

# **SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DEL FLUJO TURBULENTO BASADA EN TRAYECTORIAS CARACTERÍSTICAS, MEDIANTE EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO. PARTE 1: DOMINIOS MULTI BLOQUES EN CONEXIÓN ESTRUCTURADA**

*EUGENIO SANSONE*

Universidad Central de Venezuela. Escuela de Ingeniería Mecánica. email: eugenio.sansone@ucv.ve

Recibido: febrero 2010

Recibido en forma final revisado: mayo 2013

## **RESUMEN**

En este artículo son presentados los resultados obtenidos de la aplicación de un código computacional que permite resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, continuidad y energía que rigen el flujo turbulento de un fluido newtoniano monofásico. El código fue desarrollado completamente por el autor en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central de Venezuela y utiliza el método del Elemento Finito. De forma particular fue adoptada una estrategia de solución basada en trayectorias características que fue aplicada a mallas cuyos nodos permanecen fijos en el tiempo. En cada instante, se aplica una técnica de paso de tiempo fraccionado en la cual las ecuaciones diferenciales son resueltas de forma secuencial siendo garantizada la condición de Courant durante cada paso. Con el propósito de evaluar el desempeño de la metodología computacional desarrollada en una primera etapa, ésta fue aplicada para resolver el campo de flujo turbulento bidimensional incompresible e isotérmico, transversal a un cilindro circular donde el dominio de cálculo fue subdividido en un número determinado de bloques estructurados. El número de elementos de frontera entre dos bloques en conexión es el mismo, de forma que la malla resultante es estructurada en su totalidad. La solución obtenida es comparada con datos experimentales y numéricos apropiados para la geometría estudiada.

*Palabras clave:* Flujo turbulento, Simulación de grandes vórtices, Método del elemento finito, Mallas multi bloques, Trayectorias características.

## **NUMERICAL SOLUTION OF TURBULENT FLOW EQUATIONS BASED ON CHARACTERISTIC LINES BY MEANS OF THE FINITE ELEMENT METHOD. PART ONE: FULL STRUCTURED MULTI-BLOCK DOMAINS**

### **ABSTRACT**

This paper presents the results obtained by the application of a homemade computational code based on the finite element method for solving the Navier-Stokes, continuity and energy equations derived from the turbulent flow of a single phase Newtonian fluid. This code was completely developed by the author at the Mechanical Engineering School of "University Central de Venezuela". A specific strategy based on characteristic lines was selected and applied to time-fixed grids. A fractional time step was used to solve the partial differential equations in a sequential scheme, showing good damping performances, based on the Courant condition applied during the whole calculation. In order to evaluate the performance of the computational code at its first stage, the bi-dimensional, turbulent, incompressible and isothermal cross flow around a circular cylinder was solved. The computational domain was divided in a predetermined number of blocks. Since the common frontiers between a pair of blocks match each other with the same number of boundary elements, a full structured grid of the whole domain was obtained. The solution was compared with experimental and numerical results suitable for the geometry analyzed.

*Keywords:* Turbulent flow, Large eddy simulation, Finite element method, Multi-block grids, Characteristic lines.

## INTRODUCCIÓN

Hoy en día la solución por la vía computacional de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de los fluidos son importantes ya que a través de éstas se pueden obtener los campos de distintas cantidades vectoriales y escalares como el campo de velocidades, el campo de presión y otras cantidades relevantes que permiten analizar de manera minuciosa la interacción que puede existir, por ejemplo, entre el flujo de un fluido y distintos elementos de máquinas como los impulsores o rodetes de turbomaquinarias, o también en situaciones en las cuales se quieren evaluar los porcentajes de las componentes de una mezcla reactiva (como en los procesos de combustión) o no reactiva, o aquellos que se relacionan con el transporte y la difusión de contaminantes en un líquido o en la atmósfera, entre otras aplicaciones. Todos éstos son aspectos de interés relacionados con procesos de conversión de energía y fenómenos del transporte de masa, concernientes al dominio de la ingeniería.

Diferentes metodologías numéricas han sido aplicadas hasta el presente para resolver las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de los fluidos newtonianos. La complejidad que presentan estas ecuaciones, reside en la no linealidad existente en los términos convectivos de las ecuaciones de momentum. La otra dificultad que se presenta reside en la presión ya que ésta, al igual que las componentes escalares de la velocidad, se encuentra presente en las ecuaciones de momentum y se requiere por lo tanto de otra ecuación adicional como la ecuación de continuidad para tener un número compatible de ecuaciones e incógnitas (en el flujo incompresible). Sin embargo, la ecuación de continuidad presenta una estructura distinta a las ecuaciones de momentum y no incluye a la presión como variable. Por esta razón, se han desarrollado diferentes estrategias numéricas teniendo en cuenta factores diversos como la rapidez de cálculo, la capacidad de almacenamiento computacional y la confiabilidad de los resultados obtenidos expresados mediante algún tipo de error respecto a valores analíticos exactos o datos experimentales apropiados. Dentro de las técnicas numéricas que se han aplicado en problemas de flujos viscosos, las más utilizadas siguen siendo hoy por hoy aquellas basadas en métodos de diferencias finitas, el método del Volumen Finito y el método del Elemento Finito. Aunque el método del Volumen Finito ha ganado popularidad para resolver las ecuaciones del flujo de fluidos viscosos, se ha demostrado (Zienkiewicz *et al.* 2005) que el método del Elemento Finito inicialmente aplicado en problemas vinculados con la Mecánica de Sólidos o la Resistencia de Materiales, es tan eficiente como la técnica

precedente, siendo un método muy favorable para tratar geometrías complejas en donde pudieran ser utilizados distintos tipos de elementos en una misma malla, así como mallas estructuradas y no estructuradas y donde las condiciones de contorno son fáciles de imponer, inclusive en aquellos casos en lo que se requieren establecer gradientes de cantidades físicas (Zienkiewicz *et al.* 2005; Chung, 2006). El método del Volumen Finito fue inicialmente concebido partiendo del concepto del Volumen de Control, concepto que se utiliza mucho en Termodinámica Clásica y Mecánica de Fluidos, que permite simplificar el estudio de sistemas materiales sujetos a fenómenos de transferencia de energía. Inicialmente los tipos de celdas o volúmenes de control empleados en el método del Volumen Finito, eran geometrías regulares, básicamente de tipo rectangular. La transformación a espacios curvilíneos no ortogonales, impone severas restricciones a los elementos de control y se requieren de un conjunto de transformaciones que son confiables en la medida de que los elementos sean reducidos considerablemente de tamaño en relación con las escalas del flujo.

En los últimos años se han desarrollado algoritmos de cálculo eficientes los cuales han potenciado notablemente la aplicación del método del Elemento Finito en el campo de la Mecánica de Fluidos. En el caso del flujo incompresible destacan entre otras estrategias numéricas las siguientes: métodos generalizados tipo Petrov-Galerkin (*Generalized Petrov-Galerkin Methods*), métodos basados en operadores que separan las ecuaciones de momentum y continuidad (*Operator Splitting Methods*), métodos de vórtices (*Vortex Methods*), además de los ya conocidos métodos de penalización de la presión (*Penalty methods*) y los métodos basados en la solución de variables primitivas (velocidad y presión en el caso del flujo incompresible), utilizando funciones con igual o diferentes órdenes de interpolación (*Equal-Order Velocity and Pressure Formulation, Mixed Velocity and Pressure Formulation*). Todas estas metodologías numéricas son bien reportadas, entre otros autores, por Chung, 2006 y Huebner *et al.* 2001. Los métodos que aplican operadores para tratar las ecuaciones de continuidad y momentum por separado, son eficientes en el sentido que permiten la aplicación de distintos tipos de elementos finitos. Estos métodos se aplican también de forma eficiente en el cálculo del flujo compresible. En años recientes Zienkiewicz *et al.* 2005, publican sus resultados con una metodología basada en este tipo de técnica, la cual consiste en una formulación explícita en tiempo de las ecuaciones de Navier-Stokes y una formulación semi implícita para la presión, en el caso del flujo incompresible. En esta formulación, una transformación adecuada de coordenadas permite escribir las ecuaciones de momentum

