

## FÓRMULA EFICIENTE Y COMPACTA PARA UN ELEMENTO DE CONTORNO CUADRÁTICO PARA ELASTICIDAD EN 2D

MAIRA VALERA<sup>1</sup>, LIBER VIDELA<sup>2</sup>, MIGUEL CERROLAZA<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. Email: maira.valera@ciens.ucv.ve

<sup>2</sup>Instituto de Materiales y Modelos Estructurales, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela. Email: liber.videla@ucv.ve

<sup>3</sup>Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela. Email: miguel.cerrolaza@inabio.edu.ve

<sup>4</sup>Center for Numerical Methods in Engineering CIMNE, Politec. Univ. of Barcelona, Spain.

Recibido: noviembre 2011

Recibido en forma final revisado: octubre 2012

### RESUMEN

En este trabajo se obtienen las fórmulas cerradas (exactas) para las matrices de influencia de los elementos de contorno en elasticidad plana. Las fórmulas son simples y eficientes, generando un ahorro sustancial de tiempo de ejecución computacional cuando se comparan con los métodos de integración numérica. Se obtuvieron las fórmulas mediante la manipulación simbólica de las ecuaciones integrales y soluciones fundamentales a partir del uso de Sistemas de Álgebra Computacional (SAC), seguido de un post-procesamiento de las expresiones generadas. Las fórmulas son adecuadas para la evaluación de integrales cuasi-singulares (punto de colocación muy cercano al elemento de integración) y la evaluación de integrales singulares (punto de colocación sobre el elemento de integración). Adicionalmente, se discute un ejemplo donde se aplica lo desarrollado en este trabajo.

*Palabras clave:* Elementos de contorno, Integración analítica, Elasticidad plana.

### EFFICIENT AND COMPACT CLOSED FORMULAE FOR 2D-ELASTICITY QUADRATIC BOUNDARY ELEMENTS

#### ABSTRACT

Closed (exact) formulae for the stiffness matrices of 2D-elasticity boundary elements are obtained in this work. The formulae are simple and efficient, generating substantially savings of CPU time when comparing with numerical integration approaches. The formulae were obtained by symbolic manipulation of the integral equations and fundamental solutions, by using Computer Algebra Systems (CAS), followed by a post-processing of the generated expressions. The formulae are suitable to the evaluation of nearly-singular integrals (source point very close to the integration element) and to the evaluation of singular integrals (source point belongs to the integration element). An application example is discussed.

*Keywords:* Boundary element, Analytical integration, Plane elasticity.

#### INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos de Contorno (MEC), también conocido como Método de Elementos de Frontera o Método de Elementos de Borde (BEM, por Boundary Element Method) es un método numérico para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales que han sido formuladas como ecuaciones integrales (en forma de integral sobre la frontera). Puede ser usado en muchas áreas de la ingeniería y ciencias incluyendo mecánica de fluidos, acústica, electromagnetismo y mecánica de la fractura. El MEC es, en ocasiones, más eficiente que otros métodos, incluyendo elementos finitos, en términos de recursos computacionales.

Conceptualmente, trabaja construyendo una “malla” sobre la superficie modelada.

Existen dos temas de mayor preocupación cuando se utiliza el MEC: exactitud y velocidad. Es bien sabido que las integrales singulares o cuasi-singulares que se presentan en el MEC pueden dar resultados inexactos, incluso en el caso en que se utiliza un gran número de puntos de integración (grandes órdenes de cuadratura). Las integrales son singulares cuando el punto de origen (punto de colocación) pertenece al elemento de integración y cuasi-singulares cuando el punto de origen no pertenece al elemento, pero está muy cerca del mismo. En los casos donde el punto

de origen está cerca del elemento, se obtienen resultados inexactos al utilizarse integración numérica. El punto de colocación puede estar muy cerca de los elementos de contorno, debido a varias razones:

- Cuando las variables internas deben ser calculadas en las regiones cercanas a la frontera, tanto en problemas lineales como en no lineales.
- Cuando se trata de dominios mal condicionados (cuerpos estrechos y delgados).
- Cuando se presentan diferentes densidades en la discretización de la malla muy cerca entre sí.

Por otro lado, cuándo se utiliza la integración numérica, el usuario debe definir grandes órdenes de cuadraturas de Gauss para obtener resultados razonables. Esto implica largos tiempos de ejecución computacional. En un problema práctico de ingeniería discretizado con doscientos mil elementos de contorno, la necesidad de reducir el tiempo de ejecución computacional se convierte en algo necesario.

Durante las dos últimas décadas, muchos investigadores han dedicado tiempo y esfuerzo para obtener expresiones analíticas o semi-analíticas de las integrales de MEC. Tang & Fenner (2005) presentan la integración analítica de elementos en dos dimensiones de forma recta y cuadrática. Katz (1985) integra funciones isoparamétricas de forma analítica para el problema de teoría del potencial bidimensional, mientras que Singh & Tanaka (2000) realizan integración analítica de integrales débiles en teoría de potencial (de la ecuación de Helmholtz y las ecuaciones de advección-difusión) utilizando elementos lineales y las funciones de Bessel. Recientemente, Gahdimi et al. (2010) presentan la integración analítica para elementos constantes y lineales con el fin de resolver la ecuación de Poisson.

