

CONTROL ROBUSTO DE UN SISTEMA LINEAL DE PARÁMETROS VARIANTES (LPV): UN ENFOQUE DE LAS DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES (LMI)

PEDRO ANTONIO TEPPA GARRÁN

Universidad Simón Bolívar, Departamento de Procesos y Sistemas, Apartado 89000,
Valle de Sartenejas, Baruta, Edo. Miranda, Venezuela. e-mail: teppa@usb.ve

Recibido: abril de 2007

Recibido en forma final revisado: febrero de 2008

RESUMEN

Este trabajo considera el control robusto de un sistema lineal de parámetros variantes (LPV). El sistema LPV es representado en el espacio de estado a través de incertidumbres politópicas convexas, lo que permite el empleo de la noción de estabilidad cuadrática. Tal caracterización abre la puerta de métodos numéricos muy poderosos para la síntesis de leyes de control dentro del formalismo de las desigualdades matriciales lineales (LMI). Son tratados los problemas de estabilidad, estabilizabilidad, reubicación de polos, seguimiento, diseño de observadores y realimentación estática de la salida. El problema de realimentación estática de la salida, bajo la hipótesis de que la matriz de salida es constante en todos los vértices del politopo de variación paramétrica, se expresa novedosamente como la solución de un conjunto de LMI's.

Palabras clave: Sistemas Lineales de Parámetros Variantes (LPV), Incertidumbre Politópica, Estabilidad Cuadrática, Desigualdades Matriciales Lineales (LMI).

ROBUST CONTROL OF A LINEAR PARAMETER VARYING (LPV) SYSTEM: A LINEAR MATRIX INEQUALITIES (LMI) APPROACH

ABSTRACT

This paper presents the robust control of a linear parameter varying (LPV) system. The LPV system is represented by a polytopic uncertain linear system. Such a model allows the use of an approach based on the quadratic stability concept. This scheme opens the door to powerful numerical methods for the synthesis of control laws using linear matrix inequalities (LMI). We consider the problems of stability, stabilizability, pole assignment, tracking, observer design and static output feedback. In the static output feedback problem it is assumed that the output matrices are constants in every vertex of the parameter varying polytopic. This assumption enables a static output feedback gain to be obtained by a new LMI synthesis procedure.

Keywords: Linear Parameter Varying (LPV) Systems, Polytopic Uncertainty, Quadratic Stability, Linear Matrix Inequalities (LMI).

INTRODUCCIÓN

Existen tres clases importantes de sistemas lineales: los sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV), los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), y los sistemas lineales con parámetros variantes (LPV).

Un sistema LTV (Rugh, 1995) es descrito en el espacio de estado por la ecuación:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1)$$

donde:

$x: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, $u: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^m$ es el vector de control, $A: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $B: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times m}$ es la matriz de entrada y $t \in [0, \infty]$ es la variable independiente de tiempo. La solución de (1) para el sistema LTV autónomo puede expresarse empleando la matriz transición de estado $\Phi(t, t_0)$ y el estado inicial $x_0 = x(t_0)$ como:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0. \quad (2)$$

Utilizando la serie de Peano – Baker la matriz transición de estado admite el desarrollo:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= I + \int_{t_0}^t A(\alpha_1) d\alpha_1 \\ &+ \int_{t_0}^t A(\alpha_1) \int_{t_0}^{\alpha_1} A(\alpha_2) d\alpha_2 d\alpha_1 \\ &+ \int_{t_0}^t A(\alpha_1) \int_{t_0}^{\alpha_1} A(\alpha_2) \int_{t_0}^{\alpha_2} A(\alpha_3) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \Lambda \end{aligned} \quad (3)$$

Las potenciales aplicaciones de los sistemas LTV están restringidas a problemas con una estructura particular (por ejemplo, la matriz de estado satisface una condición global de Lipschitz, es T-periódica, entre otros). Por tal razón, los sistemas LTV no tienen asociada una teoría de análisis y síntesis en un nivel de madurez como la encontrada en los sistemas LTI. Estos últimos constituyen la clase que aparece con mayor frecuencia en la literatura especializada de los sistemas de control. Alrededor de estos se ha articulado una exitosa y autocontenida teoría (Brogan, 1991; Chen, 1999; Rugh, 1995).

Cuando las matrices de estado y de entrada son independientes del tiempo en (1), se tendrá un sistema LTI descrito en variables de estado, como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (4)$$

En este caso la matriz transición de estado se reduce a la matriz exponencial:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^k}{k!}. \quad (5)$$

Por su parte, un sistema LPV (Biannic, 1996 y Courties, 1999) depende explícitamente de un vector de parámetros variante en el tiempo $\theta(t)$ que puede medirse en tiempo real. El mismo es descrito para todo $t \geq 0$ por la ecuación:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \quad (6)$$

con:

$$\theta: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^r, A: \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ y } B: \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times m}.$$

Tal modelo permite tomar en cuenta las variaciones paramétricas de un sistema dinámico (temperatura, masa, concentración, velocidad, presión dinámica, ángulo de ataque en un avión, entre otros). El modelo evoluciona en función de una trayectoria paramétrica admisible. Esta última es tal que cada uno de sus puntos pertenece en todo instante

de tiempo al conjunto compacto $\Omega \subset \mathfrak{R}^r$, esto es, el vector de parámetros satisface en todo momento la condición:

$$\theta(t) \in \Omega = \left\{ \theta(t) : \underline{\theta}_i \leq \theta_i(t) \leq \bar{\theta}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \right\} \subset \mathfrak{R}^r, \quad (7)$$

con $\underline{\theta}_i$ y $\bar{\theta}_i$ las cotas inferior y superior del parámetro $\theta_i(t)$. El sistema LPV puede interpretarse como una generalización de un sistema LTI cuando la trayectoria paramétrica admisible es constante $\theta(t) = \theta_0$. Igualmente, un sistema LPV puede verse como una generalización de un sistema LTV. En este último caso, para una trayectoria dada $\sigma(t)$ del parámetro $\theta(t)$ en Ω , el sistema LPV autónomo se escribe como:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + \tilde{A}(t)x(t), \quad (8)$$

cuya solución es:

$$x(t) = \Phi_{\sigma(t)}(t, t_0)x_0. \quad (9)$$

De donde se desprende que el sistema LPV tendrá, bajo estas condiciones, propiedades similares a los sistemas LTV. La figura 1 resume las relaciones existentes entre las tres clases de sistemas lineales.

