Urbana 30/Caracas 2002, pp. 61-67

Tristán E. GÁLVEZ P.

ARTÍCULOS

EL MODELO POWIT

RESUMEN

Se presenta un nuevo modelo de elección discreta basado en la teoría de la utilidad aleatoria, en el cual la probabilidad de elección resulta ser una función potencial del costo generalizado de las alternativas. Se muestran algunas propiedades elementales del modelo, entre las cuales destaca la robustez teórica de la expresión derivada para el costo compuesto y la sencillez con que trata el caso de alternativas con términos de variabilidad correlacionados. Se concluye que el modelo propuesto puede llegar a constituir una alternativa valiosa a los modelos de elección discreta ya conocidos.

ABSTRACT

A new model of discreet election is presented based on the theory of the random utility, in which the election probability is to be a potential function of the widespread cost of the alternatives. Some elementary properties of the pattern are shown, among which it highlights the theoretical robustness of the expression derived for the compound cost and the simplicity with which it treats the case of alternative with correlated terms of variability. You concludes that the proposed pattern can end up already constituting a valuable alternative to the models of discreet election well-known.

Palabras clave
Modelo. Elección discreta. Utilidad aleatoria. Planificación del transporte. Costo generalizado.

Key-words
Model. Discreet election. Random utility. Planning of the transport. Widespread cost.

Recibido: 14-03-02
Aceptado: 17-04-02

1/ INTRODUCCIÓN

Uno de los enfoques más ampliamente utilizados para modelar el comportamiento de los viajeros son los modelos de elección discreta. En general todos estos modelos suponen que cierto individuo perteneciente a una población dada elegirá de entre un conjunto de alternativas disponibles aquella que le reporte mayor utilidad, la cual se asume función de atributos de cada alternativa y del viajero. Se supone a continuación que esta utilidad individual es la suma de dos términos: una utilidad media o representativa de la población a la cual pertenece y un término que representa la variabilidad interpersonal. Se asume a continuación que este último término puede ser descrito mediante una función de distribución estadística con media cero.

Al adoptar una función de distribución concreta para el término de variabilidad interpersonal, y supuestos con relación a la correlación de los términos de variabilidad de cada alternativa, resultan los diversos modelos que han sido desarrollados sobre la base de estos supuestos. En especial, si se asume que en todas las alternativas este término sigue la misma distribución de valor extremo Gumbel (1958) tipo I, resulta el modelo Logit Multinomial (LM), propuesto por McFadden (1974), el Logit Jerárquico (Williams, 1977), que se deriva como una extensión del anterior, en que se considera que existe una componente de error adicional que representa correlación en un grupo de alternativas, y la familia de modelos generalizados de valor extremo o GEV (McFadden, 1981), a partir de los cuales puede derivarse el Logit Multinomial y el Jerárquico. Al asumir una distribución normal, se obtiene el modelo Probit (Daganzo, 1979). Con otros supuestos, se obtiene por ejemplo el modelo Dogit (Gaudry y Dagenais, 1979) y los modelos Mixed Logit (Ben Akiva y Bolduc, 1996; Browstone y Train, 1999; Alvarez y Munizaga, 2001).

2/ PLANTEAMIENTO DEL MODELO

En el presente trabajo nos apartaremos de este enfoque común en dos direcciones. En primer lugar, se representará cada alternativa por su costo generalizado, en lugar de la utilidad. En segundo lugar, se asumirá que el término de variabilidad interpersonal es multiplicativo en lugar de aditivo, al igual que en el modelo Rubit, propuesto por Briton y Bondzio (1996).

En la formulación del modelo propuesto se partirá del supuesto de que cada alternativa *i* puede ser caracterizada por el modelador con un costo generalizado positivo *Ci* que es función de los atributos de cada alternativa, de los atributos de la población o subpoblación a la cual pertenece el viajero, y de parámetros a calibrar. La expresión funcional es irrelevante para el desarrollo siguiente, por lo cual puede ser dejada por el momento abierta.

