

## APLICACIÓN DE UN FILTRO DE POLARIZACIÓN ADAPTATIVO BASADO EN LA DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR (SVD)

RUBÉN LUQUE <sup>1,2</sup>, NURI HURTADO <sup>1</sup>, ASDRÚBAL OVALLES <sup>2</sup>, PABLO RICAURTE <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratorio de Física Teórica de Sólidos, CEFITEC, Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. luqueruben77@gmail.com, luquerd@pdvsa.com, nuri.hurtado@ciens.ucv.ve

<sup>2</sup> Centro de Procesamiento de Datos Geofísicos, PDVSA-INTEVEP. ovallesaj@pdvsa.com, ricaurtep@pdvsa.com

Recibido: noviembre 2012

Recibido en forma final revisado: junio 2013

### RESUMEN

En geofísica, un registro sísmico es considerado una imagen del subsuelo. Razón por la cual en este trabajo se introduce una técnica adaptativa de filtrado, que permite resaltar los eventos sísmicos selectivamente de acuerdo con su polarización. Esta técnica consiste en la implementación de un filtro de polarización basado en la Descomposición del Valor Singular (SVD). El SVD tiene una gran variedad de aplicaciones en el procesamiento de señales e imágenes, en este caso se aplicó sobre datos sísmicos sintéticos multicomponente originados a través de un programa de modelado elástico, con lo que se logró reconstruir la imagen sísmica generada a partir de las primeras dos autoimágenes, reproducir los atributos de polarización (rectilinealidad y planaridad) del movimiento de las partículas, suprimir el ruido aleatorio de alta frecuencia, mejorar la relación señal-ruido. De esta forma se obtuvo una imagen clara y coherente de los eventos sísmicos asociados con las energías primarias de reflexión.

*Palabras clave:* Filtro SVD, Filtro de polarización, Autoimágenes, Ruido sísmico.

### APPLICATION OF AN ADAPTIVE POLARIZATION FILTER BASED ON SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

#### ABSTRACT

In geophysics, a seismic record is considered an image of the subsurface. In this paper a filtering adaptive technique has been introduced that allows highlighting selective seismic events according to its polarization. This technique consists in the implementation of a polarizing filter based on the Single Value Decomposition (SVD). The SVD has a great variety of application in the processing of signals and images. In this work it was applied to synthetic multi-component seismic data arising through an elastic modeling program. As a result, it was possible the reconstructing of the seismic image generated after the two first eigenimages, reproducing the polarization of attributes (rectilinearity and planarity) of the moving particles, suppressing the high frequency random sound and improving the signal-noise ratio. This allows obtaining a clear and coherent image of the associated seismic events to the primary energies of reflection.

*Keywords:* SVD filter, Polarization filter, Eigenimages, Seismic noise.

#### INTRODUCCIÓN

En la exploración geofísica de hidrocarburos, uno de los métodos de mayor aplicabilidad es el método sísmico de reflexión. Éste es utilizado para delinear la geología del subsuelo (Yilmaz, 1987) y consiste en registrar en superficie las vibraciones del medio donde ocurre la propagación de las ondas cuando son producidas por una fuente artificial (explosivos, vibroseis, caída en peso, entre otros). En la etapa del procesamiento de los datos sísmicos registrados, para diferentes estudios, se han aplicado diversas técnicas

de filtrado (Yilmaz, 1987; De Meersman & Kendall, 2005; De Meersman & Ansorger, 2007), con la finalidad de suprimir las bandas de frecuencias de energías no útiles, que son conocidas como “ruido sísmico”.

Un filtro no convencional, pero que en la última década ha sido considerado una importante técnica en el procesamiento de señales en la exploración sísmica, aplicado con la finalidad de obtener la reconstrucción de la imagen, la supresión del ruido y mejorar la relación señal-ruido (Bekara *et al.* 2007), es la técnica de la Descomposición del Valor Singular

(SVD). La SVD consiste en una factorización significativa de una matriz rectangular, real o compleja, que se basa en el estudio de las componentes de los ejes principales, de un número de parámetros o datos que se desean comprimir o simplificar (Forsythe *et al.* 1977).