Salvadori & Temponi (2010) se centraron en el MEC para ecuaciones integrales en tres dimensiones, proporcionando integrales de Lebesgue de forma cerrada. Además, Salvadori (2002) presenta las formas cerradas de las integrales en elasticidad bidimensional. Niu et al. (2005) utilizan la integración semi-analítico para integrales cuasi-singulares obteniendo resultados interesantes. Padhi et al. (2001) presentan una metodología basada en la representación en las series de las soluciones fundamentales para la integración analítica de elementos de contorno cuadráticos. Adicionalmente, Huanlin et al. (2008) han estudiado problemas anisotrópicos en problemas de potenciales en MEC y desarrolla las integrales cerradas para tratar el efecto de la capa límite.

Los autores del presente artículo, han empleado con

éxito las estrategias de integración de análisis, basadas en la manipulación simbólica y SAC, para obtener las formas cerradas de las matrices de rigidez en el Método de Elementos Finitos (Videla et al. 1996; 2007). Ahora, algunos de estas metodologías se utilizan para integrar analíticamente las integrales singulares y cuasi-singulares que aparecen en el MEC. Por lo tanto, este trabajo propone las formas cerradas de las integrales singulares que surgen en MEC. Las fórmulas son bastante compactas, simples y eficientes, como se puede observar al comparar los tiempos de ejecución computacional que se obtienen al realizar integración numérica contra los tiempos de ejecución obtenidos al integrar analíticamente.

## MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO CLÁSICO

El Método de Elementos de Contorno (MEC) es una técnica eficaz de análisis numérico para resolver problemas de elasticidad y muchos otros problemas de la ingeniería y ciencias aplicadas (Brebbia & Domínguez, 1998; Beer et al. 2008; Brebbia et al. 1984; Kane, 1994). Sólo se discretiza la frontera, y tanto los desplazamientos como las tensiones son interpolados sobre los elementos. A continuación se introduce un breve resumen de la formulación para el MEC, con el fin de comprender la estructura de las fórmulas y la manera cómo puede ser manipulado previo a la integración analítica.

La formulación de la integral en elasticidad plana está dada por la identidad de Somigliana, la cual representa una integral de frontera en función de los desplazamientos en el interior del dominio  $\Omega$  (Figura 1), (Beer et al. 2008; Brebbia & Domínguez, 1998), como se muestra en la siguiente expresión:

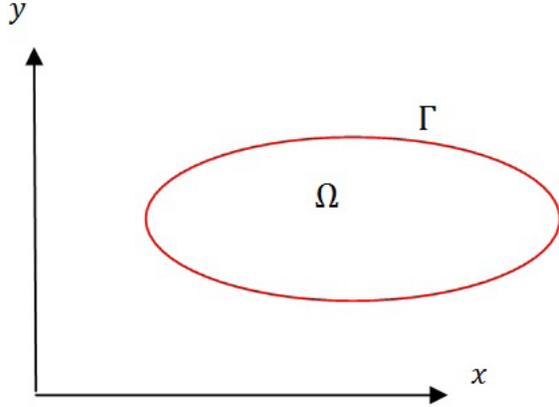
$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, \vec{x}) t_j(\vec{x}) - t_{ij}^*(\xi, \vec{x}) u_j(\vec{x})] d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, \vec{x}) f_j(\vec{x}) d\Omega \quad (1)$$

donde:  $c_{(ij)}(\xi) = 1/2 \delta_{(ij)}$  en los casos más simples, cuando el contorno es regular en  $\xi$ ,  $u_{(ij)}^*(\xi, \vec{x})$  y  $t_{(ij)}^*(\xi, \vec{x})$  son llamadas soluciones fundamentales las cuales son funciones de Green y representan el desplazamiento y la tensión, respectivamente, en un punto  $\xi$  con la aplicación de un sistema de cargas unitarias aplicadas en  $\vec{x}$ , (Beer et al. 2008; Brebbia et al. 1984). Estas soluciones fundamentales están dadas por:

$$u_{ij}^*(\xi, \vec{x}) = \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} [(3-4\nu)\ln(r^{-1})\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (2)$$

$$t_{ij}^*(\xi, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \begin{aligned} &[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}]r_{,n} - \\ &(1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La evaluación de la integral (1) no es trivial, por ello existen varias técnicas que han sido propuestas para calcular estas integrales las cuales se pueden clasificar en tres grupos:



**Figura 1.** Cuerpo finito y elástico en 2D

(a) Técnica de regularización, (b) integración numérica, y (c) integración analítica (Padhi, et al. 2001; Salvadori 2002; Videla et al. 2007 y 1996).

En la técnica de regularización o semi-analítica, las integrales con hipersingularidades y se manipulan analíticamente de manera algebraica para convertirlas, a lo sumo, en integrales con singularidades débiles, que entonces pueden calcularse usando diferentes tipos de cuadraturas. La integración numérica es una respuesta en la actualidad para la evaluación del valor principal de Cauchy; siendo usual la aplicación de la cuadratura de Gauss, (Brebbia & Domínguez 1998; Brebbia et al. 1984, Kane, 1994), a pesar de que la misma puede incurrir en errores de exactitud e inclusive generar grandes costos en tiempo de ejecución computacional, (Videla et al. 2007; 1996). En la técnica de integración analítica, las integrales pueden ser obtenidas analíticamente de dos maneras, mediante la manipulación analítica del integrando haciendo uso, por ejemplo, de polinomios o series truncadas, onbbb sin manipular el integrando, obteniendo con esto último una solución cerrada de la integral.

