_q dq = 0.$$

Como para las uno formas dp y dq en S_H , se tiene en $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$ la siguiente propiedad $0 = \langle (dx, dy), (dp, dq) \rangle$, se puede obtener fácilmente lo siguiente:

$$\frac{dx}{H_p} = \frac{dy}{H_q}.$$

Además como en $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$, para los (p, q) tal que $H(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0$, se cumple la condición $du = \langle (dx, dy), (p, q) \rangle$, tendremos la siguiente identidad para los vectores tangentes a $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$ y S_H :

$$\frac{dx}{H_p} = \frac{dy}{H_q} = \frac{du}{H_p p + H_q q}$$

Con esto, podemos concluir que cualquier campo tangente a la superficie solución en (x_0, y_0, u_0) , que a su vez es tangente a $\Xi_{(x_0, y_0, u_0)}$ y a S_H , debe cumplir con el siguiente sistema:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = H_p \\ \frac{dy}{dt} = H_q \\ \frac{du}{dt} = p H_p + q H_q \end{cases}$$

De esta forma, el campo característico que buscamos en este método, debe satisfacer el sistema 4.2. Sin embargo estas condiciones no determinan el campo, pues son 3 ecuaciones con 5 incógnitas.

Para completar las ecuaciones que determinan el campo, es decir para aplicar condiciones sobre p y q , sigamos las siguientes identidades:

Dado que

$$H(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

se siguen las relaciones:

$$H_x + u_x H_u + u_{xx} H_p + u_{yx} H_q = 0,$$

$$H_y + u_y H_u + u_{xy} H_p + u_{yy} H_q = 0,$$

es decir:

$$u_{xx} H_p + u_{yx} H_q = -H_x - u_x H_u,$$

$$u_{xy}H_p + u_{yy}H_q = -H_y - u_yH_u,$$

y como:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{du_x}{dt} = u_{xx}H_p + u_{yx}H_q = -H_x - u_xH_u, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{du_y}{dt} = u_{xy}H_p + u_{yy}H_q = -H_y - u_yH_u,\end{aligned}$$

Por último, escribiremos estas relaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -H_x - pH_u, \\ \frac{dq}{dt} &= -H_y - qH_u.\end{aligned}$$

En conclusión, el campo característico tangente a la superficie solución, que a su vez es tangente al cono de Monge, debe cumplir estas condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt}(x, y, u, p, q) = H_{p(x,y,u,p,q)} \\ \frac{dy}{dt}(x, y, u, p, q) = H_{q(x,y,u,p,q)} \\ \frac{du}{dt}(x, y, u, p, q) = pH_{p(x,y,u,p,q)} + qH_{q(x,y,u,p,q)} \\ \frac{dp}{dt} = -H_{x(x,y,u,p,q)} - pH_{u(x,y,u,p,q)} \\ \frac{dq}{dt} = -H_{y(x,y,u,p,q)} - qH_{u(x,y,u,p,q)} \end{array} \right.$$

Ahora comprobemos que cualquier campo que cumpla con estas condiciones, realmente mantiene a los puntos de S_H dentro de S_H .

Supongamos que se puede resolver este sistema de EDO, es decir supongamos una curva integral del campo: $h(t) = (x(t), y(t), u(t), p(t), q(t))$ siendo $h(0) = (x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$. Se puede verificar fácilmente que

$$(H(h(t)))' = 0$$

De donde $H(g(t))$ es constante, y por tanto, de cumplirse la condición de $H(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$, se deberá satisfacer para todo t que:

$$(H(h(t))) = 0.$$

OBSERVACIÓN 4.2. Cada elemento de esta curva nos da información del plano tangente que debería tener un punto que yace sobre la superficie solución como se muestra en la figura 4.3.



FIGURA 4.3. Planos para la curva

2. Problema de Cauchy para una EDP con dos variables

A la misma ecuación diferencial parcial de primer orden 4.1, le colocamos ahora esta condición inicial $(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s))$. Esta vez, se tratará de obtener una solución de la ecuación anterior.

A continuación, mostraremos el teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy.

TEOREMA 4.3. *Sea la ecuación en derivadas parciales*

$$H(x, y, u, p, q) = 0$$

donde $p = u_x$ y $q = u_y$, $H \in C^2(\mathfrak{R}^5, \mathfrak{R})$ y $|H_p| + |H_q| > 0$.

Con condición inicial $g(s) = (x(s), y(s), u(s), p(s), q(s))$, tal que $x(s), y(s), u(s) \in C^2(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ y $p(s), q(s) \in C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$.

Si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) (Condición de Banda)

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} = \frac{dx(s)}{ds} p(s) + \frac{dy(s)}{ds} q(s) \\ H(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) = 0 \end{cases}$$

(2) (Condición de transversalidad)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dx(s)}{ds} & \frac{dy(s)}{ds} \\ H_p(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) & H_q(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces existe un entorno $G \subseteq \mathfrak{R}^2$ de la curva $(x(s), y(s))$ y una única función $u : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u(x(s), y(s)) = u(s) \\ u_x(x(s), y(s)) = p(s) \\ u_y(x(s), y(s)) = q(s) \\ H(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0 \end{cases}$$

Demostración:

La demostración de este teorema se encuentra en el capítulo 2 del libro [4].



OBSERVACIÓN 4.4.

- (1) La condición 1 del teorema 4.3, nos pide que la curva $g(s)$ sea realmente parte de la solución.
- (2) La condición 2 del teorema 4.3, nos pide que la curva $g(s)$ sea perpendicular a la curva integral característica solución del campo característico indicado anteriormente, y además, usando el teorema de la función inversa, que el cambio de variables de s, t a x, y exista y sea único.

EJEMPLO 4.5. Consideremos la ecuación

$$p^2 + q^2 = 1$$

La interpretación geométrica de la ecuación puede seguirse de la siguiente manera. Sea $(p, q, -1)$, un vector normal a una superficie solución, entonces la longitud de la proyección de éste sobre el plano $x|y$ posee magnitud 1, de forma que el vector $(p, q, -1)$ y el eje u forman un ángulo de $\pi/4$. En óptica geométrica las curvas de nivel de las soluciones son llamadas frentes de onda y las curvas características rayos.