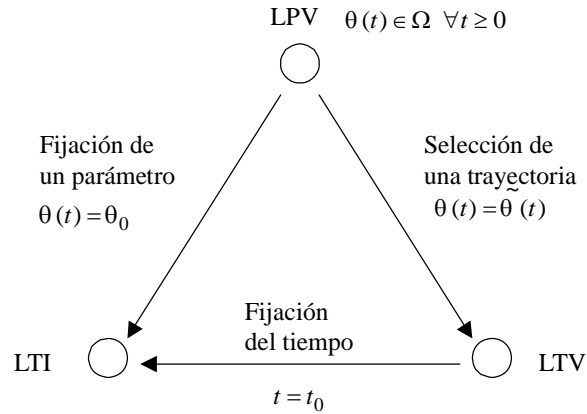


Figura 1. Diferentes modelos lineales.

Un sistema no lineal caracterizado por la ecuación:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (10)$$

con:

$f: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una función vectorial no lineal, puede representarse a través de un sistema LPV, en este caso se habla de un sistema cuasi-LPV (Rugh *et al.* 2000). Este último modelo está sujeto a las hipótesis siguientes (Bendtsen *et al.* 2002 y Bruzelius *et al.* 2002):

- (i) Existe una relación entre los parámetros y los estados $\theta = \sigma(x) \in \Omega$ tal que la descripción LPV y el sistema no lineal son iguales.
- (ii) La relación $\sigma(x)$ depende solamente de las señales medibles.
- (iii) La relación $\sigma(x)$ es conocida. La primera condición asegura que las trayectorias del sistema no lineal también son trayectorias del modelo cuasi-LPV, por otra parte, las condiciones restantes garantizan la disponibilidad del vector de parámetros a los efectos de permitir la síntesis de controladores.

Los sistemas LPV (y cuasi-LPV) pueden dar origen a tres interpretaciones (Apkarian *et al.* 1995b):

- (i) Pueden verse como sistemas lineales sujetos a incertidumbres $\theta(t)$ y en consecuencia, la síntesis de un controlador debe abordarse desde la perspectiva del control robusto.
- (ii) Pueden verse como una familia de sistemas de parámetros variantes donde los valores de los parámetros pueden explotarse directamente en la estructura de control. Esto último conduce a un esquema de programación de ganancias (Rugh *et al.* 2000 y Shamma, 1992).
- (iii) Pueden combinarse las dos situaciones anteriores.

Este trabajo considera el control de un sistema LPV apoyándose en la primera interpretación. La necesidad de una metodología de síntesis robusta para sistemas LPV fue planteada originalmente por Shamma (1992). Por otra parte, en Apkarian *et al.* (1995a); Becker *et al.* (1993); Becker *et al.* (1994a) y Becker *et al.* (1994b) el método de síntesis de controladores H_∞ es aplicado a los sistemas LPV empleando la teoría de estabilidad de Lyapunov y el formalismo de las LMI's. Estas ideas se extendieron en (Fromion *et al.* 1996) para el análisis y en (Wu *et al.* 1996), para la síntesis a través del empleo de funciones de Lyapunov dependientes de parámetros, obteniéndose una metodología potencialmente menos conservadora que, sin embargo, enfrenta la dificultad de que la solución, en general, sólo puede encontrarse de manera aproximada. El método H_∞ , aunque es el más utilizado, no es el único que permite la síntesis de controladores LPV en un formato LMI, también se utiliza el método LQG (Choi *et al.* 2001) y la síntesis a través de valores singulares estructurados (síntesis μ) (Helmerson, 1995). Los Sistemas LPV modelados a través de una dependencia de fracciones lineales en el vector de parámetros han sido estudiados en Helmerson (1995); Packard (1994); Scherer (2001) y Scorletti *et al.* (1998). Este

tipo de dependencia ha conducido a condiciones LMI manejables desde un punto de vista computacional.

En este trabajo, el sistema LPV se representa en el espacio de estado a través de incertidumbres politópicas convexas (Geromel *et al.* 1991). Lo que da pie a la utilización de la noción de estabilidad cuadrática (Barmish, 1985; Bernussou *et al.* 1993; Dias *et al.* 1990). Los resultados obtenidos se expresan en términos de un conjunto reducido de condiciones LMI y de pocas incógnitas, por lo que el manejo computacional es bastante eficiente. Se estudian los problemas de estabilidad, estabilizabilidad, reubicación de polos, seguimiento, diseño de observadores y realimentación estática de la salida. El problema de realimentación estática de la salida, en su forma natural, conduce a desigualdades matriciales bilineales (BMI) por lo que no se pueden aplicar los poderosos métodos numéricos de optimización que existen hoy en día (Boyd *et al.* 1994).

En este trabajo, bajo la suposición de que las matrices de salida permanecen constantes dentro del dominio de variación paramétrica, se propone un método de síntesis que permite obtener la ganancia de realimentación estática de la salida del compensador a través de la solución de un conjunto de LMI's.

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección II se trata la representación de un sistema LPV a través de un sistema incierto politópico; igualmente se incluyen resultados básicos de estabilidad cuadrática y estabilizabilidad. La sección III considera el problema de desempeño mediante la reubicación de polos en una región del plano complejo, así como, el problema de seguimiento de una señal de referencia. La sección IV estudia el problema de información parcial; esto es, cuando no se dispone de la totalidad del vector de estado. En este contexto se ofrecen resultados para el diseño de observadores y la síntesis de un controlador por realimentación estática de la salida. Algunos ejemplos numéricos sencillos son incorporados en las distintas secciones con el objeto de ilustrar los métodos propuestos, y adicionalmente, en la sección V se contempla una aplicación un poco más elaborada.

REPRESENTACIÓN POLITÓPICA DEL SISTEMA LPV

La robustez es la capacidad de una ley de control de asegurar un nivel de invariabilidad en el desempeño de un sistema de control (estabilidad como mínimo) frente a las imperfecciones del modelo (incertidumbre, aproximación, reducción del modelo, entre otros). Dentro de las metodologías fundamentales en el tópico de la robustez, y considerando solamente aquellas que han generado una escuela de

pensamiento, pueden destacarse tres, mencionadas a continuación sin orden de importancia.

La primera, iniciada por los trabajos del matemático ruso Kharitonov (1978), postula criterios de estabilidad para sistemas lineales con incertidumbre paramétrica de tipo intervalo. Muy popular y fecunda es la metodología , la cual inicialmente desarrollada en el dominio frecuencial ha sido traducida al dominio temporal (representación de estado). Finalmente, tenemos la metodología de estabilidad cuadrática (Barmish, 1985; Bernussou *et al.* 1993; Dias *et al.* 1990), que es donde se inscribe el enfoque robusto desarrollado en este trabajo. El objetivo de la misma consiste en la estabilidad y el control de sistemas lineales inciertos descritos por la ecuación:

$$x(t) = A(\cdot)x(t) + B(\cdot)u(t), \quad (11)$$

las matrices $A(\cdot)$ y $B(\cdot)$ son inciertas y pertenecen a los conjuntos D_A y D_B respectivamente. El sistema (11) se dice que es estabilizable si existe una ley de control que lo hace estable. A continuación se ofrecen condiciones de estabilidad para sistemas lineales no forzados, inicialmente para sistemas precisamente conocidos e inmediatamente para sistemas inciertos.

