

DISEÑO DE UN CONTROLADOR DIFUSO BASADO EN EL ESQUEMA DEL COMPENSADOR PARALELO DISTRIBUIDO (PDC)

MILAGROS ESPINOZA MORILLO

Fundación Instituto de Ingeniería. Centro de Ingeniería Eléctrica y Sistemas. Venezuela
e-mail: mespinoza@Fii.org

Recibido: octubre de 2008

Recibido en forma final revisado: mayo de 2011

RESUMEN

En este artículo se presenta una metodología para la estabilización de sistemas no lineales. Se emplea el modelo difuso propuesto por Takagi-Sugeno (T-S), el cual muestra que es posible aproximar sistemas no lineales mediante el modelado utilizando técnicas de lógica difusa, asignando al consecuente de cada regla una ecuación lineal, esta característica permite que para cada subespacio lineal o regla del modelo, se pueda derivar un controlador difuso que combine las acciones de los controladores lineales de cada regla. En el método del compensador paralelo distribuido (PDC) se obtiene un controlador lineal a partir de cada regla y el resultado es un controlador difuso que es una combinación difusa de los controladores obtenidos en cada regla. Se presentan tres ejemplos de sistemas no lineales que alcanzan la estabilidad mediante el método propuesto.

Palabras clave: Lógica Difusa, Compensador Paralelo Distribuido, Sistemas No lineales, Estabilidad, Sector no Lineal.

FUZZY CONTROLLER DESIGN BASED ON THE DIAGRAM OF THE PARALLEL DISTRIBUTED COMPENSATOR (PDC)

ABSTRACT

A methodology for stabilization of non-linear systems is presented in this article. The fuzzy model proposed by Takagi-Sugeno (T-S), which shows the possibility to approximate non-linear systems by means of modeling using fuzzy logic techniques, assigning a linear equation to the consequent of each rule, is used. This characteristic allows that, for each linear subspace or model rule, a fuzzy controller can be derived that combines the action of the linear controllers of each rule. In the method of the parallel distributed compensator (PDC), a linear controller from each rule is obtained and the result is a fuzzy controller which is a fuzzy combination of the obtained controllers in each rule. Three examples of non linear systems that reach stability by means of the proposed method are presented.

Keywords: Fuzzy Logic, Parallel Distributed Compensator, Non linear Systems, Stability, Sector Nonlinearity.

INTRODUCCIÓN

La lógica difusa constituye una herramienta importante para el control de procesos industriales complejos, donde resulta difícil obtener la representación en el espacio de estados de la planta a controlar debido a la complejidad del proceso. En tal sentido, se recurre a la experiencia humana para la obtención del controlador. El control difuso está basado en la implementación del conocimiento del experto, utilizando para ello reglas de control Si-Entonces, las cuales relacionan las variables de entrada del controlador por medio de términos lingüísticos. Por tanto, un controlador difuso, contiene un algoritmo que es capaz de convertir una estrategia de control lingüística en una estrategia de control

automático.

El uso de la modelación, empleando el esquema difuso propuesto por Takagi-Sugeno (1985), ha provisto de una manera novedosa de plantear los problemas de estabilidad y estabilización de sistemas no lineales, tanto para el caso continuo como para el caso discreto.

La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. En general, una solución es estable si un cambio pequeño en las condiciones iniciales no genera un cambio considerable en las trayectorias del sistema. Existen diferentes tipos de problemas de estabilidad en los sistemas dinámicos.

La estabilidad de un sistema depende del comportamiento del punto de equilibrio y de las condiciones iniciales. Para los puntos de equilibrio, la estabilidad generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, aunque existen otros criterios para determinarla. Se considera que un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov, si todas las soluciones que nacen en una vecindad del punto de equilibrio permanecen en dicha vecindad; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en una vecindad del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo. El punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable, si atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial.

En el método del compensador paralelo distribuido (PDC) se diseña un controlador para cada una de las reglas del modelo difuso utilizando en cada una de ellas técnicas de diseño de control lineal. El resultado es un controlador difuso total (generalmente no lineal), que es una combinación difusa de cada controlador lineal individual.

Para Akar & Özgüner (2000), los sistemas difusos son vistos como un sistema interconectado. En este trabajo los autores desarrollan una teoría que permite asociar un sistema difuso con otro en un espacio de mayor dimensión, llamado espacio expandido. Diseñaron un compensador paralelo distribuido descentralizado en el espacio expandido. En el cual, la solución encontrada es contraída e implementada en el sistema difuso original. Alcanzaron resultados sobre la estabilidad y estabilización de los sistemas propuestos tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto vía funciones de Lyapunov.

Pitalúa (2005) utilizó el esquema del PDC con el objetivo de investigar si para un sistema difuso no lineal continuo obtenido por medio del modelado Takagi-Sugeno (1985), es posible garantizar su estabilidad. Para ello, el autor realiza la discretización cada subsistema del sistema difuso continuo, empleando las mismas funciones de membresía que utilizan estados discretos y obtuvo un controlador difuso. El autor demostró que bajo ciertas condiciones, es posible estabilizar también el sistema difuso continuo a un criterio de estabilidad local y a uno de estabilidad global.

