

## DESACOPLES APROXIMADO Y POR DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE SISTEMAS DE CONTROL MIMO

PEDRO ANTONIO TEPPA GARRÁN

Universidad Simón Bolívar. Departamento de Procesos y Sistemas. Valle de Sartenejas, Baruta  
Apartado Postal 89000. Caracas 1081 – A. Venezuela.  
e-mail: [ptepa@usb.ve](mailto:ptepa@usb.ve)

Recibido: junio de 2009

Recibido en forma final revisado: octubre de 2009

### RESUMEN

Los procesos industriales normalmente poseen cientos de sensores y actuadores, lo que dificulta la determinación de un controlador multivariable (MIMO) único. Por tal razón, se suelen emplear estrategias de control descentralizado (distribuido). En este trabajo, dentro de una estrategia general de control descentralizado, se formulan dos esquemas de control por desacople. En ambos se intentan cancelar los acoples e interacciones entre los subsistemas que conforman el sistema MIMO antes de diseñar los controladores SISO (una entrada – una salida) de cada lazo simple. En el primer esquema se realiza la inversión aproximada del modelo de la planta para diseñar el precompensador de la estrategia de desacople, considerando sistemas susceptibles a descomponerse en dos escalas de tiempo (dinámica lenta y rápida). En el segundo esquema, la técnica de descomposición en valores singulares (DVS) se emplea para obtener un conjunto de ecuaciones desacopladas entre las combinaciones lineales de los sensores y combinaciones lineales de los actuadores, dadas por las matrices unitarias de la DVS de la matriz de transferencia del sistema. Ambas metodologías son validadas en un proceso físico de intercambio térmico. Los resultados alcanzados confirman su efectividad.

*Palabras clave:* Sistemas multivariables, Control descentralizado, Desacople, Sistemas singularmente perturbados, Valores singulares.

### SINGULAR VALUE DECOMPOSITION AND APPROXIMATE DECOUPLING OF MIMO CONTROL SYSTEMS

#### ABSTRACT

Plants in the process industry usually have hundreds of measurements and actuators, which make the determination of a single multivariable controller (MIMO) for the whole plant unfeasible – or at least not useful. Instead, a decentralised (distributed) control strategy that tries to control multivariable plants by a suitable decomposition into single input – single output (SISO) control loops is usually implemented. In this work, in the context of a decentralised control approach, two decoupling control strategies are formulated. Both counteract the couplings and interferences between the subsystems of the overall plant prior to SISO control design of the single loops. The first strategy considers the inversion of the slow time scale reduced order model of the plant while the second approach uses the singular value decomposition (SVD) technique to obtain decoupled equations between linear combinations of sensors and linear combinations of actuators, given by the columns of the unitary matrix of the SVD of the process transfer matrix. Some numerical examples performed in a heat exchanger process are provided to illustrate both the effectiveness of the synthesis and the performance achieved.

*Keywords:* Multivariable systems, Decentralised control, Decoupling, Singular perturbed systems, Singular values.

#### INTRODUCCIÓN

El control de procesos industriales es hoy en día un problema altamente estructurado. Por tal razón, suele descomponerse jerárquicamente en diferentes niveles. Apoyándose en funcionales de costo, principalmente orientados hacia el be-

neficio económico, los puntos de operación se calculan en forma óptima, desde las capas superiores. Las capas inferiores tienen la responsabilidad de implementar los puntos de operación a través de la utilización de lazos sencillos de realimentación y de evitar la saturación de las variables manipuladas. Tales procesos industriales usualmente poseen

cientos o más de sensores y actuadores, lo que hace difícil o al menos no muy útil, la determinación de un único controlador multivariable. Por tal razón, el *control global de la planta* (Skogestad, 2000) se descompone jerárquicamente en distintas capas, con el propósito de disminuir el esfuerzo puesto en el modelaje y diseño de la estrategia de control y de esta forma incrementar la flexibilidad. La capa inferior corresponde a la *capa de control de regulación*. Ésta es la capa, donde las variables manipuladas y las salidas se conectan con los controladores, en su mayoría de una entrada y una salida. No obstante, esta capa también puede contener pequeños controladores multivariables.

La segunda capa, la *capa de control supervisor*, actúa sobre las señales de referencia (setpoints) de la capa inferior, evita la saturación de las señales de control y mantiene ciertas variables dentro de cotas específicas, éstas últimas impuestas principalmente por consideraciones ambientales y de seguridad. El manejo de estas restricciones se suele abordar empleando control predictivo basado en modelos (Camacho & Bordons, 2004).

Las capas de regulación y supervisión, configuran ambas, la capa de control. Por encima de ésta, pueden aparecer, una o dos capas de optimización. Esta optimización tiene por finalidad el cómputo de los *setpoints* para la capa de control, maximizando la rentabilidad económica. Los *setpoints* suelen calcularse con una periodicidad diaria o semanal empleando modelos de estado estacionario de la planta completa o modelos de partes de la planta. La figura 1 ilustra la descomposición jerárquica utilizada en el control global de una planta industrial.

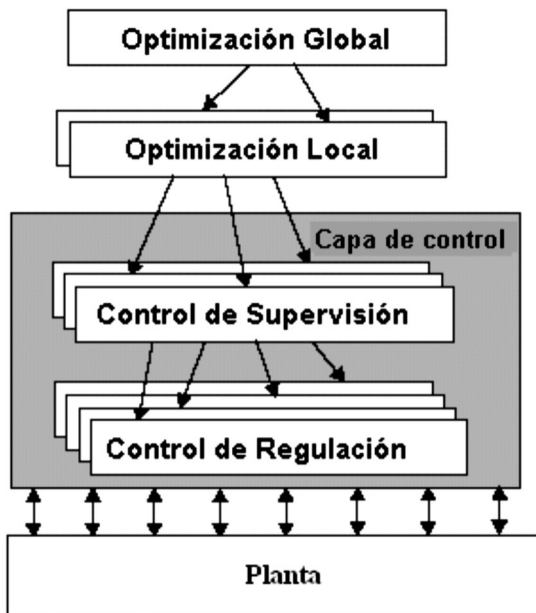


Figura 1. Control jerárquico de un proceso industrial de gran escala.