Definición 1. El sistema no forzado precisamente conocido:

$$x(t) = Ax(t), \quad (12)$$

es estable si y solamente si existe una matriz definida positiva $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que,

$$L(A, P) < 0, \quad (13)$$

donde:

$$L(A, P) = A^T P + PA.$$

Como consecuencia de la definición anterior, se tiene la condición de estabilidad dual siguiente:

El sistema (12) es estable si y solamente si existe una matriz definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que:

$$L(A^T, S) < 0 \quad (14)$$

$$\text{y } P = S^{-1} \text{ satisface } L(A, P) < 0.$$

Los resultados anteriores son bien conocidos dentro de la teoría de estabilidad de sistemas lineales (ver por ejemplo, Kwakernaak *et al.* 1972). Si ahora consideramos la extensión

de las condiciones de estabilidad cuadrática para el sistema incierto autónomo tenemos:

Definición 2. El sistema incierto autónomo (12) es cuadráticamente estable si y solo si existe una matriz definida positiva $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que:

$$L(A(\cdot), P) < 0, \quad (15)$$

para toda $A(\cdot) \in D_A$.

La condición dual implica la existencia de $S \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$ tal que $L(A^T(\cdot), S) < 0$ para toda $A(\cdot) \in D_A$. Puede demostrarse que en ese caso existe una matriz $P > 0$ ($P = S^{-1}$) que satisface (15).

Con el objetivo de desarrollar la metodología robusta para controlar sistemas LPV se considera un sistema de esta clase descrito en la ecuación (6). Esto es, las matrices A y B dependen de un vector de parámetros variante en el tiempo $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \Lambda \ \theta_r(t)]^T \in \Omega \subset \mathfrak{R}^r$.

Adicionalmente se considera un conjunto de vectores, que representan las combinaciones extremas de los parámetros en el interior del conjunto compacto definido en la ecuación (7), dados por:

$$\theta^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1^{(i)}(t) \\ \text{M} \\ \theta_r^{(i)}(t) \end{bmatrix} \quad i = 1, \Lambda, N. \quad (16)$$

A partir de los vectores $\{\theta^{(i)}\}_{i=1}^N$ se construyen modelos locales (LTI) para el sistema LPV haciendo:

$$(A_i, B_i) = (A(\theta^{(i)}), B(\theta^{(i)})), \quad i = 1, \Lambda, N. \quad (17)$$

Por lo que ahora es posible describir el sistema LPV dentro del conjunto compacto Ω a través del siguiente sistema politópico:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A \in D_A, B \in D_B. \quad (18)$$

con:

y D_B dominios de incertidumbre politópica definidos

como:

$$A \in D_A \\ \hat{=} \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (19)$$

$$B \in D_B \\ \hat{=} \left\{ B \in \mathfrak{R}^{n \times m} : B = \sum_{i=1}^N \gamma_i B_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1 \right\} \quad (20)$$

Comentario 1. Para los dominios de incertidumbre politópico expresados arriba, es equivalente la notación :

$$B \in C_0 \{B_1, B_2, \dots, B_N\} \text{ donde:}$$

C_0 denota el cascarón convexo.

Ejemplo 1

Sea un sistema LPV con dos parámetros inciertos:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_1(t) & -\theta_2(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (21)$$

tales que:

$\forall t \geq 0$, $\theta_1(t) \in [-1, 1]$ y $\theta_2(t) \in [-2, 2]$. El conjunto de variación paramétrica se muestra en la figura 2.

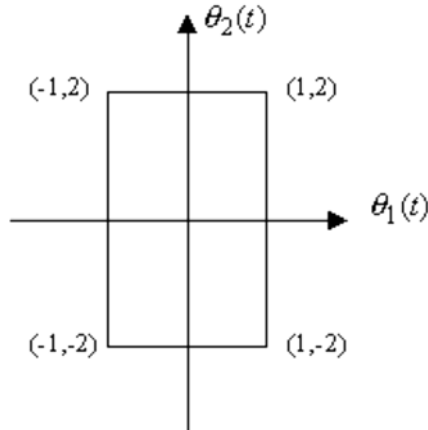


Figura 2. Conjunto compacto de variación de los parámetros $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ del ejemplo 1.

Las combinaciones extremas de los parámetros corresponden a:

$$\left\{ \theta^{(i)} \right\}_{i=1}^4 = \left\{ \theta_1^{(i)} \right\}_{i=1}^4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por lo que los sistemas LTI asociados a cada vértice del conjunto Ω_2 son:

$$\{A_i, B_i\} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (22)$$

En lo que sigue se trata la estabilidad cuadrática del sistema politópico no forzado.

Teorema 1. El sistema $x(t) = Ax(t)$, $A \in D_A$ es cuadráticamente estable si y solo si existe una matriz $x(t) = Ax(t)$, $A \in D_A$ tal que $A_i^T P + PA_i < 0$, $i = 1, \dots, N$.

Demostración. La estabilidad cuadrática requiere que todas las trayectorias de estado converjan al estado de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. Una condición necesaria y suficiente es la existencia de una función de Lyapunov definida positiva $V(x) = x^T P x$ decreciente a lo largo de las trayectorias de estado. Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= x^T P x + x^T P x < 0, \quad A \in D_A \\ &\Leftrightarrow x^T [A^T P + PA] x < 0, \quad A \in D_A \\ &\Leftrightarrow A^T P + PA < 0, \quad A \in D_A \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right)^T P + P \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i^T P + PA_i) < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \\ &\Leftrightarrow A_i^T P + PA_i < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Si se multiplica la ecuación (23) a la izquierda y a la derecha por la matriz $P^{-1} > 0$ tenemos la condición dual de estabilidad cuadrática siguiente:

$$S = P^{-1} > 0, \quad S A_i^T + A_i S < 0 \quad (24)$$

A continuación se estudia bajo qué condiciones el sistema incierto politópico (18), (19) y (20) que representa al sistema LPV (6) en el conjunto compacto de variación paramétrica (7), es cuadráticamente estabilizable a través de una ley de control de realimentación de estado dada por:

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad (25)$$

A ese fin tenemos el resultado siguiente (Dias *et al.*, 1990 y Teppa, 2003).

Teorema 2. El sistema (18), (19) y (20) es cuadráticamente estabilizable por (25) si y solo si existe una matriz $S = S^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$ y una matriz $R \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tales que:

$$SA_i^T + A_i S + R^T B_i^T + RB_i < 0, \quad i = 1, \Lambda, N, \quad (26)$$

con:

$$K = RS^{-1} \text{ la matriz de realimentación de estado.}$$

La demostración del Teorema 2 es similar a la anterior. Es evidente que la condición de estabilizabilidad cuadrática (26) corresponde a un problema LMI de factibilidad en las variables S y R (Boyd, 1994).