El-Din *et al.* (2007), diseñaron un regulador basado en un observador para modelos difusos. En este trabajo se derivan las condiciones adecuadas de las desigualdades matriciales para el caso en tiempo continuo. Los autores diseñaron un compensador paralelo distribuido utilizando la función cuadrática de Lyapunov modificada. Al incluir limitaciones en la señal de entrada, se muestra que el compensador puede estabilizar el sistema aun con las cotas más estrictas de la

señal de control. Relajaron las condiciones de estabilidad para ampliar la clase de controladores difusos que garantizan la estabilidad. La contribución principal de este trabajo es la obtención de nuevas condiciones para las LMI's que puedan ser usadas en el diseño de reguladores basados en observadores. Para ello se requiere la obtención de nuevas matrices de transformación.

García *et al.* (2009), trabajaron con el proceso de renovación de la carga en motores turbodiesel. Este sistema presenta un comportamiento altamente no lineal, razón por la cual la aplicación de las técnicas clásicas de diseño de controladores resulta ineficiente para atender los requerimientos de este sistema. A partir de los datos experimentales obtuvieron un modelo difuso Takagi-Sugeno (1985) y diseñaron un controlador difuso óptimo empleando el esquema del compensador paralelo distribuido.

En este trabajo se presenta el esquema del compensador paralelo distribuido y las condiciones que garantizan la estabilidad de los sistemas propuestos. Tres ejemplos ilustrativos validan la propuesta.

MODELO DIFUSO TAKAGI-SUGENO (T-S) (1985)

El modelo difuso propuesto por Takagi-Sugeno (T-S) es un modelo basado en reglas de tipo si-entonces, las cuales representan relaciones entrada-salida locales lineales de sistemas no lineales. La principal característica de este modelo es que puede expresar con una aproximación arbitraria (Espinoza, 2004), y en algunos casos, la dinámica de un sistema no lineal en base a descripciones locales definidas por subsistemas lineales, donde cada uno es válido en una cierta región de operación. Cada región de operación se define por una parte condicional, similar a las reglas difusas del modelo Mandani (Driankov, 1996). La diferencia con las reglas del modelo Mandani es que la parte consecuente de cada regla es una expresión analítica que describe el modelo local correspondiente (Tanaka, 2001).

Sea el sistema no lineal en tiempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{1}$$

o, en tiempo discreto:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ y_k &= h(x_k)\end{aligned}\tag{2}$$

donde:

$u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, e $y(\cdot) \in \mathbb{R}^q$ es

la salida de los sistemas. Es posible describir el comportamiento entrada-salida de los sistemas no lineales por un modelo difuso T-S descrito por las siguientes reglas:

Sistemas en tiempo continuo:

Regla i

Si $z_1(t)$ es F_{1i} y ... $z_p(t)$ es F_{pi}

$$\text{Entonces } \sum: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t), i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (3)$$

Sistemas en tiempo discreto:

Regla i

Si $z_{1k}(t)$ es F_{1i} y ... $z_{pk}(t)$ es F_{pi}

$$\text{Entonces } \sum: \begin{cases} x_{k+1} = A_i^d x_k + B_i^d u_k \\ y_k = C_i^d x_k, i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (4)$$

donde:

$z_1(\cdot), \dots, z_p(\cdot)$ representan las variables premisas medibles, las cuales pueden coincidir con el vector de estado ($x(t), x_k$) o un conjunto parcial de este vector a través de las señales de salida $y(\cdot)$. F_{1i}, \dots, F_{pi} son los correspondientes conjuntos difusos.

El modelo difuso se obtiene utilizando el fusificador elemento único (singleton), motor de inferencia por producto y el defusificador centro de gravedad (Wang, 1997). El sistema difuso que se obtiene es la combinación lineal $\mu_i(\cdot)$ de los modelos locales, de manera que:

Para sistemas continuos:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + \\ &\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))B_i u(t)) = \hat{f}(x(t), u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + \hat{h}(x(t))) \end{aligned} \right. \quad (5)$$

donde:

$$\mu_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (6)$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_{pi}(z_j(t))$$

En sistemas discretos:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t)_{k+1} &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z_k(t))(A_i^d x_k + \\ &\sum_{i=1}^r \mu_i(z_k)B_i^d u_k) = \hat{f}(x_k, u_k) \\ y_k &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z_k)(C_i^d x_k + \hat{h}(x_k)) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

donde:

$$\mu_i(z_k) = \frac{w_i(z_k)}{\sum_{i=1}^r w_i(z_k)} \quad (8)$$

$$w_i(z_k) = \prod_{j=1}^p F_{pi}(z_{jk})$$

El término $F_{pi}(z_{jk})$ es el grado de membresía de z_{jk} en F_{pi} .

El peso normalizado para cada regla:

$$\mu_i(z(\cdot)) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(\cdot)) = 1, \quad z(\cdot) = [z_1(\cdot), \dots, z_p(\cdot)]^T \quad (9)$$

No linealidad tipo sector

La no linealidad tipo sector (Tanaka, 2001) propone lo siguiente: considere un sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (10)$$

donde $f(0) = 0$. El objetivo es encontrar un sector global que contenga completamente a la función $f(x(t))$ de manera tal que:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad [a_1, a_2]x(t) \quad (11)$$

La figura 1 muestra el sector global en $[a_1, a_2]$.