El SVD tiene una gran variedad de aplicaciones en el procesamiento de señales (Forsythe *et al.* 1977). Aunque esta técnica está enfocada como una poderosa matriz de descomposición (Klema, & Lamb, 1980; Ursin & Zheng, 1985), también ha sido mostrada desde otro punto de vista en la aplicación del procesamiento de imágenes (Andrews & Hunt, 1977), como un algoritmo eficaz que permite resaltar eventos principales (asociado con energías) y, a su vez, la reconstrucción de las imágenes, en la cual la descomposición de la matriz de datos de entrada es descrita en autoimágenes (Freire & Ulrych, 1988).

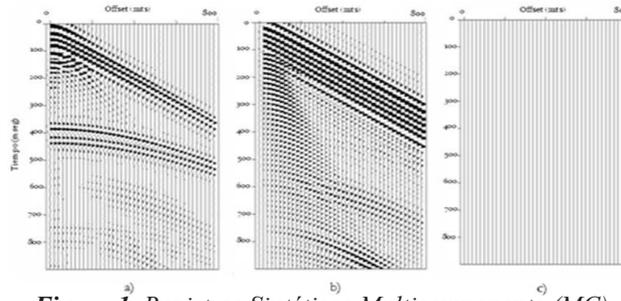
En el presente trabajo, se desarrolló una metodología con la finalidad de atenuar uno de los ruidos que más afecta la exploración sísmica, como lo es el ruido aleatorio de alta frecuencia. Este tipo de ruido, enmascara y, en algunos casos, se solapa (en frecuencia) con el dato (reflexiones de interés). Esta metodología corresponde a la implementación del filtro de polarización SVD, el cual es una técnica del álgebra lineal enfocada en la atenuación de la energía asociada con modos de ondas con polarizaciones no lineales y es aplicado a datos sintéticos multicomponente.

## METODOLOGÍA Y RESULTADOS

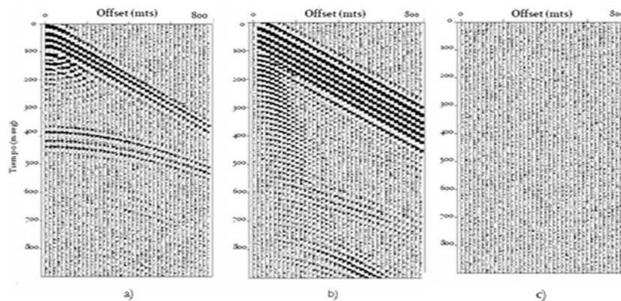
La codificación de las rutinas computacionales implementadas en este trabajo para desarrollar el filtro de polarización basado en la Descomposición del Valor Singular, se llevó a cabo mediante la herramienta MATLAB 6.0 (MATrix LABORatory) y consistió en generar una matriz de datos de entrada denominada Matriz  $X$ , la cual está conformada por la descomposición matricial de las componentes Vertical, Radial, y Transversal, de los registros sintéticos multicomponente (Figura 1), a los cuales posteriormente se le introdujo ruido aleatorio en una banda de frecuencia de 20Hz a 80Hz (Figura 2), los cuales fueron generados a través de un software de modelado sísmico por diferencia finita de octavo orden llamado “e3d\_anel21”.

Para la simulación del disparo en los registros se implementó la configuración “off end – spread” (disparo en el origen del tendido). Se establecieron los siguientes parámetros geométricos: una ondícula fuente tipo Ricker de 25Hz y 40 elementos receptores espaciados cada 20 metros para un máximo offset de 800 metros. La propagación de ondas se generó en un medio isotrópico y homogéneo con una

interface, una longitud de 800 mseg y finalmente se obtuvo un total de 900 muestras con un intervalo de muestreo ( $\Delta t$ ) de 2 mseg.



**Figura 1.** Registros Sintéticos Multicomponente (MC) para: a) Componente Vertical “Z”, b) Componente Radial “R” y c) Componente Transversal “T”



**Figura 2.** Registro Sintético MC con ruido aleatorio en la banda de frecuencia 20Hz a 80Hz (datos de entrada de la Matriz  $X$ ) para: a) Componente Vertical “Z”, b) Componente Radial “R” y c) Componente Transversal “T”

El objetivo principal del filtro, consiste en preservar las energías asociadas con los eventos que presenten polarizaciones lineales y planas a través de la técnica del SVD, con la finalidad de lograr la reconstrucción de la imagen a partir de la suma de las dos primeras autoimágenes. El algoritmo aplicado en este trabajo puede definirse como:

