

RECIBIDO: 12-07-99

ACEPTADO: 18-08-99

Tomás de la BARRA
 Juancarlo AÑEZ
 Beatriz PÉREZ

RESUMEN

Este artículo describe el modelo de asignación logit desarrollado por los autores. El modelo de asignación por equilibrio, basado en el concepto que es la congestión la que dispersa el tráfico fuera del camino mínimo, es el procedimiento dominante en la modelación de transporte. Luego de una introducción que revisa los diferentes métodos de asignación existentes, se presenta y critica el modelo de equilibrio, se presentan los elementos principales de la teoría de utilidad aleatoria y el correspondiente modelo logit, y se argumenta que ofrecen una base muy sólida para la representación del fenómeno de asignación. La construcción de un modelo de asignación probabilístico logit presenta, sin embargo, una serie de dificultades de implantación, cuya solución es el objetivo del modelo desarrollado por los autores. La clave para la construcción del modelo logit de asignación está en el concepto de solapes, los cuales conducen a la generación automática de estructuras jerárquicas. Se demuestra que un algoritmo relativamente simple logra una serie de propiedades deseables, tales como la habilidad de representar múltiples transferencias entre modos y la capacidad de representar sistemas de transporte público muy complejos.

Una sección final de conclusiones resume los beneficios del modelo propuesto en comparación con los modelos convencionales de asignación por equilibrio. Se argumenta que el modelo logit puede ser aplicado a cualquier escala, desde urbana hasta regional o nacional, y permite la representación de los movimientos de pasajeros o carga. Un gran número de aplicaciones en varios países demuestra que el modelo desarrollado presenta un comportamiento adecuado en una gran variedad de situaciones.

PALABRAS CLAVE: MODELOS; TRANSPORTE; ASIGNACIÓN; LOGIT; EQUILIBRIO; PROBABILIDADES.

ASIGNACIÓN PROBABILÍSTICA MULTIMODAL

ABSTRACT

This paper describes the logit assignment model developed by the authors. In the realm of transport models, equilibrium assignment is the dominant procedure, based on the notion that it is congestion that drives travelers away from the minimum path. After an introduction that reviews alternative assignment methods, the prevailing equilibrium assignment model is described and criticized. Next, the basics of random utility theory and the derived logit model are presented. It is argued that this is a better foundation for assignment models. The construction of a logit-based assignment model poses some important implementation problems that are solved through the proposed algorithm and model. The key to the construction of a logit-based assignment model is the concept of overlapping, which leads to the automatic generation of hierarchical constructions. A method to construct multimodal assignment is proposed. It is shown that a relatively simple algorithm accounts for many desirable properties, such as the ability to represent multiple transfers between modes and deal with complex transit systems.

A conclusions section summarizes the benefits of the proposed assignment model as against the prevailing equilibrium method. It is argued that logit assignment can deal with any scale, whether urban, regional or national, and can represent both passenger or freight movements. A large number of practical applications demonstrate that the model developed by the authors performs well under a variety of circumstances.

KEY WORDS: MODELS; TRANSPORT; ASSIGNMENT; LOGIT; EQUILIBRIUM; PROBABILITIES.

INTRODUCCIÓN

Desde hace ya varias décadas se han venido desarrollando modelos de transporte, con el propósito de simular y evaluar proyectos y políticas. Este enfoque de simulación se ha impuesto, y prácticamente no se realizan estudios relacionados con transporte sin el uso de modelos. Hoy en día el uso de este tipo de herramientas analíticas son prácticamente obligantes para acceder a créditos de la banca multilateral o para atraer inversionistas privados en proyectos tales como nueva vialidad, concesiones de autopistas, sistemas de transporte público y proyectos de transporte masivo.

Esta vasta experiencia de muchos años y en todos los países del mundo ha generado una verdadera tradición. La mayoría de los modelos que se utilizan hoy en día son muy similares en su estructura y base conceptual, compartiendo métodos y algoritmos. Este enfoque predominante de modelación, ampliamente conocido como el “modelo en cuatro etapas” fue desarrollado en EE UU, Canadá y Gran Bretaña, perteneciendo a estos países la gran mayoría de programas de computación disponibles actualmente en el mercado.

En el centro de la modelación de transporte está el proceso denominado de asignación. Conocida una o más matrices origen-destino de demanda de viajes, un modelo de asignación tiene por objeto estimar la manera en que la demanda se reparte entre las opciones de viaje disponibles. Si la demanda es de viajeros de automóvil particular, se asigna a las distintas vías que conectan el origen al destino, mientras que si se trata de viajeros de transporte público, se asignan a las diversas rutas que prestan servicios. Estos modelos intentan simular el comportamiento de los usuarios ante las características de la oferta, estableciendo un equilibrio demanda/oferta. Además, dada la complejidad de las redes de transporte, los modelos deben ser eficientes desde el punto de vista computacional.

Luego de varias décadas de investigación y desarrollo, se impuso un esquema general que se conoce como *modelo de*

asignación por equilibrio. Si bien existen métodos de solución diferentes, la gran mayoría de estos modelos comparten una teoría o conceptualización acerca de la forma en que se comportan los usuarios de transporte. La primera sección de este artículo describe las bases conceptuales del modelo de asignación por equilibrio y, en términos conceptuales, las soluciones matemáticas que se han desarrollado. La sección termina con una crítica a este enfoque, señalando los principales problemas que presenta, lo cual sirve de base para presentar un enfoque alternativo.

La segunda sección presenta de manera breve y también conceptual los modelos de decisión discretos, que utilizan como base la conocida como *teoría de utilidad aleatoria*. Esto conduce a modelos probabilísticos que difieren de manera considerable del modelo de equilibrio. La sección concluye con una comparación de los aspectos más relevantes de uno y otro enfoque, argumentando que el modelo probabilístico es más real, más útil y consistente con la teoría general económica.

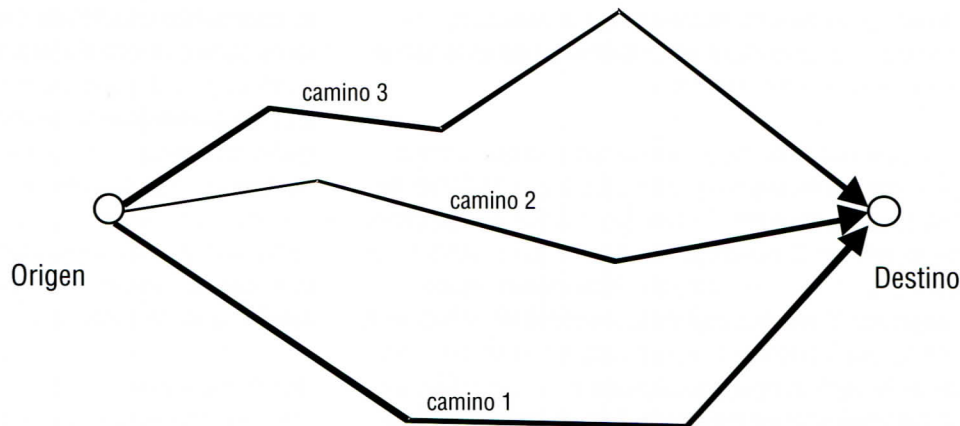
Una tercera sección establece los principios generales en que se basa la propuesta de asignación probabilística desarrollada por los autores. Con base en un ejemplo sencillo, se presenta el modelo básico y se discuten sus propiedades. También se presentan los principales problemas que presenta el modelo y la forma de resolverlos. Se describe luego el algoritmo diseñado por los autores para generar un modelo de asignación consistente y funcional.

La cuarta sección introduce los conceptos de multimodalidad e intermodalidad. El modelo propuesto en la sección anterior se extiende para adquirir estas características. Además de describir el concepto y su solución, se discuten las principales ventajas para diversas aplicaciones, desde las urbanas hasta las regionales, haciendo especial énfasis en el transporte público.