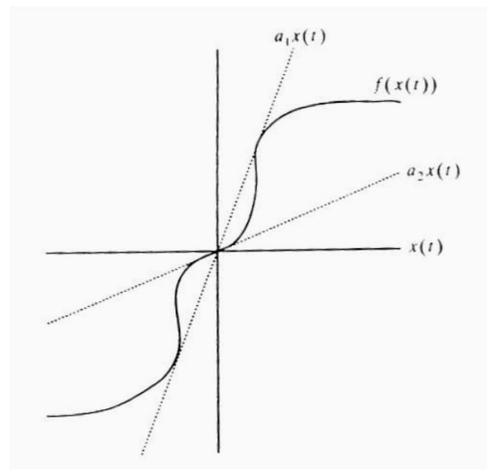


Figura 1. No linealidad tipo sector global

Existen sistemas no lineales para los cuales resulta complicado establecer sectores globales, para tales sistemas se consideran sectores locales. En la figura 2 se muestra el sector no lineal local para $f(x_1(t)) = \text{sen}(x_1(t))$ dentro de la región local definida por $-\pi/2 < z_1(t) < \pi/2$.

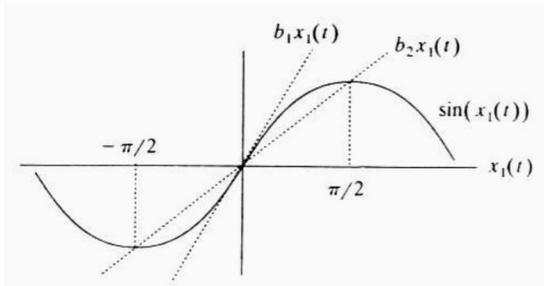


Figura 2. $\text{sen}(x_1(t))$ y su sector local

El proceso de defusificación se lleva a cabo mediante:

$$x = \sum_{i=1}^4 \mu_i A_i x \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= M_1(z_1) \times N_1(z_2) \\ \mu_2 &= M_1(z_1) \times N_2(z_2) \\ \mu_3 &= M_2(z_1) \times N_1(z_2) \\ \mu_4 &= M_2(z_1) \times N_2(z_2) \end{aligned} \quad (13)$$

Compensador paralelo distribuido (PDC)

El PDC ofrece un procedimiento para diseñar un controlador difuso proveniente de T-S, en el que cada regla de control es diseñada desde su regla correspondiente en el modelo difuso T-S, esto es, el controlador comparte los mismos conjuntos difusos que se encuentran en los antecedentes del modelo. Este compensador fue propuesto por Kang & Sugeno en 1992. Sin embargo, la estabilidad de los sistemas de control no fue contemplada en el procedimiento de diseño. Esto fue mejorado y la estabilidad de los sistemas de control fue analizada, recibiendo con esto, el nombre de compensador paralelo distribuido, donde la idea principal es diseñar un controlador para cada regla del modelo difuso utilizando en cada regla técnicas de diseño de control lineal. Lo anterior resulta en un controlador difuso total (por lo general no lineal), que es una combinación difusa de cada controlador lineal individual.

Observe el concepto del PDC en el esquema de la figura 3.

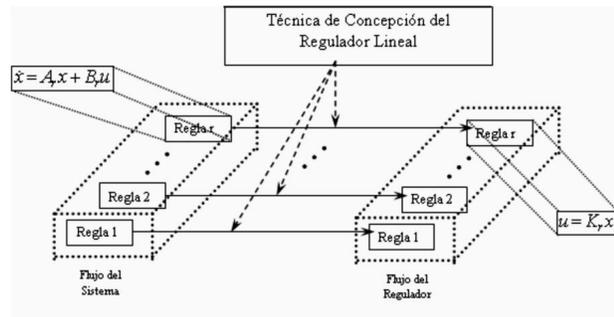


Figura 3. Esquema del compensador paralelo distribuido

El controlador difuso utilizando el PDC para los modelos difusos (5) y (7) es:

para el sistema continuo:

Regla i
Si $z_1(t)$ es F_{1i} y... y $z_p(t)$ es F_{pi}
entonces $u(t) = K_i x(t)$

el controlador es:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) K_i x(t) \quad (14)$$

Para el sistema discreto:

Regla i
Si z_{1k} es F_{1i} y... y z_{pk} es F_{pi}
entonces $u_k = K_i^d x_k$

el controlador está definido por:

$$u_k = \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) \right) (K_i^d) x_k \quad (15)$$

A continuación se presentan tres ejemplos que demuestran que el PDC es una opción viable para estabilizar un sistema.