Los procesos de análisis por el MEC, tradicionalmente, utilizan rutinas basadas en técnicas de integración numérica para resolver el cálculo de las integrales involucradas en la matriz generada por el método. La finalidad de este

trabajo es optimizar estos procesos, reduciendo el tiempo de ejecución computacional y ganando exactitud en los mismos usando SAC con manipulación simbólica. Por lo tanto, se propone una integración analítica cerrada para obtener los resultados de las integrales involucradas de la identidad de Somigliana, obteniendo de esta manera resultados más precisos en comparación con la integración numérica, logrando disminuir considerablemente el tiempo computacional utilizado para calcular estas expresiones.

## INTEGRACIÓN ANALÍTICA

Se considera un dominio  $\Omega$  con contorno  $\Gamma$ , el cual está dividido en  $N_e$  elementos. Aplicando esta discretización a la identidad de Somigliana (1), donde se supone las fuerzas de masas nulas por simplicidad, se obtiene:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, \vec{x})t_j(\vec{x}) - t_{ij}^*(\xi, \vec{x})u_j(\vec{x})]d\Gamma(\vec{x}) \quad (4)$$

Observe que la notación explícita se ha empleado en esta ecuación, mostrando que las soluciones fundamentales son dos funciones del punto origen  $\xi$  (punto de carga) y del punto muestra en la frontera,  $\vec{x}$ , (punto de colocación).

Implementando la discretización de los campos de variables conocidas sobre la frontera, en particular, en la integral donde se encuentra involucrada la solución fundamental para las tensiones, se tiene:

$$\int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, \vec{x})u_j(\vec{x})d\Gamma_e(x) = \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, \vec{x}) \left[ \sum_{n=1}^3 F^{(n)}(\epsilon)u_i^{(n)}(\vec{x}) \right] d\Gamma_e(\vec{x}) \quad (5)$$

En estas expresiones, se puede observar que los valores del punto nodal en la  $i$ -ésima componente del desplazamiento no son funciones de la variable de integración, por lo tanto, éstas pueden salir de la integral.

La evaluación de estos términos requiere el uso del jacobiano debido al cambio de coordenadas globales expresadas en el sistema cartesiano a coordenadas locales del sistema gaussiano. La transformación usada es simple  $d\Gamma_e = Jd\epsilon$ , donde  $J$  es el jacobiano. Por lo tanto, (5) se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, \vec{x}) u_j(\vec{x}) d\Gamma_e(\vec{x}) = \\
& \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(1)} J d\varepsilon \right\}^e u_i^{(1)} \\
& + \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(2)} J d\varepsilon \right\}^e u_i^{(2)} \\
& + \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* F^{(3)} J d\varepsilon \right\}^e u_i^{(3)} = \\
& \left\{ \int_{-1}^1 t_{ij}^* [F^{(1)} F^{(2)} F^{(3)}] J d\varepsilon \right\}^e \begin{Bmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \\ u_i^{(3)} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \quad (6)$$

Es importante notar que las ecuaciones anteriores contienen una mezcla de notación indicial y matricial. El índice  $i$  en estas ecuaciones es un índice repetido que requiere ser sumado, mientras que el índice  $j$  separado por comas indica derivación en esa dirección. Este último es un índice libre representando la dirección de la coordenada en el cual la carga unitaria asociada con la solución fundamental actúa. Esta notación puede homogeneizarse para producir un formato puramente matricial considerando la siguiente relación (Brebbia & Domínguez, 1998):

$$\begin{aligned}
t_{ij}^* &= [F^{(1)} F^{(2)} F^{(3)}] \begin{Bmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \\ u_i^{(3)} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} * & * \\ t_{11} & t_{21} \\ * & * \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} & 0 \\ 0 & F^{(1)} & 0 & F^{(2)} & 0 & F^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \\
&= [T]^T [F] \{u\}
\end{aligned} \quad (7)$$

En la expresión anterior,  $[T]^T$  es la matriz de soluciones fundamentales de tensión,  $[F]$  es una matriz de funciones de interpolación y  $\{u\}$  es el vector columna de desplazamientos con seis componentes, dos por nodo para un elemento en particular  $e$ .

Un proceso análogo puede establecerse para la expresión restante, la cual involucra  $[U]^T$  y  $\{t\}$ , donde la matriz transpuesta de la matriz de soluciones fundamentales para el desplazamiento es  $[U]^T$  y es un vector columna de tensiones de seis componentes  $\{t\}$ .

La discretización completa de la ecuación integral de frontera puede escribirse de la forma:

$$C^T \{u(\varepsilon)\} = \sum_{e=1}^{N_e} U^{(d,e)} \{u\}^e + \sum_{e=1}^{N_e} T^{(d,e)} \{t\}^e \quad (8)$$

donde:

$$U^{(d,e)} = \left\{ \int_{-1}^1 [U]^T [F] J d\varepsilon \right\}^e \quad (9)$$

y

$$T^{(d,e)} = \left\{ \int_{-1}^1 [T]^T [F] J d\varepsilon \right\}^e \quad (10)$$

Observe que las matrices  $U$  y  $T$  son  $2 \times 3$ , es decir, cada matriz contiene doce integrales.

A continuación, las expresiones matemáticas involucradas en (9) y (10) son presentadas de manera simbólica, por tanto, las integrales se pueden resolver de forma cerrada.