Escribiendo la ecuación en los términos de este método tenemos:

$$H(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - 1 = 0$$

Es evidente que la función H satisface la condición $|H_q| + |H_p| \neq 0$ en

$$\Omega := \mathfrak{R}^3 \times (R^2 - (0, 0))$$

Y con un cálculo sencillo ponemos de manifiesto que el cono de Monge en el punto (x_0, y_0, u_0) , viene dado por las ecuaciones,

$$\begin{cases} (u - u_0) = p(x - x_0) + q(y - y_0) \\ \frac{x - x_0}{2p} = \frac{y - y_0}{2q} \\ 1 = p^2 + q^2 \end{cases}$$

Por lo que el sistema característico es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2p \\ \frac{dy}{dt} = 2q \\ \frac{du}{dt} = 2(p^2 + q^2) \\ \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{dq}{dt} = 0 \\ 1 = p^2 + q^2 \end{cases}$$

y sustituyendo la sexta ecuación en la tercera el sistema se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2p \\ \frac{dy}{dt} = 2q \\ \frac{du}{dt} = 2 \\ \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{dq}{dt} = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones se obtienen por integración elemental y resultan ser

$$\begin{cases} x(t) = 2p_0 t + x_0 \\ y(t) = 2q_0 t + y_0 \\ u(t) = 2t + u_0 \\ p(t) = p_0 \\ q(t) = q_0 \end{cases}$$

Si ahora tomamos como condición inicial la curva:

$$(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$$

los datos iniciales que se consideran para el sistema característico son las bandas obtenidas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p_0(s)x_0(s) + q_0(s)y_0(s) = u_0(s) \\ (p_0(s))^2 + (q_0(s))^2 = 1 \end{cases}$$

estas condiciones vienen dadas por la condicion de banda del teorema 4.3. una vez obtenida la solucion para $p_0(s)$ y $q_0(s)$ tenemos como solución del sistema a:

$$\begin{cases} x(t) = 2p_0(s)t + x_0(s) \\ y(t) = 2q_0(s)t + y_0(s) \\ u(t) = 2t + u_0(s) \\ p(t) = p_0(s) \\ q(t) = q_0(s) \end{cases}$$

☆

3. Método de la característica de Cartan-Monge

Este método consiste en una generalización del resultado anterior, para ecuaciones de primer orden.

Sea el siguiente problema de EDP, para la función incógnita $u \in C^2(\mathfrak{N}^n, \mathfrak{R})$

$$H(\vec{x}, u, \vec{p}) = 0$$

Donde $\vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{x}} u$, $H \in C^2(\mathfrak{N}^{2n+1}, \mathfrak{R})$, $\|H\| \neq 0$, es llamada función Hamiltoniana, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{\nabla}_{\vec{x}} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$. Y por último, la EDP se considerada con la siguiente condición inicial:

$$u|_{\Gamma_\varphi} = u_0$$

con $u_0 \in C^1(\Gamma_\varphi, \mathfrak{R})$, para la hipersuperficie suave:

$$\Gamma_\varphi = \{x \in \mathfrak{N} : \varphi(x) = 0, \|\varphi\| \neq 0\}$$

siendo $\varphi \in C(\mathfrak{N}^n, \mathfrak{R})$.

Igual que en el caso de dimensión dos, llamaremos a las superficies:

$$S_H := \{(\vec{x}, u, \vec{p}) \in \mathfrak{N}^{2n+1} / H(\vec{x}, u, \vec{p}) = 0\}$$

$$\Sigma_H := \{(\vec{x}, u(\vec{x})) / (\vec{x}, u, \vec{\nabla} u) \in S_H\}$$

Como dijimos antes, este método consiste en reducir la EDP a un problema de Cauchy, buscando el campo de un flujo sobre Σ_H . Para esto definimos un flujo en S_H , $F_t : S_H \rightarrow S_H$ cuyo campo lo denotaremos por $X : S_H \rightarrow T(S_H)$ es decir, tomaremos el campo “genérico”:

$$(4.3) \quad X(\vec{x}, u, \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{du}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Para encontrar este campo característico, igual que en el caso anterior, construimos nuevamente el cono de Monge, utilizando la familia de planos:

$$du = \langle \vec{p}, d\vec{x} \rangle,$$

es decir, definiendo la siguiente uno forma:

$$\alpha := \langle \vec{p}, d\vec{x} \rangle - du,$$

impondremos que sea cero en el cono de Monge Ξ_p , para todo punto $p \in \Sigma_H$:

$$\alpha|_{\Sigma_H} = 0,$$

Usando el teorema de Frobenius, versión para formas diferenciales¹, imponemos esta segunda condición, equivalente a la segunda condición del cono de Monge:

$$d\alpha = \langle d\vec{p}, \wedge d\vec{x} \rangle|_{\Sigma_H} = 0.$$

Por otro lado, la uno forma en $\mathfrak{R}^{2n+1}$, que genera la distribución que caracteriza a S_H como solución, es:

$$dH = \langle H_{\vec{x}}, d\vec{x} \rangle + H_u du + \langle H_{\vec{p}}, d\vec{p} \rangle = 0.$$

Intersectando las condiciones entre el cono de Monge y S_H , tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} dH|_{\Sigma_H} &= \langle H_{\vec{x}}, d\vec{x} \rangle + H_u du + \langle H_{\vec{p}}, d\vec{p} \rangle \\ &= \langle H_{\vec{x}}, d\vec{x} \rangle + H_u \langle \vec{p}, d\vec{x} \rangle + \langle H_{\vec{p}}, d\vec{p} \rangle \\ &= \langle H_{\vec{x}} + H_u \vec{p}, d\vec{x} \rangle + \langle H_{\vec{p}}, d\vec{p} \rangle. \end{aligned}$$

¹Ver 5.1 de la sección 5.1 del capítulo de Preliminares de geometría diferencial

Y tomando el campo “generico” 4.3, definimos la siguiente uno-forma:

$$\beta := d\alpha(X) = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt}, d\vec{x} \right\rangle - \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, d\vec{p} \right\rangle$$

recuerde que

$$\beta|_{\Sigma_H} = 0$$

Si ponemos como condición, que la uno-forma β se anule en todo S_H , tendremos, por las condiciones de integrabilidad del teorema de Frobenius, que β y dH estan relacionados, por que dH genera a todas las uno-formas que se hacen cero sobre todo S_H , por lo que existe una función escalar $\mu(x)$ tal que:

$$\beta = \mu(x)dH,$$

entonces

$$\mu \left(\left\langle \vec{\nabla}_{\vec{x}} H + \frac{\partial H}{\partial u} \vec{p}, d\vec{x} \right\rangle + \left\langle \vec{\nabla}_{\vec{p}} H, d\vec{p} \right\rangle \right) = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt}, d\vec{x} \right\rangle - \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, d\vec{p} \right\rangle,$$

e igualando coordenada a coordenada, tenemos el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \mu \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} H + \frac{\partial H}{\partial u} \vec{p} \right), \\ \frac{d\vec{x}}{dt} = -\mu \vec{\nabla}_{\vec{p}} H, \\ \frac{du}{dt} = -\mu \langle \vec{p}, \vec{\nabla}_{\vec{p}} H \rangle. \end{cases}$$

El cual es un problema de Cauchy.

