Rev. Fac. Cs. Vets.
UCV. 48(1): 23-30. 2007 Estadística

Efectos del Número de Variables y de la Estructura de la Matriz Σ sobre la Amplitud de Intervalos de Confianza en Poblaciones Multinormales

Effects of the Number of Variables and the Σ Matrix Structure on the Confidence Amplitude Intervals in Multinormal Populations

Santiago Armas[*,1] y Lusbi Herrera[**]

[*]*Facultad de Ciencias Veterinarias.* [**] *Facultad de Agronomía. Universidad Central de Venezuela,Apartado 4563. Maracay 2101, Estado Aragua, Venezuela.*

Correo-E:s.armas@mailcity.com

Recibido: 29/03/07 - Aprobado: 27/07/07

RESUMEN

En numerosas ocasiones, en el campo de las Ciencias Veterinarias, los investigadores incurren en el error de considerar el análisis individual de las variables, obviando las posibles correlaciones existente entre ellas. Frecuentemente, se debe recurrir al análisis multivariado. En esta investigación, se estudió la amplitud de los intervalos de confianza obtenidos por el método Unión-Intersección y por la desigualdad de Bonferroni y se realizaron pruebas de hipótesis para estudiar el comportamiento del estadístico de prueba. Se evaluaron tres tipos de matrices $\mathbf{\Sigma}$, con estructuras: ρ_{ij}=0,25; 0,65 y 0,85, i $\neq$j, se trabajó con p = 2, 3, 4 y 5 y tamaño de muestra n=30. En la metodología de Unión – Intersección se utilizó: : $\mathbf{a}'\bar{\bar{\mathbf{y}}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{Sa}\mathrm{p}(\mathrm{n}-1)}{n(n-p)} F_{(1-\alpha;p;n-p)}}$ y en el método de Bonferroni se utilizó: $\mathbf{a}'\bar{\bar{\mathbf{y}}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{Sa}}{\mathrm{n}}}\, t_{(\alpha/2m;n-1)}$, donde es el vector de medias muestrales, p es el número de variables, n es el tamaño de la muestra, **S** es la matriz insesgada estimada de variancias y covariancias, **a** es el vector de contrastes entre medias y **m** es número de contrastes entre medias. El estadístico de prueba corresponde al T^2 de Hotelling, F = $\frac{n(n-p)}{(n-1)p}(\bar{\bar{\mathbf{y}}} - \mu_0)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\bar{\mathbf{y}}} - \mu_0)$ vs $F_{t\,(p,\,n-p,\,\alpha)}$ para **S** insesgada. Se concluye que a medida que aumenta la correlación entre las variables, los intervalos son más estrechos. A medida que se incrementan los contrastes al igual que el número de variables crece igualmente la longitud de los intervalos. Se observó que los intervalos obtenidos con la metodología de Bonferroni son más estrechos que con Unión- Intersección. En cuanto a las pruebas de hipótesis, el método de Bonferroni mostró mas potencia que el de Unión-Intersección. Los valores de α estimado oscilaron alrededor de 0,05. Finalmente, se deduce de todo lo anterior, que es necesario recurrir al análisis multivariado cuando existe más de una variable respuesta en la investigación.

(**Palabras clave**: Métodos estadísticos, Medicina Veterinaria, población animal, estimación, intervalos de confianza, prueba de hipótesis, T^2 de Hotelling)