Dada una Matriz :

$$X = \begin{bmatrix} Z_{1,l} & R_{1,l} & T_{1,l} \\ Z_{2,l} & R_{2,l} & T_{2,l} \\ Z_{3,l} & R_{3,l} & T_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{900,l} & R_{900,l} & T_{900,l} \end{bmatrix} \quad (1)$$

la cual es definida como una matriz ( $M \times N$ ) de valores reales y de rango  $r$ , en la cual el rango indica el número de filas o de columnas linealmente independientes (Forsythe *et al.* 1977),  $M=1,2,3,\dots,900$  es el número de muestras (filas) en una ventana de tiempo de una sección sísmica (en este trabajo se aplicó una ventana de análisis de 80 muestras

con un dt de 1 mseg, es decir, traza a traza) y  $N = (Z_p R_p Z_p)$ ;  $l = 1, 2, 3, \dots, 40$  son las columnas de datos de las tres componentes vertical, radial y transversal respectivamente (Figura 2), implicando que  $M \geq N$  y  $r \leq N$ .

El SVD es una técnica que tiene la particularidad que al ser aplicada sobre la matriz de datos, produce los vectores ortonormales que indican las direcciones principales de vibración del movimiento de las partículas en el medio de propagación (De Franco *et al.* 2001) y se expresa numéricamente como:

$$X = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \quad (2)$$

donde: el superíndice  $T$  indica la traspuesta,  $r$  el rango de la matriz  $X$ ;  $u_i$  es el  $i$ -ésimo autovector de  $XX^T$ ;  $v_i$  es el  $i$ -ésimo autovector de  $X^T X$  y  $\sigma_i$  es el  $i$ -ésimo Valor Singular de  $X$  donde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq \sigma_M$  (Freire & Ulrych, 1988). Reescribiendo la ecuación (2) en forma matricial para iniciar la descomposición se obtiene que:

$$X = U W V^T \quad (3)$$

Las columnas de  $U(M \times 3)$  son la proyección de los datos normalizados por los valores singulares a lo largo de los ejes de grabación. Los elementos de la diagonal de la matriz  $W(M \times 3)$  son los valores singulares de la matriz  $XX^T$  o  $X^T X$ . Las columnas de la matriz  $V(3 \times 3)$  corresponden a los ejes principales, de la elipse de polarización (De Franco *et al.* 2001). Equivalentemente para obtener la descripción de en autoimágenes:

$$X = U W V^T = \sum_{i=1}^3 E_i = e_{1c} + e_{2c} + e_{3c} \quad (4)$$

$$c = z, r, t; \quad i = 1, 2, 3$$

donde:  $E_i = e_{ic}(M \times 3)$  son llamados autoimágenes de la matriz (Andrews & Hunt, 1977) y representan las componentes de los datos a lo largo de cada eje principal (De Franco *et al.* 2001). Debido a la ortogonalidad de los autovectores, las autoimágenes forman una base ortogonal para la representación de  $X$ , como se puede observar en la ecuación (2). La contribución de la reconstrucción de  $X$  a partir de las autoimágenes, está asociada con un valor singular dado y su proporcionalidad en cuanto a magnitud como valor singular, indicando la cantidad de energía que se proyecta sobre los ejes que permiten estimar la polarización del movimiento de las partículas; es decir, dado que los valores singulares están siempre expresados por magnitud en orden decreciente ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq \sigma_M$ ), las mayores contribuciones para la representación de  $X$  están contenidas en las primeras autoimágenes (Freire & Ulrych, 1988).

En un supuesto de que la Matriz  $X$  representa una sección sísmica y todas las  $N$  trazas son linealmente independientes, es decir, las trazas no pueden ser representadas en términos de una combinación lineal de otras  $N-1$  trazas (Lancoz, 1961), en este caso  $X$  es una matriz de rango  $N$  completamente y todos los  $\sigma_i$  son diferentes de cero y en consecuencia, una perfecta reconstrucción de  $X$  requeriría de todas las autoimágenes. Por otra parte, en el caso en el cual todas las  $N$  trazas sean iguales dentro de un factor de escala, todas las trazas son linealmente dependientes,  $X$  será de rango uno y puede ser perfectamente representada por la primera autoimagen  $\sigma_1 u_1 v_1^T$ . De forma general, en función de la dependencia lineal que exista entre las trazas,  $X$  puede ser reconstruida a partir de solo unas pocas primeras autoimágenes. En este caso, los datos pueden considerarse compuestos por trazas que muestran un alto grado de correlación traza a traza (Freire & Ulrych, 1988).