Ejemplo 1 (Tanaka & Sugeno, 1992)

Dado el siguiente sistema no lineal en función del tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + (3 + x_2) x_1^3 \end{aligned} \quad (16)$$

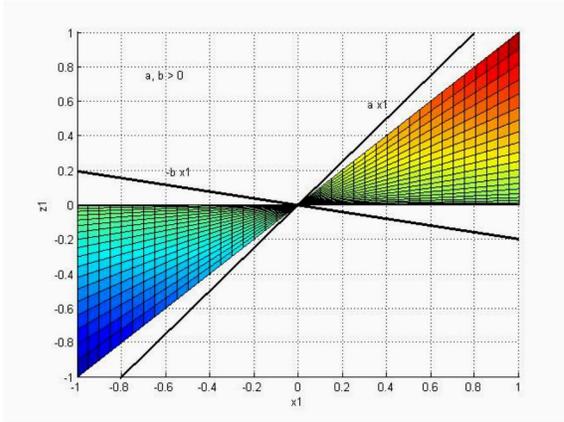
Considerando $x_1(t) \in [-1, 1]$ y $x_2(t) \in [-1, 1]$. El sistema puede ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_1 x_2^2 \\ (3+x_2)x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

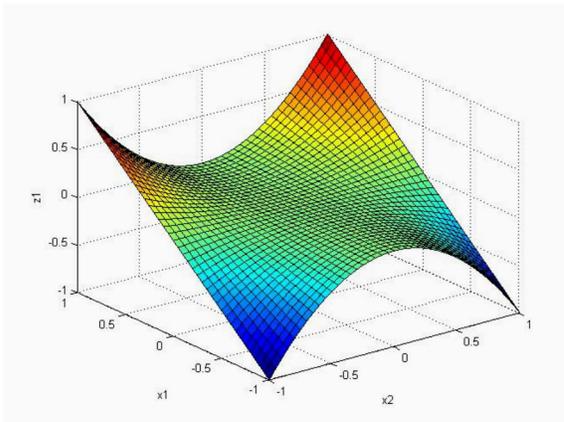
Definiendo $z_1 \equiv x_1 x_2^2$ y $z_2 \equiv (3+x_2)x_1^2$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & z_1 \\ z_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Las figuras 4 y 5 muestran los sectores globales para z_1 y z_2 , donde los sectores están definidos por planos. Se observan los máximos y mínimos de z_1 y z_2 , respectivamente.



(a)



(b)

Figura 4. Sector global para z_1 .
(a) Valores máximos y mínimos de z_1 .
(b) Sector global de z_1 .

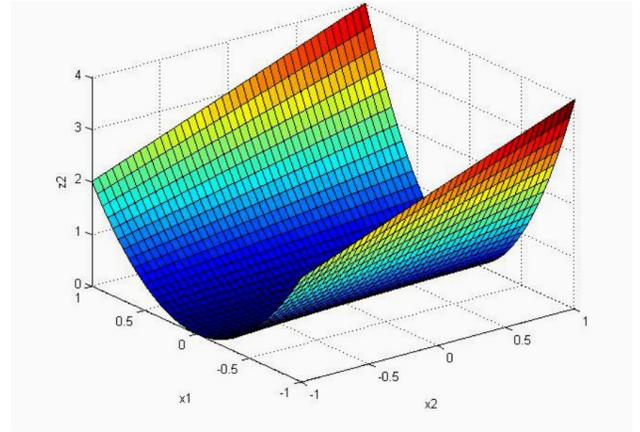


Figura 5. Valores máximos y mínimos de z_2

Los valores máximo y mínimo de z_1 y z_2 para el intervalo dado son:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} z_1 &= 1 & \min_{x_1, x_2} z_1 &= -1 \\ \max_{x_1, x_2} z_2 &= 4 & \min_{x_1, x_2} z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

pueden ser representados para z_1 y z_2 como:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2^2 = M_1(z_1) * (1) + M_2(z_1) * (-1) \\ z_2 &= (3+x_2)x_1^2 = N_1(z_2) * (4) + N_2(z_2) * (0) \end{aligned} \quad (20)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_1(z_1) + M_2(z_1) &= 1 \\ N_1(z_2) + N_2(z_2) &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Las funciones de membresía μ_i pueden ser calculadas a partir de:

$$\begin{aligned} M_1(z_1) &= \frac{z_1 + 1}{2}, & M_2(z_1) &= \frac{1 - z_1}{2} \\ N_1(z_2) &= \frac{z_2}{4}, & N_2(z_2) &= \frac{4 - z_2}{4} \end{aligned} \quad (22)$$

Las funciones de membresía M_1 , M_2 , N_1 y N_2 se establecen con las variables lingüísticas “positivo”, “negativo”, “grande” y “pequeño”, respectivamente, como se muestra en las figuras 6 y 7.

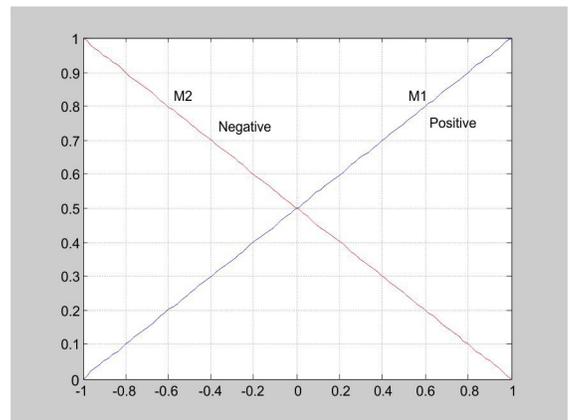


Figura 6. Funciones de membresía para z_1

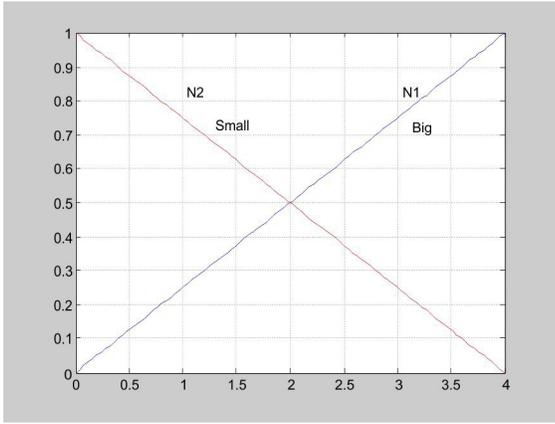


Figura 7. Funciones de membresía para z_2

El sistema no lineal se representa como el modelo difuso de acuerdo a las siguientes reglas:

Regla 1:

Si z_1 es “positivo” y z_2 es “grande”
entonces $\dot{x} = A_1 x$

Regla 2:

Si z_1 es “positivo” y z_2 es “pequeño”
entonces $\dot{x} = A_2 x$

Regla 3:

Si z_1 es “negativo” y z_2 es “grande”
entonces $\dot{x} = A_3 x$

Regla 4:

Si z_1 es “negativo” y z_2 es “pequeño”
entonces $\dot{x} = A_4 x$

donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el esquema del PDC se obtiene el siguiente modelo difuso:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i x(t) \quad (24)$$

que puede ser expresado:

$$\dot{x}(t) = M_1(z_1(t))N_1(z_2(t))A_1 + M_1(z_1(t))N_2(z_2(t))A_2 + M_2(z_1(t))N_1(z_2(t))A_3 + M_2(z_1(t))N_2(z_2(t))A_4 \quad (25)$$

donde:

$$\mu_i(z(t)) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 M_j(z_1(t))N_k(z_2(t)) =$$

$$\mu_i(z(t)) = \sum_{j=1}^2 M_j(z_1(t))N_1(z_2(t)) + M_j(z_1(t))N_2(z_2(t))$$

$$\mu_i(z(t)) = M_1(z_1(t))N_1(z_2(t)) + M_1(z_1(t))N_2(z_2(t)) + M_2(z_1(t))N_1(z_2(t)) + M_2(z_1(t))N_2(z_2(t)) \quad (26)$$

Simulando el sistema con $u = 0$ se tiene, como se aprecia en la figura 8, donde se muestra el comportamiento de las señales de estado X_1 y X_2 :

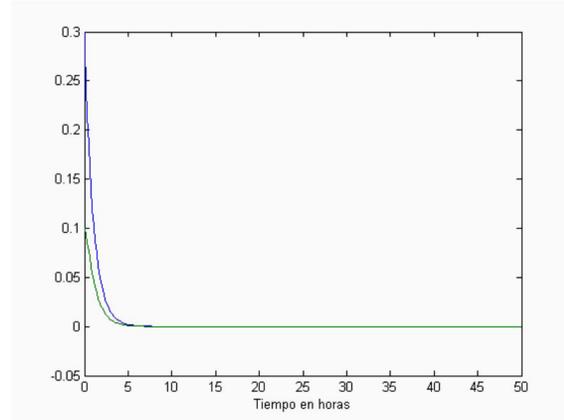


Figura 8. Respuesta del sistema

Ejemplo 2 (Espinoza, 2007)

Sea el modelo de un proceso de fermentación de un cultivo descrito por:

$$\frac{dx}{dt} = \rho(s)x - xd$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho(s)x}{y} - sd + s_f d \quad (27)$$

donde:

x_1 = biomasa, x_2 = sustrato, d = Cte, s_f = entrada, $\rho(s)$ = no linealidad del sistema, s_m = concentración del sustrato en la alimentación, y = rendimientos K, s = sustrato

$$\rho(s) = \rho_{\max} \frac{s}{k_2 s^2 + s + k_1} \quad (28)$$

Considerando S_{in} como entrada, el sistema no lineal se puede representar de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} (\rho(s) - d)x \\ -\frac{\rho(s)x}{y} - sd \end{bmatrix}; g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$y = h(x) = s$$

$$y = s$$

La no linealidad del sistema $\rho(s)$ está dada por la velocidad específica de crecimiento mostrada en la figura 9.

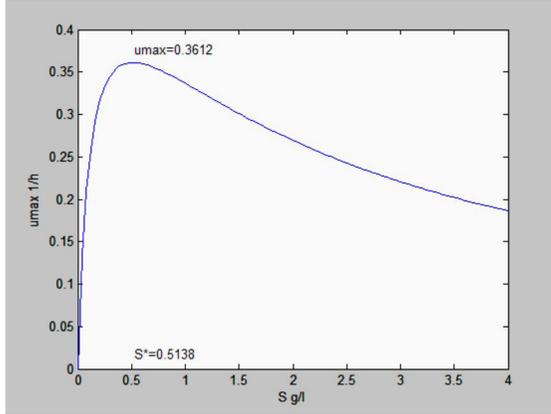


Figura 9. Velocidad específica de crecimiento.