OBSERVACIÓN 4.6. La uno-forma β tambien se puede formar de la siguiente manera:

Dado que en Σ_H se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{d\vec{\nabla}u}{dt} = J(\vec{\nabla}u) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

y dado que $J(\vec{\nabla}u)$ es una matriz simétrica (por intercambio de derivadas parciales) tenemos esta otra identidad

$$\left\langle \frac{d\vec{\nabla}u}{dt}, d\vec{x} \right\rangle = \left\langle J(\vec{\nabla}u) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}, d\vec{x} \right\rangle = \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, J(\vec{\nabla}u) \cdot d\vec{x} \right\rangle = \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, d\vec{\nabla}u \right\rangle,$$

asi definimos la siguiente uno forma en S_H :

$$\beta := \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt}, d\vec{x} \right\rangle - \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, d\vec{p} \right\rangle.$$

Capítulo 5

Fibrados de jets

En este capítulo expondremos la formulación geométrica de la teoría formal de ecuaciones diferenciales. Con teoría formal nos referimos a ver una ecuación diferencial como un elemento de un espacio. La herramienta geométrica que utilizaremos para este formalismo es la del fibrado de Jet, que explicaremos en la primera sección de éste capítulo. En la segunda sección mostraremos a las ecuaciones diferenciales como secciones del fibrado de Jet. Por último presentaremos algunos ejemplos, en la tercera sección.

Las referencias a usar en este capítulo son: [14], [2], [7], [15], [5].

1. Introducción y definición de fibrados de jet

Sean M una m -variedad y N una n -variedad, además sea $\varphi : M \rightarrow N$ una función diferenciable entre las variedades. Para un punto $p \in M$ podremos encontrar las cartas $p \in U_p \subset M$ y $\varphi(p) \in U_{\varphi(p)} \subset N$ tal que φ se pueda ver como una función de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, de esta manera siendo a través de las cartas correspondientes $p = (x_1, \dots, x_m)$ y $\varphi(p) = (u^1, \dots, u^n)$, localmente, podremos ver a la función φ de la forma $u^\alpha = \varphi^\alpha(x_1, \dots, x_m)$ para $1 \leq \alpha \leq n$. En términos de ecuaciones diferenciales las coordenadas de p son llamadas variables independientes y las coordenadas de u , variables dependientes.

OBSERVACIÓN 5.1. A partir de ahora tomaremos a cualquier punto $p \in M$ como el punto a través de su carta $x \in \mathbb{R}^m$, y simplemente denotaremos $x \in M$.

Notación: Denotaremos a μ por $\mu = (j_1, \dots, j_q) \in \mathbb{N}^q$ y en este caso escribiremos $|\mu| = j_1 + \dots + j_q$ y $\mu! = j_1! \dots j_q!$. μ es lo que se llama un multi-índice, y lo usamos para representar a las derivadas de un mismo orden, es decir, en una 2-variedad, tomamos $q = 2$, si $|\mu| = 2$ entonces

$$\partial x^\mu = \{\partial x_1^2, \partial x_2^2, \partial x_1 \partial x_2, \partial x_2 \partial x_1\}$$

y además

$(x - x_0)^\mu = \{(x_1 - x_{01})^2, (x_2 - x_{02})^2, (x_1 - x_{01})(x_2 - x_{02}), (x_2 - x_{02})(x_1 - x_{01})\}$ respectivamente.

Por otro lado, utilizando el teorema de Taylor, podemos expresar a φ^α localmente para un punto arbitrario $x_0 \in M$ como:

$$\varphi^\alpha(x) = \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} \frac{u_\mu^\alpha}{\mu!} (x - x_0)^\mu + R_q^\alpha(x, x_0)$$

donde x es la coordenada de p , x_0 de p_0 ,

$$u_\mu^\alpha = \frac{\partial^{|\mu|} \varphi^\alpha}{\partial x^\mu}(x_0),$$

y

$$R_q^\alpha(x, x_0) = \sum_{|\mu|=q+1} \frac{\partial^\alpha \varphi^\alpha}{\partial x^\mu}(x_0 + \xi(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^\mu}{\mu!}$$

para $\xi \in [0, 1]$

Ahora introduciremos una relación de equivalencia, para el conjunto de las funciones diferenciables de M a N , es decir en $C^\infty(M, N)$. Dos funciones φ y ϕ son equivalentes de orden q en $x_0 \in M$, es decir $\varphi \sim_q \phi$, si sus expansiones con Taylor de orden q en x_0 son idénticas. De esta manera definimos la clase de equivalencia:

$$[\varphi]_{x_0}^q := \{\phi \in C^\infty(M, N) | \phi \sim_q \varphi \text{ en } x_0\}.$$

Así podemos ver al **fibrado de jet** sobre las variedades M y N , como el fibrado cuya fibra en el punto x es el espacio de todos los q -jet $[\varphi]_x^q$, para $x \in M$ y $\varphi : M \rightarrow N$ diferenciable. Denotaremos a este fibrado como $J_q(M, N)$ y a su fibra en x como $J_q(M, N)_x$.

Se puede observar que para cada $x \in M$, $J_q(M, N)_x$ es, efectivamente, un espacio vectorial, y además tenemos como la proyección del fibrado a $\pi^q : J_q(M, N)_x \rightarrow M$ y a otras proyecciones $\pi_r^q : J_q(M, N)_x \rightarrow J_r(M, N)_x$ como la inclusión canónica.

Es fácil probar que si M es una m -variedad y N es una n -variedad:

$$\dim(J_q(M, N)_x) = m + n \binom{m+q}{q}$$

EJEMPLO 5.2. Si M es una 2 variedad y $N = \mathfrak{R}$ tenemos que $J_0(M, N)_x$ es generado por $\{x_1, x_2, u\}$, $J_1(M, N)_x$ es generado por $\{x_1, x_2, u, u_{[1,0]}, u_{[0,1]}\}$ y que $J_2(M, N)_x$ es generado por $\{x_1, x_2, u, u_{[1,0]}, u_{[0,1]}, u_{[2,0]}, u_{[1,1]}, u_{[0,2]}\}$.