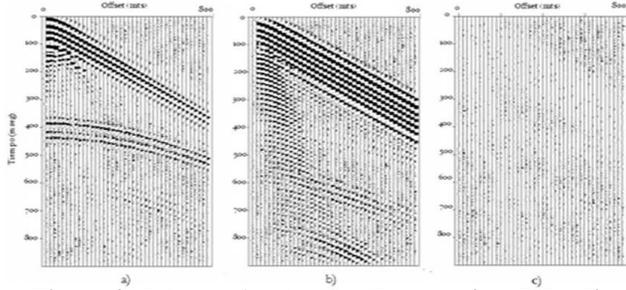
Por consiguiente, dada una señal polarizada representada por los datos de entrada (registros sísmicos de la Figura 2) de la Matriz  $X$ , los vectores  $v_1$  y  $v_2$  (primer y segundo autovector de la matriz  $X^T X$ ) proveen una estimación de los mínimos cuadrados de la elipse de polarización. Donde:  $\sigma_i^2$  ( $\sigma_i$  es el  $i$ -ésimo Valor Singular de  $X$ ) es la energía de los datos de las componentes principales a lo largo de  $v_i$ , la energía total de cada eje es  $(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)$  a lo largo de  $v_1$ ,  $(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)$  y  $\sigma_3^2$  a lo largo de  $v_2$  y  $v_3$ , respectivamente. En el desarrollo de este algoritmo se supone que la vibración de las partículas es en 2D, por lo tanto se emplean los dos primeros valores singulares ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ) y  $\sigma_3$  se considera ruido polarizado aleatoriamente.

La energía del ruido es  $(\sigma_3^2)$  cuando la polarización es elíptica y  $(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)/2$  para la polarización lineal. Tomando en cuenta que la energía de la señal polarizada elípticamente se encuentra mayormente sólo sobre los dos primeros ejes principales, se obtiene una primera mejoría de la relación señal ruido simplemente apilando las dos primeras autoimágenes,  $E_1$  (Figura 3) y  $E_2$  (Figura 4). Jurkevics (1988), establece que las funciones adecuadas en conjunto con la ponderación (magnitud o importancia numérica) de las dos primeras autoimágenes para generar la reconstrucción de la imagen son los factores de rectilinealidad  $R_1$  y  $R_2$  (Figura 5), correspondientes al primer y segundo eje principal, los cuales están vinculados con medir el grado de polarización lineal de los sismogramas MC y el factor de planaridad  $P$  (Figura 5), asociados directamente con la intensidad de la energía que registra el grado de polarización de una señal MC en un plano. Las ecuaciones que describen a los factores de rectilinealidad y planaridad son:

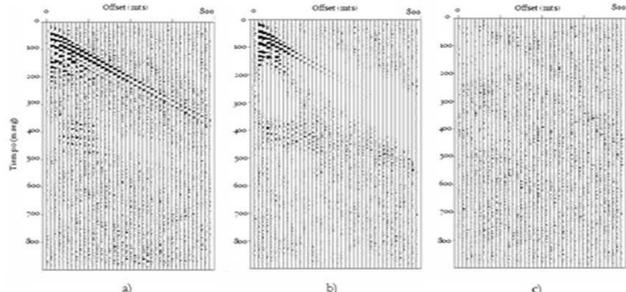
$$R_1 = 1 - \left( \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} \right) \quad (5)$$

$$R_2 = 1 - \left( \frac{\sigma_3^2}{\sigma_2^2} \right) \quad (6)$$

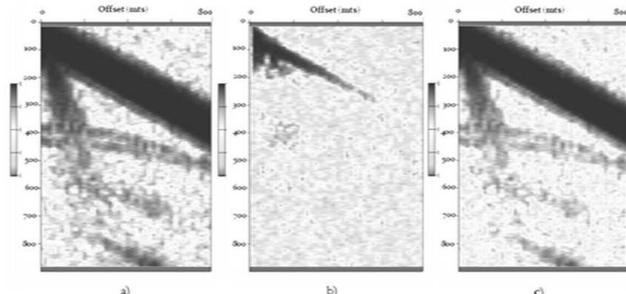
$$P = 1 - (2\sigma_3^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \quad (7)$$



