

NUEVO ESQUEMA NUMÉRICO CONSERVATIVO PARA LA DIFUSIÓN DE CALOR EN MEDIOS BI-DIMENSIONALES NO-HOMOGENEOS

JHONNATHAN ARTEAGA-ARISPE, JUAN M. GUEVARA-JORDAN

Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Caracas, Venezuela.
e-mail: arteagajt@cantv.net ,jguevara@euler.ciens.ucv.ve

Recibido: febrero de 2007

Recibido en forma final revisado: marzo de 2008

RESUMEN

El presente artículo describe la formulación de un nuevo esquema numérico conservativo aplicado a la ecuación no estática del calor en 2-D. La evaluación del método y su comparación con los esquemas de diferencias finitas estándar así como un estudio cualitativo de las tasas de convergencia son analizados. Los resultados obtenidos evidencian la ventaja del nuevo método, sobre todo en aquellos problemas físicos en los cuales las condiciones de borde son determinantes para la correcta aproximación numérica de la solución.

Palabras clave: Métodos miméticos, Métodos de diferencias finitas, Métodos conservativos, Ecuación del calor, Capa límite.

NEW CONSERVATIVE NUMERICAL SCHEME FOR HEAT DIFFUSION IN TWO-DIMENSIONAL NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

ABSTRACT

A new numerical conservative scheme formulation and its application to the 2D transient heat equation is presented. The evaluation of the method and its comparison with the standard finite difference method are analyzed. The results show the advantages of the new method, in particular for those physical problems where the boundary conditions are very important for an accurate numerical solution approximation.

Keywords: Mimetic methods, Finite differences methods, Conservative methods, Heat equation, Boundary layer.

INTRODUCCIÓN

Los problemas no estáticos de valor en la frontera de transferencia de calor aparecen recurrentemente en muchas aplicaciones de la ingeniería tales como moldura de metales y no metales por calor, enfriamiento de componentes electrónicos, propagación del calor en yacimientos en los cuales se inyecta vapor, y otros numerosos procesos y/o problemas aplicados. Los métodos numéricos han sido usados ampliamente para resolver estas ecuaciones. Sin embargo y a pesar de que estos han ido evolucionando y mejorando continuamente, no se puede afirmar que un método pueda ser considerado como el mejor u óptimo. En consecuencia, la propuesta de nuevos métodos numéricos

para resolver la ecuación del calor es un tópico de mucho interés actualmente.

Los métodos numéricos más usados hoy en día, para resolver de forma general los problemas de transferencia de calor mediante la ecuación del calor son: diferencias finitas, elementos finitos y elementos de contorno. Cada uno de estos presentan numerosas ventajas (Lapidus *et al.* 1983) pero también algunas desventajas entre las que se pueden citar la imprecisión en el manejo de heterogeneidades fuertes en el caso de elementos de contorno (Power, 1995), la complejidad de implementación computacional en el caso de elementos finitos (Zienkiewicz *et al.* 1994), consideraciones ficticias para las condiciones de borde y

poca generalidad son algunas de las desventajas de los métodos de diferencias finitas estándar (Smith, 1986; Morton *et al.* 1994).

El tratamiento poco sistemático de las condiciones de borde en diferencias finitas y su incompatibilidad con las moléculas de discretización en nodos interiores han originado un nuevo tipo de esquemas en diferencias finitas denominado métodos miméticos u operadores de soporte (Shashkov *et al.* 1994; Hyman *et al.* 1998; Hyman *et al.* 2002; Castillo *et al.* 2003). La aplicación de estos métodos a los problemas de difusión estática han presentado numerosas ventajas sobre los de diferencias finitas estándar (Freites, 2004; Guevara, 2005). En consecuencia, una extensión y aplicación de estos representa un área de investigación importante. Mas recientemente en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, se ha estudiado un nuevo método conservativo asintóticamente convergente a los esquemas miméticos, el cual adquiere naturalmente las ventajas de representación y flexibilidad de los métodos miméticos pero posee una formulación más simple (Guevara, 2005; Guevara *et al.* 2005). Todos estos estudios corresponden a problemas estáticos o elípticos unidimensionales, las extensiones y análisis al caso multidimensional fueron presentados por Arteaga *et al.* (2006).

Los primeros indicios de la aplicación del nuevo método conservativo a la ecuación de calor han exhibido resultados sumamente satisfactorios (Arteaga, 2008). Una exposición formal de la discretización de las ecuaciones, sus diferencias con respecto al método de diferencias finitas, las ventajas que posee y su aplicación a la ecuación de calor en medios cuyas propiedades de conductividad térmica varía dependiendo de la posición, no han sido reportados y constituyen los objetivos principales de este trabajo.

El presente artículo se encuentra estructurado de la siguiente manera: se exhibe el problema de valor en la frontera gobernado por la ecuación de difusión de calor y condiciones de borde del tipo mixta o de Robin. Seguidamente se describen los principios básicos de las discretizaciones conservativas, adicionalmente se establece una comparación con el método de diferencias finitas estándar. Posteriormente, se aplica la discretización conservativa al problema de valor en la frontera referido anteriormente. Luego se presentan los resultados numéricos obtenidos para un caso homogéneo y uno heterogéneo, así como una comparación con los resultados obtenidos por el método de diferencias finitas estándar. Finalmente se proporcionan las conclusiones del estudio cualitativo y cuantitativo del método numérico propuesto en este artículo.

ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN 2D

La ecuación en derivadas parciales y las condiciones de borde que modelan la transferencia de calor por difusión en un medio no-homogéneo, vienen dadas por las relaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\vec{x}) \nabla u) + F(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\alpha(\vec{x})u + \beta(\vec{x})K(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g(\vec{x}, t), \quad u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) \quad (2)$$

donde:

Ω representa el medio en el cual se estudia la variación de la temperatura $u(\vec{x}, t)$, $K(\vec{x})$ es el coeficiente de conductividad térmica y $F(\vec{x}, t)$ representa la intensidad de las fuentes de calor en el punto \vec{x} en el tiempo t . Las funciones $\alpha(\vec{x})$, $\beta(\vec{x})$ y $g(\vec{x}, t)$, definen las condiciones de borde en su forma más general o, escrito de otra manera, el comportamiento de la temperatura en la frontera de Ω , $u_0(\vec{x})$ representa la temperatura inicial del medio.

La solución general del problema de valor, en la frontera dada por las ecuaciones (1) y (2), no puede ser obtenida de manera general mediante métodos analíticos. Es por esta razón que existe un amplio espectro de métodos numéricos que tienen por objetivo aproximar de forma sistemática las soluciones de este problema.

MÉTODO CONSERVATIVO

Con la finalidad de simplificar la exposición del método y tal como se ilustra en la figura 1, se tomará el mismo número de nodos n en la dirección de las abscisas x y de las ordenadas y en las cuales se discretizará el medio, tal que este puede ser representado mediante el producto cartesiano :

$$\Omega = [x_0, x_{n+1}] \times [y_0, y_{n+1}] \quad (3)$$

donde:

$x_0 = y_0 = 0$ y $x_{n+1} = y_{n+1} = 1$. Esta malla posee $(n+1) \times (n+1)$ celdas de tamaño $h \times h$, cada una de las cuales posee un nodo central, marcado con un círculo en la figura 1, y denotado por $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ para $i, j = 0, \dots, n$. Es de hacer notar que cada bloque con un lado en la frontera de Ω tiene un nodo adicional y las celdas en las esquinas poseen, en consecuencia, dos nodos adicionales. Esta malla no-uniforme es llamada en los artículos de métodos miméticos (Castillo, 2003; Guevara, 2005) malla punto distribuida. La distancia h viene dada por la relación usual:

$$h = \frac{(x_{n+1} - x_0)}{n+1} = \frac{(y_{n+1} - y_0)}{n+1} \quad (4)$$

donde:

$x_i = x_0 + ih$ y $y_j = y_0 + jh$ para $i, j=0, \dots, n+1$. De igual manera, el intervalo de tiempo (denotado por $[0, T]$) en el cual se resolvió el problema, fue discretizado en n_t sub-intervalos de longitud Δt donde: $t_0 = 0$, $t_{n_t} = T$ y $t_m = m \Delta t$ para $m = 0, \dots, n_t$. La siguiente notación será empleada en todo el artículo $u_{(i,j)}^m = u(x_i, y_j, t_m)$.

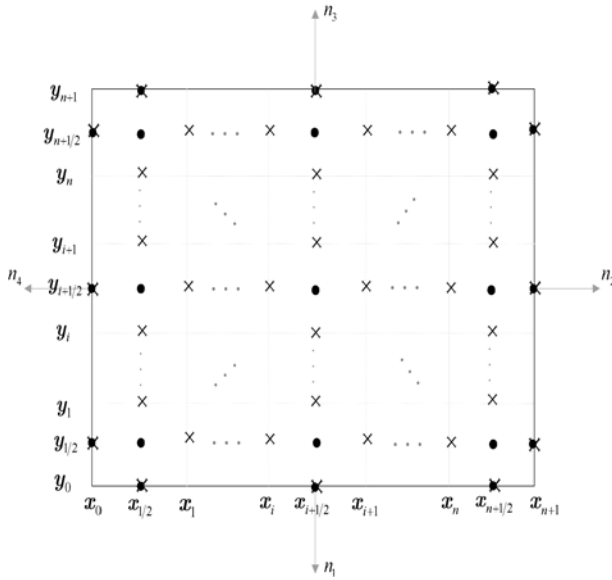


Figura 1. Malla punto distribuida.

En la malla, la función escalar $u(\vec{x}, t)$ tendrá una representación por un vector de $(n+1)^2 + 4(n+1)$ componentes correspondientes a la evaluación de u en los centros de cada celda y en los nodos adicionales en la frontera, todos estos denotados por puntos negros en la figura 1. Ordenando los nodos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, la expresión vectorial de $u(\vec{x}, t)$ vendrá dada por:

$$\vec{u}^m = \left(u_{(1/2,0)}, \dots, u_{(n+1/2,0)}, \dots, u_{(0,1/2)}, \dots, u_{(n+1/2,n+1)} \right)^t \quad (5)$$