Se puede notar que cualquier función φ , genera una asociación entre un punto de la variedad con un elemento de su espacio de jet, es decir, se tiene la siguiente sección del fibrado de Jet de orden q :

$$j_q \varphi := \begin{cases} M \rightarrow J_q(M, N) \\ x \rightarrow [\varphi]_x^q = \left(x, \frac{\partial^{|\mu|} \varphi^\alpha}{\partial x^\mu}(x) \right) \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 5.3. No toda función $\Phi : M \rightarrow J_q(M, N)$, tendrá la forma anterior, es decir no siempre existirá un $\varphi : M \rightarrow N$, tal que $\Phi = j_q \varphi$. Las condiciones para que esto suceda se verán mas adelante.

Se puede ver a $j_q \varphi$ no sólo como una sección, sino también como una subvariedad de dimensión m en $J_q(M, N)$, en este caso la denotaremos por $im(j_q \varphi)$.

Ya teniendo una idea de lo que es el fibrado de jets mostraremos la definición intrínseca, abstracta y teórica de este.

Dado un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$, y una sección sobre el fibrado $\phi : M \rightarrow F$. Como vimos en el capítulo de preliminares II, tanto F como M son variedades, así tomando ahora el espacio tangente de ambas, obtenemos un nuevo fibrado, $T\Pi : TF \rightarrow TM$, y una sección $T\phi : TM \rightarrow TF$. Fijando un punto $p \in M$ consideremos la restricción, $T_{\phi(p)}\Pi : T_{\phi(p)}F \rightarrow T_p M$ como un variedad, y la restricción $T_p \phi : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)}F$ como una sección. Así diremos que dadas dos secciones de F , ϕ_1, ϕ_2 están relacionadas con orden $q > 0$ en p , $\phi_1 \sim_q^p \phi_2$, si y sólo si, $T_p \phi_1 \sim_{q-1}^p T_p \phi_2$ y están relacionadas en orden 0 en p , $\phi_1 \sim_0^p \phi_2$, si y sólo si, $\phi_1(p) = \phi_2(p)$. Análogamente definimos la clase de equivalencia:

$$[\varphi]_p^q := \{\phi \in C^\infty(M, N) \mid \phi \sim_q^p \varphi\}.$$

DEFINICIÓN 5.4. El **fibrado de jet de orden q** sobre un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$, es el que posee como fibra de $p \in M$ al espacio de todos los q -jet $[\varphi]_p^q$, siendo $\varphi : M \rightarrow N$ funciones diferenciables. Este espacio es descrito como $J_q(\Pi)$ y a las fibras como $J_q(\Pi)_p$. •

OBSERVACIÓN 5.5.

- (1) Si tenemos como fibrado a $\Pi : N \times M \rightarrow M$, con Π como la proyección canónica, tenemos que $J_q(\Pi)$ concuerda perfectamente con la visión anterior de fibrado de Jet de orden q , $J_q(M, N)$, más simple.
- (2) Note que toda sección sobre el fibrado original, genera, una sección en el fibrado de Jets de orden q .

PROPOSICIÓN 5.6. *Dado un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$, cada proyección $\pi_{q-1}^q : J_q(\Pi) \rightarrow J_{q-1}(\Pi)$, es un fibrado afín, es decir, dado un cambio de carta en J_{q-1} varía a $J_q(\Pi)$ como una transformación afín.*

Demostración:

Solamente haremos la demostración para $F = N \times M$, viendo al fibrado de jets de orden q como $J_q(M, N)$ con el desarrollo de Taylor.¹

Dado un cambio de carta en M y N ($\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$) y ($\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n$) tenemos que:

$$\bar{u}_{j_1 \dots j_q}^\alpha = \sum_i \sum_\beta \left(\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \bar{x}_{j_1}} \dots \frac{\partial x_{i_q}}{\partial \bar{x}_{j_q}} \right) u_{i_1 \dots i_q}^\beta + \dots$$

donde los puntos son una expresión muy complicada que depende solamente de los órdenes menores que q . ☆

2. Formalismo de fibrados de jets para las ecuaciones diferenciales y sus soluciones

Teniendo ahora en mente, el fibrado de jets, daremos la definición geométrica de una ecuación diferencial, para un fibrado dado, como un objeto geométrico abstracto y sin tomar en cuenta coordenadas de ecuaciones locales.

DEFINICIÓN 5.7. Una ecuación diferencial de orden q , para un fibrado dado $\Pi : F \rightarrow M$, es una subvariedad fibrada $\mathcal{E}_q \subset J_q(\Pi)$. •

OBSERVACIÓN 5.8.

- (1) Con variedad fibrada nos referimos a que $\pi^q(\mathcal{E}_q) = M$.
- (2) Para el fibrado $\Pi : \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}^n \rightarrow \mathfrak{N}^n$, dada una función $H : J_q(\Pi) = J_q(\mathfrak{N}^n, \mathfrak{N}) \rightarrow \mathfrak{N}$, la preimagen del 0 es una ecuación diferencial tal cual la conocemos.

¹Una demostración completa se puede observar en el primer capítulo de [14]

EJEMPLO 5.9. Tomando el fibrado $\Pi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}^2$ y una función $H : J_1(\mathfrak{X}^2, \mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{X}$, tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$H(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0$$

Ahora necesitamos un concepto de solución para la ecuación.

DEFINICIÓN 5.10. Sea un fibrado dado $\Pi : F \rightarrow M$, y una ecuación diferencial de orden q , $\mathcal{E}_q \subset J_q(\Pi)$, una solución es una sección suave $\phi : M \rightarrow F$ tal que $im(j_q \phi) \subseteq \mathcal{E}_q$. •

Como dijimos antes, no toda sección suave sobre un fibrado de Jet de orden q , posee la forma $j_q \phi$, para algun $\phi : M \rightarrow F$. Con el objetivo de ver qué condiciones extra debe cumplir una sección, para poseer esta forma, veamos lo siguiente, pensando solamente en el caso de $F = N \times M$ y $J_q(\Pi) = J_q(M, N)$.

DEFINICIÓN 5.11. Para un fibrado dado $\Pi : F = N \times M \rightarrow M$, una uno-forma $\omega \in \mathcal{A}(J_q(M, N))$, en el fibrado de jet $J_q(M, N)$, es una **forma de contacto**, si para cualquier sección $\varphi : M \rightarrow M \times N$, ω se anula en $im(j_q \varphi)$.