Desde el punto de vista de un individuo específico *q* el costo generalizado de la alternativa *i* estará dado por

$$K_{iq} = C_i \varepsilon_{iq} \tag{1}$$

donde ε_{iq} es el término de variabilidad interpersonal. Se supondrá que este término sigue cierta distribución estadística sobre la población de viajeros, con media uno y varianza a calibrar. Por lo tanto, K_{iq} seguirá la misma distribución, amplificada por C_i. En lo que sigue usaremos la notación ε_i y K_i para referirnos a valores obtenidos aleatoriamente de estas distribuciones. En este contexto, la probabilidad P_i de elegir la alternativa *i* entre *N* alternativas disponibles estará dada por:

$$P_i = Prob\left(K_i \le K_j\right),\ \forall j = 1,N \tag{2}$$

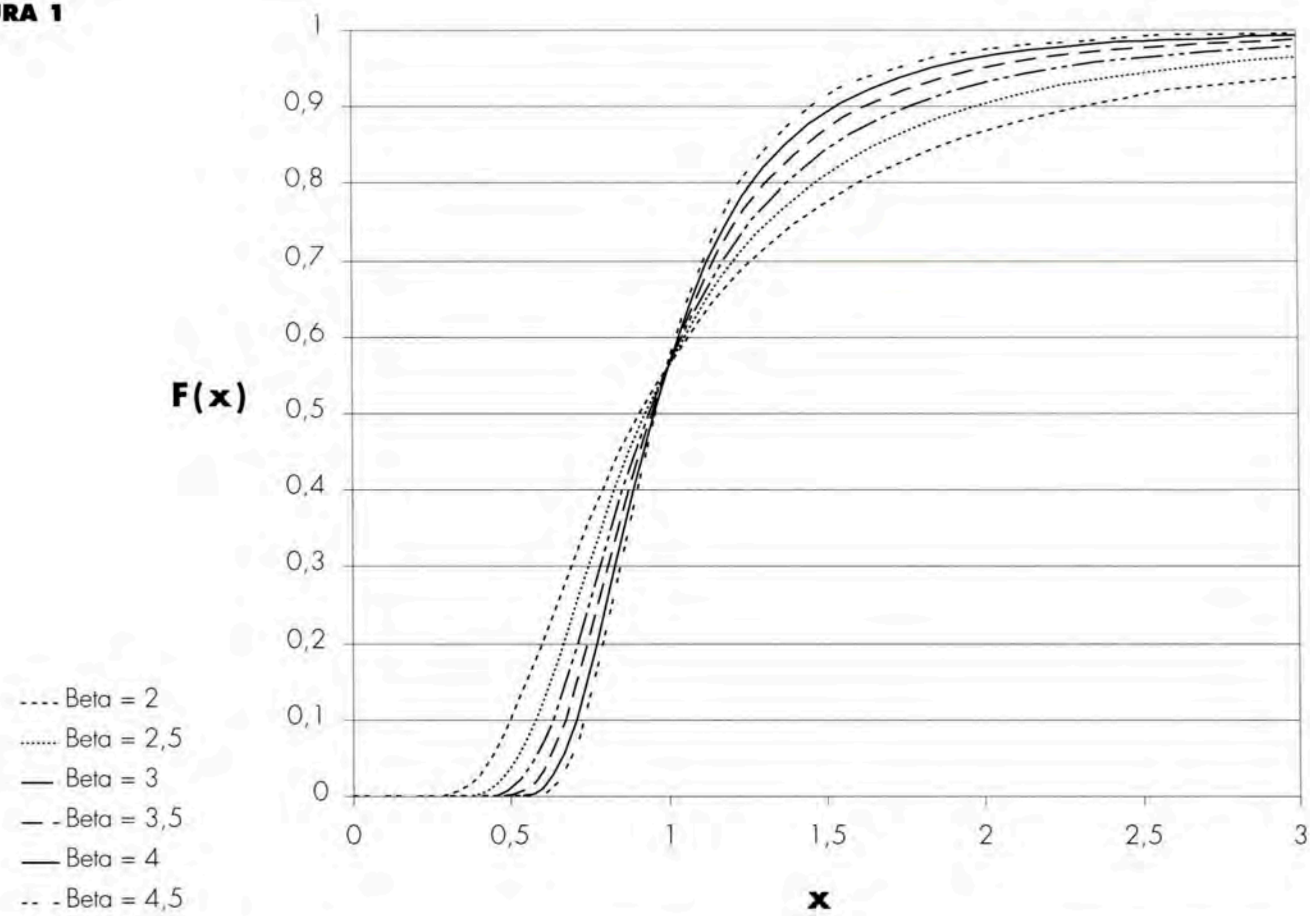
Supongamos ahora que las variables aleatorias ε_i están distribuidas en forma idéntica e independiente (IID) según una distribución de Gumbel (1958) tipo II, dada por

$$Prob\left(\varepsilon_i \le x\right) = F\left(x\right) = exp\left(-\frac{\omega}{x}\right)^{\beta} \tag{3}$$