**Figura 3.** Primera Autoimagen  $E_1 = e_{1c}$ ; (c = Z,R y T).  
a) Componente Vertical  $e_{1z}$ ; b) Componente Radial  $e_{1r}$ ;  
y c) Componente Transversal  $e_{1t}$



**Figura 4.** Segunda Autoimagen  $E_2 = e_{2c}$ ; (c = Z,R y T).  
a) Componente Vertical  $e_{2z}$ ; b) Componente Radial  $e_{2r}$ ;  
y c) Componente Transversal  $e_{2t}$



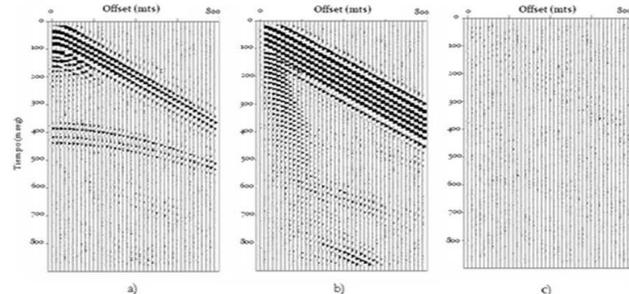
**Figura 5.** Diagrama de energías: a) factor de Rectilinealidad  $R_1$ , b) factor de Rectilinealidad  $R_2$  y  
c) Factor de Planaridad  $P$ . En escala de grises, el tono **oscuro** representa la mayor intensidad de energía

La relación entre los factores asociados directamente con la intensidad de la energía y la sumatoria de las dos primeras autoimágenes, generan la ecuación del operador del filtro basado en la técnica SVD, mediante el cual se obtiene la señal filtrada de los datos sintéticos MC (Figura 6), que estará expresada por:

$$F = \sum_i^2 (u_i \sigma_i v_i^T R_i) \quad P = (E_1 R_1 + E_2 R_2) P \quad (8)$$

o en su equivalente, la ecuación del filtro para cada componente

$$F_c = (e_{1c} R_1 + e_{2c} R_2) P \quad (9)$$



**Figura 6.** Registros Sísmicos Sintéticos Filtrados a través del operador de la ecuación (8).

a) Componente Vertical Z. b) Componente Radial R.  
c) Componente Transversal T

El operador del filtro, como se describe en las ecuaciones (8) y (9), representa el caso más general de la polarización elíptica. En cuanto a la polarización lineal, se deriva de la función  $F$  como un caso específico en el cual la señal está completamente concentrada sobre la primera componente principal  $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2 \cong \sigma_3^2$ ,  $R_2 \rightarrow 0$ ,  $R_1 \cong P$  implicando que  $F \cong E_1 (R_1)^2$ .

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con la aplicación del filtro de polarización basado en la Descomposición del Valor Singular (SVD), el cual es un filtro adaptativo orientado a atenuar el ruido a través de la suma de las dos primeras autoimágenes de la matriz de datos, en conjunto con la ponderación de los atributos de polarización rectilinealidad y la planaridad, se logró preservar y realzar los eventos asociados con los modos de ondas con polarización lineal (reflexiones de interés) presentes en los registros, así como mejorar la relación señal ruido.

La simulación del disparo con configuración off end – spread a través del programa de modelado elástico, generó los registros sintéticos MC de la Figura 1, en la cual se observa los eventos asociados con la propagación de las ondas en el medio para cada componente, es decir:

- La componente vertical “Z” presenta para offset’s cercanos las ondas directas correspondiente a las primeras llegadas de la energía sísmica. Para el mismo offset pero

a un aproximado de 360 mseg de longitud en tiempo, se observa la energía asociada con la reflexión de onda P y para un offset aproximado de 350 mts a 550 mseg, se observó energía asociada con la onda convertida PS.

