

MODELO MATEMÁTICO 3D PARA DETERMINAR LA TRAYECTORIA DE UNA PELOTA: REVALUACIÓN DEL JONRÓN DE GALARRAGA

OSCAR ANDRÉS LÓPEZ ¹, JOSÉ LUIS LÓPEZ ², ELIZABETH RAVEN ³, ADRIÁN LÓPEZ ⁴

¹ IMME, Facultad de Ingeniería, UCV. (oalsf@yahoo.com).

² Instituto de Mecánica de Fluidos, Facultad de Ingeniería, UCV. (lopezjoseluis7@gmail.com).

³ Instituto Universitario de Tecnología Región Capital Dr. F.R.P. (nenuraven@yahoo.com).

⁴ Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela (adrian.lopez.r753@gmail.com).

Recibido: abril 2018

Aprobado para publicación: mayo 2019

RESUMEN

Se desarrolló un modelo matemático en tres dimensiones (3D) para determinar la trayectoria de una pelota esférica usando los principios de la física. En el modelo se incorporan las tres componentes de rotación de la pelota que se pueden desarrollar durante el vuelo. El modelo puede ser aplicado a cualquier deporte siempre que se usen los coeficientes aerodinámicos y de fricción apropiados para la pelota en consideración. En el modelo se incorporan coeficientes específicos para una pelota de beisbol que cuentan con respaldo experimental. La confiabilidad del modelo se demuestra mediante la comparación de sus resultados con datos reales de la trayectoria de una pelota medidos durante un juego de beisbol por el novedoso sistema Statcast de cámaras y radares de alta precisión. El modelo 3D se aplica para re-examinar el gran jonrón conectado por Andrés Galarraga en 1997 el cual fue considerado uno de los más largos (529 pies) en la historia del beisbol de las grandes ligas, pero luego reducido a 468 pies por el canal deportivo de TV, ESPN. La investigación combina la física, la matemática, la geometría descriptiva, la edición de videos y el uso de sensores remotos para determinar la distancia real del jonrón. Se utilizó la tecnología LIDAR para determinar la distancia entre el plato y el punto de impacto de la pelota en las gradas del estadio. Para tomar en cuenta las incertidumbres presentes en el análisis, se consideraron 18 casos diferentes variando tanto las condiciones iniciales, basadas en los rangos históricos de jonrones conectados en las grandes ligas, como la velocidad del viento y su dirección. Usando proyecciones ortogonales y cónicas de las trayectorias, se compararon las alturas máximas de la pelota obtenidas en las simulaciones con las alturas máximas observadas en el video, lo que permitió seleccionar las trayectorias más confiables. Se identifican los errores en el cálculo de la distancia indicada por ESPN. Los resultados del modelo 3D se comparan satisfactoriamente con los del modelo 2D desarrollado previamente por los autores. Los resultados muestran que el jonrón de Galarraga excedió la barrera de los 500 pies y alcanzó una distancia de 524 pies.

Palabras clave: Beisbol, modelos matemáticos, Galarraga, geometría descriptiva, LIDAR

3D MATHEMATICAL MODEL TO DETERMINE THE TRAJECTORY OF A BALL: REVALUATION OF THE GALARRAGA JONRON

ABSTRACT

A mathematical model was developed in three dimensions (3D) to determine the trajectory of a spherical ball using the principles of physics. The model incorporates the three components of rotation that can be developed during the flight of the ball. The model can be applied to any sport as long as the appropriate aerodynamic and friction coefficients are used for the ball under consideration. The model incorporates specific coefficients for a baseball that have experimental support. The reliability of the model is demonstrated by comparing its results with real data of the trajectory of a ball measured during a baseball game by the novel Statcast system of high precision cameras and radars. The 3D model was applied to re-examine the great home run connected by Andres Galarraga in 1997 which was considered one of the longest (529 feet) in the history of baseball of the MLB, but then reduced to 468 feet by TV sports channel, ESPN. The research combines physics, mathematics, descriptive geometry, video editing and remote sensing to determine the real distance of the home run. LIDAR technology was used to determine the distance between the plate and the point of impact of the ball in the stands of the stadium. To take into account the uncertainties present in the analysis, 18 different cases were considered varying both the initial conditions, based on the historical ranges of home runs connected in the MLB, as well as the wind speed and its direction. Using orthogonal and conical projections of trajectories, the maximum heights of the ball

obtained in the simulations were compared with the maximum heights observed in the video, which allowed selecting the most reliable trajectories. Errors are identified in the calculation of the distance indicated by ESPN. The results of the 3D model are compared successfully with those of the 2D model previously developed by the authors. The results show that Galarraga's home run exceeded the 500-foot barrier and reached a distance of 524 feet.

Keywords: Baseball, mathematical models, Galarraga, descriptive geometry, LIDAR

INTRODUCCIÓN

Una bola viajando en el espacio está sujeta a la acción del campo gravitatorio terrestre sobre su masa, el cual produce una fuerza que la atrae hacia abajo (su peso), a la resistencia del aire que disminuye su velocidad, al efecto del viento, que puede modificar su velocidad, y a la fuerza de Magnus generada por la rotación de la pelota que puede aumentar o reducir su alcance. Cualquier pelota lanzada o bateada sigue una trayectoria curva que la aleja de la dirección inicial de partida debido a la acción de dichas fuerzas. La determinación de la trayectoria de la pelota ha sido objeto de muchos estudios por físicos y matemáticos. El mismo Newton en el siglo XVII escribió sobre las razones de la curvatura mostrada en la trayectoria de pelotas de tenis (aplicable también al beisbol) al golpearlas con un efecto de rotación (Clanet, 2015). Los resultados de estudios experimentales y teóricos del siglo XX han conducido al desarrollo de modelos matemáticos que permiten hacer una predicción confiable de la trayectoria que seguiría una pelota de beisbol al ser golpeada por un bate.