Al normalizar esta distribución de modo que su media sea uno, se obtiene que el parámetro ω debe ser la raíz β de γ, la constante de Euler (0,577...). Resulta así la función presentada en la ecuación (4) e ilustrada en la Figura 1.

$$F\left(x\right) = exp\left(-\gamma x^{-\beta}\right) \tag{4}$$

FIGURA 1



Si dos variables ε_A y ε_B siguen esta distribución, entonces su cuociente x sigue una distribución logística dada por

$$G(x) = \frac{1}{1 + x^{-\beta}} \tag{5}$$

A partir de este resultado es posible generar un modelo binomial de elección. Si usamos los subíndices A y B para las alternativas, se tendrá que la probabilidad de elegir la alternativa A estará dada por

$$P_A = \frac{1}{1 + \left(\frac{C_A}{C_B}\right)^{\beta}} \tag{6}$$

Lo cual también puede escribirse como

$$P_A = \frac{C_A^{-\beta}}{C_A^{-\beta} + C_B^{-\beta}} \tag{7}$$

Resultado que puede ser generalizado al caso multinomial como

$$P_i = \frac{C_i^{-\beta}}{\sum_j C_j^{-\beta}} \tag{8}$$

Esta expresión, según la cual la probabilidad de elección es proporcional a una potencia (power) del costo generalizado, es la que genera el nombre de fantasía del modelo, más la habitual terminación «it».

3/ PROPIEDADES

En forma similar al caso del logit multinomial, el costo compuesto $\tilde{C}$ del conjunto de alternativas está relacionado con el denominador de la ecuación (8), de modo que se tiene

$$\tilde{C}^{-\beta} = \sum_j C_j^{-\beta} \tag{9}$$

o bien

$$\tilde{C} = \left(\sum_j C_j^{-\beta} \right)^{-\frac{1}{\beta}} \tag{10}$$

Resulta sencillo demostrar que esta expresión cumple los cuatro requisitos planteados por Williams (1977):

i) $\tilde{C} \geq 0$

Como $C_i \geq 0$, para todo i, la condición se cumple.

ii) $\dfrac{\partial \tilde{C}}{\partial C_i} \geq 0$

Desarrollando la derivada se obtiene

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial C_i} = \left(\frac{\tilde{C}}{C_i} \right)^{1+\beta} \tag{11}$$

Por lo tanto, la condición se cumple

iii) $\tilde{C} < min C_j$

Si el mínimo es C_k se tiene

$$\tilde{C}^{-\beta} = C_k^{-\alpha\beta} + \sum_{j \neq k} C_j^{-\beta} \tag{12}$$

Como la sumatoria es positiva se tiene

$$\tilde{C}^{-\beta} > C_k^{-\beta} \tag{13}$$

de donde $\tilde{C} < C_k$ y por lo tanto la condición se cumple.

iv) $\lim_{\beta \to \infty} \tilde{C} = min C_j$

Si el mínimo es C_k se tiene

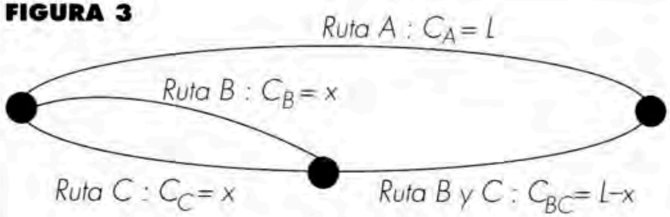
$$\tilde{C}^{-\beta} = C_k^{-\beta} \sum_j \frac{C_j^{-\beta}}{C_k^{-\beta}} \tag{14}$$

de donde

$$\tilde{C} = C_k \left(\sum_j \left(\frac{C_j}{C_k} \right)^{-\beta} \right)^{-\frac{1}{\beta}} \tag{15}$$

FIGURA 2

FIGURA 3



Cuando β tiende a infinito, todos los términos de la sumatoria tienden a cero, salvo que vale uno. Por lo tanto la propiedad se cumple.

Este resultado es notable si se considera que ninguna de las expresiones para el costo compuesto estudiadas por Williams cumplían todas estas condiciones. En especial, según demostró Williams, la logsuma del logit multinomial viola dos de ellas, las condiciones i) e iv).

