

# Electrocardiograma: Modelo matemático del eje eléctrico y su uso en la determinación del voltaje del QRS en derivaciones estándar

Dr. Giuseppe Lanza Tarricone

## RESUMEN

*El objetivo principal de este trabajo es establecer un modelo matemático teórico del eje eléctrico de un electrocardiograma de superficie, a través de su representación vectorial y su uso o aplicación para valorar el voltaje del QRS en las derivaciones estándar. De esta forma, sólo se hace necesario registrar en la historia clínica dicha "forma o representación" y, a través de cálculos manuales o mediante computadora, puede desplegarse el resto de la información.*

*Se utilizaron 2 600 electrocardiogramas de superficie de los cuales no se consideraron 119, al estar dentro de los criterios de exclusión.*

*Se calculó el porcentaje de la diferencia absoluta entre el valor teórico y el real de los QRS, con respecto al valor absoluto mayor de los dos. El valor medio del voltaje de los QRS (de todas las derivaciones) corresponde a 22,39 con una desviación estándar de 26,29. Al efectuar los mismos cálculos para cada derivación, se encuentran que son muy similares.*

*Al realizar un contraste de hipótesis con la curva normal entre las medias de los valores reales de las derivaciones D2 y AVL, con respecto a la media de sus valores teóricos, no se encuentra diferencia significativa desde el punto de vista estadístico con  $p < 0,0001$ ; lo contrario sucedió con D3 y AVR, si bien existe diferencia desde el punto de vista estadístico, los valores obtenidos son muy cercanos, además de considerar los posibles errores en las mediciones. Intentamos explicar esta diferencia porque el triángulo de Einthoven es equilátero en forma teórica y, en la práctica, tiende a ser un triángulo escaleno como lo demuestran los estudios de Burger.*

*Estos resultados nos indican que el modelo creado se adapta en forma interesante a nuestros propósitos.*

*Palabras clave: Electrocardiograma. Eje eléctrico. Modelo matemático. Vectores. Geometría y eje eléctrico.*

## SUMMARY

*The main objective of this paper is to establish a mathematic theoretic model of the electric axis in the surface electrocardiogram with vectors and its application to value the QRS voltage in the standar derivation. In this way, only we need to register one "number" to know all the information.*

*We use 2 600 electrocardiograms and no consider 119 by exclusion criterion.*

*The porcentage of absolute difference between the theoretic values and the real values of the QRS, with respect the absolute value of both. The media result 22.39 and the standar desviation is 26.29. In each derivation the calculation are similar.*

*We realize a hipotesis's contrast with normal curve between the media of the real values in D2 and AVL, with the media of the theoretic values. There are not difference with  $p < 0.0001$ . This fact don't occur in D3 and AVR. We explain this difference because the Einthoven's triangle is equilateral and in the practice is scalene, how verified Burger.*

*Key words: Electrocardiogram. Electric axis. Mathematic model. Vectors. Geometry and electric axis.*

## INTRODUCCIÓN

El registro de la actividad eléctrica del corazón aporta innumerables detalles informativos tanto al clínico como al investigador, para interpretar mejor los fenómenos que ocurren en las células miocárdicas.

Particularmente estamos interesados en la determinación del eje eléctrico por medio de un nuevo método de estudio.

En la práctica clínica, se calcula el eje eléctrico

de un electrocardiograma de superficie en el sentido de establecer el ángulo que tiene el vector medio del QRS en relación a ciertas derivaciones, sin hacer referencia a la magnitud del vector. En forma usual se determina el valor neto del voltaje del QRS en las derivaciones estándar DI y AVF. De acuerdo a esos valores se localiza el cuadrante donde se ubica.

Los resultados obtenidos con el método anterior sólo dan información del ángulo del QRS medio, pero no permite deducir información sobre las características del QRS (voltaje) en otras derivaciones estándar. En el presente trabajo deseamos elaborar la investigación que nos aporte la sumatoria de ambas informaciones en un solo "número". Este proceso es perfectamente factible en vista de que estamos manejando conocimientos de vectores y, dentro de la matemática, existe un campo amplio, definido, estudiado y con una herramienta poderosa de estudio como es el análisis vectorial y la geometría analítica.