De acuerdo a la notación empleada en la figura 1, la aproximación de la proyección del gradiente G en el vector normal a la frontera de Ω tendrá la forma:

$$(Gu \cdot \vec{n})_{(i,j)}^m = \pm \frac{8}{3h} u_{(i,j)}^m - \frac{3}{h} u_{(i,j_2)}^m \pm \frac{1}{3h} u_{(i_3,j)}^m \quad (6)$$

donde:

para los nodos en la base y en el tope del cuadrado unitario, $i_1 = i_2 = i_3 = i + 1/2$ para $i=0, \dots, n$, y $j_1 = 0$, $j_2 = 1/2$, $j_3 = 3/2$ si $y=0$, o, $j_1 = n+1$, $j_2 = n+1/2$, $j_3 = n-1/2$ si $y = 1$. Por otra parte, para los nodos en las fronteras izquierdas y derechas del dominio $j_1 = j_2 = j_3 = j + 1/2$ para $j=0, \dots, n$, y $i_1 = 0$, $i_2 = 1/2$, $i_3 = 3/2$ si $x=0$, o, $i_1 = n+1$, $i_2 = n+1/2$, $i_3 = n-1/2$ si $x = 1$. El signo de los coeficientes en la aproximación de los componentes del gradiente vendrá dado por el signo del vector normal a la frontera de Ω .

Esta aproximación es la misma obtenida para el gradiente mimético unidimensional en la frontera (Guevara, 2005; Guevara *et al.* 2005; Castillo 2005) y tiene la ventaja que puede ser obtenida por aplicaciones sistemáticas de las series de Taylor (Guevara, 2005). En los puntos internos de la malla, el gradiente y la divergencia coinciden con las discretizaciones estándar en diferencias finitas centradas, esto es:

$$(Gu)_{(i,j)}^m = \left(\frac{u_{(i+1/2,j)}^m - u_{(i-1/2,j)}^m}{h}, \frac{u_{(i,j+1/2)}^m - u_{(i,j-1/2)}^m}{h} \right) \quad (7)$$

$$(D_\psi)_{(i+1/2,j+1/2)}^m = \frac{\varphi_{(i+1,j)}^m - \varphi_{(i,j)}^m}{h} + \frac{\psi_{(i,j+1)}^m - \psi_{(i,j)}^m}{h} \quad (8)$$

La ecuación (7) es válida para $i, j = 1, \dots, n$ mientras que la ecuación (8) para $i, j = 0, \dots, n$. En esta última las funciones φ y ψ son los componentes del gradiente.

Los operadores discretizados en las ecuaciones (6), (7) y (8) admiten una representación matricial de la siguiente manera; en notación matricial, el operador gradiente G , denotado por \mathbf{G} , tiene dimensiones $2\tilde{n} \times \tilde{n}$ donde $\tilde{n} = (n+1)^2 + 4(n+1)$.

Sus elementos son $\pm 8/3h, \mu 3/h, \pm 1/3h$, en las filas correspondientes a los nodos de la frontera, mientras que en los nodos interiores los elementos son $1/h$ y $-1/h$. Por otra parte, la matriz asociada a la discretización del operador divergencia D , denotada por \mathbf{D} , posee dimensiones $(n+1)^2 \times 2\tilde{n}$ y sus coeficientes son los mismos que para la discretización mediante diferencias finitas estándar, esto es, sus elementos son $-1/h, -1/h$, y para cada uno de los nodos interiores de la malla punto distribuida y θ en el resto.

Por otra parte, la derivada temporal fue aproximada por diferencias adelantadas y representada por el operador tal que:

$$\delta_t u_{(i+1/2,j+1/2)}^{m+1/2} = \frac{u_{(i+1/2,j+1/2)}^{m+1} - u_{(i+1/2,j+1/2)}^m}{\Delta t} \quad (9)$$

Definiendo el calor total del sistema en un tiempo t mediante la relación:

$$h(t) = \int_{\Omega} u(x, t) d\Omega \quad (10)$$

se puede demostrar (Arteaga, 2008), aplicando reglas de cuadratura para las aproximaciones de las integrales, que el esquema de discretización propuesto satisface la relación conservativa:

$$\frac{dh}{dt} = \int_{\Omega} u_t(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla u(\vec{x}, t)) dA = \int_{\partial \Omega} (K \nabla u(\vec{x}, t)) \cdot \vec{n} dS \quad (11)$$

Este resultado se deriva de las propiedades que satisfacen las versiones discretas de los operadores gradiente y divergencia (Arteaga *et al.* 2006).

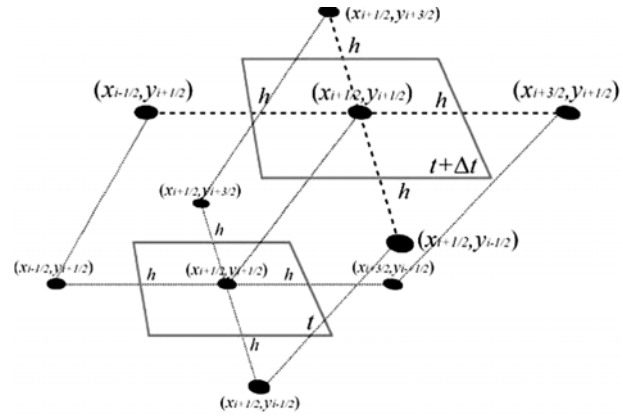
DISCRETIZACIÓN CONSERVATIVA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