Otra propiedad interesante del modelo es la forma en que trata el bien conocido caso de elección entre alternativas en el cual la diferencia de costos es constante pero la magnitud es muy diferente, tal como el ejemplo ilustrado en la Figura 2.

En este ejemplo, el modelo logit binomial entregará las mismas probabilidades de elección en ambos casos, lo cual ha sido reiteradamente señalado como contraintuitivo e incluso contrario a lo observado realmente. En cambio, el modelo propuesto, para valores razonables de β, entregará probabilidades cercanas a 1/2 en el segundo caso, y fuertemente favorables a la alternativa de menor costo en el primero.

Este problema del modelo logit ha sido enfrentado en la práctica por el procedimiento de introducir factores de escala dependientes de la magnitud del costo generalizado en la elección. Es el caso por ejemplo del modelo Marted (Gálvez et al., 1994), y del modelo Tranus (de la Barra, 2000). Dicho escalamiento también fue utilizado en los modelos de demanda de viajes de pasajeros en la MacroZona sur de Chile (Gálvez y Vera, 2001).

Otra alternativa de corrección ha sido considerar el logaritmo de las variables en la expresión de la función de utilidad. Si dicho logaritmo se aplica sobre la utilidad total, incluyendo el término de variabilidad, se obtiene un modelo formalmente equivalente al propuesto, dado que el logaritmo de una variable Gumbel tipo I sigue una distribución Gumbel tipo II. Sin embargo, si la transformación se aplica sobre cada variable por separado, excluyendo el término de variabilidad, la formulación sigue siendo logit.

Otra característica del modelo propuesto se refiere a la forma en que modela las comúnmente llamadas alternativas correlacionadas, tales como la bien conocida paradoja de los buses de colores. En pro de la precisión del lenguaje, en este caso las variables aleatorias correlacionadas en realidad no son las alternativas sino los términos de variabilidad interpersonal asociados a las mismas.

Para ilustrar lo anterior, examinaremos a continuación un caso de elección entre tres alternativas, dos de las cuales tienen atributos comunes o superpuestos que conducen a correlación entre los términos de variabilidad. El caso ha sido ilustrado en la Figura 3 como si correspondiera a una elección de ruta, pero el planteamiento en realidad es genérico y cubre cualquier tipo de elección.

Las condiciones intuitivas aplicables a este caso son las siguientes:

i) Cuando x tiende a cero, las alternativas B y C colapsan a una sola y la probabilidad P_A de elegir la alternativa A debiera tender a 1/2.
ii) Cuando x tiende a L, la correlación desaparece y la probabilidad P_A debiera tender a 1/3.
iii) Para valores intermedios de x entre cero y L, dicha probabilidad debiera adoptar valores también intermedios entre 1/2 y 1/3 .

TABLA 1

x	P_A
Tiende a 0	Tiende a 0,500
2	0,468
4	0,436
6	0,402
8	0,368
Tiende a 10	Tiende a 0,333

De acuerdo a la formulación del modelo, la probabilidad P_A está dada por la expresión

$$P_A = \frac{L^{-\beta}}{L^{-\beta} + \left(\left(L - x\right) + \left(x^{-\beta} + x^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{b}} \right)^{-\beta}} \tag{16}$$

En la Tabla 1 se han computado los valores de P_A en función de x, entregados por la ecuación anterior, para el caso en que L=10 y ß=3.

Se observa que el modelo propuesto satisface por completo las condiciones planteadas. Ello significa que es capaz de tratar directamente estructuras de decisión con términos de variabilidad correlacionados.

4/ ESTIMACIÓN

Como es usual en este tipo de modelos, la estimación puede hacerse mediante maximización de la función de verosimilitud. En lo que sigue trataremos el caso binomial.