El sistema no lineal $\dot{x}(t) = f(x(t)) + bu(t)$ dado se puede representar como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(s) - d & 0 \\ -\rho(s)/y_{xs} & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} S_{in} \quad (30)$$

La no linealidad $\rho(s)$ es una no linealidad tipo sector global:

$$z_1(t) = \rho_{\max} \frac{s}{ks + s + \frac{s^2}{k_i}} \quad (31)$$

Calculando los máximos y mínimos de la no linealidad en la región $s(t) \in [-0.0191, 4]$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \max_{s(t)} z_1(t) &= 0.36 = a_1 \\ \min_{s(t)} z_1(t) &= -0.1 = a_2 \end{aligned} \quad (32)$$

$z_1(t)$ puede ser escrito como:

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(z_1(t)) a_i \quad (33)$$

Limitando con los valores máximos y mínimos:

$$z_1(t) = M_1(z_1(t)) a_1 + M_2(z_1(t)) a_2 \quad (34)$$

Las funciones de membresía se calculan resolviendo para $M_1 z_1(t)$ y $M_2 z_1(t)$:

$$\begin{aligned} M_1(z_1(t)) &= \frac{z_1(t) - a_2}{a_1 - a_2} \\ M_2(z_1(t)) &= \frac{-z_1(t) + a_1}{a_1 - a_2} \end{aligned} \quad (35)$$

en la figura 10 se muestran las funciones de Membresía M_1 y M_2 .

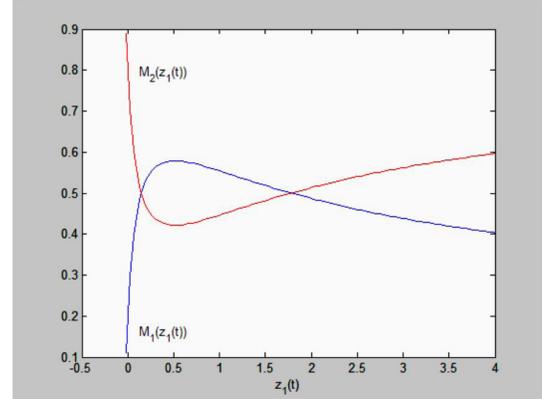


Figura 10. Funciones de membresía

Como se tiene sólo una no linealidad el sistema no lineal se puede representar como dos subsistemas y las reglas son:

Si z_1 es M_1 entonces

$$\dot{x}_1(t) = A_1(x(t)) + Bu(t) \quad a_1 = \max(z_1(t))$$

(36)

Si z_1 es M_2 entonces

$$\dot{x}_2(t) = A_2(x(t)) + Bu(t) \quad a_2 = \min(z_1(t))$$

La defusificación se lleva a cabo mediante:

$$\begin{aligned} \mu_i(z(t)) &= \sum_{i=1}^2 M_i(z_1(t)) \\ \mu_i(z(t)) &= M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) \end{aligned} \quad (37)$$

donde el sistema no lineal puede ser representado por:

$$\dot{x} = \mu_i(z(t)) \{A_i(x(t)) + Bu(t)\} \quad (38)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= M_1(z_1(t)) \{A_1(x(t)) + Bu(t)\} + \\ &M_2(z_1(t)) \{A_2(x(t)) + Bu(t)\} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} a_1 - d & 0 \\ -a_1/\gamma_{XS} & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} s_{in} \\ \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} a_2 - d & 0 \\ -a_2/\gamma_{XS} & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} s_{in}\end{aligned}\quad (40)$$

Diseño del PDC

Los subsistemas están representados por:

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} -0.0012 & 0 \\ -0.9 & -0.3612 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.4612 & 0 \\ 0.250 & -0.3612 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3612 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (41)$$

La figura 11 muestra la convergencia a cero de los estados a una entrada s_{in} .

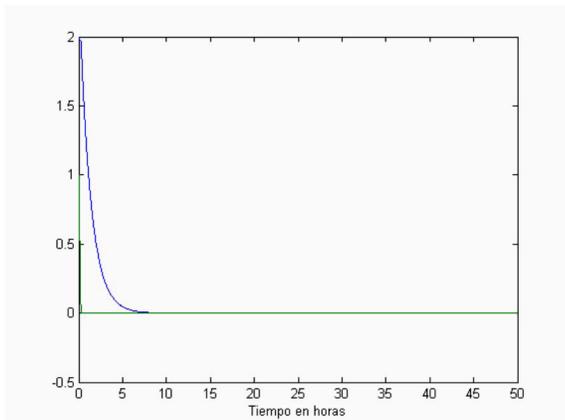


Figura 11. Respuesta del sistema con las condiciones iniciales $x(0) = 0.2$ y $s = 0.3$.

Ejemplo 3 (Meda et al, 2005)

Considere el modelo de una barra moviéndose en un plano vertical dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a \sin(x_1) + bu \\ y(t) &= x_1\end{aligned}\quad (42)$$

donde:

$$a = -\frac{Mgl}{ml^2 + I}; \quad b = \frac{1}{Ml^2 + I},$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2; \quad M = 20 \text{ kg}; \quad l = 0.5 \text{ m}, \quad I = 0.8 \text{ kg-m}^2$$

u es el torque aplicado a la barra.