Con la finalidad de representar el esquema numérico en una forma discreta explícita, se supondrá sin pérdida de generalidad que $K(\vec{x}) = I$ y se expresará la ecuación de difusión (1) en términos de los operadores diferenciales expuestos en la sección anterior y el θ método o método de promedio ponderado (Morton *et al.* 1994), obteniéndose la relación:

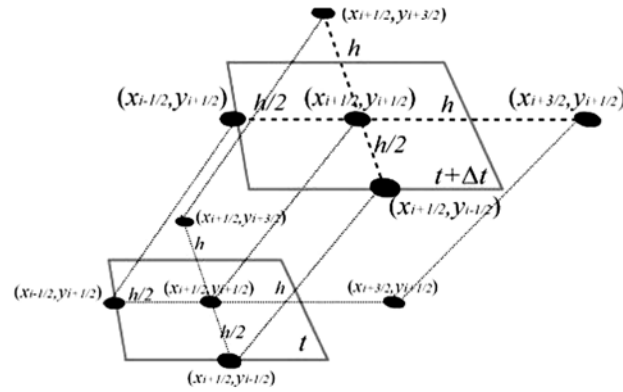
$$\delta_t u_{(i+1/2, j+1/2)}^{m+1/2} = \left[\theta (DG) u_{(i+1/2, j+1/2)}^{m+1} + (1-\theta) (DG) u_{(i+1/2, j+1/2)}^m \right] + \theta F_{(i+1/2, j+1/2)}^{m+1} + (1-\theta) F_{(i+1/2, j+1/2)}^m \quad (12)$$

En ésta, el peso θ define el método a ser aplicado para la resolución temporal de la ecuación diferencial. En el caso de $\theta = 0$ el esquema es explícito mientras que es implícito para el caso $\theta = 1$. El método de Crank-Nicolson, obtenido para $\theta = 1/2$, es de particular interés para el presente trabajo, ya que es de segundo orden de aproximación (Morton *et al.* 1994). Por otra parte, el término DG corresponde a la composición de los operadores discretos D y G , y varía en función de los nodos de la malla punto distribuida. A saber, para los nodos internos (referidos en la figura 2(a) como nodos internos regulares), $i, j = 1, \dots, n$, la composición viene dada por:

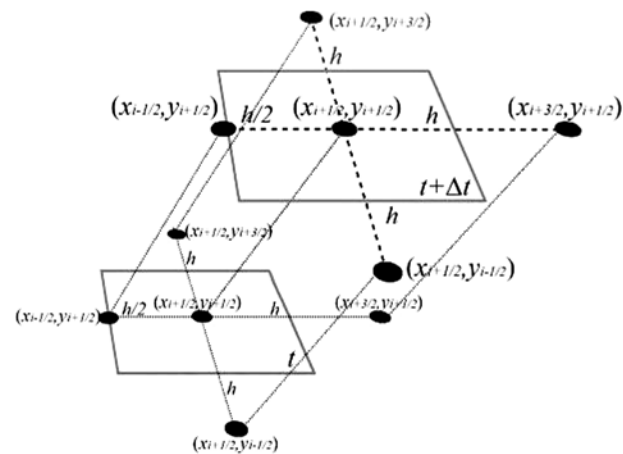
$$\begin{aligned} & -\frac{\theta}{h^2} (u_{(i+3/2, j+1/2)}^{m+1} + u_{(i-1/2, j+1/2)}^{m+1} + u_{(i+1/2, j+3/2)}^{m+1} + u_{(i+1/2, j-1/2)}^{m+1}) \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{4\theta}{h^2} \right) u_{(i+1/2, j+1/2)}^{m+1} = \\ & \frac{(1-\theta)}{h^2} (u_{(i+3/2, j+1/2)}^m + u_{(i-1/2, j+1/2)}^m + u_{(i+1/2, j+3/2)}^m + u_{(i+1/2, j-1/2)}^m) \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{4(1-\theta)}{h^2} \right) u_{(i+1/2, j+1/2)}^m + \\ & \theta F_{(i+1/2, j+1/2)}^{m+1} + (1-\theta) F_{(i+1/2, j+1/2)}^m \end{aligned} \quad (13)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2. Nodos de discretización para la ecuación del calor. (a) nodos interiores regulares, (b) nodos de las esquinas internas, (c) nodos de los lados internos.

Como se mencionó en el párrafo anterior, la figura 2 muestra los tres casos posibles obtenidos para la discretización de

la ecuación del calor mediante el método conservativo propuesto en el presente artículo. Estos casos se diferencian entre sí a partir de la posición de los nodos en la malla no uniforme punto distribuida. En esta figura se muestra tanto la dependencia temporal como espacial de los nodos según la notación empleada para las ecuaciones (7), (8) y (9).