El logaritmo de la función de verosimilitud es

$$L = \sum_{n=1}^{N} y_{An} Ln P_{An} + \left(1 - y_{An}\right) Ln\left(1 - P_{An}\right) \tag{17}$$

Donde, como es usual, y_{An} = 1 si la observación n eligió la alternativa A, 0 en caso contrario, y

$$P_{An} = \frac{C_{An}^{-\beta}}{C_{An}^{-\beta} + C_{Bn}^{-\beta}} \tag{18}$$

Reemplazando la ecuación (18) en la ecuación (17) y desarrollando la expresión se llega a:

$$L = \sum_{n=1}^{N} \beta y_{An}\left(LnC_{Bn} - LnC_{An}\right) - \beta LnC_{Bn} - Ln\left(C_{An}^{-\beta} + C_{Bn}^{-\beta}\right)$$

Esta expresión puede ser maximizada directamente utilizando un software estadístico apropiado. El máximo puede ser también estimado derivando esta expresión con respecto a β y a los parámetros incluidos en la especificación del costo generalizado (menos uno), igualando a cero y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido. El parámetro fijo es el que se mide en las unidades físicas en que se medirá el costo generalizado. Si por ejemplo se desea expresar el costo generalizado en unidades de dinero, el coeficiente del parámetro medido en dinero debe quedar fijo e igual a menos uno.

Si suponemos una especificación lineal en parámetros, del tipo

$$C_i = \sum_k \theta_k z_{ki} \tag{20}$$

al derivar con respecto a los mismos se obtiene para cada parámetro k

$$\sum_{n=1}^{N} \left(y_{An} - P_{An}\right)\left(\frac{z_{kBn}}{C_{Bn}} + \frac{z_{kAn}}{C_{An}}\right) = 0 \tag{21}$$

Al derivar con respecto a ß se obtiene

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{C_{Bn}}{C_{An}}\right)\left(P_{An} - Y_{An}\right) = 0 \tag{22}$$

Estas expresiones son similares a las obtenidas para el modelo logit binomial y, al igual que en dicho modelo, pueden ser extendidas al caso multinomial.

El método de maximizar directamente la función de verosimilitud fue aplicado a un caso obtenido de una adaptación de datos reales, utilizando la función Solver de Excel. La muestra contenía 195 observaciones de elección de ruta. A partir de los datos reales para los atributos y de valores

TABLA 2
VALORES INICIALES Y RECUPERADOS
EN EXPERIMENTO DE SIMULACIÓN

Parámetro	**Valor**	
	inicial	recuperado
Beta	– 4	– 4,05
Distancia recorrida ($/Km):		
en zona urbana	– 25	– 25,71
en doble calzada	– 10	– 7,90
en calzada simple	– 15	– 15,45
Peaje ($)	– 1	– 1

iniciales adoptados para los parámetros. En este caso el parámetro correspondiente al peaje fue considerado fijo. Los resultados obtenidos de esta simulación son presentados en la Tabla 2. La conclusión que se obtiene es que el modelo resulta estimable y está exento del problema de no identificabilidad (ver Carrasco et al., 2001).

5/ CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo modelo de elección discreta basado en conceptos derivados de la teoría de la utililidad aleatoria. Si bien la forma funcional del modelo, basado en potencias del costo generalizado, recuerda expresiones ampliamente utilizadas en planificación de transporte, en especial en el caso de modelos gravitacionales, el punto central ha sido mostrar que el modelo puede ser derivado en forma consistente a partir de supuestos en relación a la distribución estadística de los términos de variabilidad interpersonal, en forma similar a como son derivados, por ejemplo, los modelos Logit y Probit.

El modelo obtenido presenta cualidades altamente deseables, en lo que se refiere a la robustez de la expresión del costo compuesto y a la forma sencilla y directa en que trata el caso de alternativas con términos de variabilidad correlacionados. Sin embargo, resta aún probar su real capacidad predictiva en aplicaciones a casos reales.

BIBLIOGRAFIÁ

ALVAREZ, R. y MUNIZAGA, M.A.
2001
«Modelos mixed logit: antecedentes teóricos y aplicaciones».
X Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, Universidad de Concepción, 8-12 Octubre 2001.

BEN-AKIVA, M.E. y BOLDUC, D.
1996
Multinomial probit with a logit kernel and a general parametric specification of the covariance structure.
Working Paper, Departement d'Economie, Université Laval.

BRITON, W. y L. BONDZIO
1996
«Rubit - A multiplicative concept for choice analysis in transport planning».
24th European Transport Forum, U.K.

BROWNSTONE, D. y TRAIN, K.
1999
«Forescating new product penetration with flexible substitution patterns».
Journal of Econometrics, V. 89, 109-129.

CARRASCO, J.A., J. de D. ORTÚZAR y M.A. MUNIZAGA
2001
X Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, Universidad de Concepción, 8-12 Octubre 2001.

DAGANZO, C.F.
1979
Multinomial Probit: The Theory and its Applications to Travel Demand Forecasting. Academic Press, Nueva York.