Una sección final resume las principales ventajas del modelo de asignación probabilística logit en comparación con los modelos de equilibrio.

FIGURA 1

**ILUSTRACIÓN DEL
CONCEPTO DE
ASIGNACIÓN POR
EQUILIBRIO**



1/ EL MODELO DE ASIGNACIÓN POR EQUILIBRIO

Los primeros modelos de asignación procedían de manera muy simple. Se buscaba el camino de menor distancia, tiempo, costo o una combinación de estos factores (costo generalizado) entre un par de zonas y se asignaban todos los viajes entre estas zonas a dicho paso mínimo. La debilidad de este método, conocido como *todo-o-nada*, es evidente. Por una parte es fácil observar en la realidad que los viajeros eligen diversas maneras para viajar de un origen a un destino, y por otra parte los resultados de asignar toda la demanda a un solo camino resulta en una sobrecarga de los caminos más convenientes.

Como consecuencia de lo anterior, se reconoció tempranamente la necesidad de desarrollar modelos que dispersaran el tráfico en varios caminos. Existen dos enfoques principales para explicar por qué el tráfico se dispersa. El primer enfoque puede definirse como estocástico, ya que supone que los viajeros perciben los costos y

otras características de la red de manera diferente, mostrando variaciones. Esta variabilidad en la percepción puede representarse con base en modelos de simulación estocásticos, como en el modelo desarrollado por Burrell (1968), o modelos que asignan proporcionalmente la demanda en cada intersección, como los modelos *en cascada* desarrollados por Dial (1971).

El segundo enfoque está basado en el supuesto que es la congestión la que obliga a los usuarios a buscar caminos diferentes al de menor costo. Wardrop (1952) definió un estado de equilibrio en el cual el tráfico se distribuye en una red tal que ningún viajero puede mejorar el costo de viaje si cambia de ruta. Este criterio se conoce como el *Principio de Wardrop de Equilibrio del Usuario*.

Una ilustración de este concepto se presenta en el ejemplo simplificado de la figura 1, en el cual un origen está conectado a un destino por tres caminos alternativos. El costo de cada

camino puede representarse como c_1 , c_2 y c_3 . Supongamos que el camino de menor costo es el camino 2, seguido por el camino 3 y finalmente por el camino 1, es decir, $c_2 < c_3 < c_1$. En todos estos modelos el costo percibido por los usuarios está definido por el costo monetario de realizar el viaje, la valorización del tiempo de viaje y otros elementos subjetivos. Esto es lo que se conoce como *costo generalizado*.

Según el principio de Wardrop, en ausencia de otros factores y suponiendo que los viajeros perciben el costo generalizado de manera similar, todos elegirán el camino 2, ya que es el de menor costo generalizado. Sin embargo, los viajeros que eligen el camino 2 pueden afectar el costo de viaje por dicho camino debido a la congestión. Si muchos viajeros hacen lo mismo, el tiempo de viaje del camino 2 aumentará, aumentando así el costo percibido por los usuarios. Si F_2 es el flujo asignado al camino 2, entonces $c_2 = f(F_2)$, es decir, el costo del camino 2 es una función del flujo. La función para estimar el retardo se denomina función *flujo-demora*.

La figura 2 muestra una función genérica de flujo-demora, que relaciona el tiempo de viaje en un camino determinado con la relación volumen/capacidad (V/C). Cuando hay muy pocos viajeros en el camino, el tiempo de viaje es mínimo, lo cual se conoce como tiempo de viaje a *flujo libre*. Esto es lo que ocurre cuando la relación volumen/capacidad es cercana a cero. En la medida en que el tráfico en el camino aumenta, la relación V/C también aumenta y el tiempo de viaje se incrementa. El tiempo de viaje crece en la medida que el tráfico aumenta, ya que la capacidad del camino está limitada. Un punto importante en la relación es aquel en que $V/C=1.0$, es decir, cuando el volumen es igual a la capacidad. En rigor, en este punto el tiempo de viaje debería hacerse infinito, tal como lo establece la teoría de colas. Sin embargo, todos los modelos adoptan curvas más suaves, permitiendo tiempos de viaje finitos tanto en el punto $V/C=1.0$ como en relaciones aun mayores. Esto se debe a la naturaleza algorítmica de los modelos de solución según la cual, en una iteración determinada, la demanda puede ser mayor que la capacidad. El incremento del tiempo de viaje debe aumentar, tal que en la iteración siguiente el tráfico se distribuya, pero no

hacerse infinito ya que esto haría colapsar el algoritmo. En la realidad, las esperas no pueden ser infinitas.

Volviendo a la lógica del modelo de asignación por equilibrio, si muchos viajeros adoptan el mismo camino, la relación V/C en dicho camino se incrementará. En la medida que aumenta el flujo, puede llegar a un punto en el cual el tiempo de viaje en el camino 2 se incrementa al punto en que el costo generalizado sea mayor que el del camino 3 ($c_2 > c_3$). En estas circunstancias, cierto número de viajeros puede mejorar su condición si eligen el camino 3 en lugar del 2. ¿Hasta qué punto? Hasta el punto en que, debido al alivio que experimenta el camino 2 y el incremento de tiempo del camino 3 hace que $c_2 = c_3$. Pasado este punto, ningún viajero se beneficia si cambia su elección de camino.

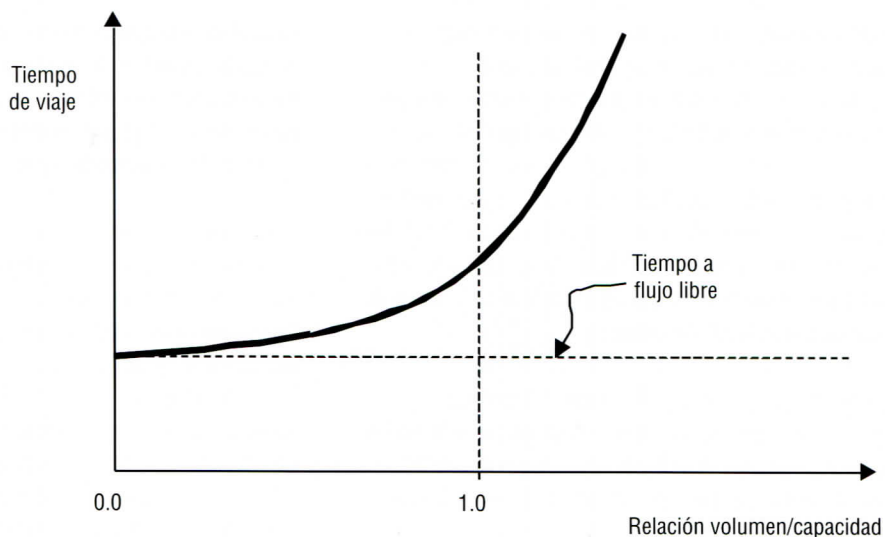
De manera similar, si el tráfico entre el origen y destino sigue creciendo, llegará un punto en que el costo generalizado tanto del camino 2 como del 3 resultan mayores que el del camino 1. En estas circunstancias los viajeros se benefician si una parte de ellos cambia de opción y elige el camino 1, hasta el punto en que $c_1 = c_2 = c_3$. En otras palabras, el modelo debe estimar los flujos F_1 , F_2 y F_3 tal que se logre el estado de equilibrio de Wardrop en que $c_1 = c_2 = c_3$.

Existen varios métodos para lograr este objetivo. La mayoría de los modelos que se usan en la actualidad, tales como MinUTP, Tranplan, Trips o TransCAD, proceden según el método de los promedios sucesivos y ofrecen como alternativa un método más simple conocido como *incremental*, mientras el modelo EMME/2 (Florian *et al.*, 1982) utiliza un método de optimización basado en programación matemática. No interesa aquí discutir estos métodos en detalle; baste con señalar que conducen a soluciones similares. Debe destacarse que estos métodos han sido sometidos a amplias y profundas investigaciones, las propiedades de los métodos han sido ampliamente examinadas, y el número de aplicaciones prácticas es de gran importancia.