Por otra parte, para los nodos internos próximos a la frontera (nodos de los lados internos en la figura 2), la composición discreta se define mediante la relación:

$$\begin{aligned} & -\frac{4\theta}{3h^2}(2u_{(i_1,j_1)}^{m+1} + u_{(i_3,j_3)}^{m+1}) - \frac{\theta}{h^2}(u_{(i_4,j_4)}^{m+1} + u_{(i_5,j_5)}^{m+1}) \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{6\theta}{h^2}\right)u_{(i_2,j_2)}^{m+1} = \\ & \frac{4(1-\theta)}{3h^2}(2u_{(i_1,j_1)}^m + u_{(i_3,j_3)}^m) + \frac{(1-\theta)}{h^2}(u_{(i_4,j_4)}^m + u_{(i_5,j_5)}^m) \quad (14) \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{6(1-\theta)}{h^2}\right)u_{(i_2,j_2)}^m + \\ & \theta F_{(i+1/2,j+1/2)}^{m+1} + (1-\theta)F_{(i+1/2,j+1/2)}^m \end{aligned}$$

Finalmente, la discretización en los nodos de las esquinas internas (figura 2) $(i=0, j=0)$, $(i=n, j=0)$, $(i=n, j=n)$, $(i=0, j=n)$, viene dado por:

$$\begin{aligned} & -\frac{4\theta}{3h^2}(2u_{(i_1,j_1)}^{m+1} + u_{(i_3,j_3)}^{m+1} + 2u_{(i_4,j_4)}^{m+1} + u_{(i_5,j_5)}^{m+1}) \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{8\theta}{h^2}\right)u_{(i_2,j_2)}^{m+1} = \\ & \frac{4(1-\theta)}{3h^2}(2u_{(i_1,j_1)}^m + u_{(i_3,j_3)}^m + 2u_{(i_4,j_4)}^m + u_{(i_5,j_5)}^m) \quad (15) \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{8(1-\theta)}{h^2}\right)u_{(i_2,j_2)}^m + \\ & \theta F_{(i+1/2,j+1/2)}^{m+1} + (1-\theta)F_{(i+1/2,j+1/2)}^m \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores se han empleado índices generalizados para la representación de la discretización de los operadores en cada nodo. La relación entre estos y los nodos de la malla puede resumirse mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} j_1 = j_2 = j_3 = j + 1/2, \quad i_1 = i_2 = i_3 = i + 1/2 \\ i = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0, \quad i_3 = 3/2 \\ i = n \quad \Rightarrow \quad i_1 = n + 1, \quad i_3 = n - 1/2 \quad (16) \\ j = 0 \quad \Rightarrow \quad j_4 = 0, \quad j_5 = 3/2 \\ j = n \quad \Rightarrow \quad j_4 = n + 1, \quad j_5 = n - 1/2 \end{aligned}$$

De igual manera, las condiciones de borde (2) en su forma discreta vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} & \alpha_{(i_1,j_1)}(\theta u_{(i_1,j_1)}^{m+1} + (1-\theta)u_{(i_1,j_1)}^m) + \\ & \beta_{(i_1,j_1)}(\theta(Gu \cdot \vec{n})_{(i_1,j_1)}^{m+1} + (1-\theta)(Gu \cdot \vec{n})_{(i_1,j_1)}^m) = \quad (17) \\ & \theta g_{(i_1,j_1)}^{m+1} + (1-\theta)g_{(i_1,j_1)}^m \end{aligned}$$

en ésta la correspondencia entre los sub-índices generalizados y los nodos de la malla es la misma que para la ecuación (6).

La discretización conservativa del problema de valor en la frontera admite una representación matricial compacta y más general, mediante el sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m}{\Delta t} = [\theta M \vec{u}^{m+1} + (1-\theta)M \vec{u}^m] + \theta \vec{b}^{m+1} + (1-\theta)\vec{b}^m \quad (18)$$

En ésta, los componentes del vector \vec{b} vienen dados por la evaluación de los términos fuentes $F(\vec{x}, t)$ en los nodos interiores y por $g(\vec{x}, t)$ en las entradas correspondientes a los nodos de la frontera. La matriz M, correspondiente a la discretización espacial de la ecuación en derivadas parciales, viene dada por la ecuación:

$$M = (A^\alpha + B^\beta K G) + D K G \quad (19)$$

En la ecuación (19), las matrices A^α y B^β de dimensiones $\tilde{n} \times \tilde{n}$ y $\tilde{n} \times 2\tilde{n}$, respectivamente, son representaciones matriciales de condiciones de borde, las cuales sólo poseen valores no nulos en las filas correspondientes a los nodos en la frontera. Estos valores están asociados a las evaluaciones de las funciones $\alpha(\vec{x})$, $\beta(\vec{x})$ descritos en la ecuación (2). K es una matriz diagonal de valores positivos obtenidos de la evaluación conservativa mediante promedios aritméticos del coeficiente de difusión térmica en los nodos correspondientes (Morton *et al.* 1994; Freites, 2004), manteniendo así la correspondencia con la versión discreta del operador gradiente. Finalmente, D y G son las representaciones matriciales de los operadores divergencia y gradiente descritos en la sección anterior, con la adición en D de $4(n+1)$ filas de ceros correspondientes a las condiciones de borde.

RESULTADOS NUMÉRICOS

El esquema conservativo propuesto y el método de diferencias finitas estándar fueron implementados computacionalmente para resolver el problema de valor en la frontera gobernado por la ecuación del calor bi-dimensional. En esta sección se presenta un estudio comparativo de ambos esquemas tomando como referencia dos casos o ejemplos.