REUBICACIÓN DE POLOS Y SEGUIMIENTO

Es usual evaluar el desempeño de un sistema de control a través de algunos indicadores en la respuesta transitoria (Tiempo de Establecimiento, Tiempo de Subida, Amortiguamiento, etc.). Estos indicadores están íntimamente relacionados a la localización de los autovalores a lazo cerrado en ciertas regiones del plano complejo. En esta sección nos concentramos con el problema de asignación de autovalores del sistema incierto politópico (18), (19) y (20). Inicialmente se define lo que es una región LMI (Chilali *et al.* 1995).

Definición 3. Una región del plano complejo se denomina Región LMI de orden k si existe una matriz simétrica $\Phi \in \mathfrak{R}^{k \times k}$ y una matriz $\Psi \in \mathfrak{R}^{k \times k}$ tales que:

$$R = \{z \in \mathbb{C} : f_R(z) < 0\} \quad (27)$$

$$f_R(z) = \Phi + \Psi z + \Psi^T \bar{z} \quad (28)$$

con f_R tomando sus valores en el espacio de matrices hermitianas de orden k (\mathbb{C} denota el cuerpo de números complejos y (\cdot) la operación de conjugada).

La región LMI es convexa y simétrica en relación al eje real del plano complejo. (Chilali *et al.* 1995) definieron una condición necesaria y suficiente de pertenencia de los autovalores de una matriz a una región LMI.

Teorema 3. Sea una matriz $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y R una región LMI (27-28). Los autovalores de la matriz A están contenidos en el interior de la región R si y solo si existe una matriz simétrica definida positiva $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que:

$$M_R(A, P) = \Phi \otimes P + \Psi \otimes (AP) + \Psi^T \otimes (AP)^T < 0,$$

donde:

\otimes denota el producto de Kronecker (Brogan, 1991).

La zona del plano complejo donde se localizan los autovalores define el desempeño del sistema en términos de velocidad de respuesta y amortiguamiento. En este trabajo se emplea la región de la figura 3. El parámetro α regula la velocidad de la respuesta, β el amortiguamiento y γ las dinámicas más rápidas, esto último es un factor crítico en la especificación de los actuadores del sistema de control. Para la región de la figura 3, el Teorema 3 se particulariza en la forma del Teorema 4 (Chilali *et al.* 1995).

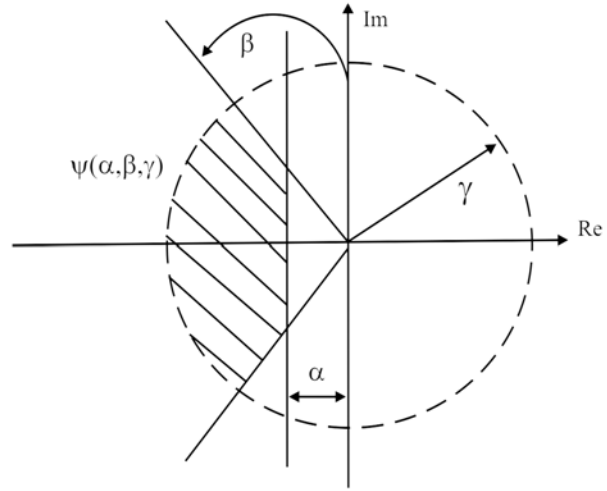


Figura 3. Región LMI

Teorema 4. Sea $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $R(\alpha, \beta, \gamma)$ una región LMI (figura 3). Los autovalores de la matriz A están contenidos en el interior de la región $R(\alpha, \beta, \gamma)$ si y solo si existe una matriz simétrica definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que:

$$AS + SA^T + 2\alpha < 0, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma S & AS \\ SA^T & -\gamma S \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\beta(AS + SA^T) & \cos\beta(AS - SA^T) \\ \cos\beta(SA^T - AS) & \text{sen}\beta(AS + SA^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

Las condiciones de asignación de autovalores se incorporan a las LMI's que resuelven el problema de estabilizabilidad a través de la realimentación de estado (Teorema 2). De esta forma se efectúa la síntesis de un controlador que estabiliza asintóticamente el sistema y adicionalmente cumple con unos requisitos de desempeño en su respuesta dinámica. Para que el sistema (18-20) posea sus autovalores en la región LMI de la figura 3 es necesario sustituir la matriz A en las

ecuaciones (29-31) por la matriz a lazo cerrado $A + BK$. Tal sustitución se refleja en el Teorema 5.

Teorema 5. Existe una realimentación de estado (25) que estabiliza el sistema (18-20) y coloca sus autovalores en el interior de la región LMI $R(\alpha, \beta, \gamma)$ (figura 3) si y solo si existen matrices $S = S^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$ y $R \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que satisfacen las LMI's.

$$A_i S + S A_i^T + B_i R + R^T B_i + 2\alpha < 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma S & A_i S + B_i R \\ S A_i^T + R^T B_i^T & -\gamma S \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\beta(A_i S + S A_i^T + B_i R + R^T B_i) & \psi(1,2) \\ \text{cos}\beta(S A_i^T + R^T B_i - A_i S - B_i R) & \psi(2,2) \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

con:

$$\begin{aligned} \psi(1,2) &= \text{cos}\beta(A_i S + B_i R - S A_i^T - R^T B_i), \\ \psi(2,2) &= \text{sen}\beta(A_i S + S A_i^T + B_i R + R^T B_i), \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \Lambda, N$. La ganancia de realimentación de estado viene dada por

Ejemplo 2

Para el sistema LPV del Ejemplo 1 (21) se va a efectuar la síntesis de una realimentación de estado que estabilice el sistema (los sistemas asociados a los vértices 2, 3 y 4 son inestables) y coloque los polos a lazo cerrado en una región definida del plano complejo. Para efectos de la simulación se supone que el vector de parámetros es:

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(w_1 t) \\ 2 \cos(w_2 t) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

como se aprecia en la figura 4.

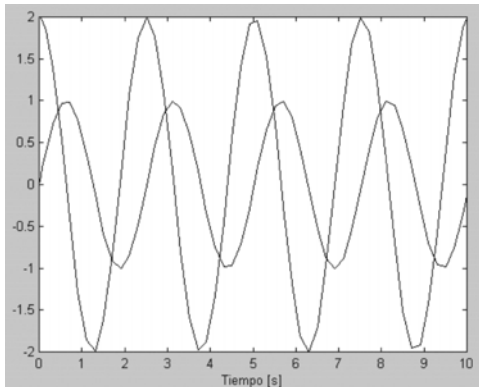


Figura 4. Variación de parámetros inciertos dentro de las cotas previstas.