Una planta industrial general puede describirse por el diagrama de la figura 2. En este trabajo, la planta se considera de la clase lineal, invariante en el tiempo (LTI) y multivariable, descrita por las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (1)$$

donde:

el estado  $x$ , la entrada  $u$ , y la salida  $y$  son funciones de la variable real  $t$  (tiempo), con valores en  $\mathcal{R}^n$ ,  $\mathcal{R}^m$  y  $\mathcal{R}^p$ , respectivamente. Adicionalmente,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  son matrices reales de dimensión  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$ , y  $p \times m$ , respectivamente. Asumiendo condiciones iniciales idénticas a cero y aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\hat{y}(s) = (CsI - A)^{-1} B + D \hat{u}(s) \quad (2)$$

de manera que el comportamiento del sistema lineal es descrito por la función matricial racional:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D, \quad (3)$$

de dimensión  $p \times m$ . Para una función matricial  $G$  dada, existen infinitas representaciones de  $G$  en la forma de la ecuación (3). El menor número entero  $n$  sobre todas estas representaciones se denomina el *grado McMillan* de  $G$ . Un resultado fundamental de la teoría de sistemas lineales señala que cuando el triple  $(A, B, C)$  es controlable y observable, el grado McMillan coincide con el número de variables de estado y los polos de la función matricial racional  $G$  son idénticos a los autovalores de la matriz  $A$  (Kailath, 1980).

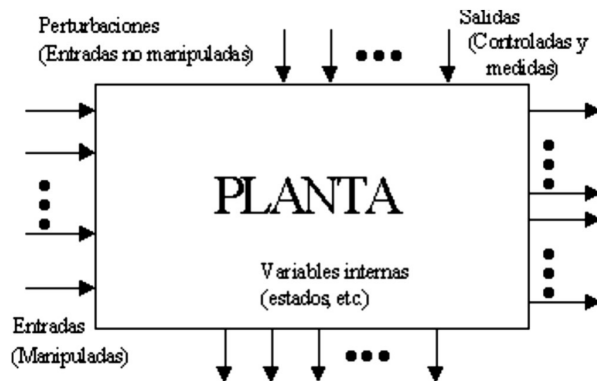
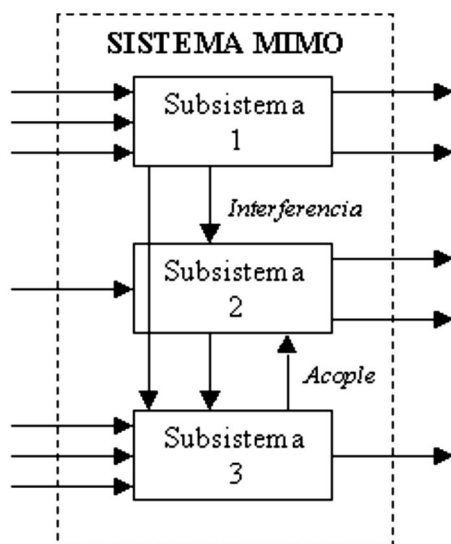


Figura 2. Variables de la planta.

El objetivo principal de la capa de control de regulación consiste en el rechazo de las señales de perturbación y en el seguimiento de los *setpoints* suministrados por las capas superiores. Este trabajo se enmarca dentro de una estrategia de control descentralizado (distribuido) para la capa de control de regulación, la misma hace uso de conceptos estructura-

les para desacoplar las interacciones entre las variables del proceso (Jørgensen, & Jørgensen, 2000; Schmidt, 2002). El empleo de equipo estándar, una sencilla sintonización y la facilidad de entendimiento por personal no especializado constituyen las principales ventajas de esta aproximación. Así lo certifican numerosas aplicaciones a nivel industrial, como por ejemplo las de Govatsmark & Skogestad, 2001; Härefors, 1999 y Ogunnaike, 1995. En líneas generales el esfuerzo de control de la estrategia descentralizada se descompone en dos etapas: primero; el desacople de la planta en subsistemas y luego el control individual de estos. O sea, el control descentralizado enfoca el control de plantas multivariables a través de una descomposición adecuada de lazos SISO de control. Los subsistemas, en la mayoría de los casos poseen algún tipo de interacción. Existen dos formas de interacción: i) *Interferencia*. Algunas variables de un subsistema influyen otros subsistemas. Sin embargo, estos últimos, no influyen el comportamiento de variables del primero. La característica principal de este tipo de interacción es que no existe un camino de retorno hacia el sistema que origina la interferencia. En el caso lineal, esta clase de interferencia se modela como perturbaciones aditivas. ii) *Acople*. En este tipo de interferencia, si existe un camino de influencia cruzada entre los subsistemas. Lo que significa que aparecen lazos de realimentación escondidos. Descartar este último fenómeno en estrategias descentralizadas de control puede conducir a problemas de inestabilidad (Skogestad & Postlethwaite, 2005).

La figura 3 esquematiza las formas de interferencia descritas. El control descentralizado intenta dividir la planta y diseñar controladores independientes para cada subsistema y de esta forma lograr el control de la planta global. Existen dos opciones: i) *Control multilazos*. Con el propósito



**Figura 3.** Sistema MIMO descompuesto en un conjunto de subsistemas acoplados.

de minimizar la posibilidad de un desempeño negativo del sistema de control, las entradas y las salidas son agrupadas en pares que minimizan las interacciones entre los lazos sencillos y el resto del sistema. Esto se denomina *problema de apareamiento*. El control multilazos consiste entonces, en la resolución del problema de apareamiento y el diseño de controladores SISO para cada lazo (Yu & Luyben, 1986; Skogestad, 1988). ii) *Control por desacople*. En este esquema, antes de diseñar los controladores SISO para cada lazo se efectúa una operación de *desacople*, donde se intenta cancelar los acoples o interacciones entre los subsistemas mediante la transformación del sistema en una estructura diagonal o triangular recurriendo a una transformación matricial (Skogestad & Postlethwaite, 2005; Williams, 1981; Williams & Antsaklis, 1986).

Este trabajo se concentra en la opción de control por desacople dentro de la estrategia de control descentralizado de la capa de regulación de la estructura de control jerárquico. En particular, se formulan dos estrategias de desacople.

En la primera se plantea una mejora de la estrategia de desacople de estado estacionario o DC. A ese fin se efectúa inicialmente, la descomposición de la planta en dos escalas de tiempo: las dinámicas lentas responsables de los fenómenos fundamentales del sistema y las rápidas que sólo actúan durante un corto instante de tiempo. Posteriormente se lleva a cabo la inversión de la dinámica lenta dentro de un esquema de desacople prealimentado. De esta manera se aproxima la inversa del modelo de la planta y se incrementa su ancho de banda en comparación con el que puede alcanzarse con una estrategia tradicional de desacople DC.