La implementación del método de diferencias finitas para resolver la ecuación estática de difusión en 2D requiere mallas extendidas con puntos fantasmas o ficticios, como se ilustra para un caso simple 3×3 en el cuadrado unitario Ω en la figura 3. En ésta, se puede apreciar que los nodos de la malla punto distribuida son un subconjunto de la malla extendida. Los puntos fantasmas fueron representados por círculos blancos, mientras que los negros corresponden a los nodos reales, los cuales coinciden con los nodos de la malla punto distribuida excepto en las esquinas. Las líneas punteadas son bordes imaginarios para los bloques de malla extendidos. En general, una malla rectangular extendida $n \times n$ tendrá $n^2 + 4n + 4$ nodos reales y $4n + 4$ nodos fantasmas, mientras que en la malla punto distribuida se necesitará solamente $n^2 + 4n$ nodos reales y ningún nodo ficticio. Esta observación presenta en sí misma, una ventaja del método conservativo sobre diferencias finitas.

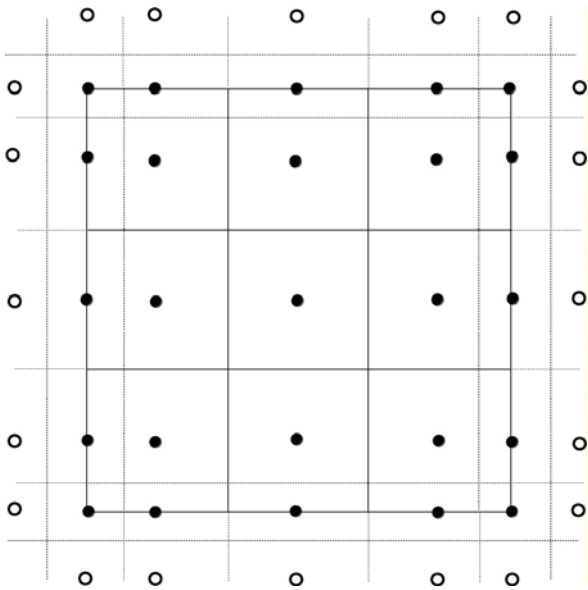


Figura 3. Malla extendida de diferencias finitas estándar.

Caso I

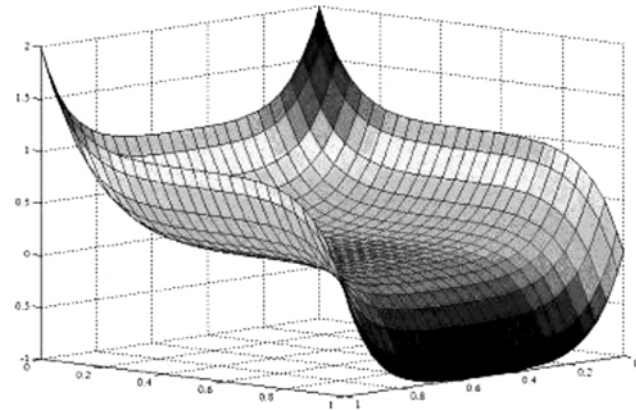
Para este primer análisis, se consideró el problema de valor en la frontera (1), (2) para un medio homogéneo con $K(\vec{x}) = 1$, $\beta(\vec{x}) = 2^k$ y $\alpha(\vec{x}) = 1 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$, esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u) - e^{-t} (x^k - y^k + (1-x)^k + (1-y)^k) - k(k-1)e^{-t} ((1-x)^{k-2} + x^{k-2} - y^{k-2} + (1-y)^{k-2}) \quad (20)$$

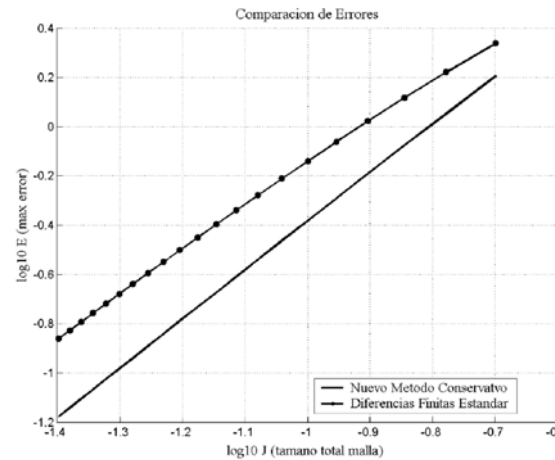
$$u + 2^k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \pm e^{-t} (\zeta^k - \zeta^{k-1} + (1-\zeta)^k + (1-\zeta)^{k-1}) \pm 2^k k e^{-t} ((1-\zeta)^{k-1} - \zeta^k) \quad (21)$$

donde:

$\zeta = x$ o y , dependiendo de la posición de \vec{x} en la frontera de Ω , y el signo del lado derecho de la condición de borde vendrá dado por el signo del vector normal a $\partial\Omega$. Por otra parte, la solución analítica de este problema es $u(\vec{x}, t) = e^{-t} (x^k - y^k + (1-x)^k + (1-y)^k)$, la cual es del tipo capa límite para todos los lados del cuadrado unitario y, mientras mayor es el valor de k , mayores son las dificultades para el método numérico porque las capas son más próximas al borde, como puede observarse en la figura 4(a), y, en consecuencia, mallas muy refinadas son necesarias para una buena aproximación.