en términos de líneas características o trayectorias definidas por medio del campo de velocidades del flujo. Esta técnica ha resultado efectiva para tratar una amplia variedad de flujos compresibles e incompresibles, donde pueden haber o no fenómenos de interface y por esta razón fue escogida para la elaboración del programa de cálculo. En el programa que ha sido desarrollado se aplica entonces lo que se conoce como un método segregado basado en líneas características (*Characteristic-Based Split, CBS*). Nithiarasu 2003 y Nithiarasu *et al.* 2004, desarrollaron un código para aplicaciones de flujo compresible e incompresible, el cual ha sido concebido para elementos triangulares simples en el caso bidimensional y tetrahédricos de cuatro nodos en el caso tridimensional. Las versiones de estos códigos para cada tipo de flujo, están separadas y no han sido integradas en un código único. En el presente código desarrollado, se extiende la aplicación de la técnica *CBS* a diferentes tipos de elementos en geometrías 2D y 3D, también se incorpora una técnica de solución basada en el empleo de mallas multi bloques que permite reducir el tiempo de cálculo del proceso de factorización matricial para el sistema de ecuaciones resultante asociado con la presión, donde se aplica una técnica eficiente de factorización de matrices que sirve para mallas de múltiples bloques conectados de forma estructurada y no estructurada. Esta técnica de factorización se basa en una adaptación y completa modificación del método frontal para tratar mallas estructuradas (Taylor & Hughes, 1981). El programa de cálculo fue escrito completamente en lenguaje C estandar. Adicionalmente fueron desarrollados también los siguientes programas: uno para la generación de malla, uno de pre procesamiento de los archivos de entrada, utilizados por el programa de cálculo principal y un programa de visualización gráfica de resultados, para el cual fue empleada la librería OPEN GL. El programa de cálculo principal fue ejecutado inicialmente en el computador del Instituto de Mecánica de Fluidos de la Universidad Central de Venezuela, el cual es básicamente una plataforma multi procesador, constituida por 16 procesadores que permiten el cálculo en ambiente paralelo y recientemente, en dos servidores HP Prolant con unidades centrales de procesamiento (CPU) de 12 núcleos cada uno, adquiridos en un proyecto de investigación, No. PG08-8290-2011-1 llevado a cabo por el autor del trabajo a través del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, CDCH de la Universidad Central de Venezuela. Sin embargo para los cálculos realizados, se utilizó sólo un procesador ya que no han sido todavía incorporadas las librerías de paralelización en el código y esto hace que el cálculo aún no sea tan rápido como se requiere en aplicaciones de esta índole. La principal motivación para realizar un código de esta naturaleza, se debe a que en los países desarrollados, tales códigos son concebidos y elaborados en universidades

y centros de investigación y cuentan con el auspicio del sector tecnológico e industrial con el propósito de resolver problemas complejos o realizar modificaciones importantes desde el punto de vista del diseño de equipos y sistemas de gran envergadura y donde los aspectos experimentales pudieran elevar considerablemente aquellos de tipo económico del estudio que se desea emprender. Así que la universidad resulta el lugar idóneo para la realización de este tipo de actividades y en Venezuela la brecha de separación entre el sector industrial tecnológico y el académico será cada vez menor en la medida de que este tipo de desarrollos computacionales sea aplicado para tratar problemas de interés en los cuales se requiere un alto nivel de especialización y conocimiento.

## ECUACIONES GENERALES DEL FLUJO TURBULENTO

El programa de cálculo se basa en la solución de las ecuaciones de transporte del flujo turbulento. De forma general estas ecuaciones pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_j} = \mathbf{Q} \quad (1)$$

Los vectores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{Q}$ , identifican, respectivamente, a las incógnitas principales expresadas en forma conservativa, los términos convectivos, los términos difusivos y los términos fuentes, los cuales tienen las componentes siguientes:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{e} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_j \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \\ \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{e} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{ij} + \bar{T}_{ij} \\ \chi \bar{\theta}_j + \tilde{u}_i \bar{\sigma}_{ij} + \bar{Q}_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{p}_{,i} + \bar{\rho} g_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i g_i + \dot{q} \end{pmatrix}$$

los símbolos supra barra (-) y supra tilde (~), se refieren, respectivamente, a operaciones de filtrado espacial y promediación másica según Favre (Lesieur *et al.* 2005). Los términos:  $\bar{T}_{ij}$  y  $\bar{Q}_j$ , se refieren cada uno: al tensor residual de segundo orden de esfuerzos turbulentos y el tensor residual de primer orden relacionado al flujo turbulento de calor, que expresan el intercambio de momentum y calor entre las escalas filtradas y las escalas de subrejilla, las cuales son las escalas más pequeñas de turbulencia en el rango inercial que se pueden considerar por encima de la micro escala de Kolmogorov (Lesieur *et al.* 2005). Estos tensores tienen las siguientes estructuras:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{ij} &= \bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j - \overline{\rho u_i u_j} \\ \bar{Q}_j &= \bar{\rho}\bar{u}_j\bar{e} - \overline{\rho u_j e}\end{aligned}\quad (3)$$

El tensor de esfuerzos filtrado para el caso de un fluido newtoniano es de la forma:  $\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij}$ , donde:  $\bar{\tau}_{ij} = 2/3\mu\bar{u}_{k,k}\delta_{ij} + \mu(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ , siendo  $\delta_{ij}$ , la delta de Kroneker y  $\bar{p}$ , la presión termodinámica filtrada. También,  $\mu$  y  $\kappa$ , son respectivamente: la viscosidad dinámica y la conductividad térmica del fluido que dependen fundamentalmente de la temperatura absoluta  $\theta$ , por otro lado  $\dot{q}$ , es la rata de calor transferida por unidad de volumen en el seno del fluido. El tensor residual de esfuerzos turbulentos:  $\bar{T}_{ij}$ , puede ser simulado mediante un modelo de grandes vórtices apropiado, donde para aplicaciones prácticas, se ha utilizado con buenos resultados el modelo de Smagorinsky 1963, que permite expresar el tensor residual de turbulencia en términos de la viscosidad turbulenta:  $\nu_t$  y los gradientes de las velocidades filtradas, de forma análoga a como se hace de acuerdo a la hipótesis de Boussinesq aplicada a las ecuaciones de Navier Stokes promediadas en el tiempo:

$$\bar{T}_{ij} = \bar{\rho}\nu_t\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\quad (4)$$

El tensor residual de flujo turbulento de calor:  $\bar{Q}_j$ , se expresa de forma similar, utilizando el gradiente de la energía total filtrada:  $\bar{e}$ , y la conductividad térmica turbulenta:  $\chi_t$ , relacionada a la viscosidad turbulenta a través del número de Prandtl turbulento:  $Pr_t$ . La viscosidad turbulenta:  $\nu_t$ , que aparece en la ecuación (4) es de la forma:  $\nu_t = (C_s\Delta x)^2\|\bar{S}_{ij}\|$ , siendo:  $\|\bar{S}_{ij}\|$ , la norma euclidiana del tensor rata de deformación filtrado.  $C_s$ , es una constante que resulta de suponer que la turbulencia es isotrópica y que el valor de corte del número de onda en el espacio de Fourier del espectro de energía cinética turbulenta se produce a:  $\chi_F = \frac{\pi}{\Delta x}$ , siendo:  $\Delta x$ , una longitud característica de la escala de sub rejilla, generalmente asociada al tamaño del sub dominio computacional. Luego de la aplicación de un proceso de filtrado espacial utilizando un filtro de tipo Gaussiano y después de algunas operaciones, el valor de la constante de Smagorinsky es de la forma:  $C_s = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{3\chi_k}{2}\right)^{(-3/4)}$ , que produce un valor de  $C_s \approx 0,18$  cuando la constante de Kolmogorov:  $\chi_k$ , es tomada con valor:  $\chi_k = 1,4$ . En muchas aplicaciones prácticas, se encuentra que el valor del coeficiente puede ser tomado dentro del siguiente rango:  $0,1 \leq C_s \leq 0,2$  (Lesieur *et al.* 2005). El modelo de Smagorinsky presenta la desventaja de aumentar el efecto de la turbulencia cerca de la pared y no reproduce bien en esa zona, los efectos del flujo laminar. Sin embargo modelos de turbulencia más complejos como aquellos

basados en una o dos ecuaciones de transporte presentan también esta desventaja, por esa razón y debido al hecho de su simplicidad, éste se ha adoptado para cálculos de flujo a elevados valores del número de Reynolds. Con el propósito de simplificar el manejo de las ecuaciones en lo sucesivo, se evitará el empleo de los símbolos supra barra y supra tilde colocado sobre las diversas variables.

## METODOLOGÍA NUMÉRICA

La naturaleza matemática de las ecuaciones del flujo de fluidos, corresponde a aquella de una onda que se propaga y se difunde en un medio continuo. En problemas simples de convección dominante y suponiendo un campo de velocidades uniforme, la solución de las ecuaciones de momentum en una dimensión, pudiera estar dada en términos de la ecuación de la onda en el plano complejo:  $u_x(x,t) = U_o e^{(ix - \omega t)}$ , siendo  $U_o$  el módulo de la velocidad en el instante inicial,  $\kappa$  el número de onda y  $\omega$  la velocidad angular asociada a su frecuencia. Esta naturaleza de onda que presentan las ecuaciones de transporte, motiva la formulación de métodos numéricos que contemplen de mejor forma la física del problema.