En la segunda estrategia, la técnica de DVS se emplea para obtener ecuaciones desacopladas entre las combinaciones lineales de los sensores y combinaciones lineales de los actuadores, dadas por las matrices unitarias de la DVS de la matriz de transferencia del sistema. En este contexto se puede señalar que en la década de los 70 y principios de los 80 apareció un fuerte impulso para trabajar en la explotación de técnicas SISO en el control de sistemas MIMO. Dentro de este marco, Hung & MacFarlane (1982) presentaron el primer antecedente de la técnica de desacople de sistemas multivariables a través de la DVS de la matriz de transferencia. En ese trabajo se definió la metodología RFN (*Reversed Frame Normalising*), la cual empleaba una descomposición Quasi-Nyquist (QND) que incorporaba la información de la fase a los valores singulares. Posteriormente, Lau *et al.* (1985) realizaron un segundo aporte. En ambas contribuciones las matrices unitarias  $U$  y  $V$  de la DSV de la matriz de transferencia ( $G = U\Sigma V^*$ ) varían con la frecuencia, lo que dificulta la aplicación de la metodología. No obstante, se apreciaba la potencialidad del concepto.

Unos años después, una vez consolidada una teoría madura y eficiente que permitía el tratamiento directo de los problemas de control MIMO, la práctica de descomposición del sistema multivariable en diferentes subsistemas SISO, perdió su empuje inicial. En 1997, Hovd *et al.* (1997) analizaron la metodología RFN a la luz de las nuevas técnicas MIMO ( $H_2$ ,  $H_\infty$  y síntesis  $\mu$ ) y descubrieron que, bajo ciertas hipótesis, (i.e. la matriz de transferencia admitía una DVS particular, donde las matrices unitarias eran constantes, por lo que no se tenían problemas con la dirección de las entradas), el controlador MIMO compuesto de varios diseños SISO era más óptimo que si se empleaba un diseño MIMO directo. Sin embargo, a pesar de la importancia teórica del resultado, el mismo no tuvo mayor repercusión en aplicaciones prácticas de control multivariable, quizás vinculado al hecho de que la hipótesis era bastante restrictiva. En este trabajo se propone una metodología simple para aplicar la DVS en el diseño de un controlador multivariable, se utiliza una aproximación de variable real de la DVS de la matriz de transferencia para desacoplar los enlaces sensor-actuador del sistema. La síntesis del controlador multivariable se resume en un procedimiento sencillo de muy pocos pasos. Los resultados obtenidos muestran el buen desempeño y la viabilidad de la técnica.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 1 se estudian los sistemas lineales con dos escalas de tiempo y el análisis de perturbaciones singulares. La sección 2 considera las nociones básicas de la estrategia de desacople del control descentralizado y los dos esquemas de desacople propuestos. Un ejemplo numérico, el control de un proceso de intercambio térmico, es presentado en la sección 3 y finalmente las conclusiones del trabajo.

## SISTEMAS CON DOS ESCALAS DE TIEMPO

Existe un modelaje particularmente interesante para los sistemas lineales que poseen dos tipos de dinámicas; la lenta que corresponde a fenómenos que dominan el comportamiento del sistema y la rápida que se encuentra ligada a fenómenos que solamente intervienen durante un corto instante de tiempo. Este es el caso de algunas aplicaciones de robótica donde aparece una dinámica lenta asociada a los componentes mecánicos de manipulación y una segunda más rápida vinculada a la circuitería eléctrica. En los sistemas aerodinámicos también aparece este tipo de separación e igualmente en todo sistema donde existan fenómenos físicos que para los efectos de algún tipo de análisis o simulación sobre el sistema puedan descartarse (pequeñas constantes de tiempo, pequeñas inercias, etc.). La existencia de diferentes escalas de tiempo para un sistema LTI está fundamentalmente determinada por su espectro de autovalores. A ese fin consideremos un sistema lineal autónomo ( $u = 0$ ) descrito en variables de estado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Con  $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathfrak{R}^n$  una partición arbitraria del vector de estado. Sea la transformación de equivalencia:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

con  $L$  una matriz solución de la ecuación de Ricatti:

$$A_{21} - A_{22}L + LA_{11} - LA_{12}L = 0. \quad (6)$$

**Definición 1** (Fossard & Magni, 1982). El sistema (4) se dice que es un sistema con dos escalas de tiempo si el sistema triangular por bloques obtenido de la aplicación de la transformación anterior:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & A_{12} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \tilde{A}_1 = A_{11} - A_{12}L \\ \tilde{A}_2 = A_{22} - LA_{12} \end{matrix}. \quad (7)$$

satisface la desigualdad siguiente:

$$\max |\lambda_i(\tilde{A}_1)| \ll \min |\lambda_i(\tilde{A}_2)|.$$

Esto es, si los  $n$  autovalores del sistema original pueden repartirse en  $n_1$  autovalores “lentos” y  $n_2 = n - n_1$  autovalores “rápidos”.

La transformación de equivalencia precedente permite aislar la parte rápida del sistema. Para separar la parte lenta debe aplicarse una segunda transformación:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \eta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

con  $M$  una matriz solución de la siguiente ecuación matricial:

$$\tilde{A}_1 M - M \tilde{A}_2 + A_{12} = 0. \quad (9)$$

En definitiva, dos subsistemas de orden reducido:

$$\dot{\zeta} = (A_{11} - A_{12}L)\zeta, \quad (10)$$

$$\dot{\eta} = (A_{22} - LA_{12})\eta, \quad (11)$$

pueden desprenderse de la ecuación del sistema global. El primero, dado por la ecuación (10), contiene las dinámicas lentas y el segundo descrito por la ecuación (11) representa la dinámica rápida del sistema original. No obstante, esta descomposición que permite definir teóricamente los sistemas con dos escalas de tiempo no se utiliza, porque en general, no existe una solución analítica para el cálculo de las matrices  $L$  y  $M$  (Fossard & Magni, 1982). En la práctica se emplea el modelaje a través de perturbaciones singulares para representar los sistemas con dos escalas de tiempo. El modelaje de sistemas dinámicos en la forma de perturbaciones singulares es una técnica antigua y ampliamente estudiada en la literatura como se desprende de los artículos tutoriales (Kokotovic *et al.* 1976; Saksena *et al.* 1984) y la obra (Kokotovic *et al.* 1986) enteramente dedicada a esta clase de sistemas. En su forma más general se presenta como un modelo matemático descrito en el espacio de estado donde un pequeño parámetro  $\varepsilon > 0$  interviene como un factor multiplicador de la derivada de una parte del vector de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (12)$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du$$

#### Comportamiento lento

Se obtiene cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en este caso la solución de:

$$0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u,$$

determina el valor del subvector  $x_2$ :

$$x_2 = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_1 + B_2u).$$

El sistema de orden reducido será:

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u. \quad (13)$$

En este caso el comportamiento rápido se considera como instantáneo.