En este caso, el sistema LPV (21) se representará en el interior del conjunto de variación paramétrica de la figura 2 a través del sistema politópico:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (36a)$$

$$A \in D_A = \left\{ A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2} : A = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1 \right\}. \quad (36b)$$

donde:

las matrices A_i , $i = 1, \Lambda, 4$ son dadas en la ecuación (22). A continuación es empleado el Teorema 5 con el objeto de determinar la matriz $K \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$ tal que los polos a lazo cerrado del sistema (21) con $u(t) = Kx(t)$ se encuentren en el interior de la región del plano complejo $R(\alpha, \beta, \gamma) = R(4, 10, \pi/4)$. La resolución del problema LMI de factibilidad proporciona:

$$\begin{aligned} K &= [-44.5076 \quad -11.8704], \\ S &= \begin{bmatrix} 0.0361 & -0.1904 \\ -0.1904 & 1.5412 \end{bmatrix}, \quad R = [0.6525 \quad -9.8209] \end{aligned}$$

Los polos a lazo cerrado se encuentran en el interior de la región escogida como se ilustra en la figura 5.

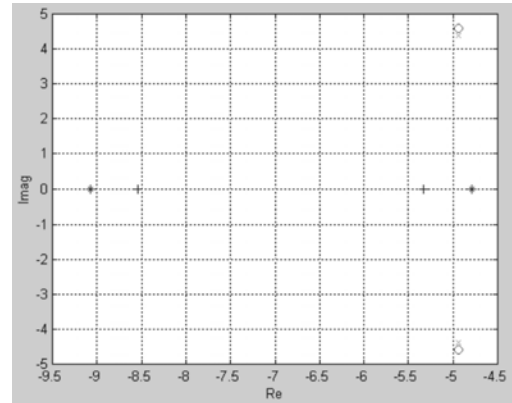


Figura 5. Polos a lazo cerrado del sistema politópico.

La figura 6 muestra la evolución del vector de estado hacia la posición de equilibrio para una condición inicial

$$x(0) = [-2 \quad 10]^T.$$

El tópico final considerado en esta sección corresponde al problema de seguimiento. A ese fin, el sistema LPV es descrito para todo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) \end{cases} \quad (37)$$

$$\theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t)] \in \Omega \subset \mathfrak{R}^2$$

donde:

es el vector de salida y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ la matriz de salida. Retomando la hipótesis (sección II) de que las matrices del sistema LPV evolucionan en el interior del conjunto compacto (7) es posible describir el sistema LPV a través de un modelo politópico:

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & 0 \end{bmatrix} \in D_{S(\theta)} \quad (38)$$

$$D_{S(\theta)} = \left\{ S(\theta) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(\theta) S_i, \lambda_i(\theta) \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i(\theta) = 1 \right\} \quad (39)$$

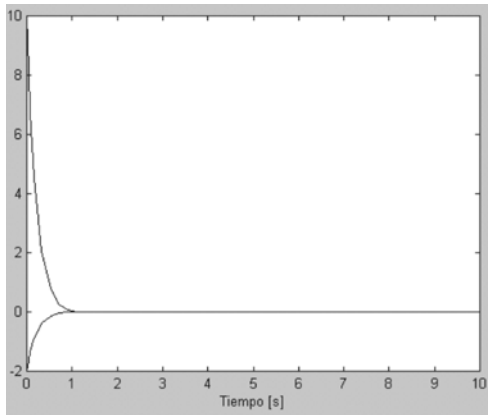


Figura 6. Trayectorias de estado para el sistema del ejemplo 2.

El problema de seguimiento consiste en determinar una realimentación de estado (25) de manera que la salida siga asintóticamente una señal de referencia $r(t) \in \mathbb{R}^p$. El seguimiento es un problema de arquitectura (estructura del sistema de control) que debe forzarse en la solución. En ese sentido el sistema LPV se modifica como se indica en la figura 7, con la inclusión de un integrador que garantiza el seguimiento con error de estado estacionario nulo de señales constantes. Esto no es más que una aplicación del principio del modelo interno (Francis *et al.* 1975) que puede ser extendido fácilmente a otra clase de señales (rampas, parábolas, sinusoides, etc.).

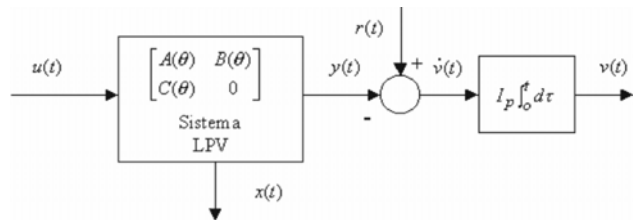


Figura 7. Sistema LPV aumentado para resolver el problema de seguimiento.

El sistema LPV aumentado por el vector de estado $[x(t) \ v(t)]^T$ es descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta) x(t) + B(\theta) v(t) \\ \dot{v}(t) &= C(\theta) x(t) + 0 v(t) \\ &= B(\theta) u(t) + 0 r(t) \\ &= 0 u(t) + I_p r(t) \end{aligned} \quad (40)$$

Considerando los valores extremos del vector θ en (7) es posible construir un sistema politópico aumentado dado por:

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (41)$$

con:

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}^T, \quad (42)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C_i & 0 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1, L, N \quad (43)$$

Los teoremas de estabilidad, estabilizabilidad y asignación de autovalores desarrollados previamente pueden modificarse con facilidad para incluir el problema de seguimiento. Basta reemplazar las matrices A_i y B_i por las matrices aumentadas A_a y B_a de la ecuación (43).

Comentario 2. La ganancia aumentada de realimentación $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ resulta en $K_a = [K \ K_v]$ con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $K_v \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

No es difícil incorporar otro tipo de restricciones LMI dentro de los problemas planteados en esta sección. Ver por ejemplo, Teppa (2003) para el caso de la minimización de una norma de tipo H_2 o H_∞ .

PROBLEMA DE INFORMACIÓN PARCIAL

En esta sección se trata el problema de información parcial a través de una estrategia del tipo compensador dinámico que combina el cálculo de un observador y una realimentación de estado y una segunda estrategia basada en la realimentación estática de la salida. En la primera estrategia se considera un observador (Courties *et al.* 1999) descrito para todo $t \geq 0$ por la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\theta) \hat{x}(t) + B(\theta) u(t) \\ L y(t) &= C(\theta) \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (44)$$

con:

$\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ el estimado del vector de estado. El cálculo de la

ganancia $L \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ consiste en la resolución de un problema de detectabilidad robusta (García *et al.* 1991).