Este enfoque, sin embargo, presenta algunos problemas. El más importante es que la única explicación para que los viajeros

FIGURA 2

**FORMA GENÉRICA DE
UNA FUNCIÓN
FLUJO-DEMORA**



elijan caminos diferentes del de menor costo generalizado sea debido a la congestión. En condiciones en que la congestión no es importante, todos los métodos señalados convergen en la asignación todo-o-nada, lo cual es contradictorio con las evidencias que se tiene de la realidad. En condiciones de baja congestión, las investigaciones de campo señalan que los viajeros siguen eligiendo varios caminos alternativos para realizar un viaje.

Existen muchas circunstancias en las cuales el principio de Wardrop no se cumple en la realidad. Las dos principales fuentes para explicar las diferencias son: la variabilidad en la percepción del costo generalizado, y el concepto de agregación.

Existen muchas razones para que los viajeros no perciban los costos de manera similar. Si se trata de viajes de personas, es probable que algunos viajeros perciban las ventajas de una

determinada manera de viajar de manera diferente que otras. Por ejemplo, para un usuario de automóvil amante de la velocidad, una autopista le ofrecerá ventajas que un viajero cauteloso no apreciará; en su lugar, este último preferirá una vialidad más tranquila y con menos afrentas automovilísticas. Si el viajero es cautivo del transporte público, puede ocurrir que prefiera unos modos sobre otros. Para algunos, la mayor velocidad de un metro puede ser determinante, mientras para otros, el viaje subterráneo le puede parecer claustrofóbico. En el caso de la carga, puede ocurrir que, para unos consignatarios el ferrocarril ofrezca condiciones de seguridad y no les importe los transbordos que esta modalidad pueda implicar, mientras que para otros éste puede ser un problema grave.

Otro elemento importante que incide en la variabilidad de la percepción de los usuarios es la imperfección en la información disponible para tomar decisiones. Los modelos de equilibrio

suponen, implícitamente al menos, que todos los viajeros conocen muy bien los costos de la ruta que escogen y los de las rutas que rechazan. Esto es obviamente imposible en la realidad, al menos hasta que se cuenten con sistemas perfectos de información en tiempo real de las características de las alternativas. A menudo el viajero sólo conoce los costos de la ruta que tomó la última vez y quizás en algunas ocasiones anteriores. Algunos viajeros se guían por mapas y otros por indicaciones (imperfectas) de otras personas. Lo que ayer fue una buena ruta puede no serlo hoy porque las condiciones han cambiado. En síntesis, la percepción acerca de las opciones puede variar considerablemente de un usuario a otro, aunque las circunstancias parezcan similares.

El problema de la agregación, sin embargo, es el más importante. Todo modelo de transporte necesariamente realiza un proceso de agregación. Aun en el caso muy simplificado de la figura 1, cuando decimos que hay un cierto número de viajeros que van desde un origen a un destino, hay diversos grados de agregación. Si el número de viajeros es grande, debemos esperar una gran diversidad en la percepción del costo generalizado, lo cual explicará el que no todos elijan las mismas opciones de viaje. Si bien es posible segregar a los viajeros en grupos homogéneos, por razones prácticas siempre estaremos simulando el comportamiento de grupos grandes. Aun si se aplica el principio de Wardrop a grupos segregados de usuarios, todos los viajeros dentro de cada grupo son considerados como idénticos, lo cual no puede sostenerse de manera congruente. Es de esperar, por lo tanto, una variabilidad en el comportamiento de los viajeros dentro de cada grupo, tal que la congestión no sea la única explicación para el hecho observado que no todos ellos eligen el mismo camino.

Un hecho poco reconocido en la literatura es que hay, además, una agregación espacial. Cuando se habla de un origen y un destino de los viajes, no se reconoce que hay una amplia variedad desde el punto de vista espacial. Una visión más real de la situación expresada en la figura 1 puede verse en figura 3, en la cual las múltiples flechas representan lo que ocurre realmente.

Cuando se dice que hay un determinado número de viajeros entre un origen y un destino, en realidad se hace referencia a viajeros con una considerable variedad de puntos en el espacio, lo cual es una simplificación necesaria de la realidad, con un alto grado de abstracción. En consecuencia, el principio de Wardrop no reconoce la variabilidad en la percepción de los individuos dentro de cada grupo en que se haya segregado la demanda, ni la variabilidad espacial de los orígenes y destinos de los viajes.

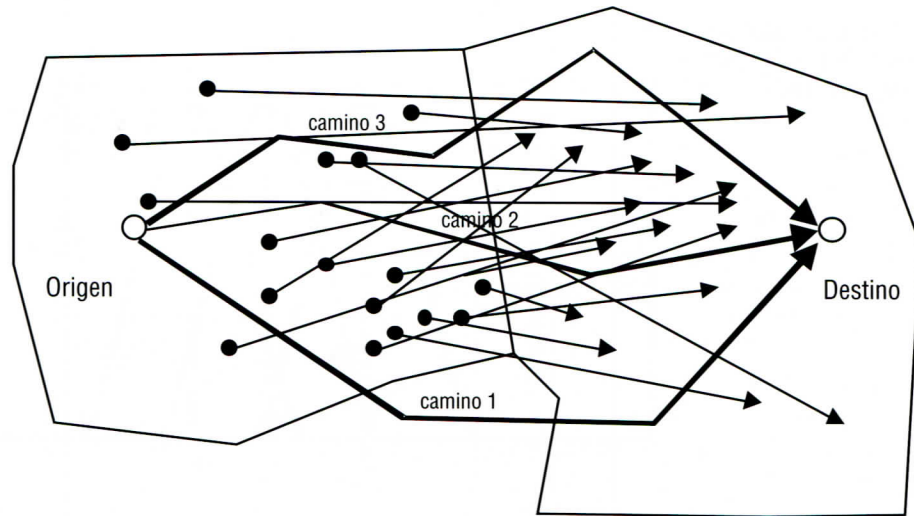
El concepto de camino único de menor costo es cuestionable si se le mira desde la perspectiva del ejemplo de la figura 3 contrastada con la figura 1. Si suponemos que todos los viajes se inician en el nodo de origen y terminan en el de destino, el camino 2 es el de menor costo, lo cual es factible de calcular. La figura 3, al rodear los nodos de origen y destino con polígonos representativos de las zonas correspondientes, revela la gran variabilidad de orígenes y destinos factibles. Podríamos definir que el costo mínimo es *de ingeniería*, ya que se puede medir, pero para una cierta proporción de los viajeros puede ocurrir que el camino 2 no es el de menor costo.

Para reducir los problemas señalados, las aplicaciones de los modelos basados en equilibrio recurren a la desagregación, segregando la demanda en varios grupos de viajeros y, desde el punto de vista espacial, definiendo un gran número de zonas. Así, por ejemplo, se pueden definir cinco tipos de viajeros en automóvil con diferentes valores del tiempo, sensibilidad a los costos y diversas preferencias. Naturalmente que en la medida que se definan más grupos de usuarios y un mayor número de zonas, aumenta el realismo de los resultados. Las posibilidades de desagregación, sin embargo, están limitadas por problemas prácticos, tanto desde el punto de vista computacional como de información, ya que la calidad de ésta tiende a disminuir a medida que se aumenta el nivel de resolución, tanto sectorial como espacial.