### Expresiones matemáticas manipuladas de forma simbólica

En la ecuación integral (1) se muestran expresiones matemáticas que deben ser manipuladas simbólicamente para realizar la integración analítica de forma óptima. Este tipo de manipulación es usada en muchos trabajos en los cuales se realiza integración analítica. Un ejemplo de cómo aplicar dicha técnica se puede observar en las referencias: Kikuchi, 1989; Videla et al. 2007 y 1996.

Se debe resaltar que en este trabajo se utilizó elementos de contorno cuadráticos con interpolación del tipo subparamétricos para el modelado de las condiciones de contorno y de la geometría. En dicha interpolación se utiliza las siguientes expresiones que linealizan el elemento de contorno:

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \quad (11)$$

donde:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  “y”  $(x_3, y_3)$  son las coordenadas del nodo 1, 2 y 3 respectivamente.

Sea  $\xi = (x(\varepsilon), y(\varepsilon))$  el punto de integración. Interpolando cada componente de este punto sobre el elemento y sustituyendo las expresiones expuestas en (11), se tiene

$$\begin{aligned}x(\varepsilon) &= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\varepsilon + \frac{1}{2}(x_3 + x_1) \\y(\varepsilon) &= \frac{1}{2}(y_3 - y_1)\varepsilon + \frac{1}{2}(y_3 + y_1)\end{aligned}\quad (12)$$

Luego, derivando (10), se obtiene:

$$\begin{aligned}DX &= \frac{dx(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \\DY &= \frac{dy(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}(y_3 - y_1)\end{aligned}\quad (13)$$

Se sigue reescribiendo las expresiones involucradas en (9) y (10), agrupando en grandes constantes los factores que involucran estas coordenadas, optimizando, de esta manera, la formulación expuesta para las soluciones fundamentales.

### Jacobiano

El jacobiano se calcula mediante la siguiente ecuación en la cual se sustituyen las ecuaciones en (12):

$$J(\varepsilon) = \left[ \left( \frac{dx_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{dx_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{D} \quad (14)$$

donde: D es de la forma:

$$D = \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_3)^2 \quad (15)$$

Note que D depende simplemente de las coordenadas de los nodos del elemento de incidencia.

### El radio

Considérese el punto de colocación  $\vec{x}=(x,y)$ . El vector radio  $r(\xi, \vec{x})$ , es la distancia que hay entre  $\xi$  y  $\vec{x}$ . Sea  $r_1$  la proyección del radio sobre el eje x y  $r_2$  la proyección del radio sobre el eje y. Entonces, se define la magnitud del vector radio como r y su ecuación es:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{(x - x(\varepsilon))^2 + (y - y(\varepsilon))^2} \\ &= \sqrt{A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C}\end{aligned}\quad (16)$$

donde se ha sustituido las expresiones presentadas en (12) y

$$A = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{4}y_1^2 + \frac{1}{4}y_3^2 + \frac{1}{2}y_1y_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 \quad (17)$$

$$B = \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + xx_1 - xx_3 + yy_1 - yy_3 \quad (18)$$

$$\begin{aligned}C &= y^2 + x^2 - xx_1 - xx_3 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{4}y_1^2 + \\ &\frac{1}{4}y_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}y_1y_3 - yy_1 - yy_3\end{aligned}\quad (19)$$

### Derivadas parciales del radio

Las derivadas parciales del radio con respecto a las coordenadas del punto de integración son:

$$\frac{dr(\xi, x)}{dx(\varepsilon)} = \frac{DX\varepsilon + D1}{r}, \quad \frac{dr(\xi, x)}{dy(\varepsilon)} = \frac{DY\varepsilon + D2}{r} \quad (20)$$

donde: r está dado por (16), DX y DY por las expresiones en (13) y tanto D1 como D2, por las igualdades:

$$\begin{aligned}D1 &= \left( x - \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \right) \\ D2 &= \left( y - \frac{1}{2}(y_1 - y_3) \right)\end{aligned}\quad (21)$$

Para calcular la derivada del radio respecto al vector normal debemos expresar simbólicamente las expresiones dadas por las coordenadas del vector normal. Estas expresiones están dadas por:

$$n_1(\varepsilon) = \frac{dy(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{1}{J} = -\frac{DY}{J}, \quad n_2(\varepsilon) = \frac{dx(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{1}{J} = \frac{DX}{J} \quad (22)$$

Luego, la derivada normal del radio se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial r(\xi, \vec{x})}{\partial \vec{n}} = \frac{[(DX\varepsilon + D1)DY - (DY\varepsilon + D2)DX]}{rJ} \quad (23)$$

### Representación de las ecuaciones integrales

Dado que este trabajo se enfoca en resolver las integrales involucradas en el MEC para problemas en elasticidad plana, debemos sustituir las expresiones manipuladas en las soluciones fundamentales para el desplazamiento y la tensión del problema bidimensional por las ecuaciones (2) y (3), respectivamente.