ABSTRACT

Frequently, in the field of Veterinary Sciences, researchers commit mistakes when considering only the individual analysis of variables, obviating the possible correlations among them. Recurrently, the investigator must resort to the use of multivariate data analysis. In this investigation, the amplitude of confidence intervals was studied using two methodologies: the Union-Intersection and the Bonferroni inequality methods. Additionally, hypotheses testing were also studied. Three (3) matrixes (Σ) were evaluated. Their structures correspond to: □$_{ij}$ = 0.25; 0.65 y 0.85, i $\neq$ j, with p = 2, 3, 4 and 5 and sample size n=30. The Union--Intersection method used: $\mathbf{a}'\bar{\bar{\mathbf{y}}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}p(n-1)}{n(n-p)}F_{(1-\alpha;p;n-p)}}$ and the Bonferroni method used: $\mathbf{a}'\bar{\bar{\mathbf{y}}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{n}}\, t_{(\alpha/2m;n-1)}$, where: is the column vector of sample means, **p** is the number of variables, **n** the sample size, **S** the unbiased estimated matrix of variances and covariances, **a** the contrast vector of means, and **m** is the total number of contrasts between means. The t statistic corresponds to T^2 of Hotelling, F = $\frac{n(n-p)}{(n-1)p}(\bar{\bar{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\bar{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ vs $F_{t\,(p,\, n-p,\, \alpha)}$ for unbiased **S**. The results of this investigation show that as the correlation between variables increases the intervals get narrower. When the contrasts and the number of variables raise, the intervals length raises as well. It could be noticed that the intervals obtained with the Bonferroni method are narrower than with the Union-Intersection method. In reference to the hypotheses testing, the Bonferroni method demonstrated to be more powerful than the Union-Intersection method. The □estimated values oscillated around 0.05. It is concluded that it is necessary to resort to the multivariate analysis of data when more than one response variable exists in an investigation.

(**Key words**: Statistical methods, Veterinary medicine, animal population, estimation, confidence intervals, hypothesis tests, T^2 of Hotelling)

INTRODUCCIÓN

Desde hace muchos años, la Estadística se desarrolló como una rama de las matemáticas para estudiar los hechos que aparentemente ocurrían al azar, los cuales se explicaban a través de la definición de ciertos modelos. Esta disciplina también fue usada para desarrollar pruebas de hipótesis para realizar inferencias sobre las poblaciones, partiendo de muestras aleatorias. La Estadística creció en su base teórica, pero en la práctica resultó engorrosa su aplicación, generalmente, por la gran cantidad de datos que debían analizarse, por lo que pocos eran los avances de la Estadística en este contexto. Con el desarrollo de las computadoras, herramienta que facilitó los cálculos y análisis de datos, la Estadística comenzó a experimentar importantes avances teórico-prácticos. En el campo multivariado, los estudios y su instrumentación se han comenzado a realizar relativamente reciente. Se sabe que es parte compleja en su aplicación y muchos son los datos que se orientan hacia esta parte de la Estadística, lo que hace necesario su comprensión para facilitar su implementación práctica.

La Estadística como herramienta fundamental en todas las áreas de la ciencia se basa, generalmente, en la inferencia, es decir, en la estimación de parámetros y pruebas de hipótesis. En lo concerniente a la estimación, es necesario tener amplios basamentos teóricos para que estas estimaciones sean lo más acertadas posibles, como lo es el conocer la naturaleza de la muestra con la que se trabaja (características de las variables de trabajo, cálculo de los tamaños apropiados de muestra, funciones de distribución, etc.).

La estimación ha sido ampliamente estudiada en la estadística univariada, pero pocos trabajos se han desarrollado en la estadística multivariada, especialmente en el caso de los contrastes de medias. Es por ello que se decidió trabajar con la inferencia estadística en el campo multivariado, en este caso, comparando los métodos de estimación por intervalos basados en la desigualdad de Bonferroni y los obtenidos a través del principio Unión – Intersección, realizando para ello, la simulación de muestras cuyas variables tienen distribución multinormal.

La estadística multivariada es de gran aplicación en el campo veterinario y agronómico, por ejemplo cuando se realiza un experimento con un cultivo determinado, son muchas las variables generadas y que no son estudiadas de manera satisfactoria, perdiéndose valiosa información, ya que generalmente, son analizadas de manera univariada, obviándose, sobretodo, las correlaciones existentes entre dichas variables.