Nota: las formas de contacto generan una codistribución $\mathcal{C}_q^* \in T^*(J_q(M, N))$, a la cual llamaremos codistribución de contacto. •

Para entender un poco mejor esta definición, veamos las siguientes:

PROPOSICIÓN 5.12. Sea $q \in \mathbb{N}$, M una m -variedad y N una n -variedad. Para todo $1 \leq \alpha \leq n$ y todo multi-índice μ con $0 \leq |\mu| < q$, la uno-forma

$$\omega_\mu^\alpha = du_\mu^\alpha - \sum_{i=1}^m u_{\mu+1_i}^\alpha dx_i$$

es una forma de contacto en $J_q(M, N)$. La distribución de contacto $\mathcal{C}_q^*$, es localmente generada por todas estas formas y por tanto $dim \mathcal{C}_q^* = n \binom{m+q-1}{q-1}$.

Demostración:

Un elemento general de $\mathcal{A}^1(J_q(M, N))$ es de la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^m a_i dx_i + \sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq |\beta| \leq q} b_\beta^v du_\beta^v$$

para el multi-índice β .

Sea $\phi : M \rightarrow N$ y $\varphi : im(j_q \phi) \rightarrow J_q(M, N)$ la correspondiente inclusión natural. Entonces el pull-back de ω será de la forma:

$$\varphi_* \omega = \sum_{i=1}^m \left(a_i + \sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq |\beta| \leq q} b_{\beta}^v \frac{\partial^{|\beta|+1} \phi^v}{\partial x^{|\beta|+1}_i} \right) dx_i$$

Por tanto es sencillo probar la primera parte de la proposición si $a_i = -\sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq |\beta| \leq q} \frac{\partial^{|\beta|+1} \phi^v}{\partial x^{|\beta|+1}_i} b_{\beta}^v$ y los términos para $|\beta| = q$ se anulan, obviamente $\varphi_* \omega = 0$ con lo que ω_{μ}^{α} es una forma de contacto.

Por otro lado probemos ahora que generan a $\mathcal{C}_q^*$, tomemos $\rho = [\phi]_{x_0}^{(q)}$ un punto arbitrario en la subvariedad $im(j_q \phi)$. Todos los elementos en la clase ρ tienen las mismas derivadas excepto por las de orden $q+1$ si tomamos otro elemento de la clase $\bar{\phi} \in \rho$ que tenga en x_0 sólo una derivada de orden $q+1$ diferente de ϕ , es decir $c = (\partial^{q+1} \phi^v / \partial x^{\beta_i})(x_0) \neq (\partial^{q+1} \bar{\phi}^v / \partial x^{\beta_i})(x_0) = \bar{c}$ para algún $|\beta_i| = q+1$, tenemos que, siendo $\bar{\varphi} : im(j_q \bar{\phi}) \rightarrow J_q(M, N)$ la inclusión canónica, toda una forma $\omega \in \mathcal{C}_q^*$ debe cumplir lo siguiente:

$$\varphi_* \omega = \bar{\varphi}_* \omega = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_* \omega - \bar{\varphi}_* \omega = 0$$

$$\Rightarrow (c - \bar{c}) b_{\beta_i}^v(\rho) dx_i = 0$$

$$\Rightarrow b_{\beta_i}^v(\rho) = 0$$

y por ser arbitrario, tenemos que toda forma de contacto cumple $b_{\beta_i}^v = 0$ para todo $|\beta| = q+1$, y en general para todo $|\beta| > q$, además se puede ver facilmente que cualquier forma generada sólo por los elementos dx_i no puede ser una forma de contacto, por tanto, sólo nos quedan $n \binom{m+q-1}{q-1}$ elementos linealmente independientes para conformar a las uno-formas de contacto, número que coincide, justamente, con el número de formas linealmente independientes dadas ω_{μ}^{α} , y teniendo esta cantidad de elementos linealmente independientes dentro del espacio, solo queda que éstos sean una base. $\star$

Veamos ahora, las condiciones que debe cumplir una sección $\Phi : M \rightarrow J_q(M, N)$, para que se pueda escribir como $\Phi = j_q \phi$, para alguna sección $\phi : M \rightarrow N \times M$, a través de la siguiente

PROPOSICIÓN 5.13. *Sea $q \in \mathbb{N}$, M una m -variedad y N una n -variedad. Cualquier sección $\Phi : M \rightarrow J_q(M, N)$, que satisfaga $\pi^q \circ \Phi = id_M$, se puede escribir de la forma $\Phi = j_q \phi$, para alguna $\phi : M \rightarrow N \times M$, si y sólo si $im(\Phi) \subset J_q(M, N)$, es una superficie integral de $\mathcal{C}_q^*$.*

Demostración:

Sea la sección $\Phi : M \rightarrow J_q(M, N)$, que en coordenadas locales se puede escribir de la forma $\Phi(x) = (\vec{x}, (\phi_\mu^\alpha))$. Si $im(\Phi)$ es una variedad integral de $\mathcal{C}_q^*$, Φ debe hacerse cero para todos los elementos que generan a $\mathcal{C}_q^*$, es decir:

$$\Phi^* \omega_\mu^\alpha = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_\mu^\alpha}{\partial x_i} - \phi_{\mu+1_i}^\alpha \right) dx_i = 0$$

y como es para todo α y μ tenemos:

$$\phi_{\mu+1_i}^\alpha = \frac{\partial \phi_\mu^\alpha}{\partial x_i}$$

y con esto queda claro que $\Phi = j_q \phi$. ☆

Ahora veamos estos resultados, en términos de los campos vectoriales, en vez de las formas diferenciales.

DEFINICIÓN 5.14. Sean M y N variedades, la **distribución de contacto** $\mathcal{C}_q \subset T(J_q(M, N))$, consiste en todos los vectores tangentes, que son anulados por las formas de contacto. A los elementos de $\mathcal{C}_q$, les llamaremos vectores de contacto.