El modelo de Burrell intenta explicar la variabilidad en la percepción de los costos por parte de los viajeros individuales al introducir un elemento estocástico en los costos mismos. Si

FIGURA 3

**VARIABILIDAD
ESPACIAL EN
LA SELECCIÓN
DE CAMINOS**

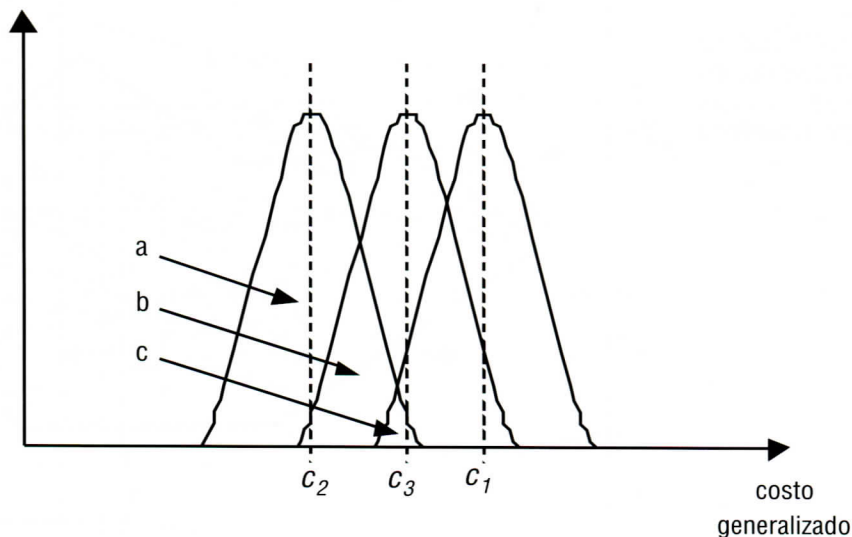


bien esto constituye un desarrollo interesante con respecto al modelo de equilibrio, no formaliza adecuadamente la variabilidad ni constituye un planteamiento consistente con teoría económica. Esto ocurre porque introduce el elemento estocástico en el cálculo de los costos, no en la forma en que los viajeros perciben los costos mismos. Desde un punto de vista práctico, la utilización del método de Monte Carlo implica que cada vez que se aplica el modelo a un caso específico, los resultados son diferentes. Este modelo ha sido aplicado en numerosos casos de estudios prácticos principalmente en Gran Bretaña, pero no ha tenido una aceptación general.

2/ MODELOS DE DECISIÓN DISCRETOS

Los modelos de decisión discretos, basados en la teoría de utilidad aleatoria, proveen una explicación consistente y sistemática de la variabilidad en la percepción de costos. A

diferencia del modelo de Burrell, que supone que los costos de cada opción de viaje varían aleatoriamente. El supuesto fundamental es que existe una variabilidad en la percepción de los costos por parte de los propios viajeros, mientras los costos se suponen determinísticos. Retomando el ejemplo simplificado de la sección anterior, el costo de cada opción pasa a ser un costo medio en la percepción de los viajeros. Dada una población de viajeros individuales, no todos percibirán el costo del camino 2 como c_2 ; para algunos será mayor y para otros menor, distribuyéndose aleatoriamente en torno a c_2 . La figura 4 muestra la forma en que los viajeros perciben el costo de cada uno de los caminos, en donde c_1 , c_2 y c_3 representan los costos medios de los mismos. Como puede verse, la percepción de los costos varía según la forma de las curvas, representando así la variabilidad en la percepción. De manera consistente con el ejemplo, en promedio los viajeros perciben el camino 2 como de menor costo, luego el 3 y por último el 1, es decir, $c_2 < c_3 < c_1$. Sin

FIGURA 4**VARIABILIDAD EN LA PERCEPCIÓN DEL COSTO GENERALIZADO**

embargo, las curvas se superponen, lo cual quiere decir que para una parte de los viajeros el camino 2 no representa la opción de menor costo. En la figura el área *a* representa la proporción de viajeros que percibe el camino 2 como de menor costo; el área *b* representa la porción en donde la curva de costos del camino 3 se superpone a la del camino 2 y representa, por lo tanto, la proporción de viajeros que perciben el camino 3 como la de menor costo; similarmente el área *c* representa la proporción de viajeros que perciben el camino 1 como la mejor opción. Naturalmente que como $c_2 < c_3 < c_1$, se deduce fácilmente que $a > b > c$.

La teoría de utilidad aleatoria plantea que los individuos que deben escoger entre varias opciones evalúan las ventajas comparativas de cada una de acuerdo con una función de utilidad U . La utilidad está compuesta por un elemento mensurable determinístico y un término aleatorio representativo

de la variabilidad. En el ejemplo se ha supuesto que el elemento mensurable sea el costo generalizado, pero la teoría permite que cualquier variable o conjunto de variables formen parte de la función de utilidad. En este caso la utilidad asociada al camino 2, por ejemplo, queda expresada como:

$$u_2 = U(c_2, \xi), \quad 1$$

Donde c_2 es el componente mensurable (el costo generalizado) y ξ representa el componente aleatorio. Luego, la probabilidad que los viajeros escojan el camino 2 $Pr(2)$ equivale a la probabilidad que la utilidad de 2 sea mayor que la de los demás caminos, es decir:

$$Pr(2) = Pr(u_2 > u_1, u_3), \quad 2$$

Para obtener un modelo formal debe introducirse un supuesto acerca de la forma de la curva según la cual se distribuye la

percepción de la utilidad. La posibilidad más inmediata es suponer que la percepción de la utilidad se distribuye según una curva normal, lo cual conduce a un modelo probit. Este modelo, sin embargo, es bastante complejo, difícil de estimar y sólo puede manejar un número muy limitado de opciones. Esta razón llevó a los investigadores a buscar una forma más conveniente. Domencich y McFadden (1975) suponen que la utilidad se distribuye según una curva Gumbel, lo cual genera el modelo probabilístico logit. Los autores exploraron ampliamente este modelo y lo recomiendan por tener las mejores propiedades estadísticas. Según esta formulación, la probabilidad de escoger una opción cualquiera i entre un conjunto de N opciones disponibles es:

$$\Pr(i) = \frac{\exp(-\lambda c_i)}{\sum_{i=1}^N \exp(-\lambda c_i)} \quad 3$$

El término λ se conoce como *parámetro de dispersión*, ya que regula la forma de la función de distribución de la utilidad. En este caso lleva un signo negativo, por cuanto la utilidad está expresada en términos de costos. Un valor grande de λ indica que hay muy poca dispersión en la percepción de la utilidad, lo cual resulta en curvas muy estrechas y con menores posibilidades de solape entre ellas. En el ejemplo, esto indicaría que los viajeros “están de acuerdo” en que el camino 2 es la mejor opción, lo cual resultaría en un valor de $\Pr(2)$ cercano a 1.0. Por el contrario, si λ tiene un valor pequeño quiere decir que hay mucha dispersión, generando curvas muy amplias e incrementando las áreas de solape. En el límite, cuando $\lambda=0$, los viajeros son completamente indiferentes al costo generalizado de cada camino, con lo cual $\Pr(i) = 1/N$.

Williams (1977) exploró las relaciones entre el modelo logit y la teoría económica, demostrando su consistencia. En particular demostró que el *costo compuesto* que se deriva del logit es equivalente al concepto de excedente al consumidor. El costo compuesto representa la utilidad conjunta que se deriva de una distribución logit, y se calcula como:

$$S = -\frac{1}{\lambda} \ln \left[\sum_{i=1}^N \exp(-\lambda c_i) \right] \quad 4$$

en donde S es el excedente al consumidor o costo compuesto de los viajeros. En la literatura, este término también se conoce como *log-sum*. Esta medida de utilidad conjunta, como señala Williams, es el indicador correcto para utilizar en evaluación de proyectos, pero además permite la estructuración jerárquica de varios modelos logit.