- Para la componente radial “R” se observa, al igual que en la componente “Z”, la onda directa, pero con mayor amplitud, lo cual se puede asociar con el hecho de que este tipo de onda (que es una onda P que se polariza en el plano vertical-radial) presenta una mayor componente horizontal que vertical, debido a que se propaga casi paralelamente a la superficie. De igual forma se observa que la energía asociada con la onda P, es de mucho menor amplitud, lo que se adjudica a que por las características del movimiento de sus partículas se registra principalmente en la componente vertical, mientras que la onda PS, a partir de offset’s cercanos y una longitud en tiempo aproximada de 520 mseg se muestra con una mayor amplitud en comparación a la componente “Z”.

- En la componente Transversal “T”, debido a que el medio es isotrópico y homogéneo, sólo se generan las ondas que se polarizan en el plano vertical-radial, los modos que se polarizan perpendicular a este plano (onda SH) no se producen. Por consiguiente, la componente transversal del registro presenta trazas sin información.

El algoritmo implementado en la metodología, trabaja en una ventana de tiempo deslizante de 80mseg, con la finalidad de abarcar la longitud de la ondícula correspondiente al evento asociado con la fase con polarización lineal y se aplicó sobre los registros sísmicos sintéticos de la Figura 2, los cuales presentan las mismas características (asociadas con energía) de los registros de la Figura 1 con la excepción de que se le introdujo ruido aleatorio en la banda de frecuencia de 20Hz a 80Hz.

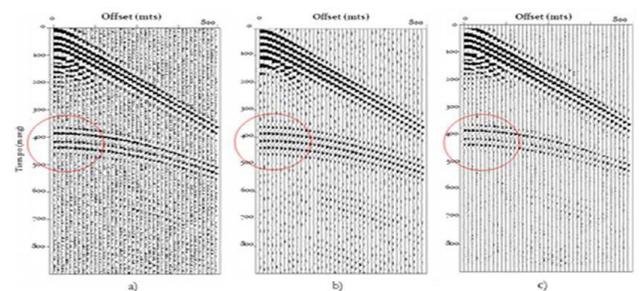
Comparando la primera autoimagen  $E_1 = e_{1c}$ ; ( $c = Z, R$  y  $T$ ), asociada con la descomposición del valor singular (Figura 3), con la segunda autoimagen  $E_2 = e_{2c}$ , (Figura 4) se puede establecer que la mayor cantidad de la energía está contenida en la primera autoimagen, ya que la segunda muestra muy bajos niveles de energía sísmica, lo cual se debe a que la técnica del SVD está asociada con realzar los eventos polarizados linealmente sobre el primer eje de la elipse de polarización donde se demuestra que si  $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2 \cong \sigma_3^2$ , la señal filtrada dependerá en casi su totalidad de la primera autoimagen  $F \cong E_1 (R_1)^2$ .

En cuanto a los factores de ponderación en el operador del filtro, como lo son la rectilinealidad en los dos ejes  $R_1$  y  $R_2$  y la planaridad  $P$ , sobre el diagrama de energía (Figura

5), se obtiene nuevamente que la intensidad de energía de los eventos relacionados con las reflexiones primarias de interés, están contenidas en los ejes principales de polarización asociados con la técnica del SVD.

En la Figura 6, se presentan los resultados de la aplicación del filtro de polarización basado en la descomposición de valor singular, sobre los datos sintéticos MC (Figura 2), donde el operador del filtro muestra que a través de la sumatoria de las dos primeras autoimágenes, en conjunto con los factores de las ecuaciones (5), (6) y (7), se logra reconstruir la imagen de los registros sísmicos, preservando la coherencia lateral de la data y a su vez suprimiendo en su mayoría el ruido aleatorio presente en cada registro.

Con la finalidad de comparar la efectividad del filtro de polarización basado en el SVD, se diseñó y se aplicó sobre los datos sintéticos (Figura 2), un filtro convencional pasa banda cuyo rango de frecuencia es de 8Hz-16Hz a 40Hz-60Hz, donde comparando las imágenes b) y c) de la Figura 7, se pudo observar que el filtro pasa-banda (PB) suprime parte del ruido aleatorio (ruido en la banda de frecuencia de 20Hz a 80Hz) presente en el registro sin filtrar (Figura 2 a). Así mismo se puede observar que la energía asociada con el ruido no es atenuada por completo, sino que está superpuesta sobre los eventos sísmicos de interés, ocasionando la degradación de la calidad de los datos, a través de los cuales se describe la geología del subsuelo. Con la utilización del filtro PB se preservan los eventos sísmicos, pero con una forma suavizada de la ondícula, ya que éste no es capaz de reconocer si en esa banda de frecuencias está contenida señal útil o no.