Teorema 6. El sistema (37-39) es cuadráticamente detectable si y solo si existe una matriz $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva y una matriz $R \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ tales que:

$$A_i^T P + P A_i - C_i^T R^T - R C_i < 0 \quad (45)$$

$i = 1, \Lambda, N$. La ganancia del observador esta dada por $L = P^{-1} R$.

Demostración La detectabilidad cuadrática exige la existencia de una matriz $P = P^T > 0$ tal que $\forall \theta(t) \in \Omega$ se cumple:

$$A(\theta) - LC(\theta) \begin{bmatrix} T & P & P & A(\theta) & LC(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

La ecuación (46) es lineal con respecto a las matrices $A(\theta)$ y $C(\theta)$ por lo que puede aplicarse en cada uno de los vértices del politopo $D_{S(\theta)}$ (39) resultando:

$$[A_i - LC_i]^T P + P[A_i - LC_i] < 0, \quad i = 1, \Lambda, N \quad (47)$$

Haciendo $R = PL$ se obtiene la ecuación (45).

El esquema de control definitivo se muestra en la figura 8 donde también se ha incluido un integrador para garantizar el seguimiento de señales de referencia.

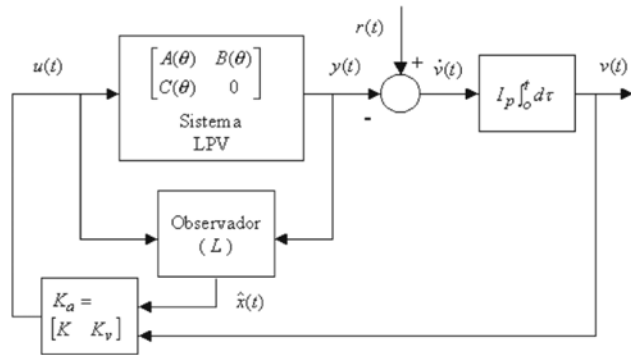


Figura 8. Control del sistema LPV a través de un compensador dinámico basado en un observador de estado.

Se finaliza esta sección considerando el problema de realimentación estática de la salida. En este caso se supone que la matriz de salida C es constante ($C = C_i, \forall i = 1, \Lambda, N$) y posee rango fila completo. La ley de control de realimentación estática de la salida tiene la forma:

$$u(t) = Fy(t) = FCx(t), \quad (48)$$

con:

$F \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ la ganancia de realimentación estática de la salida que se determina como sigue:

Teorema 7. El sistema LPV (18-20) con ecuación de salida $y(t) = Cx(t)$ donde la matriz de salida C es constante ($C = C_i, \forall i = 1, \Lambda, N$) y posee rango fila completo es cuadráticamente estabilizable por (48) si y solo si existe una matriz $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva y una matriz $R \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ tales que:

$$A_i S + S A_i^T + B_i R C + C^T R^T B_i^T < 0, \quad (49)$$

$$i = 1, \Lambda, N$$

Demostración La estabilidad cuadrática exige la existencia de una matriz común $S = S^T > 0$, en todos los vértices del politopo de variación paramétrica, que verifique la condición:

$$(A_i + B_i F C) S + S (A_i + B_i F C)^T < 0, \quad \forall i \quad (50)$$

Reacomodando la ecuación (50) resulta:

$$A_i S + S A_i^T + B_i F C S + S C^T F^T B_i^T < 0, \quad \forall i \quad (51)$$

Efectuando el cambio de variable $CS = QC$ se obtiene

$$A_i S + S A_i^T + B_i F Q C + C^T Q^T F^T B_i^T < 0, \quad \forall i \quad (52)$$

Realizando ahora el cambio de variable $FQ = R$ en (52) queda establecido el teorema.

Comentario 3. La reconstrucción del compensador por realimentación estática de la salida se efectúa de la siguiente forma: dado que la matriz C posee rango fila completo, de la ecuación $CS = QC$ se obtiene una matriz no singular $Q = CSC^T (CC^T)^{-1}$ tal que la ganancia de realimentación estática de la salida resulta en $F = RQ^{-1}$.

Ejemplo 3. Sea un sistema con los vértices del politopo iguales a:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -14 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$C_i = [1 \quad 0], \quad i = 1, 2. \quad (55)$$

Resolviendo el problema de factibilidad LMI del Teorema 7 resulta $F = -4.2451$, ganancia que efectivamente estabiliza el sistema, como puede verificarse al calcular los autovalores de la matriz a lazo cerrado $(A_i + B_i FC)$, $i = 1, 2$.

EJEMPLO NUMÉRICO

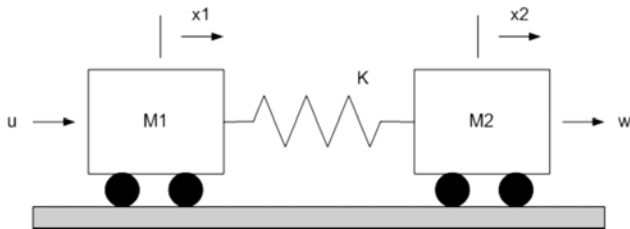
Considere el sistema masa – resorte (Wie *et al.* 1992) de la figura 9. La representación en variables de estado viene dada por:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{x}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ \dot{x}_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_1 & K M_1 & K M_1 & 0 & 0 & x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & K M_2 & K M_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 \end{array} \quad (56)$$

$$z = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ x \ u$$

con:

$x = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$ el vector de estado y $w(t)$ una señal de perturbación. Los parámetros M_1, M_2 y K son inciertos, con cotas de incertidumbre dadas por $K \in [0.9, 1.1]$, $M_1 \in [1.5, 1.7]$ y $M_2 \in [1.0, 1.4]$.



La incertidumbre es modelada a través de un politopo de ocho vértices $A \in C_0\{A_1, \Lambda, A_8\}$ (figura 10) correspondientes a las combinaciones extremas de los parámetros inciertos del sistema. En la figura 11 se ilustra la evolución de los polos a lazo abierto en el dominio convexo de variación de los parámetros inciertos, evidenciándose la inestabilidad del sistema para algunos valores de los parámetros. El sistema masa-resorte se implementa en forma LPV haciendo $M_1(t) = 1.6 + 0.1\text{Cos}(wt)$, $M_2(t) = 1.2 + 0.2\text{Cos}(wt)$ y $K(t) = 1 + 0.1\text{Cos}(wt)$. Se va a considerar el problema de seguimiento de una señal de referencia cuadrada a través de la técnica de reubicación de polos. La evolución de los polos a lazo cerrado para una región LMI $R(\alpha, \beta, \gamma) = R(0.5, 0, 2.5)$ aparece en la figura 12 y la salida controlada se aprecia en la figura 13. En estas dos últimas figuras se aprecia que el procedimiento de diseño de la ley de control garantiza la estabilización del sistema a lazo cerrado y un seguimiento muy satisfactorio de la señal de referencia a pesar de los continuos cambios en tres parámetros del

sistema. Finalmente, en las figuras 14 y 15 se incluyen los diagramas *Simulink*® del sistema LPV masa-resorte a lazo abierto y lazo cerrado, respectivamente.