#### Comportamiento rápido

Alternativamente, para analizar el régimen transitorio se efectúa el cambio de escala  $t = \varepsilon\tau$ , lo cual produce la nueva ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{dx_1}{d\tau} \\ \frac{dx_2}{d\tau} \end{bmatrix} = Ax + Bu$$

Con  $A$  y  $B$  matrices por bloques, como en la ecuación (12). Procediendo como antes  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la derivada del primer subvector de estado se desvanece, esto es  $x_1(\tau) = \bar{x}_1$  permanece constante, y el subsistema dinámico transitorio se representa por:

$$\frac{dx_2}{d\tau} = A_{22}x_2 + A_{21}\bar{x}_1 + B_2u. \quad (14)$$

En este trabajo es de interés aislar la dinámica lenta del sistema, por lo que se empleará el sistema de orden reducido:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_r x_1 + B_r u \\ y &= C_r x_1 + D_r u \end{aligned} \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_r &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & B_r &= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ C_r &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} & D_r &= D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{aligned} \quad (16)$$

## CONTROL POR DESACOPLE

El objetivo del control por desacople consiste en transformar la matriz de transferencia del sistema en una diagonal o cercanamente diagonal. De esta forma, el control MIMO sería equivalente a un conjunto independiente de lazos de control. El desacople puede alcanzarse de dos maneras: desacople prealimentado y desacople por realimentación. Este trabajo considera el desacople prealimentado, el lector interesado puede dirigirse al artículo original de la técnica de desacople realimentado (Falb & Wolovich, 1967), y a una aplicación de la misma en el control de una torre de destilación (Teppa *et al.* 2005).

El desacople prealimentado es un procedimiento que consta de dos pasos, inicialmente se diseña un precompensador  $P(s)$  que contrarresta las interacciones y acoples de la planta  $G(s)$  y produce una "nueva" planta  $G_d(s) = G(s)P(s)$  que es más diagonal y sencilla de controlar que la planta original. Luego de determinar un precompensador  $P(s)$  adecuado, se diseñan controladores SISO para la nueva planta  $G_d(s)$ . Es de destacar que para que  $G_d(s)$  sea diagonal, el precompensador tiene que aproximar en cierta forma a la inversa de la planta  $G^{-1}(s)$ . A ese fin es usual considerar los casos siguientes: i) *Desacople dinámico*. La nueva planta es diagonal para todas las frecuencias; ii) *Desacople en estado estacionario*. En este caso el objetivo es hacer  $G_d(0)$  diagonal, para este propósito lo más común es seleccionar  $P(s) = G^{-1}(0)$  y finalmente, iii) *Desacople en una frecuencia*



*particular*. Esta última situación no es muy típica y por lo general, cuando se implementa, la frecuencia considerada corresponde al ancho de banda a lazo abierto (Skogestad & Postlethwaite, 2005; Goodwin *et al.* 2001).

### Desacople aproximado

Desde el punto de vista del control una condición particularmente interesante para una matriz de transferencia es la de *dominancia diagonal*.

**Definición 2** (Skogestad & Postlethwaite, 2005). Una matriz de transferencia cuadrada  $G = \{g_{ij}\}$  se dice que es diagonalmente dominante si  $\forall i, \exists j_i$  tal que  $j_i \neq j_k$  si  $i \neq k$  y

$$|g_{i,j_i}| > \sum_{j \neq j_i} |g_{i,j}|.$$

De la definición anterior se desprende que existe una dominancia diagonal en el sentido de que a través de un reordenamiento conveniente de filas y columnas, la matriz de transferencia poseerá una estructura diagonal. La dominancia diagonal permite incorporar la condición de estabilidad en el diseño de controladores, para eso se supone una matriz de transferencia  $G$  y la matriz  $\tilde{G}$  formada exclusivamente por sus elementos diagonales. Estos elementos diagonales se emplean para sintonizar un controlador multivariable diagonal  $K = \text{diag}\{k_{ii}\}$  a fin de obtener una función a lazo cerrado diagonal  $\tilde{T}$  especificada. Cuando el controlador se coloca dentro del lazo, el error relativo se expresa como:

$$E = (G - \tilde{G})\tilde{G}^{-1}. \quad (17)$$

Una relación importante del control descentralizado (Skogestad & Postlethwaite, 2005) es:

$$(I + GK) = (I + E\tilde{T})(I + \tilde{G}K). \quad (18)$$

Esto es, el comportamiento multilazos es igual al análisis de las interacciones multiplicado por los lazos individuales nominales. Por lo que si el sistema a lazo abierto es estable y el término  $(I + E\tilde{T})$  no tiene ceros en el semiplano derecho, el sistema global a lazo cerrado será estable. En Skogestad & Postlethwaite (2005), se muestra como aprovechar el concepto de dominancia diagonal ( $E$  será pequeño) y el conocido teorema de Gershgorin del álgebra lineal (Atkinson, 1984), con el propósito de imponer un límite que oriente el diseño del controlador con el objeto de satisfacer una condición de desempeño a lazo cerrado  $\tilde{T}$  deseada, la mencio-

nada condición se expresa como:

$$|t_{ii}(jw)| \leq \frac{|g_{ii}(jw)|}{\sum_{j \neq i} |g_{ij}(jw)|}, \quad \forall i, \forall w. \quad (19)$$

En esta última ecuación se trabaja con la versión del teorema de Gershgorin correspondiente a la suma de filas. En Albertos & Sala (2004), se indica que el límite impuesto por la ecuación (19) es conservativo, o sea, pueden existir controladores que proporcionan lazos más rápidos.