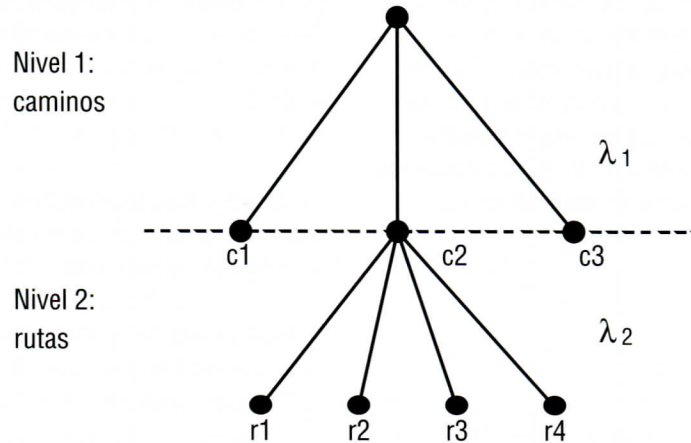
La estructuración jerárquica permite la encadenación de varios niveles de decisión. Supongamos que cada uno de los caminos en el ejemplo anterior está compuesto de varias rutas de autobús, cada una de las cuales constituye una subopción. Para representar esto se pueden establecer dos niveles jerárquicos: un primer nivel para representar la elección de caminos, y un segundo nivel para representar la elección de rutas dentro de cada camino. Esta estructura implica el cálculo de dos probabilidades condicionales (camino y ruta), relacionadas entre sí por el costo compuesto.

$$\Pr(i, r) = \frac{\exp(-\lambda_1 c_i)}{\sum_{i=1}^N \exp(-\lambda_1 c_i)} \times \frac{\exp(-\lambda_2 c_r)}{\sum_{r=1}^R \exp(-\lambda_2 c_r)} \quad 5$$

en donde $\Pr(i, r)$ es la probabilidad de elegir la ruta r dado que se ha escogido el camino i , R es el número de rutas que pertenecen al camino i , y donde c_r representa el costo percibido de la ruta r . En este caso c_i representa el costo percibido del camino i , calculado como el *log-sum* de la elección de rutas, es decir:

$$c_i = -\lambda_2 \ln \left[\sum_{r=1}^R \exp(-\lambda_2 c_r) \right] \quad 6$$

Como puede verse, cada nivel de decisión está representado por modelos logit con parámetros distintos: λ_1 y λ_2 . La figura 5

FIGURA 5**ESTRUCTURACIÓN
JERÁRQUICA DE
MODELOS LOGIT**

muestra un diagrama con la estructuración jerárquica de ambos niveles, con tres caminos al primer nivel y cuatro rutas en el segundo nivel. Como parece obvio, en la medida que se desciende en el nivel jerárquico, la dispersión es menor. Una demostración formal de este fenómeno está en Williams (1977), con lo cual se puede demostrar que:

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

7

El modelo probabilístico logit ha sido ampliamente investigado por diversos autores, y ha resultado de extraordinaria aplicabilidad práctica, no sólo en el área de transporte sino también en una gran diversidad de fenómenos. Esto se explica porque es relativamente fácil de estimar (si los parámetros que multiplican los componentes del costo generalizado son conocidos, sólo queda un parámetro por estimar), produce resultados realistas y no tiene límites en el número de opciones

que se puede considerar. En su forma jerárquica permite, además, crear estructuras de modelos de considerable complejidad que representan mejor las elecciones de los usuarios.

A pesar de las ventajas señaladas del modelo logit, los modelos de transporte convencionales restringen su uso a la estimación de la elección modal. El caso más común es el de la separación modal entre transporte privado y público en un primer nivel, con un segundo nivel para representar submodos de transporte público, como bus, metro, minibús, taxi, etc. Paradójicamente estos modelos combinan la separación modal logit con asignación por equilibrio, a pesar de la evidente incompatibilidad entre ambos desde el punto de vista teórico. Esto se debe a que el modelo logit, como lo señalaron diversos autores, presentaba algunos problemas para representar la asignación, y hasta hace unos años no se contaba con una solución práctica. En la sección siguiente se discuten estos problemas y se describe

la solución desarrollada por los autores y que cuenta con numerosas aplicaciones prácticas.

3/ PRINCIPIOS DE LA ASIGNACIÓN PROBABILÍSTICA LOGIT

El modelo logit descrito en la sección anterior es una opción muy conveniente para representar la asignación en modelos de transporte. El modelo representa la variabilidad en la percepción de la utilidad y el efecto de agregación. Además es un modelo consistente con teoría económica y es relativamente fácil de aplicar en la práctica. También debe destacarse la posibilidad de relacionar varios niveles de decisión, de tal manera que el fenómeno de la asignación puede combinarse de manera conveniente y consistente con la separación modal y otros niveles posibles. La asignación logit tiene, por lo tanto, mucho sentido, y sin embargo hasta hace poco no se habían desarrollado modelos sobre esta base. Como se señaló, la mayoría de los modelos de asignación que se utilizan hoy en día se basan en el principio de equilibrio.

Un modelo de asignación logit es, en principio, muy sencillo. La ecuación (3) es, de hecho, un modelo logit de asignación completo, flexible, consistente con teoría económica, que reconoce la variabilidad en la percepción de la utilidad y la agregación, y que provee un vínculo directo con posibles niveles de decisión a través del log-sum de la ecuación (6).

Existen dos razones principales que explican por qué este tipo de modelos no se había desarrollado. La primera es que para poder aplicar el modelo se requiere conocer de antemano los caminos u opciones de viaje. Se requiere, por lo tanto, de un algoritmo que genere estos caminos con base en una descripción de una red de transporte. La segunda razón es que una red de transporte puede ser bastante compleja, generándose un gran número de caminos factibles, muchos de los cuales pueden ser repetitivos o simplemente irrelevantes para los usuarios. Esto implica que el algoritmo de búsqueda de caminos debe ser selectivo y capaz de jerarquizar la red. Adicionalmente el algoritmo debe ser eficiente desde el punto

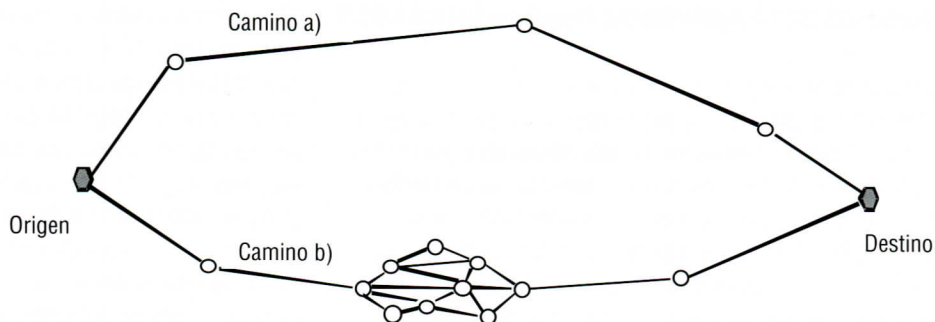
de vista computacional. Estos aspectos serán desarrollados más adelante.

Una primera versión del modelo de asignación logit se presentó en de la Barra (1989). Una versión más desarrollada fue presentada por los autores en Añez *et al.* (1993). El objetivo del proceso de búsqueda de caminos es el generar opciones de viaje que conecten cada par origen-destino. En su expresión más simple, un camino u opción de viajes queda definido por una secuencia de enlaces interconectados de la red, tal como I_1, I_2, I_3, \dots que conformen una alternativa razonable de viaje desde el origen hasta el destino. Como la red puede contener miles de opciones, los caminos deben cumplir con dos condiciones adicionales:

- Deben corresponder a un subconjunto de los n pasos de menor costo generalizado;
- Deben corresponder a opciones claramente diferenciadas.