Dentro del análisis vectorial y/o de variable compleja, se puede expresar un vector en forma numérica como  $r\text{Cis } \alpha$ , donde  $r$  es la magnitud del vector y  $\alpha$  es el ángulo con respecto al eje de las abscisas. Esta última es la que nos interesa porque tiene "a la vista", las características de magnitud, sentido, y ángulo de colocación en un cuadrante

En estas condiciones es suficiente registrar en la historia clínica dicho "número" para que luego, a través de un computador o por cálculos manuales, desplegar la información necesaria.

### Antecedentes históricos

Gracias a Waller, en 1887, mediante un electrómetro capilar de Lipmann se produce el primer registro gráfico de la corriente de acción de los latidos espontáneos del corazón (1). En 1903, se produce el gran avance en el estudio de la actividad eléctrica del corazón, gracias al profesor de fisiología de Leyden, Holanda, W. Einthoven, quien sentó los principios que son la base de la electrocardiografía actual. No debemos olvidar los aportes de Lewis, Wiggers, Wilson, Sodi y otros (2,3) con los cuales se ha producido un adelanto extraordinario en el diagnóstico electrocardiográfico de reposo.

En los trabajos revisados, no se encuentran títulos que establecen el modelo matemático del vector medio del QRS en la forma como se concibe en esta investigación.

### Aspectos matemáticos

Se explicarán someramente algunas cuestiones relacionadas con el sistema de coordenadas cartesianas y vectores.

### Sistema de coordenadas cartesianas

Con Descartes se inició una nueva metodología matemática donde se conjugaron el análisis matemático y la geometría. Tal avance fue dado por la construcción de un sistema de referencia en el plano o en el espacio (4,5). Se utilizan dos rectas perpendiculares, la intersección corresponde al origen de las coordenadas. En el caso que nos corresponde en esta tesis, tratamos de que exista una correspondencia entre las derivaciones DI y AVF con los ejes de la abscisa y ordenada, de allí que realizamos el siguiente cambio para respetar las convenciones matemáticas actualmente usadas en relación al giro de ángulos y posición de coordenadas. En primer lugar, los valores positivos de la amplitud del QRS obtenidos en la derivación AVF, se trasladarán como negativos en el sistema cartesiano a fin de respetar la dirección del vector original en el triángulo de Einthoven. Asimismo, los valores negativos del QRS en AVF se trasladarán como positivos (Figura 1).

### Definición del vector

Geoméricamente, un vector es un segmento rectilíneo orientado en el espacio, que tiene sentido, dirección y magnitud. Para efectos de identificarlos se especificará con la notación AB, donde A es el punto origen del vector y B es el punto final.

### Representación gráfica de vectores

Esta representación se logra trazando el segmento de recta correspondiente en el plano o en el espacio.

Para efectos de realizar los cálculos, sabemos que existe una correspondencia entre un vector que parte del origen de un sistema de coordenadas cartesianas y el punto final que representa a dicho vector.

De esta forma, solamente se hace necesario indicar el punto final o "cabeza" del vector para tener una representación sin lugar a dudas. Esto viene dado por las coordenadas de dicho punto o par ordenado (Figura 2).

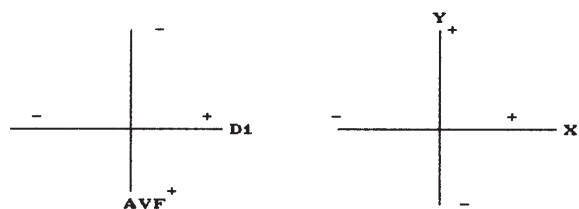


Figura 1. Relaciones entre el sistema hexaxial de Bayley y el sistema cartesiano.