El sistema puede ser representado como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a \sin(x_1)}{x_1} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \quad (43)$$

definiendo:

$$z_1 = \frac{a \sin(x_1)}{x_1}; \quad z_{1max} = a, \quad z_{1min} = \frac{2}{\pi} a \quad (44)$$

El comportamiento del movimiento de la barra en el plano vertical es aproximadamente descrito por las reglas:

Regla 1

Si $x_1(t)$ está cerca de 0

$$\text{entonces } \sum_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{01}x(t) + Bu(t) \\ y_1(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (45)$$

Regla 2

Si $x_1(t)$ está cerca de $\pm \pi/2$

$$\text{entonces } \sum_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{02}x(t) + Bu(t) \\ y_1(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Las funciones de membresía son:

$$\begin{aligned}\mu_1[x_1(t)] &= \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-7(x_1 - \pi/4)}} \right] \left[\frac{1}{1 + e^{-7(x_1 - \pi/4)}} \right]; \\ \mu_2[x_1(t)] &= 1 - \mu_1[x_1(t)]\end{aligned}\quad (46)$$

Las matrices de los subsistemas difusos son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{\pi} a & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (47)$$

Las ganancias obtenidas a partir de las desigualdades matriciales (LMI's) son:

$$\begin{aligned} K_1 &= [39.85937875724280 \quad -31.87178540945682] \\ K_2 &= [4.50682714314244 \quad -33.31730918064923] \end{aligned} \quad (48)$$

El controlador difuso obtenido mediante el esquema del PDC tiene la forma:

$$u(t) = \mu_1(x_1(t))K_1 x(t) + \mu_2(x_1(t))K_2 x(t) \quad (49)$$

En la figura 12 se muestran la respuesta de los estados x_1 y x_2 del sistema al controlador $u_1(t)$

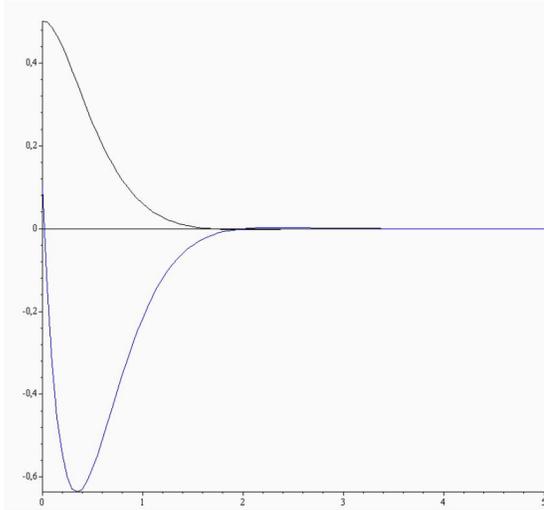


Figura 12. Respuesta del sistema con las condiciones iniciales $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 0.1$.

Estabilidad de modelos difusos T-S

Condiciones de estabilidad utilizando el esquema PDC

En los sistemas dinámicos lineales, no lineales o difusos la estabilidad es una característica importante. Muchas investigaciones se han realizado en este sentido. Una aportación importante en el estudio de la estabilidad en sistemas difusos fue presentada por Tanaka & Sugeno (1992), al encontrar una condición de suficiencia para la estabilidad asintótica del punto de equilibrio del modelo difuso mediante los siguientes teoremas:

Teorema 1. Suponga que los pares (A_i, B_i) para $i = 1, \dots, r$ son estabilizables, entonces el punto de equilibrio del sistema difuso continuo (5) es, globalmente, asintóticamente estable si existe una matriz común definida positiva P tal que:

$$(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) < 0 \quad (50)$$

para $i = 1, 2, \dots, r, y$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0 \quad (51)$$

para $i < j \leq r$ donde:

$$G_{ij}^d = \frac{(A_i + B_i K_i) + (A_j + B_j K_i)}{2} \quad (52)$$

Teorema 2. Suponga que los pares $(A_i^d + B_i^d)$ para $i = 1, \dots, r$ son estabilizables, entonces el punto de equilibrio del sistema difuso discreto (7) con la ley de control (15) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz común definida positiva P tal que:

$$(A_i^d + B_i^d K_i^d)^T P (A_i^d + B_i^d K_i^d) - P < 0 \quad (53)$$

para $i = 1, 2, \dots, r, y$

$$(G_{ij}^d)^T = P G_{ij}^d - P < 0 \quad (54)$$

para $i < j \leq r$ donde:

$$G_{ij}^d = \frac{(A_i^d + B_i^d K_i^d) + (A_j^d + B_j^d K_i^d)}{2} \quad (55)$$

De los teoremas 1 y 2 podemos concluir que si cada subsistema lineal puede ser estabilizado y si existe una matriz común P definida positiva que satisface las ecuaciones matriciales de Lyapunov (50), (51) o (53), (54), entonces el controlador (14) o (15) estabilizará los sistemas difusos (5) o (7), respectivamente.