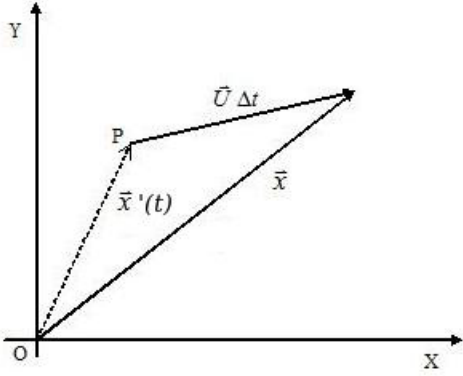
La figura 1 muestra la relación entre dos vectores de posición uno fijo:  $\bar{x}$  y otro móvil:  $\bar{x}'$ . Ambos vectores están relacionados por medio de la velocidad local característica del flujo:  $\bar{u}$ , en un punto arbitrario "P" del dominio de cálculo. En un instante de tiempo  $\Delta t$  suficientemente pequeño donde se puede suponer que la velocidad característica del flujo es constante, se puede escribir de acuerdo al diagrama:

$$\bar{x}'(t) = \bar{x} - \bar{u}\Delta t\quad (5)$$

siendo el incremento de tiempo, la diferencia entre un instante de tiempo  $t$  y un instante inicial de referencia  $t_o$ , tal que  $\Delta t = t - t_o$ . Los operadores diferenciales para el tiempo y el espacio, pueden ser escritos en función de la coordenada móvil siguiendo la trayectoria de un elemento de fluido situado instantáneamente en un punto "P":

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \Delta t} - u_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x'_j}\end{aligned}\quad (6)$$

Aplicando estos operadores a la ecuación de primer orden de diferenciación (1), tomando en cuenta que:  $\partial \Delta t = \partial t$ , y luego de manipular adecuadamente, el término de convección C, desaparece y la ecuación resultante es auto adjunta cuando se integra en el dominio de cálculo y cuando el término fuente es nulo (Zienkiewicz *et al.*



**Figura 1.** Relación entre un vector de posición fijo y uno móvil, y la velocidad característica, del flujo en un punto P

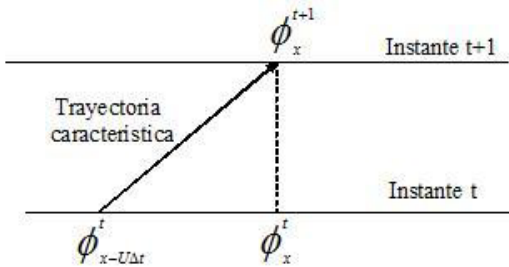
2005), por lo que se puede aplicar sin problemas el método de Galerkin estándar (formulación Bubnov-Galerkin), el cual es bastante eficiente para ecuaciones que poseen esta forma. Reescribiendo la ecuación general en el sistema de referencia móvil se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial x'_j} = Q \quad (7)$$

Pasando el término difusivo del lado derecho y aproximando el término de variación local por medio de diferencias en el tiempo, se puede escribir:

$$U^{(t+1)} - U^{(t)} = \alpha \Delta t \left[ \frac{\partial D}{\partial x'_j} + Q \right]^{(t+1)} + (1 - \alpha) \Delta t \left[ \frac{\partial D}{\partial x'_j} + Q \right]^{(t)} \quad (8)$$

En esta ecuación los términos del lado derecho han sido promediados en un paso de tiempo, con el valor del instante de tiempo actual,  $(t+1)$  y el instante anterior,  $(t)$ , a través de un cierto parámetro  $\alpha$  constante. Para todos los términos evaluados en el instante de tiempo  $(t)$ , se realiza una expansión en series atrasadas respecto de la variable espacial  $\delta = u_k \Delta t$ , a fin de incorporar los términos que están en la dirección característica del flujo corriente arriba al instante  $(t+1)$  (*upwind terms*), como se indica en la Figura 2.



**Figura 2.** Relación entre variables escalares  $\Phi$  en dos instantes consecutivos de tiempo y siguiendo la dirección característica del flujo

En el caso del término difusivo  $D$  y el término fuente  $Q$ , se realiza una expansión atrasada hasta el término de primer orden en  $\delta$ , ya que estos términos contienen entre otras, las derivadas de las variables primitivas: velocidad, presión y temperatura. En el caso del vector de variables conservativas,  $U$ , la expansión se realiza hasta el término de segundo orden en  $\delta$ . La expansión atrasada en el instante de tiempo  $(t)$ , se hace conforme a un desarrollo en series y para cualquier variable escalar en un dominio unidimensional, esta tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_{(x-\delta)}^{(t)} = & \phi_x^{(t)} - \left( \frac{\partial \phi^{(t)}}{\partial x'} \right) \delta + \left( \frac{1}{2!} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi^{(t)}}{\partial x'^2} \right) \delta^2 \\ & +, \dots, (\pm 1)^{(n)} \left( \frac{1}{n!} \right) \left( \frac{\partial^n \phi^{(t)}}{\partial x'^{(n)}} \right) \delta^n \end{aligned} \quad (9)$$

Estableciendo el valor del parámetro  $\alpha = 1/2$ , substituyendo las variables expandidas para el instante de tiempo  $(t)$  y agrupando convenientemente, se tiene para un espacio multidimensional:

$$\begin{aligned} \Delta U = & -\Delta t \left[ \tilde{u}_j^{(t)} \left( \frac{\partial U}{\partial x'_j} \right)^{(t)} - \left( \frac{\partial D}{\partial x'_j} + Q \right) \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[ u_j \frac{\partial U}{\partial x'_j} - \left( \frac{\partial D}{\partial x'_j} + Q \right) \right]^{(t)} \end{aligned} \quad (10)$$

En la ecuación (10) el símbolo supra tilde ( $\tilde{\cdot}$ ), utilizado en el primer corchete, denota en este caso una operación de promediado temporal. Para una variable escalar arbitraria esta promediación se define en la forma:  $\tilde{a} = (1/2)[a^{(t+1)} + a^{(t)}]$ . La formulación resultante es semi explícita debido a la presencia de los términos evaluados en el instante de tiempo  $(t+1)$  que aparecen en el primer corchete. Ya que estos términos contienen las derivadas de las variables primitivas expresadas de forma distinta al vector de incógnitas de variables conservativas  $U$ , se suele establecer una formulación totalmente explícita en tiempo (Zienkiewicz *et al.*; 2005, Chung, 2006), que es una forma particular de la ecuación (10). Por otro lado y para el segundo corchete, los términos que resultan de la derivación del vector de términos difusivos  $D$ , son de tercer orden,  $O(dx'^3)$ , de diferenciación y pueden ser despreciados en relación a los restantes términos de la ecuación.

Haciendo entonces todas estas consideraciones y aplicando (6), la ecuación simplificada de (9) tiene la forma final siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta U = & -\Delta t \left[ u_j \frac{\partial U}{\partial x'_j} - \left( \frac{\partial D}{\partial x'_j} + Q \right) \right]^{(t)} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[ u_j \frac{\partial U}{\partial x'_j} - Q \right]^{(t)} \end{aligned} \quad (11)$$

El penúltimo término en la ecuación (11) es un término de compensación y es similar a uno que se obtiene en formulaciones tipo up-wind cuando se aplica la técnica de Petrov-Galerkin.

A continuación se aplica una estrategia de paso de tiempo fraccionado que permite resolver las ecuaciones de momentum y continuidad de forma secuencial. Se emplea entonces en la ecuación de momentum un operador lineal, que separa los términos de velocidad y presión como sigue:

$$L[\Delta \rho u_i] = \Delta(\rho u_i)^* + \Delta(\rho u_i)^{**} \quad (12)$$

Partiendo desde un instante de tiempo:  $(t)$  y hasta el siguiente instante:  $(t+\Delta t)$ , se sigue la siguiente secuencia de cálculo:

**Paso 1:** Se resuelven de forma secuencial en cada una de las direcciones espaciales, las ecuaciones de momentum, suprimiendo los términos de presión, como sigue:

$$\Delta(\rho u_i)^* = \Delta t \left[ \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ijef}}{\partial x_j} - \rho g_i \right]^{(t)} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} - \rho g_i \right]^{(t)} \quad (13)$$

**Paso 2:** Se resuelve la presión por medio de la ecuación de continuidad como sigue:

El gradiente de la presión en la expresión:  $\Delta(\rho u_i)^{**}$  es promediado con el valor del paso anterior y el paso de tiempo actual, utilizando un cierto factor constante  $\theta_2$ :

$$p_i^{(t+\theta_2)} = (1 - \theta_2) p_i^{(t)} + \theta_2 p_i^{(t+1)} \quad (14)$$

o también:

$$p_i^{(t+\theta_2)} = p_i^{(t)} + \theta_2 \Delta p_i \quad (15)$$

resultando:

$$\Delta(\rho u_i)^{**} = \Delta t p_i^{(t+\theta_2)} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial p_i^{(t+\theta_2)}}{\partial x_k} \quad (16)$$

Este resultado es reemplazado en la ecuación de la continuidad expresada en función del incremento de la densidad o de la presión:

$$\Delta \rho = \frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \quad (17)$$