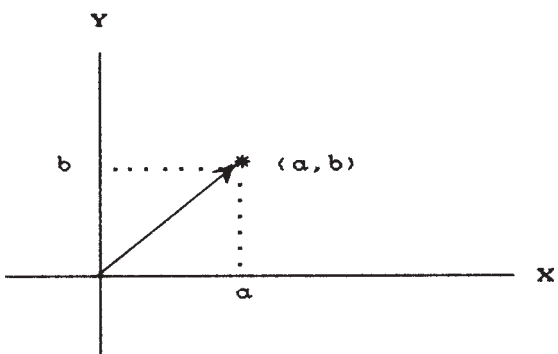


Figura 2. Representación de un vector en forma gráfica y como par ordenado.

Esto se adapta perfectamente a nuestro sistema de estudio por cuanto que el eje eléctrico medio del QRS parte del centro del sistema hexaxial de Bayley.

**Operaciones algebraicas con vectores (6)**

Considerando los vectores como pares ordenados, la suma de vectores y el producto escalar se definen respectivamente:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$$

$$(a,b) * (c,d) = a.c + b.d$$

**Proyección de un vector sobre otro (7)**

Es posible, analíticamente, proyectar un vector sobre la dirección de otro y calcular la magnitud del vector que así resulta. Así, dados los vectores AB y CD, si se desea proyectar el vector AB sobre CD y conocer la magnitud de esa proyección (MP), el cálculo viene dado por:

$$MP = (AB * CD) / (CD * CD)$$

Si se tiene el vector del eje eléctrico medio del QRS y se desea conocer la magnitud del QRS en cualquier derivación, se debe realizar el cálculo de MP (Figura 3).

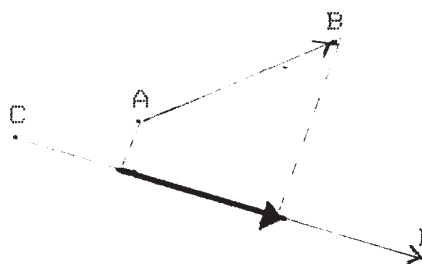


Figura 3. Proyección de un vector AB sobre CD.

**Números complejos en forma polar (8,9)**

Para no ahondar en profundidad en el campo de los números complejos, trataremos de expresar en forma sencilla cómo se puede representar un vector, en forma polar, cuando parte del origen del sistema de coordenadas cartesianas. Se tiene:  $rCis \alpha$  donde

- r es la magnitud del vector
- $\alpha$  es el ángulo que forma dicho vector con el eje horizontal
- $Cis \alpha$  representa  $(Cos \alpha + i Sen \alpha)$
- i es la unidad imaginaria

Si se tiene un vector como un par ordenado (a,b) entonces el vector se representa como un número complejo así:

$$(a,b) \equiv r Cis \alpha$$

$$r = \text{raíz cuadrada } (a^2 + b^2)$$

$$\alpha = \tan (b/a), \text{ con } a \text{ diferente a cero}$$

( $\equiv$  significa equivalente) (Figura 4).

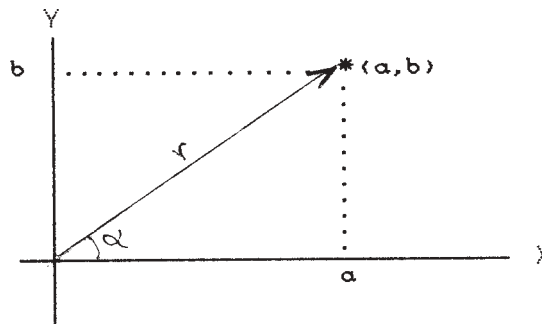


Figura 4. Representación de un vector (a,b) en la forma  $r Cis \alpha$ .