Estabilidad cuadrática en lazo cerrado

Considere el modelo difuso

Regla i

Si $z_1(t)$ es F_{1i} y $z_p(t)$ es F_{pi} entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) \end{aligned} \quad (56)$$

Utilizando la inferencia difusa lineal (Palacios, 2004), el modelo difuso obtenido del sistema no lineal tiene la forma

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (57)$$

donde:

$$w_i(z(t)) = \prod F_{ij}(z_j(t)) \quad (58)$$

Si se define:

$$\mu_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (59)$$

La ecuación (57) se expresa como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (60)$$

La expresión del sistema difuso tipo T-S para el PDC a partir de (14), viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) [A_i - B_i K_j] x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i^2(z(t)) [A_i - B_i K_j] x(t) + \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1, j \neq i}^r \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \left[\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right] x(t) \quad (61) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1, j \neq i}^r \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \left[\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right] x(t) \end{aligned}$$

Si se introduce una función cuadrática de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ el resultado se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 3. El equilibrio del sistema difuso continuo (57) donde las matrices $K_i, 1, \dots, r$ son globalmente, asintóticamente estables si existe una matriz simétrica $Q = P^{-1}$ común definida positiva que satisface las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} Q A_i^T + A_i Q + V_i^T B_i^T + B_i V_i &< 0 \quad i = 1, \dots, r \\ Q A_i^T + A_i Q + Q A_j^T + A_j Q + V_j^T B_i^T + B_i V_j + \\ V_i^T B_j^T + B_j V_i &< 0 \quad i < j \leq r \end{aligned} \quad (62)$$

donde:

$V_i = K_i Q, i = 1, 2, \dots, r$, son las nuevas matrices de las LMI's.

El problema del regulador PDC está en encontrar las ganancias $V_i, i \in \{1, \dots, r\}$ que satisfacen las condiciones del teorema con una matriz común Q definida positiva.

Se observa que este tipo de comando necesita la solución de $\frac{r(r+1)}{2}$ de las LMI.

En el caso de que las matrices B_i sean comunes ($B_1 = B_2 = \dots = B_r$) las condiciones del teorema pueden simplificarse como sigue:

Lema 1: Suponga que $B_1 = B_2 = \dots = B_r$. El origen del sistema difuso (61) es globalmente, asintóticamente estable si existe una matriz simétrica Q , definida positiva que satisfaca las desigualdades (62).

CONCLUSIONES

El modelo difuso de Takagi & Sugeno (1985) permite aproximar el comportamiento de un sistema no lineal incorporando características de los sistemas lineales donde los subsistemas lineales que forman parte del consecuente de las reglas representa el comportamiento del sistema alrededor de algún punto de operación.

Los resultados muestran que es posible aproximar arbitrariamente sistemas no lineales y en algunos casos representarlos exactamente mediante el modelado utilizando técnicas de lógica difusa.

Para garantizar que el sistema difuso alcance la estabilidad es suficiente con encontrar una matriz común P definida positiva tal que se satisfagan las desigualdades matriciales de los teoremas 1 y 2.

El controlador diseñado utilizando el método del compensador paralelo distribuido, permite al sistema alcanzar la estabilidad, aspecto que se demuestra en los tres ejemplos, figuras 8, 11 y 12, respectivamente.

Las ventajas del PDC son las siguientes:

1. El procedimiento de diseño es sencillo.
2. La dificultad de diseño del controlador se reduce a un problema de tipo de desigualdad matricial (Linear Matrix Inequation, LMI), en el cual se calculan las matrices de estabilización del sistema dado.

REFERENCIAS

- AKAR, M. & ÖZGÜNER, Ü. (2000). *Decentralized parallel distributed compensator design for Takagi-Sugeno fuzzy systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, pp. 691-704.

- DRIANKOV, D., HELLENDORF, H., REINFRANK, M. (1996) *An Introduction to Fuzzy Control*. New York, USA: Springer-Verlag. s/n.
- EL-DIN, M., EMARA, H., ELSHAFFEL, A., BAHGAT, A. (2007). *Observer Based Fuzzy-Control Design Using Relaxed LMI Conditions*. Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA. pp. 5312-5317.
- ESPINOZA, M. (2007). *Estabilización de Sistemas No Lineales Discretizables Exactamente*. Cinvestav. Guadalajara, México.
- ESPINOZA, M., MORALES, T., CASTILLO, B. (2004). *Problema de estabilización práctica para una clase de sistemas no lineales*. En Memorias del XI Congreso Latinoamericano de Control Automático. Cuba. s/n.
- FARINWATA, S., FILEV, D., LANGARI, R. (2000). *Fuzzy Control Synthesis and Analysis*. New Jersey, USA: John Wiley and Sons. s/n.
- GARCÍA, S., SALCEDO, J., BLASCO, X., MARTÍNEZ, M. (2009). *Sistema de control borroso para el proceso de renovación de la carga en motores turbodiesel*. Revista iberoamericana de automática e informática industrial. pp. 36-48.
- MEDA, J., CASTILLO, B., TITLI, A. (2005). *A fuzzy output regulator for Takagi-Sugeno fuzzy models*. Cinvestav. Guadalajara, México.
- PALACIOS, E. (2004). *Contribution à la commande floue de type Takagi-Sugeno des systèmes non-linéaires*. Francia.
- PITALÚA, N. (2005). *Estabilización global de un sistema difuso continuo Takagi-Sugeno por medio de su modelo discreto*. México, Cinvestav. s/n.
- TAKAGI, T. & SUGENO, M. (1985). "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control". IEEE Trans. Syst. Man, Cybernet, pp. 116-132.
- TANAKA, K. & SUGENO, M. (1992). *Stability analysis and design of fuzzy control systems*. Fuzzy Sets Syst, pp. 135-156.
- TANAKA, K. & WANG, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and analysis*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc. s/n.
- WANG, L. (1997). *A course in Fuzzy Systems and Control*. New Jersey, USA: Prentice Hall. s/n.