La primera condición es bastante obvia para reducir el número de opciones, pero si fuera la única, el resultado podría ser un conjunto de caminos muy similares entre sí. En otras palabras, algunos caminos podrían compartir un gran número de enlaces, representando opciones muy cercanas que los viajeros considerarían como una sola con pequeñas variaciones. Considérese el ejemplo de la figura 6, en donde aparecen dos caminos principales señalados como a) y b), y en donde el camino b) ofrece un gran número de variantes cercanas. Si el costo generalizado del camino b) y sus variantes son menores que el de a), y se ha solicitado al modelo encontrar los primeros 6 caminos, se corre el riesgo que sólo sea el camino b) con seis variantes los que resulten seleccionados, descartando completamente la opción a). Los viajeros, en cambio, probablemente percibirán que hay dos opciones, una de ellas con variantes poco significativas, y no descartarán la opción a).

Lo que ocurre en el ejemplo es que hay opciones altamente correlacionadas entre sí. El modelo logit no contempla la correlación entre opciones, de tal manera que ante un caso

FIGURA 6**EJEMPLO DE UNA RED
PARA MOSTRAR EL
FENÓMENO DE SOLAPES**

como éste producirá resultados poco reales, asignando todos los viajeros al camino b), repartiéndolos entre las variantes y no asignando viajeros al camino a). La solución obvia para corregir este problema es estructurar jerárquicamente el modelo de asignación, lo cual se discutirá más adelante. Por los momentos, lo que interesa es minimizar las posibilidades de caminos altamente correlacionados en la búsqueda misma de los caminos.

Para lograr este objetivo el método desarrollado por los autores introduce el concepto de *solape*, definido como una medida de la coincidencia entre dos o más caminos alternativos. El método lleva cuenta del grado de solape entre las distintas opciones, penalizándolas por un *factor de control de solapes*. Como resultado se seleccionan los n primeros pasos que tengan el menor costo generalizado y el menor grado de solape.

El control de solapes se logra mediante un factor de penalización llamado Oz , un número positivo mayor o igual que 1.0. Con este factor, el algoritmo de búsqueda de caminos procede con los siguientes pasos:

a) buscar el camino de menor costo generalizado entre el origen y destino y guardarlo;

- b) multiplicar el costo de todos los enlaces que forman el paso anterior por el factor Oz ;
 c) volver al paso a) e iterar hasta que:
 d) el paso mínimo encontrado en a) sea igual a cualquiera de los pasos que han sido guardados.

Como puede verse, el método propuesto es muy sencillo pero cumple con los dos objetivos planteados: encontrar los caminos de menor costo con el menor grado de solape posible. Si el valor de $Oz=1$, el camino de menor costo encontrado en la primera búsqueda vuelve a aparecer inmediatamente, ya que el costo de todos los enlaces que lo componen ha sido multiplicado por 1.0, con lo cual el paso d) suspende la búsqueda. En la medida en que el valor de Oz se incrementa, un mayor número de caminos tiene éxito en ser aceptados. Nótese que un mismo enlace que aparezca más de una vez en la búsqueda será penalizado varias veces. También debe notarse que ningún camino que tenga un costo mayor que el de menor costo multiplicado por Oz tendrá éxito, con lo cual el factor Oz actúa también como factor de dispersión.

En el ejemplo de la figura 6 puede verse que si $Oz=1$ sólo el camino b) con su variante de menor costo generalizado quedará

seleccionado. En la medida que se incrementa el valor de Oz , se incrementa también la probabilidad de que el camino a) quede seleccionado. Es poco probable que variantes del camino b) prevalezcan, ya que la mayor parte del camino b) estará penalizada. Una vez el camino a) aparece en la lista, nuevos incrementos de Oz pueden lograr que otras variantes del camino b) queden seleccionadas. Esto quiere decir que el algoritmo propuesto minimiza las posibilidades de solape, pero no garantiza su eliminación. Tampoco es deseable que lo haga, ya que las variantes del camino b) también son opciones válidas, y por lo tanto no deben ser eliminadas.

Cabe destacar en este punto que el algoritmo de búsqueda de caminos que se ha presentado utiliza todas las variables de comportamiento que componen el costo generalizado, y por lo tanto puede incluir la valoración del tiempo y las diversas preferencias de los usuarios. Al igual que en el modelo de asignación por equilibrio, es posible segregar la demanda por tipo de usuario, lo cual resultará en un conjunto de caminos diferentes para cada grupo. Por ejemplo, las personas resultarán con un conjunto de caminos muy diferentes a los usuarios de carga, e incluso los viajeros de ingresos altos pueden resultar con un conjunto diferente de caminos comparado con los ingresos bajos. Sin embargo, el procedimiento mismo utilizado para seleccionar los caminos no pretende tener una base en el comportamiento de los usuarios, ya que no supone que los viajeros realizan una inspección de alternativas de esta forma.

Todo lo que se persigue es un método heurístico que produzca un conjunto razonable de opciones relevantes que se parezca a las que los usuarios consideran en la realidad.

Como consecuencia del procedimiento descrito, el modelo de asignación logit recibe un conjunto de opciones de viaje con mayor o menor grado de solape dependiendo del valor de Oz . El modelo de asignación, que sí es un modelo de comportamiento, debe distribuir la demanda entre las opciones y corregir las probabilidades según el grado de solape o correlación entre las opciones. El método propuesto por los autores corrige las

probabilidades de asignación de acuerdo con el grado de solape entre las opciones. En las probabilidades de asignación, el factor Oz no interviene; en su lugar la penalización por solape se reemplaza simplemente por el número de ocurrencias.

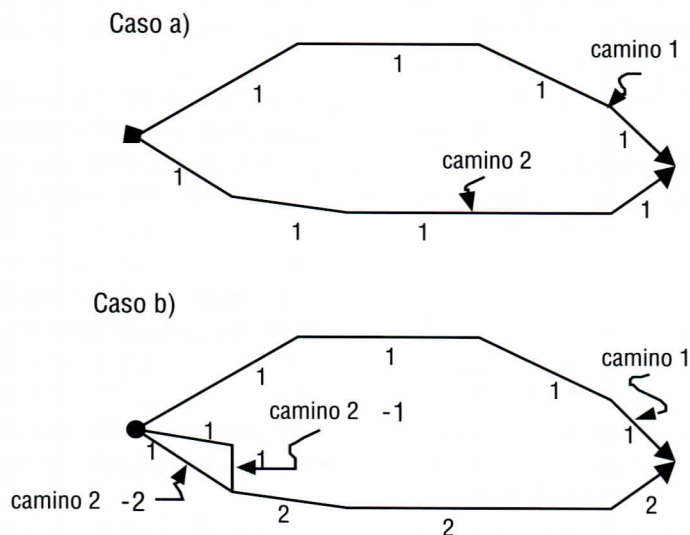
Si un enlace determinado no está compartido por caminos alternativos, su factor de penalización es 1.0; si está compartido por dos caminos, entonces el factor de penalización es 2.0, y así sucesivamente. Esto se ilustra gráficamente en la figura 7, que presenta dos casos, a) y b). En el caso a) el origen está conectado al destino por 2 caminos: el camino 1 y el 2. Estos dos caminos están claramente diferenciados y no existe ningún grado de solape entre ellos. Como consecuencia de lo anterior, todas las penalizaciones de los enlaces son 1.0. Si suponemos que el costo del camino 1 es similar al del camino 2, entonces el modelo logit dará como resultado que las probabilidades de asignación son cercanas a 0.5 para cada camino, lo cual es muy razonable.

En el caso b) se introduce una pequeña complejidad consistente en dos variantes al camino 2 señaladas como 2-1 y 2-2. Para el modelo logit ahora hay tres opciones de costo similar, y como consecuencia la probabilidad de selección de cada una será aproximadamente 0.33. Esto quiere decir que la introducción de las variantes cambia drásticamente las probabilidades de selección, lo cual es sin dudas un resultado poco razonable. Para los viajeros hay claramente dos opciones: el camino 1 y el 2, mientras las opciones 2-1 y 2-2 sólo son subopciones que no pueden cambiar radicalmente las probabilidades de selección.