### Vector unitario

Un vector unitario es aquel vector cuya magnitud es la unidad. En vista de que en nuestra investigación debemos utilizar el producto escalar de vectores, se hace necesario determinar el vector sobre las diferentes derivaciones y lo establecemos en forma sencilla, al conocer el ángulo que forma dicha derivación con la horizontal y tomar en cuenta el giro de ángulos en la forma habitual como se hace en el círculo trigonométrico y considerando el electrodo positivo. Así:

$$D2u = \text{Cis } 300$$

$$D3u = \text{Cis } 240$$

$$AVRu = \text{Cis } 150$$

$$AVLu = \text{Cis } 30$$

Cada uno de dichos vectores es un vector unidad en la derivación correspondiente, puesto que si calculamos la magnitud del número polar en la forma descrita y consideramos posteriormente la identidad trigonométrica:

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

se obtiene el resultado esperado.

### Modelo matemático propuesto

Gran parte de la base teórica sobre vectores fue expuesta en el ítem de "Aspectos matemáticos". En este momento presentamos la analogía o la forma de tratar las derivaciones estándar como sistema de coordenadas y, en segundo lugar, presentar al vector medio del QRS como un número o vector en el campo de los números complejos. Recordemos que las derivaciones DE y AVF forman un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas en el triángulo de Einthoven, por lo menos en forma teórica.

Para nuestro propósito la derivación AVF será la ordenada y DI será la abscisa. Para efectos de los cálculos matemáticos hay que considerar que todos los valores netos de los QRS en AVF registrados como positivos pasarán a negativos y viceversa, como se establece en el sistema cartesiano matemático.

Este cambio se realiza para no alterar, en ninguna manera, la orientación del vector medio del QRS. Para los efectos del uso de ángulos en los cálculos se utiliza la notación habitual del círculo trigonométrico, es decir en sentido antihorario.

Se utilizan los valores netos registrados en D1 y

AVF, con las advertencias anteriores, para determinar el vector teórico medio del QRS, representado como el vector  $(d1, avf)$  donde  $d1$  y  $avf$  son los valores registrados en dichas derivaciones. Con el par ordenado se puede representar el número complejo en la forma polar, como ha sido descrito anteriormente. Ahora nos toca determinar los vectores unitarios en la dirección positiva (del electrodo explorador) de las otras derivaciones estándar, los cuales se expresan como:

$$D2u = \text{Cis } (300) = (\text{Cos } 300, \text{Sen } 300)$$

$$D3u = \text{Cis } (240) = (\text{Cos } 240, \text{Sen } 240)$$

$$AVRu = \text{Cis } (150) = (\text{Cos } 150, \text{Sen } 150)$$

$$AVLu = \text{Cis } (30) = (\text{Cos } 30, \text{Sen } 30)$$

De esta forma, al utilizar la fórmula de proyección de un vector sobre otro, podemos conocer el valor de la magnitud de la proyección (MP) que viene dado por:

$$MP = (AB * CD) / (CD * CD)$$

(\* es el producto escalar de vectores)

Ahora si CD representa a un vector unitario se tiene que  $CD * CD = 1$  y la fórmula de proyección queda reducida a:

$$MP = AB * CD$$

Así la MP del vector del QRS medio  $(d1, avf)$  sobre cada una de las derivaciones estándar viene dado por (el subíndice hace referencia a la derivación estándar correspondiente):

$$MP_{D2} = (d1, avf) * D2u = (d1, avf) * (\text{Cos } 300, \text{Sen } 300)$$

$$MP_{D2} = d1, \text{Cos } (300) + avf, \text{Sen } (300)$$

$$MP_{D3} = (d1, avf) * D3u = d1, \text{Cos } (240) + avf, \text{Sen } (240)$$

$$MP_{AVR} = (d1, avf) * AVRu = d1, \text{Cos } (150) + avf, \text{Sen } (150)$$

$$MP_{AVL} = (d1, avf) * AVLu = d1, \text{Cos } (30) + avf, \text{Sen } (30)$$

Las proyecciones de  $(d1, avf)$  sobre los ejes cartesianos vienen dados en forma directa. Ahora si  $(d1, avf)$  fue expresado como número en forma compleja  $r \text{ Cis } \alpha$  se tiene:

$$d1 = r \cdot \text{Cos } \alpha$$

$$avf = r \cdot \text{Sen } \alpha$$

De esta forma, al tener el vector medio del QRS como un número  $rCis \alpha$ , dará en forma automática los valores teóricos sobre las derivaciones, mediante cálculos manuales o un pequeño programa de computadora.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Criterios de selección de los electrocardiogramas