(a)



(b)

Figura 4. Resultados numéricos (caso I).

- (a) solución analítica,
(b) comparación de errores en norma ∞ .

En la figura 4(b) se muestran la comparación de los errores estimados para el método propuesto y diferencias finitas tomando como datos $k=10$, $\theta = 1/2$ y $\Delta t = 1/2h^2$. Los resultados obtenidos exhiben una clara ventaja del nuevo método conservativo sobre el esquema de diferencias finitas

estándar. Adicionalmente y como se muestra en la siguiente tabla, el método conservativo posee y mantiene una convergencia cuadrática bajo refinamiento simultaneo en los ejes del tiempo y el espacio, lo cual corresponde a los resultados teóricos descritos en Arteaga (2008).

Tabla 1. Tasas de convergencia (caso I).

k	5	10	15	20
Diferencias Finitas Estándar	1.9015	1.7415	1.5996	1.4899
Nuevo Método Conservativo	1.9688	1.9861	1.9340	1.8588

Caso II

A continuación se analizan los resultados obtenidos para un medio no-homogéneo, en el cual el coeficiente de difusión viene dado por:

$$K(\vec{x}) = 2 + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{(x+\delta)e^{\frac{x+\delta}{\varepsilon}}}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (22)$$

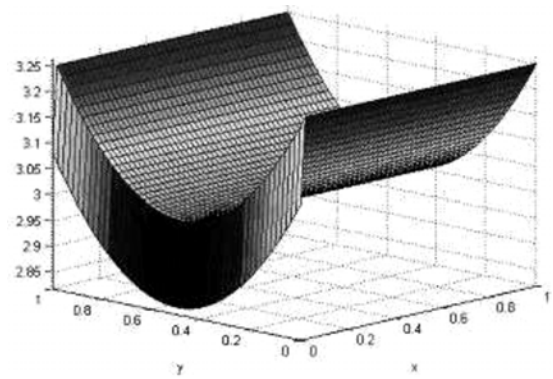
Mientras menor es el valor de ε , mayores son las exigencias a los métodos numéricos para alcanzar una buena aproximación ya que el coeficiente de difusión se acerca al borde, como se ilustra en la figura 5(a). Para este caso se emplearon los valores de $\varepsilon = 0.005$ y $\delta = 0.01$. Las condiciones de borde son, al igual que para el caso I, Mixtas o Robin con $\alpha(\vec{x}) = \beta(\vec{x}) = 1 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$. El problema de valor en la frontera vendrá dado entonces por las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \nabla \cdot (K(\vec{x}) \nabla u) - 2e^{-t} (\sin(\pi x) + y^4) - \\ & 2\pi\omega^{-1}(x+\delta)^{-1} e^{-t} \left[\varepsilon(x+\delta)^{-1} + 1 \right] e^{\left(\frac{-\varepsilon}{(x+\delta)^{\omega}}\right)} \cos(\pi x) + \\ & e^{-t} \left[e^{\left(\frac{-\varepsilon}{(x+\delta)^{\omega}}\right)} + 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[2\pi^2 \sin(\pi x) - 24y^2 \right] \\ & - 8(2y-1)y^3 e^{-t} \end{aligned} \quad (23)$$

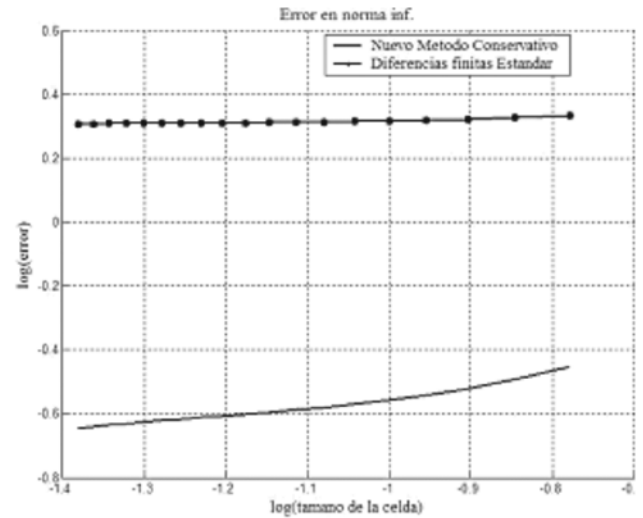
$$\begin{aligned} u + K(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = & u(\vec{x}, t) \pm 8(1-\eta)K(\vec{x})e^{-t}y^3 \\ & \pm 2\eta\pi K(\vec{x})e^{-t}\cos(\pi x) \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$\eta = 1$ si $y = 0$ o $y = 1 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$, $\omega(x) = \exp\left[\frac{(x+\delta)}{\varepsilon} - 1\right]$ y la solución analítica $u(\vec{x}, t) = 2e^{-t}(\sin(\pi x) + y^4)$.



(a)



(b)

Figura 5. Resultados numéricos (caso II).
(a) gráfica del coeficiente de difusión térmica.
(b) comparación de los errores en norma ∞ .