El ejemplo del caso b) es una clara demostración de la incapacidad del modelo logit para reconocer la correlación entre las opciones. Esta propiedad del logit se conoce en la literatura como la *Independencia de las Alternativas Irrelevantes* (IIA), que señala que la probabilidad relativa entre dos opciones es independiente de la presencia de otras opciones posibles. En otras palabras, el modelo logit no sabe que los caminos 2-1 y 2-2 están altamente correlacionados, y que los viajeros los considerarán como una sola opción o como dos subopciones muy similares entre sí, y por lo tanto las evalúan de manera conjunta. Éste es

FIGURA 7

**CORRECCIÓN DE
LAS PROBABILIDADES
DE ASIGNACIÓN
DE ACUERDO CON
EL GRADO DE SOLAPE**



el argumento que muchos autores señalaban para sostener que no era posible construir un modelo logit de asignación.

La clave de la solución desarrollada por los autores es que el costo de cada enlace que conforman los caminos es multiplicado por el número de coincidencias. En el caso a) no hay ninguna coincidencia o solape entre los caminos alternativos, por lo cual el costo de todos los enlaces se multiplican por un factor de solape = 1.0. En el caso b), el camino 1 sigue siendo independiente, y por lo tanto todos los costos de los enlaces que lo conforman se multiplican por un factor de 1.0. En el caso de las variantes del camino 2 en el caso b), hay una gran coincidencia entre los dos caminos alternativos. Es fácil comprobar que el multiplicar por 2.0 el costo generalizado de la mayoría de los enlaces que conforman las dos subopciones del camino 2 vuelve las probabilidades a una aproximación de 0.5 para el camino 1 y 0.25 para cada una de las variantes del

camino 2, lo cual es el resultado esperado. Si las variantes introducidas al camino 2 son poco significativas, las probabilidades de selección serán poco afectadas. En la medida en que las variantes afecten más significativamente cada opción, las probabilidades de selección lo reflejarán. Es fácil ver que cualquier otra penalización a los costos diferente del número de coincidencias no logra el resultado esperado.

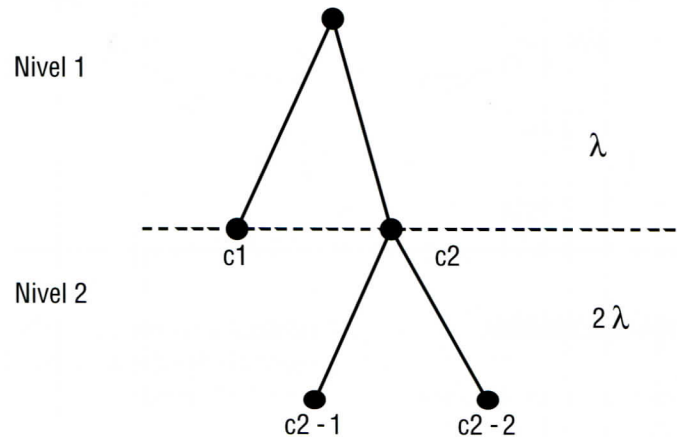
Formalmente, el modelo de asignación logit queda definido por:

$$\Pr(i) = \frac{\exp(-\lambda \tilde{c}_i)}{\sum_{i=1}^N \exp(-\lambda \tilde{c}_i)} \quad 8$$

en donde $\Pr(i)$ es la probabilidad de elegir un camino i , y donde c_i es el costo generalizado del camino i penalizado por los solapes que se den con todos los demás caminos $i=1, N$.

FIGURA 8

**ESTRUCTURACIÓN
JERÁRQUICA DE
LOS CAMINOS EN
EL MODELO DE
ASIGNACIÓN LOGIT**



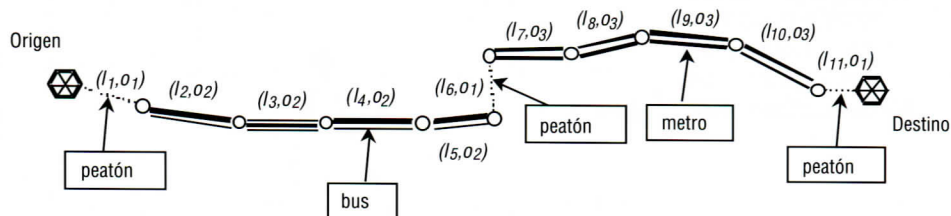
El procedimiento descrito equivale a una estructuración jerárquica de las opciones. Como se estableció en la ecuación (7), en la medida que se desciende en el orden jerárquico, el parámetro de dispersión del modelo logit se incrementa para reflejar el menor grado de dispersión. El multiplicar el costo de cada subopción por el grado de solape es equivalente matemáticamente a multiplicar el parámetro de dispersión por el mismo factor, ya que ambos multiplican la función de desutilidad definida como el costo de cada camino. La estructuración jerárquica de los modelos logit fue expresada en la figura 5. Su equivalente en el modelo propuesto es debido a los factores de penalización por solape entre los caminos alternativos, y se muestra en la figura 8. Puede verse que los caminos del ejemplo de la figura 7 han sido organizados en dos niveles; en el primer nivel está el camino 1 y el 2, y en un segundo nivel están las dos variantes del camino 2. En el primer nivel, el parámetro de dispersión es λ , mientras que en el segundo nivel es 2λ .

El ejemplo de la figura 7 y el consecuente árbol jerárquico de la figura 8 corresponde a una red muy simplificada. En aplicaciones reales las redes son mucho más complejas, con lo cual el árbol puede crecer extraordinariamente en complejidad. Sin embargo, la formación del árbol jerárquico se realiza de manera automática a través de las penalizaciones por solape, sin que se requiera intervención alguna del usuario del modelo.

Al igual que el procedimiento de búsqueda de caminos, el modelo de asignación logit también puede ser aplicado con la demanda segregada en varias categorías, como se ha hecho en numerosas aplicaciones prácticas. En este caso no sólo los componentes del costo generalizado varían entre categorías, como los valores del tiempo, preferencias y otros elementos subjetivos, sino también pueden estimarse diversos valores del parámetro de dispersión λ .

FIGURA 9

EJEMPLO DE UN CAMINO INTERMODAL



4/ ASIGNACIÓN PROBABILÍSTICA MULTIMODAL

El modelo de asignación logit descrito en la sección anterior puede ser ampliado fácilmente para redes multimodales. La red simple de la sección anterior fue definida como un conjunto de enlaces interconectados. Una red multimodal se construye con base en combinaciones entre enlaces físicos y modos o rutas de un modo si se trata de transporte público. A su vez, un camino multimodal se construye de la misma manera en que se construyen los caminos simples, excepto que queda definido por secuencias de combinaciones arcos-rutas, tales como las de la figura 9. En el ejemplo, el camino incluye diversos enlaces físicos $(l_1, l_2, l_3 \dots)$ combinados con tres modos o rutas: o_1 =peatón, o_2 =bus y o_3 =metro. Al combinar varios modos en un mismo camino se habla de intermodalidad, una propiedad que muy pocos modelos de transporte tienen.

En el caso multimodal, el tratamiento de los solapes es similar al descrito para las redes unimodales de la sección anterior. En este caso son las combinaciones enlace-modo (l_i, o_k) las que se penalizan por el factor Oz en la búsqueda de caminos y por el número de coincidencias en el modelo de asignación. Como se mencionó, un modo público puede contener varias rutas, caso en el cual se penalizan las combinaciones enlace-ruta. Como

resultado se puede obtener dos caminos que sigan la misma secuencia de enlaces físicos, siempre que involucren a modos o rutas diferentes.