Cuando los requerimientos de diseño contemplan especificaciones de un ancho de banda reducido para los diferentes lazos del sistema multivariable, la simple inserción de la inversa de la ganancia DC antes del lazo asegura el desacople, al menos, en estado estacionario. Y en algunas oportunidades, este desacople DC puede incrementar los límites impuestos por la ecuación (19) para posteriormente efectuar el diseño de los controladores SISO para cada lazo individual. Con el propósito de ampliar el ancho de banda, en este trabajo se plantea una aproximación de la inversa del modelo de la planta  $G^{-1}(s)$  válida en las bajas frecuencias, la misma se obtiene invirtiendo el modelo de orden reducido, asociado a la escala de tiempo lenta, dado por las ecuaciones (15) y (16). El precompensador vendrá dado entonces por:

$$P(s) = G_r^{-1}(s), \quad (20)$$

donde:

$$G_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r. \quad (21)$$

con las matrices  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  descritas en la ecuación (16). En caso de que la matriz  $G_r(s)$  no sea cuadrada se utilizará la pseudoinversa (suponiendo que la matriz posee rango fila completo).

### Desacople por DVS

Se comienza esta sección definiendo el concepto de valor singular de una matriz.

#### Teorema

Toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ( $\mathbb{C}$  cuerpo de números complejos) de rango  $r$  puede descomponerse en sus valores singulares de la siguiente forma:

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \quad (22)$$

(\* denota conjugada transpuesta) siendo  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  ambas unitarias ( $UU^* = I_n$  y  $VV^* = I_m$ ) y  $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_r)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .

### Demostración

Se plantea de manera constructiva. Dado que la matriz  $A^*A$  es simétrica y positiva semidefinida, sus autovalores son reales y no negativos y sus autovectores expanden la totalidad del espacio  $\mathfrak{R}^n$ . En este caso, debido a que adicionalmente es una matriz normal, es posible elegir un conjunto ortonormal de autovectores. Por lo tanto se obtiene la descomposición de Jordan siguiente:

$$V^* (A^*A)V = \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Sin pérdida de generalidad se supone  $V$  unitaria y los valores de  $A^*A$  ordenados de mayor a menor ( $\Sigma_r = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ). Definiendo  $V_1$  y  $V_2$  como las primeras  $r$  y  $(m-r)$  columnas de  $V$ , respectivamente, es decir  $V = [V_1 \ V_2]$ . Se obtiene, al reemplazar en la ecuación anterior lo siguiente:

$$V_1^* (A^*A)V_1 = \Sigma_r^2 \quad (24)$$

$$V_2^* (A^*A)V_2 = 0 \quad (25)$$

$$\Sigma_r^{-1} V_1^* (A^*A)V_1 \Sigma_r^{-1} = I_r \quad (26)$$

Si se define  $U_1 \triangleq AV_1 \Sigma_r^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times r}$  se obtendrá  $U_1^* U_1 = I_r$ . Siempre se pueden completar las columnas de  $U_1$  con un conjunto ortogonal de vectores de modo de expandir el espacio  $\mathbb{C}^n$ , esto es,  $U = [U_1 \ U_2]$  con  $U$  unitaria. Finalmente, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} A [V_1 \ V_2] = \begin{bmatrix} U_1^* AV_1 & U_1^* AV_2 \\ U_2^* AV_1 & U_2^* AV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ya que  $U_1^* AV_1 = \Sigma_r$  y  $AV_2 = 0$  de la ecuación anterior. Además, por definición, las filas de  $U_2^*$  son ortogonales a las columnas de  $U_1 = AV_1 \Sigma_r^{-1}$  y por lo tanto  $U_2^* U_1 \Sigma_r = U_2^* AV_1 = 0$  lo que anula el elemento inferior izquierdo. De esta manera, queda establecido el teorema y los valores singulares son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (28)$$

En este trabajo la técnica de DVS se emplea para obtener ecuaciones desacopladas entre las combinaciones lineales de los sensores y combinaciones lineales de los actuadores, dadas por las matrices unitarias  $U$  y  $V$ , respectivamente. Si

los sensores se multiplican por  $U^*$  y las señales de control por  $V$ , como se establece en la figura 4, entonces el lazo de control estará desacoplado, lo que permitirá la utilización de un controlador diagonal.

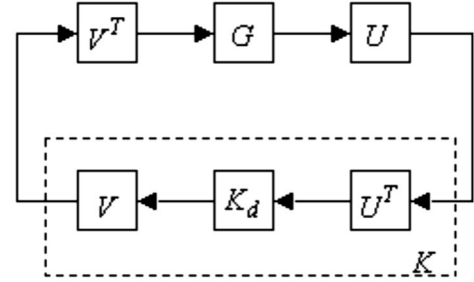


Figura 4. Desacople DVS.

El controlador por DVS consiste en un precompensador  $P_1(s)$ , un postcompensador  $P_2(s)$  y un controlador de estructura diagonal  $K_d(s)$ . La matriz función de transferencia del controlador global es:

$$K = P_1 K_d P_2 \quad (29)$$

La matriz  $K$  se construye a partir de la DVS de  $G^{-1}(s)$ , de forma que el sistema compensado global  $G_d = GK$  sea diagonalmente dominante. El procedimiento propuesto para sintetizar el controlador (29) es el siguiente:

- 1) Evaluar  $G(s)$  en  $s = 0$ . Luego hacer  $G_o = G(0)^{-1}$ .
- 2) Efectuar la DVS de  $G_o$  para obtener  $G_o = U_o \Sigma_o V_o^T$ .
- 3) Hacer  $P_1 = V_o$  y  $P_2 = U_o^T$ .
- 4) Determinar  $K_d = \Pi \Sigma_o$  donde:

$$\Pi = K_{\rho_i} \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_{d_i} s}{\tau_{d_i} s + 1} \right) I \quad (I \text{ matriz identidad}).$$

### Observación

- i. En el paso (1) se evalúa  $G(s)$  en  $s = 0$  para que el controlador se pueda implementar con componentes reales (Liu, 1983). Otra forma es evaluar en una frecuencia  $\omega_c$  cercana al ancho de banda a lazo abierto y después obtener una aproximación de variable real de la función  $G(j\omega_c)$ .
- ii. En el caso de sistemas no cuadrados ( $p \neq m$ ) se debe trabajar con la pseudoinversa. Se pueden presentar problemas de realizabilidad al determinar la inversa (o

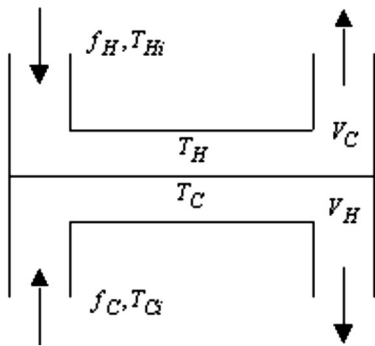
pseudoinversa) de la matriz  $G_o$ . Una forma de garantizar la existencia de la inversa, sería exigir que  $G_o$  fuese de rango fila completo. Sin embargo, esto no es posible, ya que la matriz de transferencia  $G(s)$  es un modelo dado del sistema multivariable.