Mardia *et al.* (1979), indicaron que se pueden formar intervalos de confianza simultáneos con coeficiente de confianza 100(1 - α)%, los cuales serían: $\mathbf{a}'(\tau_i - \tau_k) \in \mathbf{a}'(\cdot) \pm$ **,**donde θ_a denota el valor crítico **a** superior de **q** y este es el punto porcentaje θ = l/(1 + l) y l es el mayor valor propio de $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}$, donde **B =** $\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j - \bar{y})(\bar{y}_j - \bar{y})'$.

En estos intervalos, **a** denota el vector de contrastes de medias, es el vector de medias muestrales y **W** es la matriz de residuales obtenidos del análisis de variancia multivariado.

Morrison (1967) desarrolló y describió los mismos intervalos de confianza simultáneos para los casos de análisis de variancia de una y dos vías. Este autor también trabajó con el método de Bonferroni para hacer inferencias simultáneas acerca de un número m finito de funciones lineales $\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}$. Esta familia de intervalos tiene la forma: $\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{n}}\, t_{\alpha/2m;\, n-1}$ y éste tiene un coeficiente de confianza de, **al menos** 100(1 - α)%.

Un trabajo muy similar fue desarrollado por Mardia *et al.* (1979), quienes trabajaron con el método de Unión – Intersección para la estimación, basándose en la aplicación práctica en este caso, cuando se tienen niveles de tratamientos con más de una variable cada uno. Demostraron con ejemplos cómo el principio de Unión-intersección permite la construcción de los llamados intervalos de confianza simultáneos. Así mismo, Herrera (1986), presentó un seminario utilizando las desigualdades de Bonferroni con aplicaciones prácticas. Indicó que se pueden utilizar las desigualdades de Bonferroni para hacer inferencias simultáneas acerca de un número finito m de combinaciones lineales de $\mu_1 - \mu_2, \ldots, \mu_p$ ($\mathbf{a}'\mu$), donde los m intervalos

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{y}} - \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathrm{n}}}\, t_{(\alpha/2m;\, n-1)} \le \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} \le \mathbf{a}'\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathrm{n}}}\, t_{(\alpha/2m;\, n-1)},$$

tienen un coeficiente de confianza conjunto de al menos 100(1-□)%. Para probar las m hipótesis individuales del tipo Ho: $\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}_o$, se puede utilizar el estadístico

$$t(a) = \frac{\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})\sqrt{n}}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}} \quad \text{con} \quad t_{(\alpha/2m;\, n-1)},$$ comparando este método con el de Unión – Intersección en el contraste de medias.

En el campo univariado, Spurrier (1999) realizó un trabajo para comparar el método Scheffé, Tukey y Dunnett relativo a los límites de confianza para todos los contrastes de medias de tratamientos.

Peña (2002) desarrolló un trabajo donde describe cómo realizar el contraste de varias medias (análisis de variancia multivariado), donde indicó que la diferencia de soportes será $L(H_1) = -\frac{n}{2}\log|\mathbf{S}_w| - \frac{np}{2}$; y se rechaza Ho cuando esta diferencia sea grande. Rencher (2002) describió las pruebas de hipótesis multivariadas vs las univariadas para uno o dos vectores de medias con **S** conocida y describió igualmente la prueba T^2 de Hotelling.

Para la construcción de los intervalos, es necesario contar con datos ó variables que cumplan con los requisitos básicos para la estadística paramétrica multivariada **Y** ~ MN ($\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$), donde **Y** es un vector de variables aleatorias, distribuido multinormalmente con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de variancias y covariancias □, por lo que se diseñó y construyó un simulador en lenguaje Turbo-Pascal, el cual generó las correspondientes muestras cuyas variables tienen una distribución multinormal.

En este sentido, en este trabajo se planteó comparar las amplitudes de los intervalos de confianza obtenidos por el método Unión-Intersección y a través de la desigualdad de Bonferroni, bajo diferentes condiciones tales como: variación del número de variables y de la estructura de la matriz de variancias y covariancias, y en cuanto al grado de correlación entre las variables.

Este último factor es de gran importancia, ya que se sabe de la pérdida de valiosa información por la posible existencia de correlación entre las variables al realizar análisis univariado de todas las variables que se tengan en estudio, hecho muy frecuente en la mayoría de los investigadores. Se dejó fijo el tamaño de la muestra n = 30.