Por consiguiente, las soluciones fundamentales para el desplazamiento, con  $i,j=1,2$ , se reescriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u_{11}^* (\vec{\xi}, x) &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[ \frac{(4\nu-3)\ln(\sqrt{A\epsilon^2+B\epsilon+C}) + \left(\frac{DX\epsilon+D1}{\sqrt{A\epsilon^2+B\epsilon+C}}\right)^2}{(DX\epsilon+D1)(DY\epsilon+D)} \right] \\
u_{12}^* (\vec{\xi}, x) &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[ \frac{(DX\epsilon+D1)(DY\epsilon+D)}{A\epsilon^2+B\epsilon+C} \right] = u_{21}^* (\vec{\xi}, x) \\
u_{22}^* (\vec{\xi}, x) &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[ \frac{(4\nu-3)\ln(\sqrt{A\epsilon^2+B\epsilon+C}) + \left(\frac{DX\epsilon+D2}{\sqrt{A\epsilon^2+B\epsilon+C}}\right)^2}{(DX\epsilon+D1)(DY\epsilon+D)} \right]
\end{aligned} \quad (24)$$

y las soluciones fundamentales para las tensiones quedan de la forma:

$$\begin{aligned}
t_{11}^* (\vec{\xi}, x) &= -\frac{[(DX\epsilon+D1)DY-(DY\epsilon+D2)DX]}{4\pi(1-\nu)(A\epsilon^2+B\epsilon+C)\sqrt{D}} \\
&\left\{ \begin{aligned} &(1-2\nu) + \\ &2\left(\frac{DX\epsilon+D1}{\sqrt{A\epsilon^2+B\epsilon+C}}\right) \end{aligned} \right\} \\
t_{12}^* (\vec{\xi}, x) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)(A\epsilon^2+B\epsilon+C)\sqrt{D}} \\
&\left\{ \begin{aligned} &[-(DX\epsilon+D1)DY-(DY\epsilon+D2)DX] \\ &(DX\epsilon+D1)(DY\epsilon+D2) + \\ &(1-2\nu)[-DY(DY\epsilon+D2)-DX(DX\epsilon+D1)] \end{aligned} \right\} \\
t_{21}^* (\vec{\xi}, x) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)(A\epsilon^2+B\epsilon+C)\sqrt{D}} \\
&\left\{ \begin{aligned} &[-(DX\epsilon+D1)DY-(DY\epsilon+D2)DX] \\ &(-DX\epsilon+D1)(DY\epsilon+D2) + \\ &(1-2\nu)[DX(DX\epsilon+D1)-DY(DX\epsilon+D2)] \end{aligned} \right\} \\
t_{22}^* (\vec{\xi}, x) &= -\frac{[(DX\epsilon+D1)DY-(DY\epsilon+D2)DX]}{4\pi(1-\nu)(A\epsilon^2+B\epsilon+C)\sqrt{D}} \\
&\left\{ \begin{aligned} &(1-2\nu) + \\ &2\left(\frac{DY\epsilon+D2}{\sqrt{A\epsilon^2+B\epsilon+C}}\right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \quad (25)$$

Las matrices de desplazamiento y tensiones, involucradas en la matriz de influencia del sistema de ecuaciones resultante al implementar el MEC son de la forma (Brebbia & Domínguez, 1998; Kane, 1994):

$$U = \begin{bmatrix} U_{11}^{(1)} & U_{12}^{(1)} & U_{11}^{(2)} & U_{12}^{(2)} & U_{11}^{(3)} & U_{12}^{(3)} \\ U_{21}^{(1)} & U_{22}^{(1)} & U_{21}^{(2)} & U_{22}^{(2)} & U_{21}^{(3)} & U_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} & T_{11}^{(3)} & T_{12}^{(3)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} & T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} & T_{21}^{(3)} & T_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde los coeficientes de  $U$  y  $T$ , están dados por las siguientes integrales:

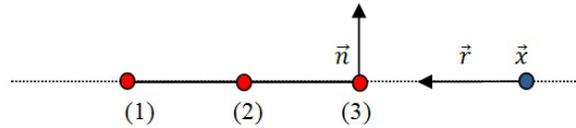
$$U_{ij}^{(n)} = \int_{-1}^1 u_{ij}^* F^{(n)} J d\epsilon, \quad T_{ij}^{(n)} = \int t_{ij}^* F^{(n)} J d\epsilon \quad (28)$$

respectivamente, siendo  $u_{ij}^*$  y  $t_{ij}^*$  con  $i,j=1,2$ , las soluciones fundamentales.

Al sustituir las soluciones fundamentales y el jacobiano, ya manipulados simbólicamente, además de las funciones de forma asociadas con el nodo en evaluación, obtenemos doce integrales correspondientes a los coeficientes de la matriz  $T$  y seis integrales correspondientes a los coeficientes de la matriz  $U$ . Esto último se debe a la simetría presente en la solución fundamental para el desplazamiento.

## IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Al calcular cada coeficiente de las matrices  $U$  y  $T$  se debe considerar cuatro casos diferentes para la implementación computacional. Esta clasificación por casos del problema se debe a las singularidades ocasionadas por la evaluación del punto de colocación en diferentes posiciones. A continuación, se describen estos cuatro casos:



**Figura 2.** Punto de colocación alineado con un elemento paralelo al eje  $x$

### Caso 1: El punto de colocación se encuentra alineado a un elemento horizontal

En este caso, la derivada del radio respecto al vector normal se anula, pues el vector normal es ortogonal al vector radio. Además, la derivada parcial del radio respecto a  $y$  en los nodos y el punto de colocación también se anulan puesto que la coordenada en  $y$  de ambas coinciden (Figura 2).

$$\frac{\partial r(\vec{\xi}, \vec{x})}{\partial \vec{n}} = \cos\theta(\vec{r}, \vec{n}) = 0, \quad \frac{\partial r(\vec{\xi}, \vec{x})}{\partial y} = \frac{y(\epsilon) - y}{r} = 0 \quad (29)$$

En consecuencia, las soluciones fundamentales definidas anteriormente se simplifican, obteniendo que  $u_{21}^*=0$  y  $t_{11}^*=t_{22}^*=0$ . Por lo tanto, sólo será necesario calcular doce integrales, seis para la matriz  $U$  y seis para la matriz  $T$ .