**Figura 7.** Resultados de filtrar a) la componente Vertical “Z” del registro sintético (Fig. 2), utilizando los filtros: b) PB con un rango de frecuencias de 8-16\_40-60 Hz y c) SVD (Figura 6)

El filtro de polarización basado en la SVD (Figura 7 c), el cual barre todos los rangos de frecuencias de los registros sintéticos, permitió encontrar resultados más satisfactorios que los encontrados con el filtro PB (Figura 7 b), en cuanto a la preservación de los eventos presentes. El óvalo

que está establecido en cada registro de la Figura 7, encierra los eventos asociados con la longitud en tiempo del registro entre 350 msec y 450 msec, mostrando otra ventaja del filtro basado en el SVD, donde se lograron preservar los eventos sísmicos asociados con polarizaciones lineales, sin que ocurriese el suavizado de ondículas tal y como ocurrió con el filtro PB y a su vez con el filtro SVD, se pudo evitar la generación de eventos inexistentes.

## CONCLUSIONES

La aplicación del filtro de polarización basado en la Descomposición del Valor Singular (SVD) sobre los datos sísmicos sintéticos multicomponente, suprime exitosamente el ruido aleatorio de alta frecuencia (20Hz a 80Hz), demostrando a su vez ser una herramienta más eficaz que un filtro convencional pasa-banda, debido a que realza y aumenta la coherencia lateral de los eventos sísmicos, provee el mejoramiento de la relación señal ruido, reproduce los atributos de polarización de los datos sísmicos multicomponente, así como la amplitud y fase de la señal, proporcionando información coherente para la reconstrucción de la imagen sísmica y de esta forma lograr describir las características y propiedades del subsuelo.

## AGRADECIMIENTOS.

Los autores agradecen al Centro de Procesamiento de Datos Sísmicos (CPDG) de PDVSA-INTEVEP por su valiosa colaboración, así como al CDCH-UCV por el apoyo financiero prestado mediante el Proyecto de Grupo número PG-03-8269-2011/1.

## REFERENCIAS

- ANDREWS H. C. & HUNT B. R. (1977). Digital image restoration. Prentice-Hall, Signal Processing Series.
- BEKARA, M. & VAN DER BAAN, M. (2007). Local Singular Value Decomposition for Signal Enhancement of Seismic Data. *Geophysics*, Vol.72, 59-65.
- DE FRANCO, R. & MUSACCHIO, G. (2001). Polarization filter with singular value decomposition. *Geophysics*, Vol. 66, 932-938.
- DE MEERSMAN, K. & ANSORGER, C. (2007). Ground Roll Removal and Signal Preservation by Cascading SVD Polarization Filters with Localized Fk-Filters. CSPG CSEG Convention. 450.
- DE MEERSMAN, K. & KENDALL, R. (2005). A complex SVD-polarization filter for ground roll attenuation on multi-component data. CSEG Convention.
- FORSYTHE, G. E., MALCOLM, M. A., MOLER, C. B. (1977). *Computer Methods for Mathematical Computations*. Cap. 9.
- FREIRE, S.L.M. & ULRYCH, T.J. (1988). Application of singular value decomposition to vertical seismic profiling. *Geophysics*, Vol.53, 778-785.
- JURKEVICS, A. (1988). Polarization Analysis of three-component array data. *Bull. Seis. Soc Am.*, 78, 1725-1743.
- KLEMA, V. C. & LAMB, A. J. (1980). The Singular Value Decomposition: its computation and some applications. *Inst. Electr. and Electron. Eng., Trans. Automatic Control*. AC-25, 164-176.
- LANCOZ, C. (1961). *Linear Differential operators*. Editorial: D. Van Nostrand Co. Cap. 3. *Matrix Calculus*. xvi, 564p.
- URSIN, B. & ZHENG, Y. (1985). Identification of Seismic Reflection using Singular Value Decomposition. *Geophys. Prosp.*, 33, 773-779.
- YILMAZ, OZ. (1987). *Seismic Data Analysis*. Society of Exploration Geophysicists, Volumen I.