Los resultados obtenidos muestran diferencias numéricas considerables (figura 5b) y una pobre representación de la solución por parte del método de diferencias finitas estándar. En este caso, la correcta aproximación de las condiciones de borde por parte del método conservativo incide drásticamente en la buena aproximación de la solución del problema de valor en la frontera. A continuación se tabula la comparación de los errores absolutos para varios tamaños de malla, lo cual confirma la conclusión presentada anteriormente.

Tabla 2. Comparación de errores absolutos (caso II) $\|u(\vec{x}, t) - \tilde{u}\|_{\infty}$.

k	10 x 10	15 x 15	20 x 20
Diferencias Finitas Estándar	2.04602	2.04602	2.0356
Nuevo Método Conservativo	0.2520	0.2520	0.2374

En ésta se ha denotado por $u(\vec{x}, t)$ a la solución analítica del problema y \tilde{u} la estimada por los métodos numéricos para $\vec{x} \in \Omega$ y $t \in [0, T]$.

CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha desarrollado un nuevo esquema numérico conservativo para resolver la ecuación de difusión en 2-D. El análisis cualitativo de la convergencia muestra evidencias claras de tasas de convergencia cuadráticas, el cual es el mejor resultado posible para este tipo de esquema. Ésta no es una propiedad obvia debido a su error de truncación de primer orden en los nodos internos cercanos al borde.

El análisis presentado en este artículo constituye una extensión en la aplicación del método conservativo reportado y formalizado por Arteaga (2008). El análisis en varias variables fue restringido al caso bidimensional por ser el más sencillo. La extensión del método a varias variables no incorpora ningún elemento adicional de estudio, pero requiere expresiones más extensas.

Las principales ventajas del esquema numérico presentado en el presente artículo son: es conservativo; su formulación en los nodos internos y en la frontera es consistente; su implementación numérica es más robusta que para los esquemas de diferencias finitas de segundo orden ya que no se basa en técnicas como nodos fantasmas; su formulación es rigurosa y consistente con el planteamiento físico del problema de valor en la frontera ya que no discretiza la ecuación diferencial en el borde como suele hacerse con los métodos de diferencias finitas estándar; su implementación computacional es fácil y el tratamiento versátil de las condiciones de borde permite resolver con el mismo programa, problemas de valor en la frontera con condiciones del tipo Dirichlet, Neumann y Robin, y combinaciones de éstas para varios sectores de la frontera.

El nuevo método conservativo fue aplicado a dos casos, ejemplo claves por sus dificultades en la resolución con esquemas numéricos. Los resultados indicaron sus principales ventajas sobre el más común y preciso método de diferencias finitas estándar de segundo orden.

REFERENCIAS

CASTILLO, J. E. & GRONE R. D. (2003). *A Matrix Analysis Approach to Higher Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law*, SIAM J. Matrix Analysis and Applications. Vol. 25, 128.

GUEVARA-JORDAN, J. M., FREITES-VILLEGAS, M., ROJAS, S., CASTILLO, J. E. (2005). *A New Second Order Finite Differences Conservative Scheme*, Divulgaciones Matemáticas, Zulia. Vol. 13, 107.

POWER, H. (1995). *Boundary Element Applications in Fluid Mechanics*, WIT Press.

ARTEAGA-ARISPE, J., GUEVARA-JORDAN. (s.a). *Conservative Finite Difference Scheme for Static Diffusion Equation*. Divulgaciones Matemáticas, Zulia, Venezuela. Aceptado para publicación.

ZIENCKIEWICZ & TAYLOR. (1994). *El Método de los Elementos Finitos*, Mc Graw-Hill.

CASTILLO, J. E., YASUDA, M. (2005). *Linear System Arising for Second Order Mimetic Divergent and Gradient Discretizations*, Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. Vol. 4, pag. 67.

ARTEAGA, J. (2008). *Método Conservativo para la Ecuación de Difusión en 2D*. Tesis de Maestría (en preparación). Facultad de Ingeniería, U.C.V.

HYMAN, J., MOREL, J., SHASHKOV, M., STEINBERG, S. (2002). *Mimetic Finite Difference Methods for Diffusion Equations*, Computational Geosciences. Vol. 6, 333.

MORTON, K. W. & MAYERS, D. F. (1994). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press.

SMITH, G. D. (1986). *Numerical Solutions of Partial Differential Equations: Finite Differences Methods*, Oxford University Press.

LAPIDUS, L. & PINDER, G. F. (1983), *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, Wiley, NY.

GUEVARA-JORDAN, J. M. (2005). Sobre los Esquemas Miméticos en Diferencias Finitas para la Ecuación Estática de Difusión, *Trabajo de Ascenso*, UCV Caracas, Venezuela.

SHASHKOV, M. J. & STEINBERG, S. (1995). *Support Operators Finite Difference Algorithm for General Elliptic Problems*, Journal of Computational Physics. Vol. 118, 131.

HYMAN, J. M. & SHASHKOV, M. J. (1998). *The Approximation of Boundary Conditions for Mimetic Finite Difference Methods* Operators, Computers & Mathematics with Applications. Vol. 36, 79.

FREITES, M. A. (2004). *Un estudio comparativo de los métodos miméticos para la ecuación estacionaria de difusión*. Tesis de grado. Facultad de Ciencias (U.C.V., Caracas).