Y análogamente, para entender mejor la estructura de estos vectores de contacto, tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 5.15. *La forma de contacto $\mathcal{C}_q \subset T(J_q(M, N))$, para las m y n -variedades dadas M y N respectivamente, es localmente generada por los campos:*

$$C_i^{(q)} = \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{0 \leq |\mu| < q} u_{\mu+1_i}^\alpha \partial_{u_{\mu+1_i}^\alpha},$$

y para $1 \leq \alpha \leq n$ y $|\mu| = q$:

$$C_\alpha^\mu = \partial_{u_\mu^\alpha}$$

Con lo que $dim(\mathcal{C}_q) = n + m(n+q-1_q)$. Y por otro lado, toda función $\Phi : M \rightarrow J_q(M, N)$, tal que $\pi^q \circ \Phi = id_M$, es una prolongación, si y sólo si $T(im(\Phi)) \in \mathcal{C}_q|_{im(\Phi)}$, es decir, si y sólo si $im(\Phi)$ es

una variedad integral de $\mathcal{C}_q$.

Demostración:

Se sigue fácilmente de las demostraciones 5.12 y 5.13. ☆

OBSERVACIÓN 5.16.

(1) Note lo siguiente, si $|\mu| + 1 < q$:

$$\begin{aligned}
 -\sum_{i=1}^m \omega_{\mu+1_i}^\alpha \wedge dx_i &= -\sum_{i=1}^m (du_{\mu+1_i}^\alpha - \sum_{j=1}^m u_{\mu+2_{ij}}^\alpha dx_j) \wedge dx_i \\
 &= -\sum_{i=1}^m (du_{\mu+1_i}^\alpha \wedge dx_i) + \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^m u_{\mu+2_{ij}}^\alpha dx_j \wedge dx_i) \\
 &= -\sum_{i=1}^m du_{\mu+1_i}^\alpha \wedge dx_i \\
 &= d\omega_\mu^\alpha
 \end{aligned}$$

(2) Veamos si la codistribución $\mathcal{C}_q^*$, es involutiva. Como

$$d\omega_\mu^\alpha = -\omega_{\mu+1}^\alpha \wedge dx_i$$

para todo $|\mu| < q - 1$ tenemos que efectivamente lo sería si no fuese por los términos donde μ toma su máximo valor $|\mu| = q - 1$.

(3) Dualmente se puede observar que $\mathcal{C}_q$, es involutiva excepto por los términos donde $|\mu| = q$, es decir, el corchete de Lie se hace cero excepto por:

$$[C_\alpha^{\beta+1_i}, C_i^{(q)}] = \partial_{u_\beta}^\alpha$$

para el arbitrario multi índice β tal que $|\beta| = q + 1$.

3. Prolongación y proyección de una ecuación diferencial

Ya con una idea de las condiciones que una sección sobre el fibrado de jets de orden q , debe cumplir para ser solución de una ecuación, introduciremos dos operaciones geométricas, la prolongación y la proyección, de una ecuación diferencial.

Dado un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$ y una ecuación diferencial $\mathcal{E}_q \subseteq J_q(\Pi)$, podemos notar lo siguiente:

- (1) La proyección $\bar{\Pi}^q : \mathcal{E}_q \rightarrow M$ genera un nuevo fibrado.
- (2) siendo $\pi^q : J_q(\Pi) \rightarrow M$ tenemos que los siguientes fibrados de jets cumplen $J_r(\bar{\Pi}^q) \subseteq J_r(\pi^q)$.
- (3) Existe una inclusión entre $\gamma : J_{q+r} \hookrightarrow J_r(\pi^q)$.

DEFINICIÓN 5.17. Dado un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$ y una ecuación diferencial $\mathcal{E}_q \subseteq J_q(\Pi)$ definimos la **prolongación** de grado r de la ecuación diferencial, como:

$$\mathcal{E}_{q+r} = \gamma^{-1}(J_r(\bar{\Pi}^q) \cap \gamma(J_{q+r}(\Pi))) \subseteq J_{q+r}(\Pi).$$

•

Nota: A modo de simplificar, podemos decir directamente que la prolongación es:

$$\mathcal{E}_{q+r} = J_r(\bar{\Pi}^q) \cap J_{q+r}(\Pi).$$

Esta definición puede ser algo complicada de observar. Para dar una idea mas sencilla de la acción local de la prolongación, continuaremos dando un operador sobre las funciones de $J_q(M, N)$ a $\mathfrak{R}$, llamado derivada total. Para introducir la noción de éste operador, tomemos una función $F : J_q(M, N) \rightarrow \mathfrak{R}$, entonces:

$$dF = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{1 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial F}{\partial u_\mu^\alpha} du_\mu^\alpha$$

pero con las uno formas de contacto:

$$\omega_\mu^\alpha = du_\mu^\alpha - \sum_{i=1}^m u_{\mu+1_i}^\alpha dx_i = 0$$

podemos pensar en sustituir a

$$du_\mu^\alpha = \sum_{i=1}^m u_{\mu+1_i}^\alpha dx_i$$

con lo que tendríamos:

$$dF = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{1 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial F}{\partial u_\mu^\alpha} u_{\mu+1_i}^\alpha \right) dx_i$$

de esta manera tenemos la siguiente:

DEFINICIÓN 5.18. Sean M y N una m -variedad y n -variedad respectivamente, el operador **derivada total** en i denotado como $D_i : C^\infty(J_q(M, N)) \rightarrow C^\infty(J_{q+1}(M, N))$ se define para una función cualquiera $F \in C^\infty(J_q(M, N))$ como:

$$D_i(F) := \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{1 \leq |\mu| \leq q} \frac{\partial F}{\partial u_\mu^\alpha} u_{\mu+1_i}^\alpha$$

•

Con esta definición podemos ilustrar lo siguiente:

Dadas las funciones $\phi : M \rightarrow N$ y $\Phi : J_q(M, N) \rightarrow \mathfrak{R}$ tendremos que se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{\partial(\Phi \circ j_q \phi)}{\partial x_i} = (D_i \Phi) \circ j_{q+1} \phi.$$

Este resultado es conocido como regla de la cadena.