DE LA BARRA, T.
2000
Mathematical and algorithmic structure of TRANUS. www.modelistica.com.

GÁLVEZ, T., G. VÉJAR e I. QUIROZ
1994
«Asignación de flujos a redes viales tarificadas: Un modelo de elección discreta».
VIII Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, Ciudad de México.

GÁLVEZ, T. y J. VERA
2001
«Modelación de la demanda por viajes interurbanos de pasajeros en la Macrozona Sur».
X Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, Universidad de Concepción, 8-12 Octubre 2001.

GAUDRY, M y M. DAGENAIS
1979
«The Dogit Model».
Transportation Research, V. 13B, 105-111.

GUMBEL
1958
Statistics of extremes.

MCFADDEN, D.
1974
«Conditional logit analysis of qualitative choice behavior».
P. Zarembka (Ed.), Frontiers in Econometrics. Academic Press, Nueva York.

1981
«Econometric models of probabilistic choice».
C.F. Manski y D. McFadden (eds.), Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications. The MIT Press, Cambridge, Mass.

WILLIAMS, H.C.W.L.
1977
«On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit».
Environment and Planning, Vol. 9A, 285-344.

CONDES
Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico
de La Universidad del Zulia

Es un ente de permanente asesoría y consulta del Consejo Universitario, adscrito al Vice Rectorado Académico, destinado a diseñar y ejecutar una política científica que comprende la elaboración de los fundamentos teóricos; y el establecimiento de mecanismos para estimular, financiar, difundir y promocionar la investigación en la Universidad como contribución al desarrollo del país.

Visión

El CONDES, es una unidad Académico-administrativa de apoyo, que hará posible la consolidación de una comunidad científica, mediante: el financiamiento de proyectos y programas de investigación; el entrenamiento para la divulgación de sus resultados, la incorporación; de jóvenes que garanticen la continuidad de las líneas y áreas; y, el reconocimiento a la labor realizada.

Misión

Coordinar, estimular y difundir la investigación en el campo científico y en el de los estudios humanísticos y sociales, mediante la ejecución de programas, planes y proyectos académicos que integran las actividades científico-tecnológicas con las de docencia, de pre y postgrado, para así dar respuesta a las necesidades y demandas del entorno regional, nacional e internacional.

Objetivos

General:
Establecer vinculación con los diferentes entes que realizan actividades de investigación.
Específicos:
Establecer interrelación con dependencias de investigación de LUZ, para conocer los planes y proyectos de las mismas.
Realizar acciones concernientes a la difusion y divulgación de las actividades de investigación.
Fomentar la actualización del personal de investigación.
Conocer y divulgar las actividades de apoyo a la investigación que realizan los organismos centrales de investigación (CONICIT, FUNDACITES, etc.)
Mantener relación estrecha entre la actividades de investigación y Postgrado.

Programas de Financiamiento del CONDES

Programas y Proyectos de Investigación:
El CONDES, contribuye con el desarrollo de la investigación científica y humanística realizada por los miembros del personal Docente y de Investigación de LUZ o cursantes de postgrados.

Equipo:
Apoyar a los investigadores en la adquisición de equipos de gran envergadura, contribuyendo al mejor funcionamiento de las actividades científicas que se realizan por partes de aquellos grupos motivados a trabajar de manera interdisciplinaria.

Asistencia a Eventos y Reuniones científicas:
Promoción y apoyo a la comunidad científica de investigadores para la asistencia a diferentes eventos nacionales e internacionales con el fin de enriquecer la formación académica a través del intercambio entre pares.

Organización de Eventos científicos:
Apoyo a la realización de eventos enmarcados en el desarrollo de las actividades de investigación.

Cursos, entrenamiento y pasantías:
El CONDES financia la asistencia a cursos, entrenamiento y pasantías dentro y fuera del país.

Revistas científicas:
Para cumplir su función de divulgación científica, el CONDES asigna fondos para la edición de revistas arbitradas, siempre y cuando cumplan con la rigurosidad científica exigida a nivel nacional e internacional.

Dirección
Av. 4 Bella Vista con calle 74. Edif. FUNDALUZ. Piso 10. Maracaibo, Edo. Zulia
Código Postal: 4002. Telf./fax: (061) 926307, 926308, 596860.
Página Web: www.condes.luz.ve E-mail: condes@europa.ica.luz.ve, condes@neblina.reaccium.ve