MATERIALES Y MÉTODOS

Para cumplir con los objetivos de medir los efectos sobre la amplitud de los intervalos de confianza, se estudiaron los siguientes casos : tamaño de muestra n=30; grado de correlación entre las variables ρ_{ij}=0,25; 0,65 y 0,85; $i \neq j$ y se consideraron p=2, 3, 4 y 5 variables, dando un total de 12 situaciones diferentes.

Para simular los datos multinormales se partió de la siguiente información:

$$Y \sim MN\left(\begin{bmatrix}10\\20\\30\\40\\50\end{bmatrix},\begin{bmatrix}43.33 & 12.68 & 23.86 & 31.68 & 36.62\\ . & 59.39 & 27.94 & 37.09 & 42.87\\ . & . & 210.27 & 69.8 & 80.67\\ . & . & . & 370.62 & 107.1\\ . & . & . & . & 495.16\end{bmatrix}\right)$$

con ρ_{ij} = 0.25, para todo $i \neq j$.

$$Y \sim MN\left(\begin{bmatrix}10\\20\\30\\40\\50\end{bmatrix},\begin{bmatrix}43.33 & 32.97 & 62.04 & 82.37 & 95.21\\ . & 59.39 & 72.64 & 96.43 & 111.47\\ . & . & 210.27 & 181.45 & 209.74\\ . & . & . & 370.62 & 278.45\\ . & . & . & . & 495.16\end{bmatrix}\right)$$

con ρ_{ij} = 0.65, para todo $i \neq j$.

$$Y \sim MN\left(\begin{bmatrix}10\\20\\30\\40\\50\end{bmatrix},\begin{bmatrix}43.33 & 43.12 & 81.13 & 107.72 & 124.5\\ . & 59.39 & 94.99 & 126.11 & 145.76\\ . & . & 210.27 & 237.29 & 274.27\\ . & . & . & 370.62 & 364.13\\ . & . & . & . & 495.16\end{bmatrix}\right)$$

con ρ_{ij} = 0.85, para todo $i \neq j$.

I.- Simulación de números pseudoaleatorios.

Conociendo que una variable aleatoria $Y \sim U(1/2, 1/12)$, se hizo una serie de pruebas para constatar que el simulador construido en Turbo-Pascal cumplía con los siguientes requisitos:

a) Que el ciclo de repetición en la generación de números pseudoaleatorios sea lo mayor posible.

b) Que al iniciar una secuencia de generación lo hiciera en un nuevo punto de partida. Esto lo permite el Turbo-Pascal con la función RANDOMIZE, la cual inicializa el semillero para la generación de números pseudoaleatorios en cero.

c) Que desde el punto de vista estadístico, las medias y las variancias muestrales no difieran de los parámetros poblacionales.

d) Que hubiera rapidez en la generación de las muestras con números pseudoaleatorios.

Se realizaron pruebas de hipótesis para probar la aproximación a la distribución uniforme y no se rechazó la hipótesis de que en las muestras simuladas la variable aleatoria generada tiene distribución uniforme $Y \sim U(0{,}5;\ 0{,}0833)$ y además se verificó que el ciclo de simulación siempre partiera de un nuevo punto, ya que al iniciar una nueva corrida, ó al reiniciar el equipo, el resultado obtenido siempre fue diferente, por lo que se deduce que el simulador es confiable en la generación de muestras cuyas variables tienen distribución uniforme, ya que esta es la base para simular las variables normales estandarizadas.