El modelo multimodal puede representar redes de gran complejidad con un gran número de rutas de transporte público, y también puede ser utilizado para representar sistemas de carga, en donde los modos pueden ser camiones de diversos tipos, ferrocarriles, barcos, etc. El modelo no impone restricciones acerca del número de transbordos que puede haber en un camino multimodal, y el cálculo del costo generalizado puede incluir los costos correspondientes, tales como tarifas de abordaje, costos de carga-descarga, tiempos de espera y cualquier otro elemento. Las penalizaciones por enlace-modo o enlace-ruta generan jerarquías de la misma manera que lo hacían para el caso unimodal, excepto que los árboles resultantes son aún más complejos.

En el caso del transporte público, una sofisticación adicional se obtiene si las penalizaciones se aplican tanto a la ruta como al modo al cual pertenece la ruta. El modelo desarrollado por los autores también incluye penalizaciones por tipo de vía, lo cual permite jerarquizar la red. Por ejemplo, las vías de mayor jerarquía (autopistas, avenidas) pueden tener un factor de penalización

menor que las vías secundarias. Esto incrementa las posibilidades de que las vías principales aparezcan en los caminos generados, elevándolas de nivel en la estructura jerárquica.

5/ CONCLUSIONES

El modelo de asignación probabilístico logit descrito en las secciones anteriores ha sido aplicado en numerosos estudios prácticos durante unos 15 años, siendo un componente importante del modelo integrado de usos del suelo y transporte Tranus (Modelística, 1999). En su forma actual ha permitido la modelación de sistemas de transporte de considerable complejidad, tanto en el ámbito urbano como regional y nacional, en América Latina, EE UU y Europa. Ha resultado particularmente útil para la planificación de sistemas de transporte público masivo o reorganización de sistemas convencionales, presentando considerables ventajas sobre los modelos convencionales en ciudades de América Latina, con baja disponibilidad de automóvil particular y una oferta de transporte público muy diversificada. También se han realizado numerosas aplicaciones para sistemas de transporte regionales o nacionales combinando los sistemas de transporte de pasajeros y carga.

Con respecto a los modelos convencionales de transporte basados en el principio de equilibrio, la asignación logit presenta una serie de ventajas, entre las cuales merece destacar:

a) Al estar basado en variables de comportamiento, el modelo de asignación logit produce resultados realistas y puede estimarse con base en encuestas, ya sea de preferencias reveladas o declaradas. Además cuenta con parámetros de dispersión para ajustarse al comportamiento de los distintos tipos de usuarios, que el modelo de equilibrio no tiene.

b) Por sus características jerárquicas, el modelo de asignación logit puede combinarse de manera consistente con otros modelos, como separación modal, generación de viajes y modelos de usos del suelo.

c) Gracias al log-sum, el modelo de asignación logit provee indicadores de beneficio económico consistentes con el concepto de excedentes al usuario, que forman la base para la evaluación de proyectos. En la medida que aumenta el número de opciones (por ejemplo, al introducir nuevos servicios) el log-sum refleja, correctamente, un beneficio. Así, por ejemplo, si un escenario presenta tres opciones de viaje de costo similar y en un escenario alternativo se agrega una cuarta opción, el log-sum estima un beneficio por el hecho que aumentó el número de opciones. Los modelos basados en equilibrio no tienen esta posibilidad ya que la asignación produce un solo costo (el de equilibrio).

d) El modelo de asignación logit no depende de la congestión para dispersar el tráfico asignado, lo cual es de especial importancia en redes regionales. En condiciones de baja congestión, el modelo de equilibrio con base en una sola categoría de usuarios asigna la totalidad del tráfico al camino de menor costo. Si el modelo de equilibrio contempla varias categorías de usuarios, puede ocurrir que las diferencias entre las categorías no sean suficientes para dispersar el tráfico, con lo cual toda la demanda seguirá asignada a un mismo camino. Si las diferencias entre categorías son significativas, cada categoría quedará enteramente asignada a un único camino. Por ejemplo, todos los usuarios de ingresos altos elegirán una autopista de peaje, mientras todos los de bajos ingresos elegirán una carretera alternativa sin peaje. Esto hace que el modelo de equilibrio sólo puede ser aplicado a casos urbanos con altos niveles de congestión, mientras el modelo logit puede ser aplicado a redes con cualquier nivel de congestión.

e) El modelo de equilibrio asigna la totalidad de la demanda al camino mínimo en la primera iteración, lo cual dificulta la convergencia y obliga a la utilización de funciones flujo-demora más suaves. Si bien en los modelos de equilibrio se pueden modificar las condiciones iniciales para reducir el problema, de todas maneras la asignación será todo-o-nada en la primera iteración. El modelo probabilístico logit asigna la demanda a varios caminos desde la primera iteración, lo cual facilita

considerablemente la convergencia y permite la utilización de funciones flujo-demora cercanas a las de ingeniería, y por lo tanto factibles de ser calibradas con base en datos reales.

f) Al trabajar con un conjunto de caminos conocidos, el analista tiene pleno control del proceso de asignación probabilístico. El modelo desarrollado por los autores presenta los caminos alternativos de manera gráfica acompañada de toda la información relativa a cada camino: el costo generalizado, costo penalizado por solapes y la probabilidad de selección por cada categoría de viajero. En el modelo de asignación por equilibrio sólo se conoce el camino de menor costo generalizado en la última iteración.

g) La segregación de la demanda en varias categorías en un modelo de equilibrio permite distinguir diversos niveles en la percepción de los costos, pero no la variabilidad dentro de cada categoría. En el modelo logit no sólo se puede segregar la demanda, sino también representar la variación en la percepción de costos de cada categoría, con diferentes parámetros de dispersión.

h) Al contar con una representación explícita de la variabilidad, el modelo logit puede producir resultados realistas aun si la calidad de la información no permite una división de las categorías de demanda y de zonas muy detallada. Los modelos de equilibrio, especialmente en condiciones de congestión media o baja, exigen la división del área de estudio en un gran número de zonas. Esta propiedad del modelo logit facilita la aplicaciones en ciudades de América Latina o en cualquier otra en que no se dispone de información confiable a nivel detallado. También es fundamental para las aplicaciones regionales o nacionales, ya que a estos niveles la información se maneja de manera agregada, y no suelen presentar congestión. La posibilidad de trabajar a niveles relativamente agregados permite también que los modelos logit sean aplicados en estudios cortos de tipo estratégico o para fines académicos.

REFERENCIAS

AÑEZ, J., de la BARRA, T. y PÉREZ, B. (1993)

Multidimensional Path Search and assignment (con J. Añez y B. Pérez) en *Proceedings of the 21st PTRC Summer Annual Meeting*, Manchester-England (disponible en www.modelistica.com).

BURRELL, J.E. (1968)

"Multiple Route Assignment and its Application to Capacity Constraint", *Proceedings, 4th International Conference on the Theory for Traffic Flow*, Karlsruhe, Alemania.

De la BARRA, T. (1989)

Integrated Land Use and Transport Modelling. Cambridge University Press, UK.

DIAL, R.B. (1971)

"A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which Obviates Path Enumeration". *Transportation Research*, 5(2), 83-11.

DOMENCICH, T.A

y McFadden, D. (1975) *Urban Travel Demand: a Behavioural Analysis*. North-Holland, Amsterdam.

FLORIAN, M. y SPIESS, H. (1982)

"The Convergence of Diagonalization Algorithms for Asymmetric Network Assignment Models". *Transportation Research*, 16B(6), 477-84.

MODELISTICA (1999)

Descripción matemática del Sistema Transus (disponible en www.modelistica.com)

WARDROP, J.G. (1952)

Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, Proceeding, Institute of Civil Engineers, London, Part II, Vol. 1.

WILLIAMS, H.C.W.L. (1977)

"On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit". *Environment and Planning A*, 9, 285-344.