Se recolectaron 2 600 electrocardiogramas de superficie, que estuvieran exentos de trastornos de conducción sobre el QRS. Este requisito obedece a que la altura del QRS no sería suficiente como determinante del voltaje real en esa derivación. A medida que progresa un trastorno de conducción, el voltaje de un QRS habría que fijarlo en función del área bajo la gráfica que ella deja inscrita en el papel y esto complicaría los cálculos, habría más error en los resultados y no serían confiables. Quedan igualmente excluidos trastornos de isquemia aguda en lo referente a cambios del ST. A continuación enumeramos los criterios de exclusión: poca claridad del trazado, ausencia de estandarización, estandarización diferente a (1 mV = 10 mm) velocidad de inscripción en el papel diferente a 25 mm/s, ausencia del trazado de alguna derivación del plano frontal, complejos QRS mayores de 0,10 s, alternancia eléctrica en forma constante que imposibilita conocer el complejo de base, arritmia que interfiera en la lectura del trazado de base, desnivel del segmento ST que altera el complejo QRS, presencia de onda S', R' altas, artefactos que dificultan la interpretación y medidas.

En función de dichos criterios se excluyeron 119 electrocardiogramas, y quedaron en forma definitiva 2 481.

### Registros de los datos

Se registró la magnitud del QRS en las derivaciones del plano frontal, restando el valor absoluto del voltaje positivo menos el valor absoluto del voltaje negativo en cada derivación. El signo que resulta, indica si el QRS es predominante positivo o negativo en la derivación respectiva. Los valores registrados fueron considerados todos enteros, dado que es difícil apreciar mediciones menores de un milímetro a simple vista.

### Datos teóricos utilizados

Las mediciones reales obtenidas en la muestra del estudio se compararon con los valores obtenidos por el modelo matemático propuesto en este trabajo.

### Cálculos

Se usó "una hoja de cálculo" con el programa Lotus 1-2-3, (versión 2, en español) y un computador, para facilitar las operaciones. Todos los cálculos de las mediciones teóricas del voltaje del QRS en cada derivación fueron redondeadas a cero decimal. Los valores de los porcentajes calculados se redondearon a dos decimales.

La variación absoluta entre el valor teórico del QRS y el valor real en una derivación se calculó como un porcentaje en relación al valor absoluto más grande de los dos números.

## RESULTADOS

La media de todos los porcentajes mencionados en el último párrafo (de todas las derivaciones) corresponde a 22,39 con una desviación estándar de 26,29. Estas cifras son similares cuando se calculan para cada derivación en particular (Cuadro 1):

Cuadro 1

Variación de los porcentajes entre los valores reales y teóricos del QRS por cada derivación

Derivación	Media	Desviación
D2	22,14	± 26,78
D3	27,13	± 30,37
AVR	18,90	± 21,82
AVL	21,38	± 24,78

Se obtuvieron la media y desviación estándar de los valores medidos de los QRS para cada derivación (los valores teóricos tienen siglas en letras minúsculas y los valores reales están en mayúsculas) (Cuadro 2).

Al hacer un contraste de hipótesis de la diferencia de las medias en las derivaciones D2 y AVL, con respecto a la media de los valores teóricos en la curva normal, no se encuentra diferencia significativa desde el punto de vista estadístico con  $p < 0,0001$ , lo contrario sucedió con D3 y AVR.