En el caso de flujo incompresible, es conveniente utilizar el cambio de presión en vez del cambio de densidad. A continuación se tratan las variables: de forma similar a como se hizo con el gradiente de presión y donde se utiliza un factor de ponderación  $\theta_j$ :

$$\rho u_i^{(t+\theta_1)} = \rho u_i^{(t)} + \theta_1 \Delta(\rho u_i) \quad (18)$$

luego:

$$\frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho u_i)^{(t)} + \theta_1 \Delta(\rho u_i)^* + \theta_1 \Delta(\rho u_i)^{**}] \quad (19)$$

Reemplazando las ecuaciones (15) y (16) en la ecuación (19) y despreciando los términos de orden de diferenciación superior a 2, se obtiene la siguiente ecuación para la diferencia de presión:

$$\frac{1}{c^2} \Delta p - (\Delta t)^2 \theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2} = -\Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\rho u_i) + \theta_1 \Delta(\rho u_i)^* - \theta_1 \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i} \right]^{(t)} \quad (20)$$

En el caso de flujo incompresible la ecuación produce una ecuación de tipo Poisson para la variable  $\Delta p$ :

$$\Delta t \theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\rho u_i) + \theta_1 \Delta(\rho u_i)^* - \theta_1 \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i} \right]^{(t)} \quad (21)$$

**Paso 3:** Finalmente se resuelve la ecuación que resulta para el término el cual se obtiene de la combinación de las ecuaciones (15) y (16):

$$\Delta(\rho u_i)^{**} = -\Delta \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{(t)} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{(t)} \quad (22)$$

al final de este paso, el campo de velocidades es actualizado de acuerdo a la ecuación (12) y se continua al próximo paso de tiempo. En el caso de flujos estacionarios, la convergencia monótona se logra luego de un determinado número de pasos de tiempo. En el caso de flujos no estacionarios, la convergencia no es monótona, sino que dependiendo de la situación física que se considere, se pueden obtener convergencias de tipo oscilante en torno a un cierto valor medio o respecto de alguna tendencia de comportamiento de la solución, cuya periodicidad dependerá de la dinámica del flujo relacionada con el fenómeno transitorio que tiene lugar, por ejemplo, aquel vinculado al tránsito de vórtices,

o la propagación de ondas de presión, los fenómenos de superficie libre, entre otros casos.

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

El método del Elemento Finito es aplicado para la solución espacial del vector de incógnitas  $U$ , en un instante de tiempo en particular. Las ecuaciones tratadas de forma numérica en el caso del flujo incompresible son: la ecuación (13), la ecuación (21) y la ecuación (22). La técnica de discretización conlleva a la aplicación de un método de ponderación a fin de reducir el error de discretización a cero en cada subdominio  $\Omega^e$ , o elemento finito de cálculo. En este caso puede ser usado sin problemas, el método de Bubnov-Galerkin en el cual las funciones de ponderación  $N_r$  son las mismas que aquellas,  $N_s$ , utilizadas para interpolar la variable de campo en un elemento. La solución presenta comportamiento convergente monótono u oscilante con un adecuado margen de error si el paso de tiempo seleccionado satisface los requerimientos mínimos establecidos por la velocidad y el tamaño de los elementos de la malla utilizada. Las ecuaciones de transporte discretizadas tienen entonces las formas que se muestran a continuación:

- Ecuación de momentum:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} N_r N_s d\Omega [\Delta(\rho u_i)^*]_s = & -\Delta t \left[ \int_{\Omega^e} N_r \hat{u}_j \frac{d\widehat{\rho u_l}}{dx_j} d\Omega \right]^{(t)} \\ & - \Delta t \left[ \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_r}{\partial x_j} \hat{\tau}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega^e} N_r \widehat{\rho g_l} d\Omega \right]^{(t)} \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \int_{\Omega^e} \hat{u}_k \frac{\partial N_r}{\partial x_k} \left( \hat{u}_j \frac{\partial \widehat{\rho u_l}}{\partial x_j} - \widehat{\rho g_l} \right) d\Omega \right]^{(t)} \\ & + \Delta t \left[ \int_{\Gamma^e} N_r \hat{\tau}_{ij} n_j d\Gamma \right]^{(t)} \end{aligned} \quad (23)$$

- Ecuación para la presión:

$$\begin{aligned} \Delta t \theta_1 \theta_2 \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_r}{\partial x_i} \frac{\partial N_s}{\partial x_i} d\Omega [\Delta p]_s = \\ - \int_{\Omega^e} N_r \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \widehat{\rho u_i} + \theta_1 \Delta(\widehat{\rho u_i})^* - \theta_1 \Delta t \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} \right]^{(t)} d\Omega \\ - \Delta t \theta_1 \theta_2 \int_{\Gamma^e} N_r \frac{\partial N_s}{\partial x_i} [\Delta p]_s n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

Término de corrección de la ecuación de momentum:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} N_r N_s d\Omega [\Delta(\rho u_i)^{**}]_s = \\ - \Delta t \int_{\Omega^e} N_r \left[ \left( \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_l} \right)^{(t)} + \theta_2 \frac{\partial \Delta \widehat{p}}{\partial x_l} \right] d\Omega \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega^e} \hat{u}_k \frac{\partial N_r}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_l} \right)^{(t)} d\Omega \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma^e} \hat{u}_k N_r \left( \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_l} \right)^{(t)} n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

En estas ecuaciones los subíndices  $r$  y  $s$  denotan a los nodos que corresponden a un elemento finito. El supra símbolo sombrero utilizado en los términos que se encuentran a mano derecha, denota una operación de ponderación espacial efectuada en el elemento. La notación sub indicial,  $_{ij}$  usada en la ecuación (23), denota al tensor de esfuerzos efectivos que resulta de la suma de los esfuerzos viscosos y turbulentos. En cada una de las ecuaciones, los términos de segundo orden de diferenciación fueron integrados por partes y en las ecuaciones correspondientes a la presión y el término de corrección de momentum, las contribuciones de estos términos fueron despreciadas en los contornos del dominio de cálculo.

El paso de tiempo fue calculado de forma local por elemento de acuerdo a la siguiente expresión (Zienkiewicz *et al.* 2005):

$$\Delta t^e \leq \frac{\Delta t_u^e \Delta t_v^e}{\Delta t_u^e + \Delta t_v^e} \quad (26)$$

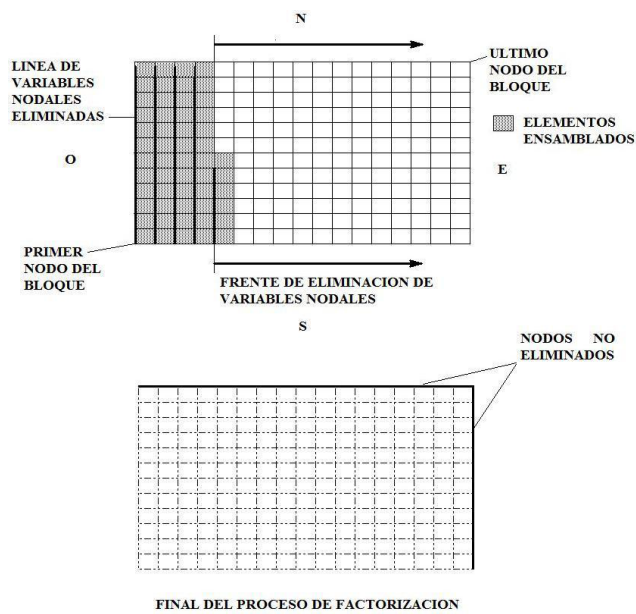
Siendo  $\Delta t_u^e$  el paso de tiempo característico de la convección y  $\Delta t_v^e$ , el paso de tiempo característico de la difusión, imponiéndose para toda la malla en un paso de tiempo en particular, el valor mínimo, escogido entre el valor mínimo local y un cierto valor de referencia suficientemente pequeño, escogido de forma arbitraria:

$$\Delta t = \min(\Delta t_{\min}^e, \Delta t_{ref}^e) \quad (27)$$

A excepción de la ecuación de la presión, el término a la izquierda de las ecuaciones de momentum y de corrección de momentum, corresponde a una matriz de masa, la cual es también característica en problemas de vibraciones mecánicas. En tales problemas los modos de vibración son conseguidos por medio de la solución de una matriz de autovalores y se suelen utilizar técnicas de aglutinamiento (lumped) que consisten en transformar la matriz de masa en una matriz diagonal, lo cual conlleva a soluciones inmediatas. La aplicación de la técnica de aglutinamiento en problemas dependientes del tiempo en mecánica de fluidos, conduce a soluciones correctas cuando se aplica algún tipo de estrategia iterativa correctiva. Esta técnica es aplicable en problemas de flujo compresible donde en vez de la presión, se resuelve la densidad, apareciendo para este caso una vez más, la matriz de masa.