II.- Simulación de variables aleatorias distribuidas normalmente y estandarizadas

Se sabe que si las variables aleatorias independientes:

$Y_1, Y_2, ..., Y_{48} \sim U(1/2, 1/12)$ entonces $\sum_{i=1}^{48} y_i \sim U(24, 4)$. Se decidió trabajar con 48 variables aleatorias uniformes porque se consideró que era una cantidad suficiente para generar una variable aleatoria distribuida aproximadamente como una normal estandarizada, a partir de la transformación

$$Zj = \frac{\sum_{i=1}^{48} y_i - 24}{2} \sim N(0, 1).$$

III.- Simulación de variables aleatorias distribuidas multinormalmente

Utilizando el método utilizado por De Melo (1985), se procedió a generar las 1000 muestras que contienen las variables aleatorias distribuidas multinormalmente

$Y_i \sim MN(\mu, \Sigma)$, cada una de estas muestras se guardaron en un archivo para cada una de las 12 combinaciones: p = 2, 3, 4 y 5; n = 30; ρ_{ij}= 0,25; 0,65; 0,85.

De cada archivo se obtuvieron los intervalos para cada uno de los métodos de estimación (Unión-Intersección y Bonferroni), para todos los contrastes posibles (p = 2, 2 contrastes; p = 3, 3 contrastes; p = 4, 6 contrastes; p = 5, 10 contrastes), en cada una de las 1000 muestras y se calculó en cada caso un promedio de la diferencia entre el límite superior e inferior de los 1000 intervalos.

Los contrastes para los cuales se calcularon los intervalos en todas las combinaciones posibles son:

$(\mu_1 - \mu_2)$ cuando p = 2;

$(\mu_1 - \mu_2)$, $(\mu_1 - \mu_3)$, $(\mu_2 - \mu_3)$ cuando p = 3;

$(\mu_1 - \mu_2)$, $(\mu_1 - \mu_3)$, $(\mu_1 - \mu_4)$, $(\mu_2 - \mu_3)$, $(\mu_2 - \mu_4)$, $(\mu_3 - \mu_4)$ cuando p = 4 y

$(\mu_1 - \mu_2)$, $(\mu_1 - \mu_3)$, $(\mu_1 - \mu_4)$, $(\mu_1 - \mu_5)$, $(\mu_2 - \mu_3)$, $(\mu_2 - \mu_4)$, $(\mu_2 - \mu_5)$, $(\mu_3 - \mu_4)$, $(\mu_3 - \mu_5)$, $(\mu_4 - \mu_5)$ cuando p = 5.

Para las estimaciones se utilizaron los métodos de Unión – Intersección y de Bonferroni, explicados, entre otros, por Morrison (1967), Mardia *et. al*. (1979), Seber (1984) y Herrera (1986). En todos los casos se trabajó con un nivel de significación α=0,05, es decir, coeficiente de confianza del 95 %. Se sabe que los intervalos obtenidos por la metodología Unión – Intersección tienen un coeficiente de confianza conjunto del 100(1-□)%, en cambio los obtenidos por la metodología de Bonferroni presentan la ventaja que tienen un coeficiente de confianza conjunto de, **al menos,** 100(1 - α)%.

En la metodología de Unión – Intersección se trabajó con el intervalo desarrollado por Morrison (1967) y Mardia *et. al*. (1979) explicado y utilizado por Herrera (1986):

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{y}} \pm \sqrt{\frac{a'Sap(n-1)}{n(n-p)} F_{(1-\alpha;p;n-p)}} \; ,$$

y en el método de Bonferroni se utilizó el intervalo igualmente desarrollado por Morrison (1967) y explicado y utilizado por Seber (1984) y por Herrera (1986):

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{y}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{n}}\; t_{(\alpha/2m;\, n-1)} \, ,$$

donde es el vector columna de medias muestrales, p es el número de variables, n es el tamaño de la muestra, **S** es la matriz insesgada estimada de variancias y covariancias, **a** es el vector de contrastes de medias (de acuerdo a las hipótesis que se desee probar), m es la cantidad de contrastes entre medias (dependiendo del número de variables), es decir, m= $C_{p,2}$, combinaciones de p variables tomados de 2 en 2, F y t son los valores tabulados, los valores para $t_{\alpha/2m}$ están tabulados en el apéndice suministrado por Seber (1984), los que corresponden a las distribuciones de las variables estudiadas según los métodos de estimación. Se realizaron, además, pruebas de hipótesis individuales, comparando entre los tres valores de correlación, construyendo en cada caso individual que sea rechazada H_o los intervalos de confianza por Unión-Intersección y Bonferroni para μ_t.