- iii. Al evaluar en  $s = 0$  las matrices  $U$  y  $V$  dejan de ser de valor complejo. Por tal razón no se utiliza la conjugada transpuesta en el paso (2) del procedimiento y en la figura 4.
- iv. En el paso (4) se contempla un conjunto de controladores PID (Ogata, 2003) para el controlador diagonal  $K_d$ . Podrían plantearse otro tipo de controladores SISO en este paso.
- v. En el problema de seguimiento, la señal de referencia  $r(t)$  (“set points”) debe multiplicarse por  $U^T$  para expresarse en las mismas unidades que las salidas transformadas.

### EJEMPLO NUMÉRICO

Considere el intercambiador de calor de la figura 5. Su comportamiento en forma simplificada es el siguiente: la sección inferior es la “parte fría” donde se incorpora agua con una temperatura  $T_{Ci}$ . El flujo es  $f_c$  ( $m^3/min$ ). La sección superior corresponde a la “parte caliente” con temperatura de entrada del agua  $T_{Hi}$  y flujo  $f_H$ . Cuando los fluidos se “encuentran” (en tuberías separadas), el agua caliente se enfría hasta una temperatura  $T_{Hf}$ , calentando el agua fría hasta una temperatura  $T_C$ . Se asume que el agua se encuentra perfectamente mezclada en cada sección, de manera que su temperatura sea uniforme en todos los puntos de cada parte, esto es,  $T_H$  y  $T_C$ . Luego de efectuar un balance de energía en la parte fría se obtiene que la temperatura cambie conforme a la ecuación:

$$V_c \frac{dT_C}{dt} = f_c(T_{Ci} - T_C) + \beta(T_H - T_C). \quad (30)$$



**Figura 5.** Intercambiador de calor.  $f_c$  y  $f_H$  son los flujos de agua fría y caliente.  $T_{Ci}$ ,  $T_{Hf}$ ,  $T_C$  y  $T_H$  denotan temperaturas en los puntos señalados y  $V_C$  y  $V_H$  son los volúmenes de agua fría y caliente.

El primer término del lado derecho representa el enfriamiento debido a la entrada de agua fría (normalmente,  $T_{Ci} \ll T_C$ , por lo que habrá un descenso de temperatura). El otro término corresponde al calor que fluye desde la parte caliente hacia la parte fría en el intercambiador de calor. Es proporcional a la diferencia de temperatura, y la constante de proporcionalidad  $\beta$ , depende del coeficiente de transferencia de calor, la capacidad calorífica de los fluidos, entre otros.

Repitiendo en la parte caliente resulta:

$$V_H \frac{dT_H}{dt} = f_H(T_{Hi} - T_H) + \beta(T_H - T_C). \quad (31)$$

Se asume que los flujos  $f_H$  y  $f_C$  son constantes e iguales a  $f$  y se considera que las temperaturas de los fluidos que ingresan al intercambiador son entradas:  $u_1 = T_{Ci}$  y  $u_2 = T_{Hi}$ . Tomando como vector de estado  $x = [x_1 \ x_2]^T = [T_C \ T_H]^T$  se obtienen las ecuaciones en variables de estado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{(f+\beta)}{V_C} & \frac{\beta}{V_C} \\ \frac{\beta}{V_H} & -\frac{(f+\beta)}{V_H} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{f}{V_C} & 0 \\ 0 & \frac{f}{V_H} \end{bmatrix} u \quad (32)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Considerando los valores numéricos:

$$f = 0.01 \text{ (} m^3/min \text{)}, \quad b = 0.2 \text{ (} m^3/min \text{)} \\ \text{y } V_H = V_C = 1 \text{ (} m^3 \text{) resulta:}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.21 & 0.20 \\ 0.20 & -0.21 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} u \quad (33)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Empleando la ecuación (3) se obtiene la matriz de transferencia:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (34) \\ = \frac{0.01}{(s+0.01)(s+0.41)} \begin{bmatrix} s+0.21 & 0.2 \\ 0.2 & s+0.21 \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (33) se puede obtener el arreglo de ganancia relativa (RGA) (Bristol, 1968):



$$A = G(0) \circ [G(0)^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 10.76 & -9.76 \\ -9.76 & 10.76 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde:

el símbolo  $\circ$  denota multiplicación elemento por elemento (Producto de Schur o Hadamard). El RGA indica que los dos posibles apareamientos entrada – salida para el sistema:

$$\begin{array}{ll} u_1 \leftrightarrow y_1 & u_1 \leftrightarrow y_2 \\ u_2 \leftrightarrow y_2 & u_2 \leftrightarrow y_1 \end{array}$$

presentarán dificultades para el control multilazos. Esto motiva el empleo de una estrategia de control por desacople a fin de reducir las interacciones entre los lazos, antes de diseñar los controladores SISO para los canales 1 y 2.

### Desacople aproximado

Seleccionando un coeficiente de amortiguación  $\zeta = 2/3$  y una frecuencia natural  $\omega_n = 3$  (rad/s) la matriz de transferencia a lazo cerrado deseada se especifica como:

$$\tilde{T}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{11}(s) & 0 \\ 0 & \tilde{t}_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{s^2 + 4s + 9} & 0 \\ 0 & \frac{9}{s^2 + 4s + 9} \end{bmatrix} \quad (36)$$

A continuación se diseña el controlador multivariable  $K(s)$  suponiendo que no existen interacciones, esto es, se emplea la matriz diagonal:

$$\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11}(s) & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{22}(s) \end{bmatrix},$$

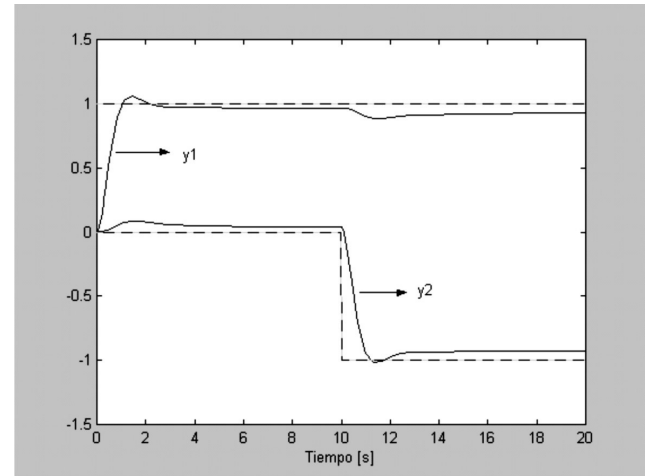
el mismo resulta en:

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{11}} \left[ \frac{\tilde{t}_{11}}{1 - \tilde{t}_{11}} \right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{22}} \left[ \frac{\tilde{t}_{22}}{1 - \tilde{t}_{22}} \right] \end{bmatrix} \quad (37)$$

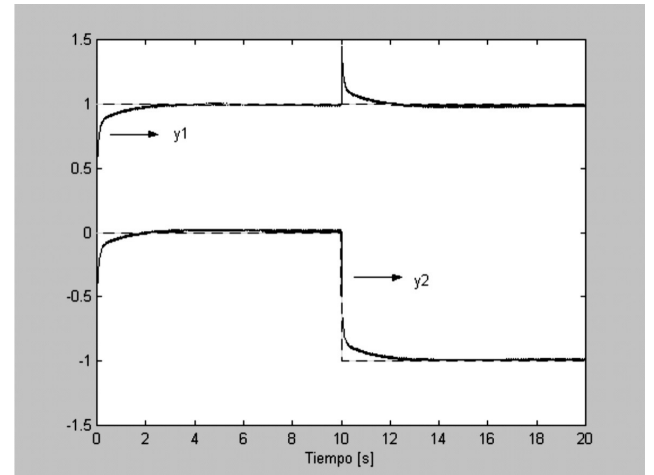
$$= \begin{bmatrix} \frac{900s^2 + 378s + 3.69}{s^3 + 4.21s^2 + 0.84s} & 0 \\ 0 & \frac{900s^2 + 378s + 3.69}{s^3 + 4.21s^2 + 0.84s} \end{bmatrix}$$

La figura 6 muestra la salida  $y_1$  para un escalón unitario aplicado en la señal de referencia  $r_1$  así como la salida  $y_2$  para una señal de referencia  $r_2 = -1$  aplicada a partir de  $t = 10s$ , todo esto, cuando se emplea el controlador  $K(s)$  diseñado a partir del modelo diagonal  $\tilde{G}(s)$ , pero utilizando el modelo completo  $G(s)$  del intercambiador de calor en la simulación. Es evidente la presencia de interacciones entre los lazos del sistema multivariable, así como un error de seguimiento. En la figura 7 se repite la simulación pero incorporando una red de desacople DC dada por:

$$G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & -20 \\ -20 & 21 \end{bmatrix} \quad (38)$$



**Figura 6.** Respuesta del intercambiador de calor para un esquema de control multilazos en el que no se han considerado las interacciones y acoples al momento del diseño.



**Figura 7.** Respuesta del intercambiador de calor luego de incorporar una red de desacople DC al controlador multilazos.

Las interacciones no se logran reducir con el desacople de estado estacionario, aunque sí desaparecen los errores de seguimiento. En lo que sigue se aplicará la metodología propuesta de desacople aproximado de estado estacionario. El cálculo de los autovalores de la matriz de estado en la ecuación (33) arroja  $\{\lambda_i\} = \{-0.01, -0.41\}$  de donde se desprende  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ , por tanto es posible descomponer el sistema en dos escalas de tiempo.

Aplicando las ecuaciones (15) y (16) sobre una realización balanceada de la ecuación (33) (Kailath, 1980), el modelo de orden reducido asociado a la dinámica fundamental viene dado por:

$$x_1 = -0.01x_1 + [-0.0707 \quad -0.0707]u \quad (39)$$

$$y = \begin{bmatrix} -0.0707 \\ -0.0707 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.0122 & -0.0122 \\ -0.0122 & 0.0122 \end{bmatrix} u$$

El subvector  $x_1$  vinculado a la dinámica lenta tiene en este ejemplo dimensión uno. Empleando la ecuación (21) la matriz de transferencia del modelo reducido es:

$$G_r(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0122s + 0.0051}{s + 0.01} & \frac{-0.00122s + 0.0049}{s + 0.01} \\ \frac{-0.00122s + 0.0049}{s + 0.01} & \frac{0.0122s + 0.0051}{s + 0.01} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

la red de desacople viene dada por la inversa de la matriz como:

$$G_r(s) = \begin{bmatrix} \frac{3050000s^2 + 13055000s + 127000}{368379s^2 + 340990s + 5000} & \text{igual a elemento (2,1)} \\ \frac{3050000s^2 + 12219500s + 122500}{368379s^2 + 340990s + 5000} & \text{igual a elemento (2,1)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

La figura 8 evidencia lo satisfactorio del esquema aproximado de desacople con respecto al desacople tradicional de estado estacionario o DC. Prácticamente las salidas se confunden con las señales de referencia.

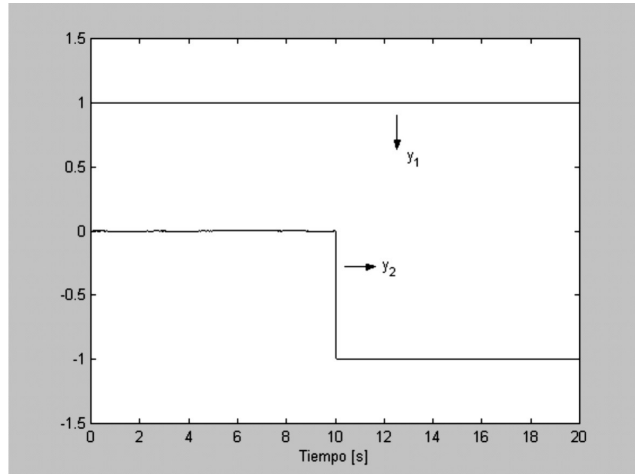


Figura 8. Respuesta del intercambiador de calor usando la técnica de desacople aproximado.

### Desacople por DVS

Siguiendo el procedimiento definido previamente se tiene:

$$G_0 = G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & -20 \\ -20 & 21 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

la DSV de  $G_0$  resulta en:

$$G_0 = U_0 \Sigma_0 V_0^T = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

Haciendo  $P_1 = V_0$  y  $P_2 = U_0^T$  y sintonizando los controladores PID en  $K_d$  por técnicas empíricas simples de Ziegler-Nichols [28]. La respuesta para  $r_1(t) = 1, \forall t$  y  $r_2(t) = -1, \forall t > 10$  se muestra en la figura 9. Es de destacar que la respuesta mejora sensiblemente con refinamientos en la sintonización de los controladores PID.