Aunque la técnica de aglutinamiento ha sido incorporada en el código. En este trabajo se optó por resolver las matrices de masa de forma consistente (no aglutinada), lo cual es más robusto del punto de vista numérico, al evitar la propagación de errores en cada paso de tiempo

que pudieran resultar de la aplicación de alguna técnica iterativa. A tal fin se desarrolló y fue puesta a punto una técnica de solución de ecuaciones simultáneas basada en un procedimiento de factorización eficiente, el cual es una adaptación del método frontal (Taylor & Hughes, 1981). De acuerdo con esta técnica, las ecuaciones concernientes a un nodo son eliminadas de la matriz una vez que todos los elementos relacionados con dicho nodo han dado su contribución, reduciéndose considerablemente de esta forma el almacenamiento en memoria. Esta técnica fue adaptada para el tratamiento de mallas multi bloques como se indica en la Figura 3 y una explicación más detallada del proceso de factorización será dado en la parte 2 de este trabajo.



**Figura 3.** Proceso de eliminación de variables nodales en un bloque estructurado aplicando el método Frontal

Para el cálculo del error fue utilizada para todas las incógnitas, la norma  $L_2$  del error relativo (Zienkiewicz *et al.* 2005), la cual es definida como sigue:

$$error_{relativo} = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{(|U|^{(t+1)} - |U|^{(t)})^2}}{\sum_{i=1}^N \sqrt{(|U|^{(t+1)})^2}} \quad (28)$$

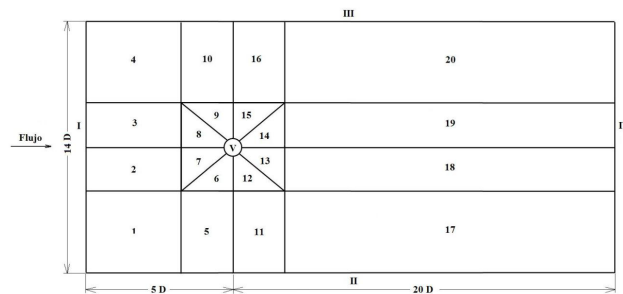
siendo N el número total de nodos de la malla.

## CASO DE APLICACIÓN

El método desarrollado se aplicó para resolver el flujo turbulento, incompresible e isotérmico 2D, transversal un cilindro circular. En este tipo de geometría, los efectos convectivos y transitorios del flujo son importantes detrás del cilindro, donde se producen inestabilidades que

conducen a la formación de vórtices contra rotativos los cuales pudieran desprenderse de forma alternante. En el caso de desprendimiento alterno de vórtices se denomina a esta inestabilidad de tipo von Kármán (Schlichting & Gersten, 2000). Para el caso del cilindro, existen suficientes datos experimentales donde se indican los valores del coeficiente de arrastre a diferentes números de Reynolds, basado en el diámetro del cilindro,  $Re_D$ . Todas éstas fueron las razones que se tomaron en cuenta a la hora de seleccionar un caso de prueba.

La geometría utilizada para el cálculo del flujo es indicada en la Figura 4. El dominio fue dividido inicialmente en 20 bloques en conexión estructurada donde el número de elementos en las fronteras comunes entre bloques es el mismo. El tipo de elementos finitos seleccionados para todos los bloques fue el de ocho nodos (bi-cuadrático), el cual ha sido utilizado tradicionalmente en el tratamiento de problemas de convección-difusión cuando la técnica del elemento finito ha sido aplicada.



**Figura 4.** Distribución de bloques 2D en conexión estructurada alrededor del cilindro

Las condiciones de contorno fueron impuestas como sigue: en el contorno (I) que corresponde a la entrada del dominio se impuso una condición de flujo uniforme, en los contornos laterales (II) y (III) se impuso una condición de simetría del flujo que consistió en la imposición de un flujo normal nulo a través de tales fronteras ( $u_n = 0$ ). En el contorno (IV) que está alejado del cilindro y donde se espera que los cambios de presión no sean significativos en relación con lo que ocurre en las inmediaciones del cilindro, se impuso una distribución uniforme de presión. Esta condición de contorno, sin embargo, pudiera tener efectos sobre la estela que se produce detrás del cilindro, por lo que habría que estudiar cuál es la distancia conveniente a la que se pudiera establecer una condición de presión que se aproxima a la condición de uniformidad. Tal estudio no fue realizado en este trabajo. Finalmente, en el contorno (V) se impuso la condición de no deslizamiento del flujo sobre el cilindro. Estas condiciones conocidas también como condiciones de Dirichlet, fueron mantenidas fijas en el tiempo. En el caso de las condiciones de contorno naturales que derivan del



proceso de integración por parte, cuando se aplica la técnica del elemento finito, éstas son variables y son calculadas en cada instante de tiempo en las fronteras del dominio de cálculo.

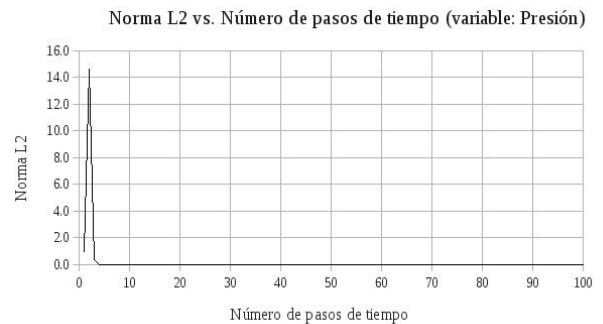
## RESULTADOS

Para la obtención de la solución, se utilizó una condición semilla tanto en el campo de velocidades como para el campo de presión, que corresponde a la del flujo uniforme, salvo en los contornos del dominio, donde se impusieron en todo tiempo, las condiciones de Dirichlet previamente discutidas. La condición semilla no necesariamente satisface en principio a las ecuaciones diferenciales que rigen el flujo con la geometría dada, pero sirve para establecer sobre todo, la direccionalidad del flujo en el dominio. La convergencia de la solución se obtiene al cabo de un número de pasos de tiempo determinados y es monitorizada por el comportamiento del error relativo que permite determinar a partir de qué instante de cálculo la solución satisface las ecuaciones de campo y si se obtiene una solución de tipo monótona o periódica. El primer caso estudiado, correspondió a uno donde  $Re_D = 1,4 \times 10^5$ . Para este caso existe particularmente un estudio numérico previo (Breuer, 2000), llevado a cabo mediante el método del Volumen Finito, donde se estudian dos versiones del modelo de grandes vórtices: el tradicional modelo de Smagorinsky con función de tratamiento parietal de Van Driest y el modelo de grandes vórtices dinámico basado en las ideas de Germano (1991) y Lilly (1992). También en ese trabajo se muestran las comparaciones entre los resultados numéricos y los datos experimentales que se registraron en el trabajo de Cantwell & Coles, 1983. Según el valor  $Re_D$  establecido, se impuso un campo de velocidades uniforme de  $7m/s$ . Durante los cálculos efectuados, el incremento de tiempo fue mantenido constante e igual al valor  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$  s con el cual se obtuvo un comportamiento estable en el cálculo que conllevó a la convergencia numérica. El número de pasos de tiempo empleados a tal fin fue de 50000 con lo cual se alcanzó a simular un tiempo real de  $0,5s$  y se obtuvo una solución cuyo comportamiento fue definitivamente periódico. La gráfica de la Figura 5 muestra la distribución de la norma de error  $L_2$  para la presión. Se aprecia que al cabo de 100 pasos de tiempo la norma del error se reduce prácticamente a cero.

Las Figuras 6, 6.a y 7, muestran el comportamiento de la norma de error  $L_2$  para las dos componentes cartesianas de la velocidad,  $u_x$  y  $u_y$ . En estas gráficas se aprecia de manera mucho más marcada que para el caso de la presión, la existencia de dos patrones de flujo. El primero correspondiente a una situación de flujo cuasi estacionario.

Este patrón ha sido denotado como zona A en la Figura 6.a. Dicho patrón de flujo está caracterizado por la formación de estructuras de vórtices completamente simétricas respecto del eje  $x$ , donde destacan dos vórtices simétricos contra rotativos cuyos tamaños son cercanos al del cilindro y son prácticamente tangentes al eje  $x$ . Estos vórtices comienzan a crecer simultáneamente y al cabo de un determinado número de pasos de tiempo de aproximadamente 5000 pasos, alcanzan una condición de inestabilidad caracterizada por movimientos alternados de avance y retracción, hasta que finalmente uno de los vórtices se desprende completamente. Este comportamiento es lo que ha sido señalado en la Figura 6.a como zona B y representa una zona de transición de corta duración hacia un nuevo tipo de régimen (zona C). Luego de la transición comienza un proceso de desprendimiento periódico de vórtices, inferior y superior, conllevando a la formación de una estela cuya estructura es sinuosa, la cual perdura hasta la salida del dominio. Esta situación se refleja también en las gráficas del coeficiente de arrastre.