Las hipótesis a probar, por ejemplo, para el caso p = 2:

$$H_o : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ vs. } \quad H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

En este caso, la prueba corresponde a T^2 de Hotelling, descrito por Mardia *et al*. (1979)**:**

$$F_c = \frac{n(n-p)}{(n-1)p} (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0) \text{ vs } F_{t\,(p,\, n-p,\, \alpha)} \text{ si } \mathbf{S} \text{ es insesgada,}$$

que es la que se utilizó en este trabajo.

La regla de decisión es no rechazar H_o: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_o$ si $T^2 \leq \frac{p(n-1)}{n-p} F_{(1-\alpha;\, p;\, n-p)}$ y rechazar H_o en caso contrario, donde $T^2 = n(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_o)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0)$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Tabla 1, se muestran los resultados obtenidos de la amplitud de los intervalos de confianza, obtenidos tanto por Unión-Intersección y Bonferroni.

Se observa que a medida que aumenta la correlación entre las variables, la amplitud de los intervalos disminuye. Esto se debe a que se incrementa la covariancia entre las variables y_i, y_j y al calcular **a´Sa,** resulta en valores más pequeños.

En todos los casos, la amplitud de los intervalos fue más estrecha con la metodología de Bonferroni que con la metodología Unión-Intersección. La amplitud más estrecha se obtuvo con la metodología de Bonferroni y con la mayor correlación.

En el caso p=3 variables, entre los tres contrastes, la amplitud de los intervalos siempre es mas estrecha para $\mu_1 - \mu_2$ y es de hacer notar que para el caso del contraste $m_2 - m_3$, los intervalos son mas ámplios y ésto se explica por la matriz de dispersión **S**, donde los valores de las variancias para las variables 2 y 3 son mayores. Esta amplitud de los intervalos también está afectada por la necesidad de mantener un coeficiente de confianza conjunto, que, en este estudio, se fijó en 95%.

Así mismo, para el caso, p = 4, la amplitud de los intervalos siempre es mas estrecha para $\mu_1 - \mu_2$, ocurriendo la misma situación anterior, es decir, los intervalos son más amplios y ésto se explica por la matriz de dispersión **S**, donde los valores de las variancias y covariancias se incrementan a medida que se aumenta el número de variables. Igualmente, los intervalos más estrechos se obtuvieron con la metodología de Bonferroni, $r_{ij} = 0{,}85$; contraste $\mu_1 - \mu_2$.

En el caso p = 5 variables, para las diferentes correlaciones entre las variables y los métodos de estimación, se obtuvieron resultados similares que en el caso de p = 2, p = 3 y p = 4. Al comparar contra p=2, se observa que se incrementa la amplitud de los intervalos. Al igual que el caso p = 3 y 4, entre los diez contrastes, la amplitud de los intervalos siempre es mas estrecha para $\mu_1 - \mu_2$. Así mismo, los intervalos mas estrechos se obtuvieron con la metodología de Bonferroni, $r_{ij} = 0{,}85$; contraste $\mu_1 - \mu_2$.

En general estos resultados concuerdan, en parte, con los obtenidos por Seber (1984) y por Herrera (1986), aunque este autor sólo realizó la comparación para cinco contrastes diferentes.

Comparando los resultados entre las tres correlaciones, se observa que a medida que aumenta la correlación entre las variables, los intervalos son mas estrechos, resultado que pone de manifiesto la importancia de tomar en cuenta la correlación existente entre las variables en el momento de realizar estimaciones, lo cual justifica el uso de los métodos multivariados en el manejo de datos con diferentes variables. Este resultado es coincidente para ambos métodos de estimación.

En el caso del contraste $\mu_1 - \mu_2$para la correlación $r_{ij} = 0{,}85$; se obtuvieron los intervalos mas estrechos para los dos métodos, donde se confirma lo anterior: al incrementar el número de variables aumenta la amplitud de los intervalos, tal como se puede observar en la Tabla 2.