Cuadro 2  
Variación de los valores medidos por derivación

Derivación	Media	Desviación
D2	6,10	± 6,08
D3	-1,08	± 6,55
AVR	-6,55	± 5,34
AVL	5,41	± 5,73
d2	5,61	± 5,75
d3	-1,82	± 6,34
avr	-7,47	± 5,41
avl	5,36	± 5,88

### DISCUSIÓN

Después de analizar los resultados, se encuentra una buena correlación entre los valores reales y los suministrados por el modelo matemático propuesto. Sin embargo, existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias observadas para los valores de dos de las cuatro derivaciones estudiadas. Esta diferencia se podría explicar por la forma como se comporta el triángulo de Einthoven. Desde el punto de vista teórico es equilátero y en los casos reales tiende a comportarse como un triángulo escaleno (10-12), donde las derivaciones D3 y AVR tienen un mayor ángulo de inclinación, lo que podría explicar la diferencia, puesto que la proyección de un vector sobre dicho eje será menor; sin embargo, mantienen valores muy cercanos respecto a los teóricos.

Al tratar de explicar la media de los porcentajes totales encontramos que en la mayor parte de los casos, donde los QRS registrados son inferiores a 2 mm, se obtiene una diferencia porcentual del orden de 40 a 100%, no así con valores más altos. Si se realizara nuevamente el trabajo mediante electrocardiograma con una sensibilidad mayor, es decir, de 20 a 40 mm correspondiendo con 1 mV es de esperarse un menor porcentaje de variación. No dejamos de considerar que es difícil apreciar a simple vista una alícuota de un milímetro y que además los resultados fueron redondeados a valores enteros. Hay que considerar como factor de error el grueso del trazo electrocardiográfico.

Este modelo de análisis del eje eléctrico medio del QRS pudiera aplicarse para investigar si la magnitud de dicho vector pudiera utilizarse como criterio de hipertrofia ventricular y su relación con los criterios actualmente estudiados. Este es un punto de partida para otro trabajo donde se deben relacionar ambos parámetros.

Este mismo modelo se puede utilizar perfectamente para conocer la proyección de los vectores 1,2,3 de la activación ventricular y poder reconstruir la morfología del QRS en cuestión.

El modelo pone de relieve la importancia de otra ciencia, en este caso la matemática, en el mejor entendimiento de la medicina.

### REFERENCIAS

1. Bayes de Luna A, Sierra J, Oca F. Electrocardiografía de Holter: enfoque práctico. 1ª reimpresión. Barcelona, España: Editorial Científico Médico; 1984.
2. Rushmer R. Cardiovascular dynamics. 2ª edición. Filadelfia: Saunders Co.; 1961.
3. Laikan S. A rapid method for frontal plane axis determination in scalar electrocardiograms. *Am Heart J* 1973;85:620-623.
4. Cuesta-Dutari N. Geometría vectorial: introducción intuitiva al álgebra lineal. 1ª edición. Madrid, España: Editorial Alhambra; 1968.
5. Wexler C. Geometría analítica: un enfoque vectorial. 1ª edición. Barcelona, España: Editores Montaner & Simón; 1968.
6. Kreider D, Kuller R, Ostberg D, Perkins F. Introducción al análisis lineal. 1ª edición. México: Fondo Educativo Interamericano; 1971.
7. Thomas G. Cálculo infinitesimal y geometría analítica. 1ª edición. Madrid, España: Editorial Aguilar; 1974.
8. Hauser A. Variable compleja. 1ª edición. México: Fondo Educativo Interamericano; 1973.
9. Redheffer L. Curso de variable compleja. 1ª edición. Barcelona, España: Editorial Reverté; 1975.
10. Burger H, Van Milaan J. Heart vector and leads. *Br Heart J* 1948;10:229.
11. Ta-chuan C. Electrocardiography in clinical practice. Filadelfia: Grune & Stratton Inc; 1986.
12. Marriott H. Practical electrocardiography. 8ª edición. Baltimore: Williams & Wilkins; 1988.