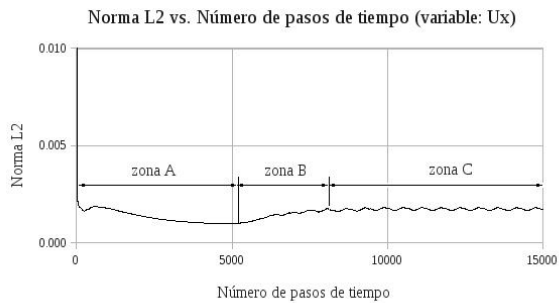
La Figura 8 muestra el comportamiento del coeficiente de arrastre total  $C_D$  debido a la distribución de la presión y el esfuerzo cortante sobre el cilindro. Este coeficiente fue obtenido cada 100 pasos de tiempo, mediante el programa de cálculo principal el cual posee un módulo adecuado para la integración del esfuerzo total sobre contornos sólidos. Se aprecia que durante la etapa de desprendimiento de vórtices, los valores obtenidos oscilan de forma periódica



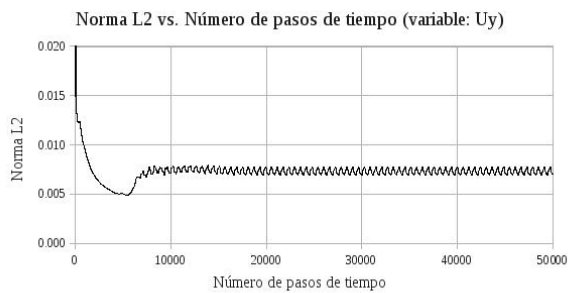
**Figura 5.** Variación de la norma  $L_2$  para la variable presión.  $Re_D = 1,4 \times 10^5$



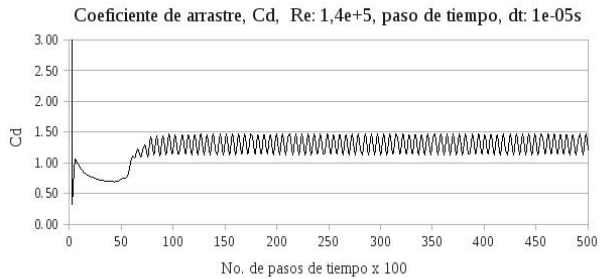
**Figura 6.** Variación de la norma  $L_2$  para la variable  $u_x$ .  $Re_D = 1,4 \times 10^5$



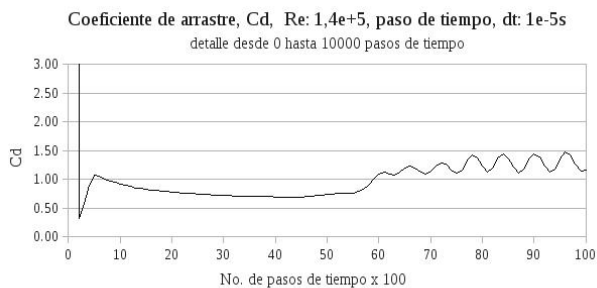
**Figura 6.a.** Detalle de la variación de la norma  $L_2$  para la variable  $u_x$ .  $Re_D = 1,4 \times 10^5$



**Figura 7.** Variación de la norma  $L_2$  para la variable  $u_y$ .  $Re_D = 1,4 \times 10^5$

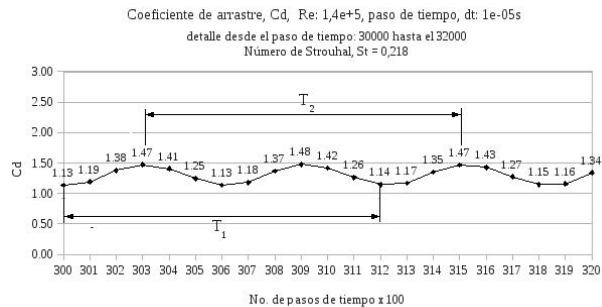


**Figura 8.** Variación del coeficiente de arrastre,  $C_D$ .  $Re_D = 1,4 \times 10^5$



**Figura 8.a.** Detalle del comportamiento del coeficiente de arrastre  $C_D$ .  $Re_D = 1,4 \times 10^5$

y se pudiera estimar un valor medio correspondiente a  $CD = 1,305$ . La Figura 8.a muestra el comportamiento del coeficiente de arrastre desde el inicio del cálculo y hasta el paso de tiempo 10000, que permite ilustrar las tres zonas antes referidas que están en concordancia con la norma de error  $L_2$  para las componentes de la velocidad. La Figura 8.b



**Figura 8.b.** Detalle del comportamiento del coeficiente de arrastre  $C_D$ .  $Re_D = 1,4 \times 10^5$  con el propósito de evaluar el número de Strouhal

detalla el comportamiento del coeficiente de arrastre entre los pasos de tiempo 30000 y hasta el 32000, tomados en la zona de desprendimiento periódico de vórtices y luego que se ha alcanzado la condición estabilizada de desprendimiento. Mediante esta gráfica se pudo estimar el valor del número de Strouhal,  $St = fD/U_\infty$ ,  $St = 0,218$ , siendo  $f$ , la frecuencia de desprendimiento y donde los períodos señalados como  $T_1$  y  $T_2$  en la Figura 8.b, corresponden al tránsito secuencial y alterno de un par de vórtices contra rotativos. En este caso y de acuerdo a la Figura 8.b, los dos períodos señalados tienen un valor de  $0,013s$ , por lo que la frecuencia de oscilación correspondiente al tránsito de dos vórtices contrarrotatorios es de aproximadamente  $77Hz$ . Esta es la frecuencia de vibración transmitida por el flujo al cilindro. El número de Strouhal es un parámetro significativo que caracteriza la dinámica de los flujos periódicos y para el caso del cilindro, el valor encontrado corresponde con el reportado en la literatura para este número de Reynolds y también con el que fue calculado en el trabajo de Breuer (2000).

En la Figuras 9 y 9.a, se muestran las distribuciones de las componentes dimensionales de la velocidad  $u_x$  y  $u_y$ , a una distancia  $x/D=1$ . Para éstas gráficas y las que siguen, se utilizaron dos mallas: una de 6960 nodos y 1996 elementos, denominada malla 1 y otra de 17696 nodos y 5372 elementos, denominada malla 2. Sólo se emplearon estas mallas debido a las limitaciones de tiempo que implicó el cálculo llevado a cabo usando sólo un procesador por máquina y no las bondades del procesamiento en paralelo.

Los valores graficados fueron calculados mediante un

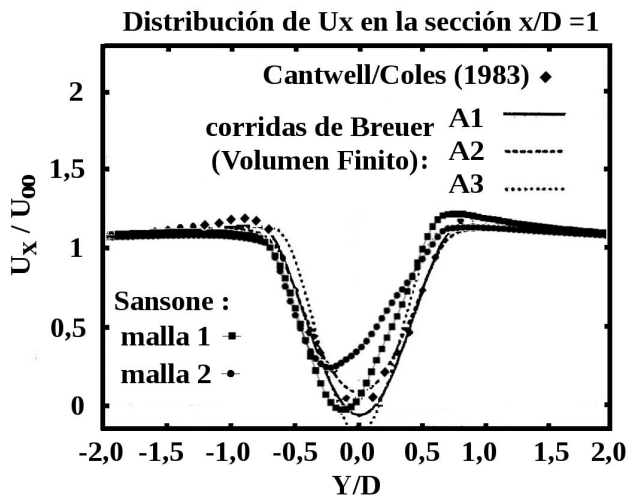


Figura 9. Distribución de la componente  $u_x$  adimensional para el plano  $x/D = 1$

módulo de post procesamiento acoplado al código principal y corresponden a una promediación simple, tomando los últimos 100 pasos de tiempo computacional luego de haberse alcanzado la estabilización del comportamiento periódico, según fue ilustrado en las Figuras 6 y 7.

Los resultados obtenidos son comparados con el trabajo de Breuer (2000), para el número de Reynolds  $Re=1,4 \times 10^5$ . En el trabajo de Breuer, se realizó un cálculo numérico exhaustivo utilizando diversos tipos de mallas estructuradas multi bloques, con distintos números de elementos, así como diversos esquemas de tratamiento parietal de la turbulencia, que no fueron utilizados en este trabajo, ya que se lograron convergencias aceptables y el objetivo fundamental fue el de validar el comportamiento global del código computacional desarrollado.