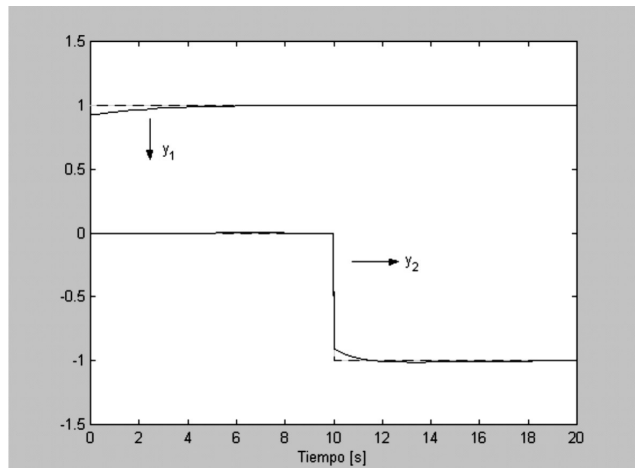


Figura 9. Respuesta del intercambiador de calor usando una estrategia de desacople por descomposición en valores singulares.

## CONCLUSIONES

Este trabajo consideró el desacople de sistemas de control multivariable a través de dos metodologías. En la primera se contemplan sistemas que admiten una descomposición en dos escalas de tiempo: lenta y rápida, a los fines de implementar un esquema de desacople prealimentado donde el precompensador corresponde a la inversa del modelo reducido que contiene las dinámicas lentas del sistema original. En la segunda, se mostró lo satisfactorio de la utilización de la descomposición en valores singulares como una estrategia de desacople de las relaciones dinámicas del sistema multivariable. Ambas metodologías fueron validadas en un proceso de intercambio térmico, lográndose una mejora importante en relación a la técnica tradicional de desacople del sistema en el estado estacionario donde se efectúa la inversión del modelo DC de la planta.

## REFERENCIAS

- ALBERTOS, P. & SALA, A. (2004). Multivariable control systems, Springer Verlag, Nueva York, (USA), p.362.
- ATKINSON, K. (1989). An introduction to numerical analysis. John Wiley and Sons, 2da edición, (USA), p. 712.
- BRISTOL, E. H. (1968). On a new measure of interactions for multivariable process control, IEEE transactions on automatic control, AC-11: 133-134.
- CAMACHO, E. & BORDONS, C. (2007). Model predictive control. Springer Verlag, 2nd. Ed. Nueva York (USA), p. 405.
- FALB, P. L. & WOLOVICH, W. A. (1967). Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. IEEE transactions on automatic control, AC-12: 651-659.
- FOSSARD, A. J. & MAGNI, J. F. (1982). Modélisation, commande et applications des systèmes à échelles de temps multiples, RAIRO Automatic Systems: Analysis and Control, 16: 5-23.
- GOODWIN, G., GRAEBE, S., SALGADO, M. (2001). Control system design. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, (USA), p. 908.
- GOVATSMARK, M. & SKOGESTAD, S. (2001). Control structure selection for an evaporation process. En Proceedings of ESCAPE 11, Kolding, (Dinamarca), pp. 657-662.
- HÅREFORS, M. (1999). A study in jet engine control – control structure selection and multivariable design, Ph.D. Thesis, Chalmers University of Technology, (Suecia), p.145.
- HOVD, M., BRATTZ, R.D., SKOGESTAD, S. (1997). SVD controllers for  $H_2$  y  $H_\infty$  optimal control, Automatica, 33(3), pp. 433-439.
- HUNG, Y.S. & MACFARLANE, A. (1982). Multivariable Feedback: A quasi-classical approach, Springer-Verlag, New York (USA), p. 182.
- JØRGENSEN, J.B. & JØRGENSEN, S.B. (2000). Automatic selection of decentralized control structures. En ADCHEM, Pisa, (Italia), pp. 147-152.
- KAILATH, T. (1980). Linear systems. Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ (USA), p. 682.
- KOKOTOVIC, P., KHALIL, H.K., O'REILLY, J. (1986). Singular perturbed methods in control: Analysis and design. Academic Press, Nueva York, (USA), p. 387.
- KOKOTOVIC, P., O'MALLEY, R.E., SANUTI, P. (1976). Singular perturbations and order reduction in control theory – an overview, Automatica, 12: 123-132.
- LAU, H., ÁLVAREZ, J., JENSEN, K.F. (1985). Synthesis of control structures by singular value analysis: dynamic measures of sensitivity and interaction, AIChE J., 31, pp. 427-439.
- LIU, C.H. (1983). General Decoupling Theory of Multivariable Process Control Systems, Springer –Verlag, Nueva York, (USA), p. 474.
- OGATA, K. (2003). Modern Control Engineering, 4ta ed., Prentice – Hall, New Jersey, (USA), p. 970.
- OGUNNAIKE, B. (1995). A contemporary industrial perspective on process control theory and practice. En Preprints IFAC Symposium DYC'D'95, (Dinamarca), pp. 345-350.
- SAKSENA, V.R., O'REILLY, J., KOKOTOVIC, P. (1984). Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976-1983, Automatica, 20: 273-293.
- SCHMIDT, H. (2002). Model based design of decentralized control configuration, Ph.D. Thesis, Royal Institute of Technology, Estocolmo, (Suecia), p. 205.
- SKOGESTAD, S. (2000). Plantwide control: The search of the

- self-optimizing control structure. *Journal of Process Control*, 24: 569-575.
- SKOGESTAD, S. & POSLETHWAITE, I. (2005). *Multivariable feedback control: Análisis and design*, John Wiley and sons, (USA), p. 303.
- SKOGESTAD, S. (1988). Variable selection for decentralized control, En *AIChE Annual meeting*, Washington DC, (USA), 13: pp. 113-125.
- TEPPA, P., ANDRADE, J.M., FERRER, J. (2005). Control de una torre de destilación empleando un servomecanismo multivariable, *Ingeniería UC*, 12 (1), pp. 76–83.
- WILLIAMS, T. (1981). Inverse and decoupling problems in linear systems, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, (Reino Unido), p.176.
- WILLIAMS, T. & ANTSAKLIS, P. (1986). A unifying approach to the decoupling of linear multivariable systems, *Intern. J. Control*, 44(1), pp.181–201.
- YU, C. & LUYBEN, W. (1986). Design of multiloop SISO controllers in multivariable processes. *Ind. Eng. Chem. Process. Des. Dev.*, 25(2), pp. 498–503.