**Caso 2: El punto de colocación se encuentra alineado a un elemento vertical**

Análogamente, al caso anterior, el vector normal es ortogonal al vector radio, por lo que, (29) nuevamente se cumple, pero ahora se anula la derivada parcial del radio respecto a x en lugar de la derivada respecto a y. Por lo tanto, al igual que el caso anterior  $u_{12}^* = u_{21}^* = 0$  y  $t_{11}^* = t_{22}^* = 0$ , y sólo será necesario calcular doce integrales (Figura 3).

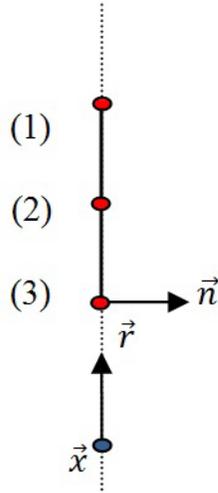


Figura 3. Punto de colocación alineado con un elemento paralelo al eje y

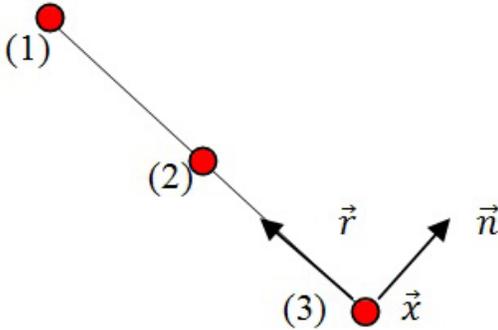


Figura 4. Punto de colocación sobre el elemento

**Caso 3: El punto de colocación se encuentra sobre el elemento de integración**

En este caso, al igual que en los casos anteriores, sin importar en que nodo del elemento se encuentre el punto de colocación, la derivada del radio respecto al vector normal es cero. Por lo tanto, las soluciones fundamentales definidas anteriormente se simplifican, obteniendo que  $u_{12}^* = u_{21}^* = 0$  y  $t_{11}^* = t_{22}^* = 0$  (Figura 4).

Observación: Al ser analizados los casos 1, 2 y 3, cuando se integran los coeficientes, se obtienen funciones racionales y en el denominador de estas funciones aparecen algunos términos particulares los cuales llamaremos: *PRUE*, *RAIZ15* y *RAIZ*, que dependen de las coordenadas de los nodos y del punto de colocación. En el caso 3, aparecen dos términos adicionales en el denominador los cuales se anulan. Estos términos se definirán como: *COTT* y *CONT*, que de igual manera dependen de las coordenadas del punto de colocación y del punto de integración.

Cuando nos encontramos en alguno de estos casos y evaluamos los nodos y el punto de colocación, los coeficientes de las sub-matrices *U* y *T* no están definidas. Sin embargo, al calcular el límite cuando  $W \rightarrow 0$  de cada una de estas expresiones, (con  $W=PRUE$ , *RAIZ15* ó *RAIZ*), es decir:

$$\lim_{W \rightarrow 0} \frac{F(\xi, x_1, x_3)}{W} = L \quad (30)$$

Estudiando el comportamiento de este límite, de manera exhaustiva, se observa que el mismo tiene una tendencia asintótica y como consecuencia, se adopta  $W=0.00001$ .

**Caso 4: El punto de colocación se encuentra en una posición cualquiera, diferente a los casos anteriores, respecto al elemento**

En este caso las soluciones fundamentales no presentan ningún tipo de singularidad, por ende, los coeficientes obtenidos al integrar se evalúan sin ninguna consideración previa.

**EXACTITUD DE LOS CÁLCULOS Y TIEMPO DE EJECUCIÓN COMPUTACIONAL**

**Exactitud de los cálculos**

Para estas pruebas de exactitud, se calculó el error porcentual mediante la siguiente fórmula:

$$ERROR = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} (A_{ij}^n - A_{ij}^a)^2}}{\sum_{i,j} |A_{ij}^n|} \times 100 \quad (31)$$

donde  $A_{ij}$  representa el coeficiente  $(i,j)$  de la matriz *A*, la cual puede ser tanto la matriz de desplazamientos como la matriz de tensiones, y los super-índices *n* y *a* indican las matrices obtenida de forma numérica y analítica, respectivamente. La integración numérica fue realizada con cuadratura de Gauss.