EJEMPLO 5.19. Tomando en $J_1(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R})$ la función $\Phi(x, y, u, u_x, u_y) = (u_y)^2 - x(u_x)$ tenemos a:

$$(D_x \Phi)(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 2u_y u_{xy} - x u_{xx} - u_x,$$

$$(D_y \Phi)(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 2u_y u_{yy} - x u_{xy}.$$

Y si sustituimos por $j_2 \phi$ para $\phi : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tenemos $\bar{\Phi} = \Phi(x, y, \phi(x, y), \phi_x(x, y), \phi_y(x, y))$ y utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = 2\phi_y(x, y)\phi_{xy}(x, y) - x\phi_{xx}(x, y) - \phi_x(x, y)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 2\phi_y(x, y)\phi_{yy}(x, y) - x\phi_{xy}(x, y)$$

OBSERVACIÓN 5.20. Note que $C^\infty(J_q(M, N)) \subset C^\infty(J_{q+1}(M, N))$ dado que si $\Phi \in C^\infty(J_q(M, N))$ entonces $\Phi \circ \pi_q^{q+1} \in C^\infty(J_{q+1}(M, N))$, además note que:

$$D_i \Phi = C_i^{(q+1)}(\Phi \circ \pi_q^{q+1})$$

Ya con esta operación a la mano, tenemos que una ecuación diferencial $\mathcal{E}_q$, escrita localmente de la forma $H_i(x, u^{(q)}) = 0$, siendo $1 \leq i \leq k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $H_i : J_q(\pi) \rightarrow \mathfrak{R}$, podemos decir

que su prolongación de grado r es:

$$\mathcal{E}_{q+r} : \begin{cases} H_i(x, u^{(q)}) = 0, & 1 \leq i \leq k \\ D_j H_i(x, u^{(q)}) = 0, & 1 \leq j \leq n \\ \vdots \\ D_\mu H_i(x, u^{(q)}) = 0, & |\mu| = r \end{cases}$$

DEFINICIÓN 5.21. Dado un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$ y una ecuación diferencial $\mathcal{E}_q \subseteq J_q(\Pi)$ una **proyección** de grado r de una ecuación diferencial de grado q , $\mathcal{E}_q \subset J_q(\Pi)$ se define como:

$$\mathcal{E}_q^{(r)} = \pi_{q-r}^q(\mathcal{E}_q) \subseteq J_{q-r}(\Pi).$$

•

En contraste con la prolongación, esta definición es muy sencilla, pero su aplicación muy compleja. Dada la ecuación localmente de la forma $H_i(x, u^{(q)}) = 0$, la proyección consiste en eliminar algebraicamente los elementos de orden superior, y de no poder eliminar ninguno, se dice que la proyección es todo $J_{q-r}(\Pi)$.

Dada una ecuación diferencial $\mathcal{E}_q$, se suele denotar como $\mathcal{E}_q^{(r)}$, a la proyección en $J_q(\Pi)$, de la r prolongación en $J_{q+r}(\Pi)$. Se puede ver que $\mathcal{E}_q^{(r)} \subseteq \mathcal{E}_q$, sin embargo esta contención no siempre llega a ser una igualdad.

EJEMPLO 5.22. Dada un fibrado $\Pi : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^3$, consideremos la ecuación diferencial de primer orden $\mathcal{E}_1 \subset J_1(\Pi)$ definida por el sistema:

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u_z + y u_x = 0, \\ u_y = 0. \end{cases}$$

Entonces su prolongación será:

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u_z + y u_x = 0, & u_y = 0, \\ u_{xz} + y u_{xx} = 0, & u_{xy} = 0, \\ u_{yz} + y u_{xy} + u_x = 0, & u_{yy} = 0, \\ u_{zz} + y u_{xz} = 0, & u_{yz} = 0. \end{cases}$$

Y sustituyendo las ecuaciones $u_{yz} = 0$ y $u_{xy} = 0$ en $u_{yz} + y u_{xy} + u_x = 0$ tenemos que $u_x = 0$ por lo que la proyección es:

$$\mathcal{E}_1^{(1)} : \begin{cases} u_z = 0, \\ u_y = 0, \\ u_x = 0. \end{cases}$$

De donde es fácil ver que $\mathcal{E}_1^{(1)} \subsetneq \mathcal{E}_1$ y que $\mathcal{E}_1^{(1)} = \mathcal{E}_1^{(2)} = \mathcal{E}_1^{(3)} \dots$

☆

Note que en el ejemplo 5.22, la ecuación $\mathcal{E}_1^{(1)}$ no está implícita en $\mathcal{E}_1$, sin embargo, toda solución de $\mathcal{E}_1$ indudablemente debe satisfacer $\mathcal{E}_1^{(1)}$, en otras palabras no existen soluciones de $\mathcal{E}_1$ que no sean ya soluciones de $\mathcal{E}_1^{(1)}$, así podemos pensar en $\mathcal{E}_1$ como una ecuación diferencial con “problemas”. Para estos casos se presenta la siguiente

DEFINICIÓN 5.23. Dado un fibrado $\Pi : F \rightarrow M$, diremos que una ecuación diferencial $\mathcal{E}_q \subset J_q(\Pi)$, es formalmente integrable, si y sólo si, para todo $r \geq 0$, se tiene, $\mathcal{E}_{q+1}^{(1)} = \mathcal{E}_{q+1}$. •

Para ecuaciones diferenciales de primer orden $\mathcal{E}_1 \subset J_1(\Pi)$ podemos describir una condición de integrabilidad suficientemente clara. Imaginemos que nuestra ecuación diferencial está dada por el sistema $H = F = 0$ siendo $H, F : J_1(\Pi) \rightarrow \mathfrak{X}$, entonces nuestra prolongación en grado 1 será:

$$D_i H = \frac{\partial H}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} + \sum_j u_{ij} \frac{\partial H}{\partial u_{ij}}$$

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} + \sum_j u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$$

de donde podemos proyectar la ecuación.

$$\sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial u_i} D_i H - \frac{\partial H}{\partial u_i} D_i F \right] = \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial u_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} \right) - \frac{\partial H}{\partial u_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \right]$$

así definimos el siguiente corchete

$$[H, F] = \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial u_i} D_i H - \frac{\partial H}{\partial u_i} D_i F \right]$$

del cual podemos describir a $\mathcal{E}_1^{(1)}$ como $H = F = [H, F] = 0$. Estas condiciones son idénticas a $\mathcal{E}_1$, si y sólo si, $[H, F] = 0$ en $\mathcal{E}_1$, es decir $\mathcal{E}_1$ es formalmente integrable, si y sólo si, $[H, F] = 0$ en $\mathcal{E}_1$.