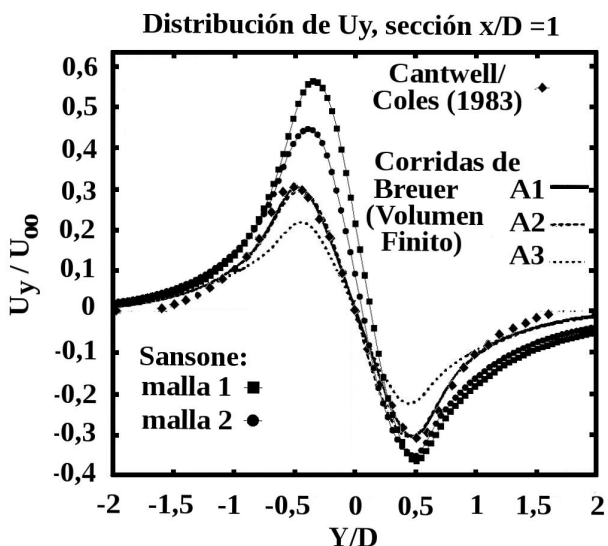


Figura 9.a. Distribución de la componente  $u_y$  adimensional para el plano  $x/D = 1$

En la Figura 9, se aprecia en comparación con los resultados experimentales y el código computacional utilizado por Breuer, que el código computacional desarrollado para este trabajo reporta una tendencia de comportamiento bastante similar a la obtenida por Breuer, habiendo buena concordancia cuando fue aplicada la malla 1, siendo los valores obtenidos cercanos a los casos: A1, A2 y A3 estudiados en ese trabajo. Para la malla 2 no se aprecia una buena concordancia ni con los datos experimentales ni con los cálculos realizados por Breuer, aunque la tendencia de la curva obtenida fue similar. En el caso de componente  $u_y$ , (Figura 9.a), se aprecia que existe concordancia en cuanto a los signos obtenidos para esta componente a lo largo de todo el eje  $y$ , lo cual implica que el sentido de rotación de los vórtices contra rotativos obtenido es el que corresponde a la realidad, según lo reportado en el trabajo experimental de Cantwell & Coles (1983). También se aprecia una buena concordancia en cuanto a la tendencia de las curvas conseguidas. Sin embargo, se nota una asimetría en cuanto a los picos de velocidad conseguidos para las dos mallas consideradas, habiendo mayor discrepancia para los picos de velocidad que se alojan en la zona negativa del eje  $y$ , mientras que para los valores positivos, existe un mejor acuerdo con los diversos datos presentados. Esto indicaría que el vórtice que se genera desde el cilindro en la rama negativa del eje  $y$ , se mueve transversalmente más rápido que aquel que proviene de la rama positiva. A diferencia de lo ocurrido con la componente  $u_x$ , la sobre estimación de los valores de  $u_y$ , mejoró en este caso cuando se utilizó la malla 2.

En la Figura 10 se muestra la distribución de la componente  $u_x$  adimensional para la sección  $x/D=3$ . Se aprecia que la mejor aproximación tanto en el comportamiento como a los volares reportados en el trabajo de Breuer, se obtuvo cuando se utilizó la malla 2. Es de notar que el defecto del perfil de velocidad corriente abajo de un cilindro tiende a difundirse en la estela y es cada vez menor en la medida que se toman secciones transversales cada vez más alejadas corriente abajo del obstáculo. Esta situación es bien captada por el código computacional desarrollado y en comparación al trabajo de Breuer.

En la Figura 11 se ilustra el comportamiento de la componente  $u_x$  adimensional a lo largo del eje  $x$ , corriente abajo del cilindro y en la zona donde ocurre el tránsito de vórtices. Como en los dos casos previos, se aprecia, en comparación con el trabajo de Breuer, buena concordancia en cuanto a la tendencia espacial seguida por la solución obtenida a través del código desarrollado. Se nota, sin embargo, una sobre estimación de los valores de  $u_x$ , a partir del valor  $x/D=1$ , para la malla 1 y una oscilación espacial

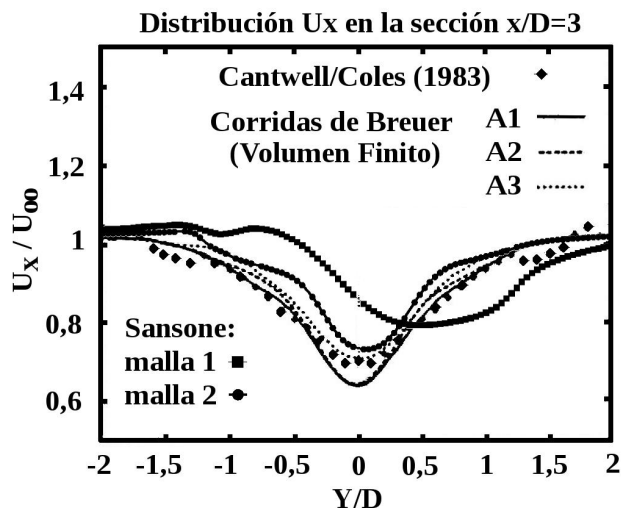


Figura 10. Distribución de la componente  $u_x$  adimensional para el plano,  $x/D = 3$

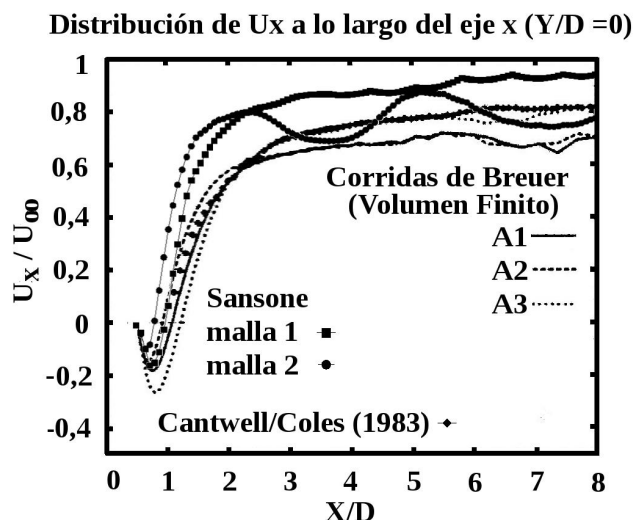


Figura 11. Distribución de la componente  $u_x$  adimensional a lo largo del eje  $x$ ,  $y/D = 0$

del perfil de  $u_x$ , en el caso de utilización de la malla 2, aunque en el caso de utilización de esta malla, los valores tienden a acercarse a los registrados por Breuer (2000).

En la Figura 12 se muestran los resultados obtenidos para los coeficientes de arrastre globales, utilizando tres valores distintos del número de Reynolds. Los valores calculados son comparados con los datos experimentales tomados del trabajo de Achenbach (1971) y son indicados también en la Tabla 1. Los resultados mostrados corresponden a la malla 1. Un valor similar fue conseguido con la malla 2 para el valor  $Re_D = 1,4 \times 10^5$ . En el caso en el que  $Re_D = 2 \times 10^3$ , no se empleó ningún modelo de turbulencia en los cálculos y se obtuvo la convergencia hacia un valor periódico estacionario utilizando un paso de tiempo constante  $\Delta t = 1 \times 10^{-4} s$ .

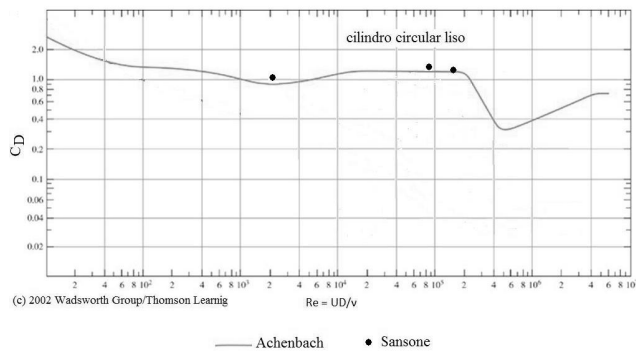


Figura 12. Resultados numéricos para el coeficiente de arrastre  $C_D$  en comparación con el trabajo experimental de Achenbach (1971)

Tabla 1. Comparación entre los valores del coeficiente de arrastre  $C_D$ , numéricos y experimentales para tres números de Reynolds  $Re_D$ .

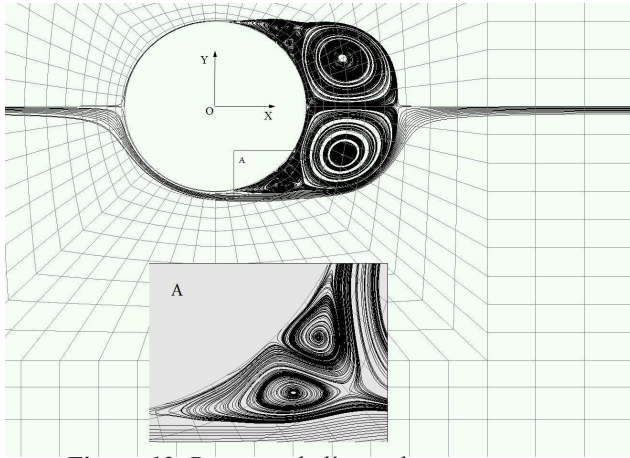
$Re_D$	$C_D$ (Sansone)	$C_D$ (Achenbach)
$2 \times 10^3$	1.02	0,9
$8 \times 10^4$	1.32	1,2
$1,4 \times 10^5$	1.305	1,2

Según lo reportado en la literatura, a bajo número de Reynolds la porción de flujo circundante al cilindro presenta características de laminaridad importante, por lo que efectivamente no sería necesaria la incorporación de modelos de turbulencia en tales situaciones. En los casos que fue necesario realizar un cálculo con turbulencia, se utilizó el modelo de Smagorinsky en su versión simple, apreciándose una convergencia numérica aceptable en relación a los valores experimentales. El valor del coeficiente del modelo fue mantenido constante e igual a  $0,1$  en todos los casos en que éste fue utilizado.