A continuación, se muestra el número de casos que rechazan la hipótesis nula estimándose el valor de α.

1.- **Las hipótesis a probar para el caso p = 2**:

$$H_o\text{: } \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ vs. } \quad H_1\text{: } \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

2.- **Caso p = 3 variables**. $H_o : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ vs. $H_1\text{: } \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

3.- **Caso p = 4 variables**. $H_o : \mu = \mu_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

4.- **Caso p = 5 variables**. $H_o : \mu = \mu_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0 =$ Los resultados pueden visualizarse en la Tabla 3. En general, el valor oscila en todos los casos alrededor de 0,05, lo que demuestra aún más la fiabilidad del simulador construido. Se observa cierta tendencia a una mayor cantidad de rechazos para el caso r_{ij} = 0,65 en todas las p variables.

CONCLUSIONES

En cuanto a la amplitud de los intervalos obtenidos, se concluye que, a medida que aumenta la correlación entre las variables los intervalos son más estrechos, lo cual justifica el uso de los métodos multivariados en el manejo de datos con varias variables, es decir que los intervalos con r = 0,25 (correlación baja) fueron más amplios. Esto se debe a que al aumentar r_{ij} se incrementa el valor de la covariancia entre las variables y_i y y_j. Este resultado es coincidente para ambos métodos de estimación.

Considerando el número de variables, los intervalos fueron mas estrechos para el contraste $\mu_1 - \mu_2$ para los dos métodos de estimación. A medida que se incrementa el número de contrastes crece igualmente la longitud de los intervalos. Pero es de hacer notar que para contrastes con 4 y 5 variables, en el caso $\mu_3 - \mu_4$ ó $\mu_4 - \mu_5$, hay mayor amplitud de los intervalos, lo cual se explica por la matriz de variancias y covariancias, ya que a medida que cambiamos la variable, es decir pasamos de la variable y_1 a la variable y_2, hasta la variable y_5, se incrementa la variancia, por lo que al calcular **a´Sa**, resulta en valores mayores y, por ende, los intervalos serán mas amplios. Y el aumento de la amplitud de los intervalos al incrementarse el número de variables, se debe principalmente al incremento que sufre la región de confianza involucrada.

Por último, se observó que al aumentar el número de variables, para los dos métodos de estimación, los intervalos son más amplios, lo que se explica por aparecer mayores variancias de las variables y ésto se debe a la naturaleza de los datos simulados. Esta amplitud de los intervalos también está afectada por la necesidad de mantener un coeficiente de confianza conjunto, que en este estudio se fijó en 95%.

Comparando los resultados obtenidos con los métodos de Unión – Intersección y Bonferroni, en todos los casos (diferente número de variables y diferente grado de correlación), se observa que los intervalos son más estrechos con la metodología de Bonferroni que con el método de Unión - Intersección.

En las pruebas de hipótesis, en todos los casos estudiados, tanto para el de Unión-Intersección como para el de Bonferroni, es de hacer notar que cuando Unión–Intersección rechazó para m = 10 ó m = 20 ó ambos casos (m = 10 y m = 20), igualmente lo hizo Bonferroni, además de otros rechazos que detectó Bonferroni pero no Unión-Intersección. Lo mismo ocurrió en todas las p variables. Para los números de variables los valores de α estimado oscilan alrededor de 0,05, lo cual es similar para las diferentes correlaciones entre las variables. Por lo que el nivel de significación de la prueba se mantiene alrededor del valor fijado.

REFERENCIAS

De Melo, G. 1985. Análise Estatistica Multidimensional. Universidade de São Paulo. pp. 25-27.

Herrera, L. 1986. Desigualdades de Bonferroni, exemplos e algumas aplicações. Universidade de São Paulo, Piracicaba, Brasil. pp. 6 -10.

Mardia, K.; Kent, J. T.; Bibby, J..M. 1979. Multivariate Analysis. Academic Press, London - New York - Toronto - Sydney - San Francisco. pp. 73-358.