Se puede extender esta condición de integrabilidad a una ecuación diferencial de grado 1, que posea más de dos ecuaciones. Dado una ecuación diferencial $\mathcal{E}_1 \subset J_1(\Pi)$ descrita por el sistema $H_k = 0$, para todo $1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la condición de integrabilidad formal será, $[H_i, H_j] = 0$ en $\mathcal{E}_1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Esta condición se puede extender también a ecuaciones de orden superior, sin embargo, será una condición necesaria, mas no suficiente. Dadas las funciones $H \in C^\infty(J_q(\Pi), \mathfrak{R})$ y $F \in C^\infty(J_r(\Pi), \mathfrak{R})$, con $r \leq q$, definimos el corchete, como:

$$[H, F] = \sum_{|\mu|=r} \frac{\partial F}{\partial x_\mu} D_\mu H - \sum_{|\nu|=q} \frac{\partial H}{\partial x_\nu} D_\nu F.$$

4. Formalismo de fibrados de jets para simetrías y características de una ecuación

Este formalismo posee diferentes definiciones para abarcar los métodos de ecuaciones diferenciales, un ejemplo de este hecho se sigue a continuación.

En primer lugar observe que las formas diferenciales del método de Cartan-Monge:

$$\alpha := du - \langle \vec{p}, d\vec{x} \rangle = 0,$$

dadas en la sección 3 del capítulo 4, son equivalentes a las formas de contacto:

$$\omega_\mu^\alpha = du_\mu^\alpha - \sum_{i=1}^m u_{\mu+1_i}^\alpha dx_i.$$

De esta manera podemos concluir que la condición dada en el método de Cartan-Monge, de que $\alpha = 0$, es igual a la condición de la proposición 5.13, necesaria para ser solución de una ecuación diferencial.

Además las definiciones de simetrías y características se siguen a continuación

DEFINICIÓN 5.24. Sea $\mathcal{D}$ una distribución de una variedad M . Decimos que $X \in \mathcal{X}(M)$ es una **simetría infinitesimal** de $\mathcal{D}$, si y sólo si, $\mathcal{L}_X \mathcal{D} = [X, \mathcal{D}] \in \mathcal{D}$. •

DEFINICIÓN 5.25. Un campo $C \in \mathcal{D}$ es una **característica** de Cauchy, si $\mathcal{L}_C \mathcal{D} = [C, \mathcal{D}] \in \mathcal{D}$. Y su curva integral es llamada curva característica de Cauchy. •

Cuando la distribución es una ecuación diferencial, estas definiciones concuerdan con las definiciones de simetría y características dadas en los capítulos 3 y 4.

En conclusión la gran diversidad de métodos para resolver ecuaciones, quizás no se puedan reducir a un sólo método, sin embargo podrían ser englobados por una sola teoría, en la cual se entienda mejor su estructura general. En éste caso observamos a las características y las simetrías a través de fibrados de jets.

Bibliografía

- [1] A. Knapp “Basic Algebra”, Birkhauser, (2006).
- [2] B. Schutz, “Geometrical Methods of Mathematical Physics”, Cambridge University Press, (1997).
- [3] D. Blackmore, N. Prykarpats’ka, V. Samolienko, E. Wachincki, M. Pytel-Kudela, “The Cartan-Monge geometric approach to the characteristic method for nonlinear partial differential equations of the first and higher orders”, Neliniini Kolyvannya, (2007).
- [4] I. Peral, “Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales”, Textos de la U.A.M., Addison Wesley, (1995).
- [5] J. Marsden, “Manifolds, tensor analysis and applications”, Springer-Verlag, (2001).
- [6] J. Fritz, “Partial differential equations”, Springer-Verlag, (1982).
- [7] J. Krasil’shchik, A. Verbovetsky, “Homological Methods in Equations of Mathematical Physics”, International Summer School in Levoca, (1998).
- [8] M. Angel, “Estructuras algebraicas y teoria de deformación”, Notas de curso, (2008).
- [9] M. Angel, “Métodos algebraicos y geométricos para la fisica”, Notas del curso, (2009).
- [10] M. Angel, “Álgebra Homológica” Notas del curso, (2009).
- [11] P. Olver, “Applications of Lie groups to differential equations”, Springer-Verlag, (1993).
- [12] P. Hydon, “Symmetry Methods for Differential Equations, A Beginner’s Guide”, Cambridge text in applied mathematics, (2000).
- [13] S. Morita, “Geometry of differential forms”, American Mathematical Society, (2001).
- [14] W. Seiler, “Involution, The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra”, Springer-Verlag, (2010).
- [15] W. Boothby, “An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry”, Academic Press, (1975).

Índice alfabético

- Álgebra de Lie, 41
- Álgebra exterior, 12
- Álgebra tensorial, 10

- Acción de Grupo de Lie, 42
- Acción de Gurpo, 7
- Algebra, 8
- Anillo, 4
- Anillo con Unidad, 5
- Anillo Conmutativo, 5
- Atlas, 14
- Atlas Maximal, 14

- Cambio de coordenadas canónico, 44
- Campo Vectorial, 19
- Característica de un anillo, 6
- Carta, 13
- Cono de Monge, 52
- Corchete de Lie para campos vectoriales, 25
- Curva Integral, 20
- Curvas, 15

- Derivada de Lie de campos vectoriales, 24
- Derivada de Lie para formas, 35
- derivada de Lie para funciones, 23
- Derivada total, 73
- Diferenciabilidad en variedades, 15
- Distribución, 37
- Distribución de Contacto, 71

- Distribucion completamente integrable, 37
- Distribucion Involutiva, 37
- Divisor de cero, 6
- Domino de integridad, de division y Cuerpo, 6
- Dual del espacio tangente, 17

- Elemento Invertible, 6
- Espacio exterior de orden k , 10
- Espacio Tangente a un Punto, 16
- Espacio tensorial de orden k , 8
- Existencia y unicidad para Cauchy, 55

- Fibrado, 17
- Fibrado de Formas, 30
- Fibrado de Jet, 68
- Fibrado Tangente, 18
- Fibrado Tangente dual, 18
- Flujo, 21
- Forma de Contacto, 69
- Formas Cerradas, 34
- Formas diferenciales, 30
- Formas exactas, 34
- funcion y campo arrastrado, 22

- Grupo, 3
- Grupo abeliano, 4
- Grupo de Lie, 42

- Ideal, 6

Ideal Maximal, 7

k-Formas Diferenciales, 28

n-Variedad, 14

Orbita y Estabilizador, 7

Producto Exterior, 32

Producto exterior, 11

Producto interno de formas, 34

Producto tensorial, 9

Pull-Back, 20

Pull-back de campos, 21

Pull-back de k-formas, 31

Push-Forward, 20

Push-forward de k-formas, 31

Simetrías de Lie de una EDO, 43

Simetrías de una EDO, 43

Subanillo, 5

Subgrupo, 4

Subvariedad, 36

Tensor, 22

Uno-Forma, 19

Vectores, 16