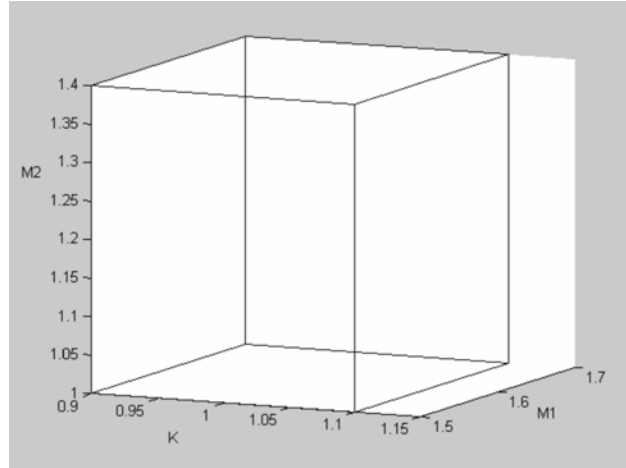


Figura 10. Politopo de incertidumbre.

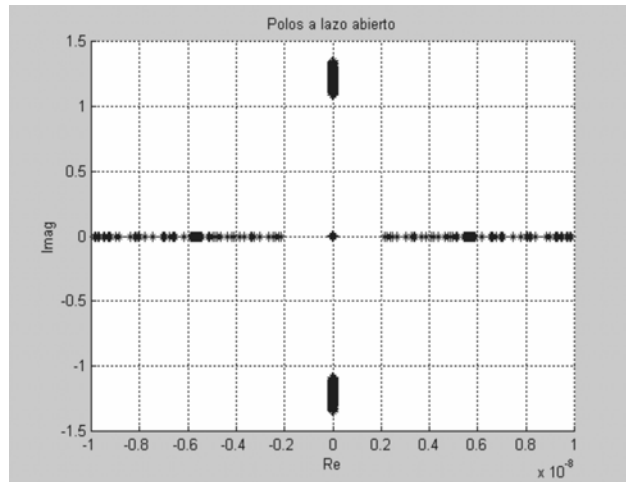


Figura 11. Polos a lazo abierto.

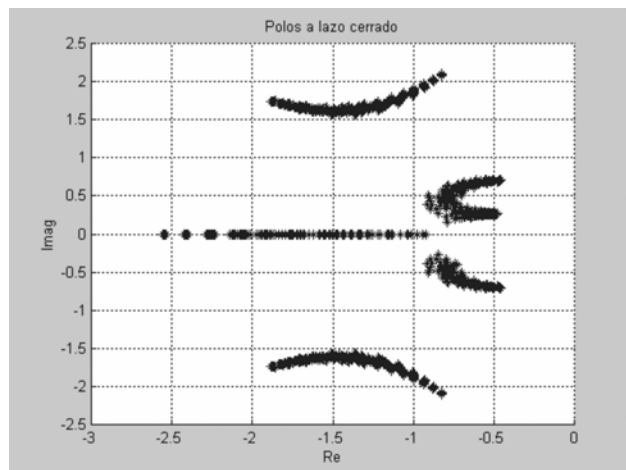


Figura 12. Polos a lazo cerrado.

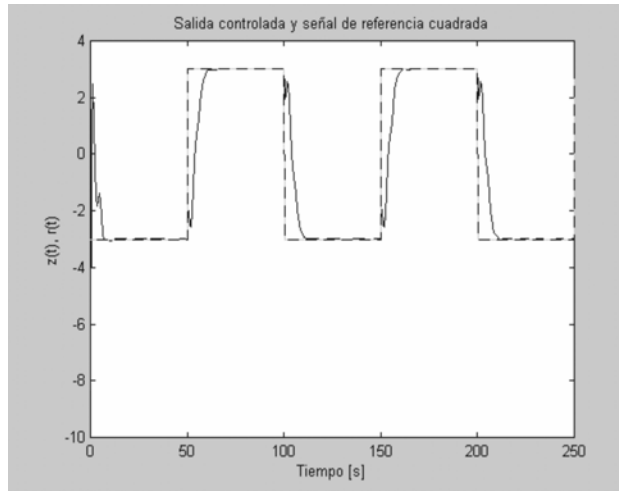


Figura 13. Salida controlada para una señal de seguimiento cuadrada y una perturbación $w(t)$ escalón unitario aplicada a partir de $t = 10$.

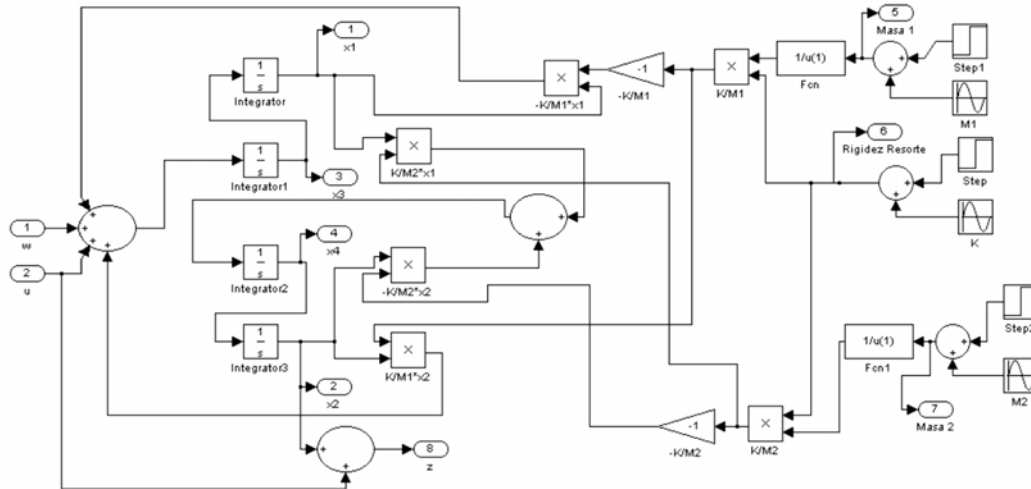


Figura 14. Diagrama *Simulink*® del sistema LPV masa-resorte a lazo abierto.