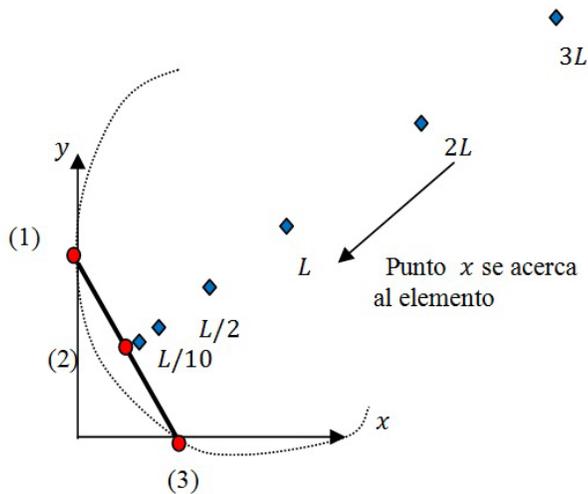


Figura 5. Elemento de contorno de longitud  $L=1.6963$  en un dominio  $\Omega$

La Figura 5 muestra un elemento de contorno en el que el punto de colocación  $x$  se acerca al mismo siguiendo una línea invisible perpendicular al elemento, indicado por las figuras en forma de diamante. El primer punto se encuentra a una distancia  $r=3L$ , y cada punto se acerca al elemento hasta llegar a una distancia  $r=L/10000$ . Los errores que toman los coeficientes de la matriz de tensiones se muestran en la Tabla 1. Se utilizan distintos órdenes de cuadratura numérica ( $NPG = 8, 20, 50$ ). Cabe señalar que errores del 13% aparecen cuando se utiliza un orden inferior de Gauss ( $NPG = 8$ ) y el punto de colocación está relativamente cerca del elemento  $r=L/20$ . Al aumentar el orden de la cuadratura de Gauss a cincuenta puntos ( $NPG = 50$ ), el error se reduce considerablemente, aun cuando el punto de colocación se encuentra cerca del elemento. Sin embargo, los órdenes de alta cuadratura implican altos tiempos de ejecución computacional y, en un problema práctico de ingeniería (análisis dinámico) con, por ejemplo, doscientos mil elementos de contorno, el tiempo de ejecución que se requiere es un poco prohibitivo. La situación empeora considerablemente cuando el punto de origen está muy cerca del elemento ( $L/100, L/500, L/1000, L/10000$ ). En estos casos, la cuadratura numérica es prácticamente incapaz de llegar a un valor razonable, ya que el gradiente de la integral cuasi-singular es muy alto y afecta en gran medida la evaluación numérica.

Tabla 1. Error (%) en evaluación numérica de la matriz de tensiones

Distancia	Npg=8	Npg=20	Npg=50
$3L$	0.00000	0.00000	0.00000
$2L$	0.00000	0.00000	0.00000

Distancia	Npg=8	Npg=20	Npg=50
$L$	0.00000	0.00000	0.00000
$L/2$	0.00040	0.00000	0.00000
$L/10$	4.11670	0.04050	0.00000
$L/20$	13.8493	1.78340	0.00420
$L/100$	27.9283	22.4817	10.1807
$L/500$	38.2596	28.6780	27.7535
$L/1000$	45.0051	36.4540	28.6825
$L/10000$	54.1234	52.7311	49.0981

### Tiempo de ejecución computacional

La comparación de tiempos de ejecución computacional obtenidas entre integraciones numéricas y analíticas se muestra en la Tabla 2. Los valores en ésta representan la relación del tiempo de ejecución obtenidos para la integración numérica sobre el tiempo de ejecución de análisis obtenidos para la integración analítica  $T_n = NPG / T_a$  ( $T_n$  = tiempo de integración numérica,  $NGP$  = número de puntos de Gauss,  $T_a$  = tiempo de integración de análisis, medidos en segundos). Nuevamente, se consideran tres órdenes diferentes de la cuadratura (8, 20 y 50).

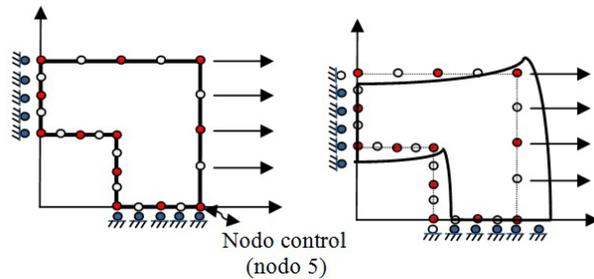
El lector puede observar el enorme ahorro de tiempo de ejecución computacional cuando se utiliza la integración analítica en comparación a la integración numérica. Este ahorro es muy relevante en problemas relacionados con dinámica no lineal, ya que los coeficientes de las matrices se deben calcular muchas veces.

Tabla 2. Relaciones entre los tiempos de CPU de las soluciones analítica y numérica (se muestra también los tiempos de análisis del CPU)

Elementos	$T_{n=8}/T_a$	$T_{n=20}/T_a$	$T_{n=50}/T_a$	$T_a$
100.000	29.4	64.4	154.4	0.016
1.000.000	37.9	92.9	227.3	0.11
10.000.000	60.0	158.2	388.9	0.64

### EJEMPLO DE APLICACIÓN

En la Figura 6 se muestra una placa en "L", sometida a tracción sobre un lado vertical. La geometría, las condiciones de contorno y las cargas se muestran en la figura. Este problema fue analizado utilizando doce elementos de contorno (dos por cada lado de la placa como se enumera en la Figura 6). El análisis numérico se realizó con cuadratura de Gauss de orden 20. La Tabla 3 contiene los errores entre las soluciones numérica y analítica, para sólo dos valores en el nodo de control (nodo 5) de la malla:  $u_x^5$  y  $\sigma_x^5$ .