Morrison, D. 1967. Multivariate Statistical Methods, University of Pennsylvania. 2nd edition. McGraw - Hill Book Company. pp. 128-136.

Peña, D. 2002. Análisis de Datos Multivariantes. McGraw-Hill/Interamericana, 539 p.

Rencher, A. 2002. Methods of Multivariate Análisis. John Wiley & Sons, 2nd edition. 708 p.

Seber, G. A. F. 1984. Multivariate Observations. John Wiley & Sons. pp. 58-105.

Spurrier, J. D. 1999. Exact confidence bounds for all contrasts of three or more regression lines. *J. Am. Statistical Association,* Vol 94, Nro. 446.

Tabla 1. Amplitud de los intervalos de confianza

		r = 0,25		r = 0,65		r = 0,85	
p	Contraste	UI	Bonf	UI	Bonf	UI	Bonf
2	$\mu_1-\mu_2$	8,42	7,56	5,81	5,22	3,88	3,49
	$\mu_1-\mu_2$	9,88	9,12	6,82	6,29	4,56	4,21
3	$\mu_1-\mu_3$	16,13	14,89	12,81	11,83	10,73	9,91
	$\mu_2-\mu_3$	16,37	15,12	12,50	11,54	10,00	9,23
	$\mu_1-\mu_2$	11,19	10,12	7,72	6,98	5,16	4,67
	$\mu_1-\mu_3$	18,26	16,52	14,50	13,12	12,15	10,99
	$\mu_2-\mu_3$	18,54	16,76	14,15	12,80	11,32	10,24
4	$\mu_1-\mu_4$	23,74	21,47	20,02	18,10	17,83	16,13
	$\mu_2-\mu_4$	23,89	21,61	19,51	17,64	16,87	15,26
	$\mu_3-\mu_4$	26,51	23,98	18,63	16,85	13,00	11,76
	$\mu_1-\mu_2$	12,42	10,96	8,57	7,56	5,73	5,06
	$\mu_1-\mu_3$	20,28	17,90	16,11	14,21	13,49	11,91
	$\mu_2-\mu_3$	20,59	18,16	15,72	13,87	12,57	11,09
	$\mu_1-\mu_4$	26,37	23,27	22,23	19,61	19,81	17,48
5	$\mu_2-\mu_4$	26,54	23,41	21,67	19,11	18,74	16,53
	$\mu_3-\mu_4$	29,45	25,98	20,69	18,25	14,44	12,74
	$\mu_1-\mu_5$	30,11	26,56	25,98	22,92	23,71	20,92
	$\mu_2-\mu_5$	30,16	26,61	25,31	22,33	22,58	19,92
	$\mu_3-\mu_5$	32,68	28,83	23,60	20,82	17,45	15,40
	$\mu_4-\mu_5$	35,06	31,46	24,53	21,64	16,35	14,43

Tabla 2. Amplitud de los intervalos de confianza para el contraste $\mu_1-\mu_2$

p	Contraste	UI	Bonf
2	$\mu_1-\mu_2$	3,88	3,49
3	$\mu_1-\mu_2$	4,56	4,21
4	$\mu_1-\mu_2$	5,16	4,67
5	$\mu_1-\mu_2$	5,73	5,06

Notación utilizada:

ND = No detectadas, R = Rechazadas, r = Correlación entre las variables, p = número de variables.

Tabla 3. Nivel de significación estimado

p		r = 0,25	r = 0,65	r = 0,85
	R	40	52	49
2	ND	12	14	18
	$\hat{\alpha}$	0,04	0,052	0,049
	R	50	53	51
3	ND	26	29	35
	$\hat{\alpha}$	0,05	0,053	0,051
	R	51	62	49
4	ND	34	45	42
	$\hat{\alpha}$	0,051	0,062	0,049
	R	55	55	55
5	ND	41	48	49
	$\hat{\alpha}$	0,055	0,055	0,055

ND = No detectadas, R = Rechazadas, r = Correlación entre las variables, p = número de variables.