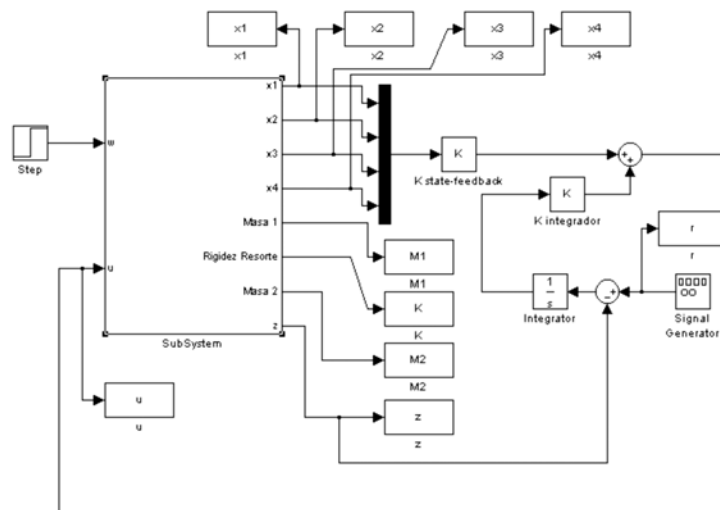


Figura 15. Diagrama *Simulink*® del sistema LPV masa-resorte a lazo cerrado.

CONCLUSIONES

Este trabajo considera el control robusto de un sistema lineal de parámetros variantes a través de la noción de estabilidad cuadrática, lo que permite la definición de dominios convexos de incertidumbre paramétrica y la aplicación de toda la maquinaria LMI. Se han estudiado los problemas de estabilidad, estabilizabilidad, asignación de autovalores, seguimiento, diseño de observadores y realimentación estática de la salida.

El interés de esta aproximación es que proporciona métodos constructivos para el diseño de los controladores. En efecto, las ganancias requeridas se obtienen apoyándose en una parametrización sobre conjuntos convexos que conduce al empleo de algoritmos de programación matemática de convergencia segura. Todos los problemas considerados permiten contemplar respuestas del tipo: no existe una ganancia de la clase propuesta o bien si existe la ganancia y es ésta.

Mediante una serie de ejemplos numéricos se ha mostrado la efectividad del procedimiento de síntesis de leyes de control robusto desarrollado.

Actualmente se trabaja con la extensión de todos los resultados al caso de sistemas en tiempo discreto.

REFERENCIAS

- APKARIAN P. & GAHINET P. (1995a). A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 40(5), 853-864.
- APKARIAN P., BIANNIC, J.M., & GAHINET. P. (1995b). Self scheduled H_∞ control of Missile via Linear Matrix Inequalities, Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 18(3), 1251-1261.
- BARMISH, B. (1985). Necessary and sufficient condition for a quadratic stabilizability of an uncertain system. Journal of Optimization Theory and Application, 46(4), 399-408.
- BECKER, G., PACKARD, A., PHILBRICK, D. & BALAS, G. (1993). Control of parametrically dependent linear systems: A single quadratic Lyapunov approach, American control conference, 2795-2799.
- BECKER, G. & PACKARD, A. (1994a). Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback, System & Control Letters 23, 205-215.
- BECKER, G., PACKARD, A., PHILBRICK, D. & BALAS, G. (1994b). Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems, American control conference, 856-860.
- BENDTSEN, J. D. & TRANGBAEK, K. (2002). Robust quasi-LPV control based on neural state space models, IEEE Transaction on Neural Networks, 13(2), 355-368.
- BERNUSSOU, J. & GARCÍA, G. (1993). Stabilisabilité quadratique et paramétrisation convexe, Rapport LAAS N° 93258, Toulouse, France.
- BIANNIC, J. (1996). Commande robuste de systèmes à paramètres variables: Application en Aéronautique, Ph.D. Thesis, ENSAE, Francia.
- BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E. & BALAKRISHNAN, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia, USA, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM Vol.15.
- BROGAN, W. (1991). Modern Control Theory, New Jersey, USA, Prentice Hall.
- BRUZELIUS, F., BREITHOLTZ, C. & PETTERSSON, S. (2002). LPV-based gain scheduling technique applied to a turbo fan engine model, IEEE Conference on Control Applications, 713-718.
- CHEN, C. (1999). Linear System Theory and Design, New York, USA, Oxford University Press.
- CHILALI, M. & GAHINET, P. (1995). H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control. 41(3), 358-367.
- CHOI, D. J. & PARK, P. (2001). Guaranteed cost LPV output-feedback controller design for nonlinear systems, IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 1198-1203.
- COURTIES, C. (1999). Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lentement variables, Ph.D. Thesis, Rapport LAAS-CNRS No 99552, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France.
- COURTIES, C., BOUAZIZI, H. Y BERNUSSOU, J. (1999). Commande LPV à l'aide d'un observateur, Rapport LAAS N° 99537, Toulouse, France.
- DIAS PERES, P.L., GEROMEL, J.C., BERNUSSOU, J., & GARCÍA, G. (1990). Approche quadratique de problèmes de

- commande et d'optimisation, Rapport LAAS N° 90364, Toulouse, France.
- FRANCIS, B. & WONHAM, W. (1975). The internal model principle for linear multivariable regulators, *J. Appl. Math. Optimiz*, 2, 170-194.
- FROMION, V., MONACO, S. & NORMAND-CYROT, D. (1996). Robustness and stability of LPV plants through frozen system analysis, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6, 235–248.
- GARCÍA, G. & BERNUSSOU, J. (1991). Stabilité et détectabilité quadratiques: lien avec l'approche LQG, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 312, 193-198.
- GEROMEL, J., PERES, P. & BERNUSSOU, J. (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29(2), 381-402.
- HELMERSON, A. (1995). *Methods for Robust Gain Scheduling*, PhD thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University.
- KHARITONOV, V.L. (1978). «Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of differential equations, *Diferentsyalnye Uravnya*, 14(11).
- KWAKERNAAK, H. & SIVAN, R. (1972). *Linear Optimal Control*, John Wiley and Sons Inc.
- PACKARD, A. (1994). Gain scheduling via linear fraction transforms, *Systems & Control Letters*, 22, 79–92.
- RUGH, W. (1995). *Linear System Theory*, New Jersey, USA, Prentice – Hall.
- RUGH, W. & SHAMMA, J. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36, 1401-1425.
- SCHERER, C. (2001). LPV control and full block multipliers, *Automatica*, 37(3), 361–375.
- SCORLETTI, G. & EL GHAOUI, L. (1998). Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems, *International Journal of Robust and nonlinear control*, 8, 845-877.
- SHAMMA, J. (1992). Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies, *IEEE Control System Magazine* 12, 101–107.
- TEPPA, P. (2003). *Commande par séquençement de gains robustes pour systèmes non lineaires*, Ph.D. Thesis, Université Paul Sabatier. Toulouse, France.
- WIE, B. & BERNSTEIN, D. (1992). Benchmark problem for robust control. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 15, 1057-1059.
- WU, F., YANG, X. H., PACKARD, A. & BECKER, G. (1996). Induced L_2 norm controller for LPV systems with bounded parameter variation rates, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10), 983–988.