Para los cálculos realizados, los parámetros del esquema numérico  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que aparecen como consecuencia de la metodología utilizada, fueron tomados iguales a 1. sin variación.

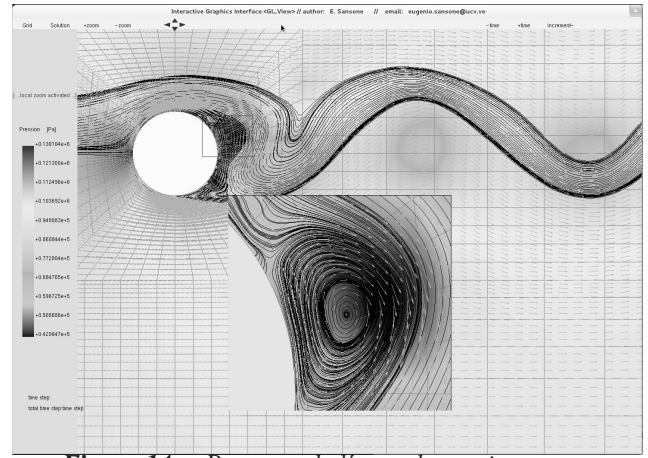
Con el propósito de visualización de la estructura del flujo, se muestran a continuación algunos patrones de líneas de corriente instantáneas. En la Figura 13 se muestra para el caso  $Re_D = 1,4 \times 10^5$ , el patrón de líneas de corriente en el instante  $t = 0,00438 s$  correspondiente al paso de tiempo 438 situado en la zona de flujo no oscilante (zona A) conforme a las gráficas previamente mostradas. En este caso los vórtices principales corriente abajo del cilindro, son simétricos y contra rotativos y sus diámetros son cercanos al del cilindro. Se aprecia también la aparición de un conjunto de cuatro vórtices adicionales más pequeños apareados en dos vórtices que rotan en el mismo sentido, dispuestos en la

mitad superior e inferior del cilindro respectivamente. Estas estructuras resultan completamente simétricas respecto del eje principal del flujo (eje x).

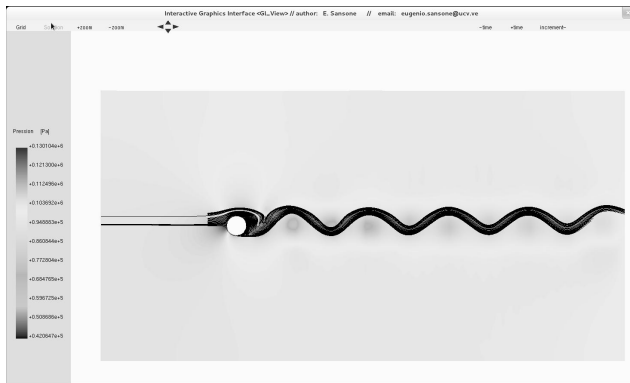


**Figura 13.** Patrones de líneas de corriente para  $t = 0,00438s$ ,  $Re_D = 1,4 \times 10^5$

de presión absoluta. Se aprecia que en las zonas de fuerte recirculación la presión cae por debajo del valor nominal debido a un proceso de transformación de energía de presión en energía cinética.



**Figura 14.a.** Patrones de líneas de corriente para  $t = 0,5s$ ,  $Re_D = 1,4 \times 10^5$ .Detalle cerca del cilindro



**Figura 14.** Patrones de líneas de corriente para  $t = 0,5s$ ,  $Re_D = 1,4 \times 10^5$

En las Figuras 14 y 14.a, es mostrada para el valor  $Re_D = 1,4 \times 10^5$ , la estructura del flujo al cabo de  $t = 0,5s$  correspondiente al paso de tiempo 50000 que se sitúa de acuerdo a la gráfica del coeficiente de arrastre, más allá de la zona de transición de régimen de flujo (zona C). Las líneas de corriente muestran un comportamiento sinuoso de la estela del flujo, el cual es debido al tránsito de vórtices que se desprenden continuamente y de forma alternada tanto de la mitad superior ( $y > 0$ ) como de la mitad inferior ( $y < 0$ ) del cilindro. En la zona cercana al cilindro, se ha detallado de mejor forma la estructura del flujo donde se aprecia la complejidad del patrón instantáneo de líneas de corriente, caracterizado por vórtices de distintos tamaños interactuando con el vórtice principal de tamaño próximo al del cilindro. Estas estructuras que se forman en cada una de las mitades del cilindro son completamente asimétricas. También se ilustra el campo de velocidades que permite visualizar el sentido de rotación de los vórtices y el campo

## CONCLUSIÓN

Fue desarrollado un código computacional Navier-Stokes para la simulación de vórtices grandes (tipo LES: *large eddy simulation*) que permite obtener la solución y post procesamiento del campo de variables filtradas del flujo turbulento de un fluido monofásico mediante el método del Elemento Finito, siguiendo un procedimiento basado en trayectorias características adaptado a mallas multi bloques.

El procedimiento adoptado fue aplicado para conseguir la solución numérica para tres valores del número de Reynolds en un caso de flujo complejo como lo es el del flujo bidimensional, incompresible e isotérmico transversal a un cilindro circular, siendo apreciado que los tres valores del coeficiente de arrastre conseguidos fueron posicionados bastante cerca respecto de los datos experimentales, siguiendo la tendencia reportada en el trabajo experimental de Achenbach (1971).

En los casos donde fue utilizado el modelo de turbulencia, la solución obtenida fue satisfactoria y debe ser estudiada en profundidad la influencia de la malla y el empleo de funciones de tratamiento de la turbulencia parietal, como la reportada en el trabajo de Breuer (2000). En el caso particular de las dos mallas empleadas, todo parece indicar que las características del flujo tienden a mejorar en la medida de que la malla utilizada es más densa, sin embargo, esto no es cierto en todos los casos, como fue apreciado en la distribución de la componente de velocidad  $u_x$ , para la sección  $x/D = 1$ , donde se obtuvieron mejores resultados

con la malla más gruesa y esto concordaría también con lo reportado en trabajo de Breuer (2000), donde el autor expresa en su conclusión, el haber obtenido resultados incluso adversos cuando se utilizaron mallas más finas.

El desarrollo de un código académico de esta naturaleza es de todo punto de vista ventajoso al permitir adquirir un importante conocimiento computacional, no requerir de paquetes comerciales cuyas licencias deben ser actualizadas con periodicidad y disponer de una herramienta 100% abierta que permite la interacción y modificación continua por parte del investigador con adecuado conocimiento en el campo computacional y académico.

## REFERENCIAS

- ACHENBACH, E. (1971). Influence of surface roughness on the cross-flow around a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics.*, (46);pp. 321-335.
- BREUER, M. (2000). A Challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, (21); pp. 648-654.
- CANTWELL, B. & COLES, D. (1983). An experimental study on entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, (136); pp. 321-374.
- CHUNG, T. J. (2006). *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P., CABOT, W. H. (1991). A dynamic subgrid scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A* 3(7); pp. 1760-1765.
- HUEBNER, K. H., DEWHIRST, D. I., SMITH, D. E., BYROM, T. G. (2001). *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons, INC, 4th edition, New York
- LESIEUR, M., METAIS, O., COMPTE, P. (2005). *Large Eddy Simulations of Turbulence*, Cambridge University Press, 1th edition.
- LILLY, D. K. (1992). A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A* 4(3); pp. 633-635.
- NITHIARASU, P. (2003). An efficient artificial compressibility (ac) scheme based on the characteristic based split (cbs) method for incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (56): 1815-1845.
- NITHIARASU, P., MATHUR, J. S., WEATHERILL, N. P., MORGAN, K. (2004). Three-dimensional incompressible flow calculations using the characteristic based split (cbs) scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (44); pp. 1207-1229.
- SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. (2000). *Boundary Layer Theory*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 8th edition, Germany.
- SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weath Rev*, (3): 99-164.
- TAYLOR, C. & HUGHES, T.G. (1981). *Finite element programming of the Navier-Stokes equations*. Pineridge Press Ltd, 1th edition, Swansea, U.K.
- ZIENKIEWICZ, R. L., TAYLOR, R.L., NITHIARASU, P. (2005). *The Finite Element Method for Fluid Dynamic*. Elsevier, Butterworth Heinemann, 6th edition. Amsterdam.