**Figura 6.** Placa en L. Geometría, condiciones de contorno y placa deformada

**Tabla 3.** Comparación de los desplazamientos y tensiones en el nodo control: cálculo analítico vs numérico

Valor	Solución analítica	Solución Numérica	Error (%)
$u_x^s$	0.2504	0.2311	7.71
$\sigma_x^s$	-1.2823	-1.3611	6.15

En dichas tablas se muestra que el error porcentual para el desplazamiento en la dirección x es de 7.71%, mientras que para las tensiones, los resultados entre los valores de la solución numérica y analítica en la misma dirección es 6.15%. Este error tendería a cero si se considera un mayor número de puntos de Gauss en la integración numérica, lo cual tendría como consecuencia un aumento sustancial del tiempo de ejecución computacional.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se logró desarrollar la integración analítica de elementos de contorno cuadrática de elasticidad plana. El objetivo principal del trabajo fue reducir el tiempo de ejecución computacional para integrar el elemento. Se obtuvieron tiempos de ejecución computacional muy atractivos, en comparación con la integración numérica utilizando cuadraturas de Gauss. En general, para aplicaciones de MEC, que implica un análisis dinámico o análisis no-lineal, es pertinente considerar estos resultados, puesto que el coeficiente de la matriz debe ser evaluado en numerosas ocasiones.

Adicionalmente, el segundo objetivo del trabajo también fue alcanzado al desarrollar fórmulas analíticas que permitan evitar los errores numéricos obtenidos en alguna posición relativa entre el punto de colocación y el elemento de contorno. Con la integración analítica, el usuario puede obtener integrales precisas, incluso en el caso en que los puntos de colocación estén muy cerca del elemento o que pertenecen al mismo.

En cuanto a la rutina, se puede decir que eran muy extensas. Sin embargo, con la metodología utilizada en este trabajo para optimizar estas rutinas se obtuvo una reducción importante en el número de ejecuciones. Por lo tanto, se generó un código muy eficiente y rápido.

Al comparar el tiempo de ejecución computacional de integración analítica con obtenida con la integración numérica se obtiene que la integración analítica es 388% más rápida, al considerar 50 puntos de Gauss para mejorar a la exactitud en el cálculo por integración numérica. En consecuencia, mientras mayor sea la cantidad de puntos de Gauss para mejorar la exactitud del cálculo por integración numérica, la diferencia en velocidad será aún mayor.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) de la Universidad Central de Venezuela para la realización de este trabajo. No menos importante es agradecer a la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y al Centro de Investigación Métodos Numéricos en Mecánica Estructural del Instituto de Materiales y Modelos Estructurales (CIMNEME-IMME) ambos de la misma institución por el apoyo recibido.

## REFERENCIAS

- BEER, G., SMITH, I., DUENSER, C. (2008). The boundary element method with programming. New York: Spring.
- BREBBIA, C.A. & DOMÍNGUEZ, J. (1998). Boundary Elements: A Introductory Course. Southampton, England : WIT Press.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.F., WROBEL, L.C. (1984). Boundary element techniques: Theory and applications in engineering. Berlin : Spring.
- GAHDIMI, P., DASHTIMANEH, A., HOSSEINZADEH, H. (2010). Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration. s.l. : Applied Mathematics and Computation, Vol.217, Issue 1, 152-163.
- HUANLIN, Z., ZHONGRONG, N., CHANGZHENG, C., ZHONGWEI, G. (2008). Analytical integral algorithm applied to boundary layer effect and thin body effect in MEC for anisotropic potential problems. s.l. : Computers & Structures, Vol. 86, Issues 15-16, 1656-1671.

- KANE, J.H. (1994). *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall.
- KATZ, C. (1985). Analytical integration of isoparametric 2D-boundary elements. Lake Como, Italy : Proceedings of Boundary Elements VII International Conference, 1985. 115-130.
- KIKUCHI, M. (1989). Application of the symbolic mathematics system to the finite element program. s.l. : *Comput. Mech.* Vol. 5, 41-47.
- NIU, Z., WENDLAND, W.L., WANG, X., ZHOU, H. (2005). A semi-analytical algorithm for the evaluation of the nearly singular integrals in three-dimensional boundary element methods. s.l. : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, Issues 9-11, 1057-1074.
- PADHI, G.S., SHENOI, R.A., MOY, S.S.J., MCCARTHY, M.A. (2001). Analytic integration of kernel shape function product integrals in the boundary element method. s.l. : *Computer & Structures*. Vol 79, 1325-1333.
- TANG, W.C. & FENNER, R.T. (2005). Analytical integration and exact geometrical representation in the two-dimensional elastostatic boundary element method. s.l. : *Applied Mathematical Modelling*. Vol 29, 1073-1099.
- SALVADORI, A. (2002). Analytical integration in 2D MEC elasticity. s.l. : *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol 53, 1695-1719.
- SALVADORI, A. & TEMPONI, A. (2010). Analytical integrations for the approximation of 3D hyperbolic scalar boundary integral equations. s.l. : *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, Issue 11.
- SINGH, K. & TANAKA, M. (2000). Analytical integration of weakly singular integrals in boundary element analysis of Helmholtz and advection-diffusion equations. s.l. : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 189, Issue 2, 625-640.
- VIDELA, L., BALOA, T., GRIFFITHS, D.V., CERROLAZA, M. (2007). Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation. s.l. : *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 24, Issue 1, 249-261.
- VIDELA, L., OCHOA, R., APARICIO, N., CERROLAZA, M. (1996). Explicit Integration of the Stiffness Matrix of a Four-Noded -Plane Elasticity Finite Element. s.l. : *Communications In Numerical Methods In Engineering*, Vol 12, 731-743.