Rex (1985) destacó que pelotas con rotación hacia atrás (*backspin*) alcanzan mayores distancias que pelotas sin rotación o con rotación hacia adelante (*topspin*). Frohlich (1984) fue el primero en observar la disminución en el coeficiente de arrastre con un aumento en la velocidad de pelotas de beisbol lanzadas o bateadas, fenómeno conocido como crisis del arrastre. Sawicki et al. (2003) propusieron una expresión para determinar el coeficiente de Magnus que se ajusta adecuadamente a los valores experimentales obtenidos en el laboratorio por otros autores (Nathan, 2008-a). El decaimiento de la velocidad rotacional de una pelota bateada juega un rol menor en la trayectoria de la pelota (Nathan, 2008-b). En Nathan (2016) se presentan datos de la trayectoria de una pelota de beisbol bateada durante un juego, medidos con el sistema Statcast el cual suministra una descripción espacial precisa del recorrido; esta información es útil para calibrar y validar un modelo matemático de simulación.

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo matemático en tres dimensiones (3D) que permita calcular la trayectoria de una pelota de beisbol, bateada o lanzada. En un trabajo previo los autores presentaron un modelo

bidimensional (2D) el cual fue aplicado al análisis del gran jonrón de Galarraga de 1997 (López et al., 2017-a). En este trabajo se usa el modelo 3D que incorpora las componentes rotacionales de lado y de tirabuzón para re-analizar dicho jonrón. Una descripción resumida del modelo matemático 3D sin los detalles de las fórmulas ni del análisis geométrico descriptivo, se describe en López et al. (2017-b). En este texto se usan unidades de longitud en pies (ft) y de velocidad en millas por hora (mph) a fin de mantener la consistencia con la terminología empleada tradicionalmente en el beisbol.

MODELO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR LA TRAYECTORIA DE LA PELOTA

Ecuaciones de la dinámica

Una pelota en movimiento está sujeta a los efectos del campo gravitatorio sobre su masa y a fuerzas aerodinámicas que dependen de la velocidad relativa de la pelota respecto al viento.

La Figura 1.a muestra en línea discontinua la trayectoria de una pelota con velocidad traslacional \vec{V}_p con respecto al sistema fijo a tierra (x, y, z) y velocidad rotacional $\vec{\omega}$, sujeta a la acción de un viento de velocidad \vec{V}_v . El vector \vec{V} indica la velocidad relativa de la pelota con respecto al viento.

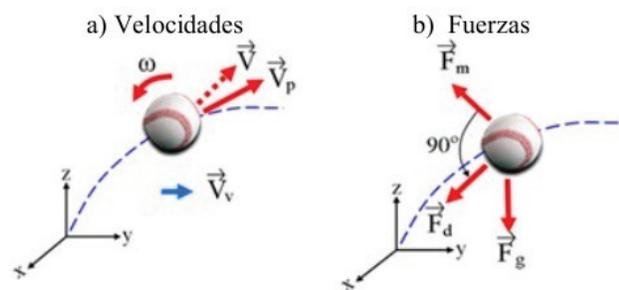


Figura 1. Trayectoria (línea discontinua) de la pelota indicando su velocidad traslacional (\vec{V}_p) y rotacional ($\vec{\omega}$), la velocidad del viento (\vec{V}_v), la velocidad relativa de la pelota con respecto al viento (\vec{V}) y las fuerzas actuantes: Gravedad (\vec{F}_g), Arrastre (\vec{F}_d) y Magnus (\vec{F}_m)

La Figura 1.b muestra las fuerzas actuantes sobre la pelota: el peso \vec{F}_g dirigido hacia abajo, la fuerza de arrastre o la resistencia que ejerce el aire \vec{F}_d , la cual actúa en la misma dirección pero con sentido contrario al vector \vec{V} y la fuerza de Magnus \vec{F}_m cuya dirección es perpendicular a los vectores \vec{V} y $\vec{\omega}$. Nótese que el vector no es tangente a la trayectoria, solo lo sería en el caso particular de que no hubiese viento.

El movimiento de la pelota se describe con la segunda ley de Newton: la resultante de la sumatoria de las fuerzas actuando sobre la pelota es igual al producto de su masa por la aceleración que adquiere, la cual en forma vectorial puede escribirse como:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{F}_m = m \vec{a} \quad (1)$$

Donde:

m: masa de la pelota.

\vec{a} : Vector de la aceleración traslacional de la pelota.

\vec{F}_g : Vector de la fuerza de gravedad (peso).

\vec{F}_d : Vector de la fuerza de arrastre.

\vec{F}_m : Vector de la fuerza de Magnus.

El vector de la fuerza de gravedad (peso) y el vector de la aceleración traslacional están dados por:

$$\vec{F}_g = -m \cdot g \hat{k} \quad (2)$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (3)$$

Donde \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} son vectores unitarios a lo largo de los ejes fijos en el sistema inercial de referencia (x, y, z), g es la aceleración de gravedad y a_x , a_y , a_z son las componentes del vector aceleración. Se desprecia la fuerza de Coriolis debida a la rotación de la tierra. La Ec. vectorial 1 contiene tres ecuaciones escalares asociadas a cada una de las direcciones x, y, z.

La Ec. 1 y la solución que se muestra más adelante son válidas para cualquier pelota, no únicamente de beisbol. La especificidad de la pelota de beisbol se introduce en la definición de los coeficientes C_d y C_m de las fuerzas de arrastre y de Magnus que se describen en las siguientes secciones. Su aplicación a pelotas de otros deportes requeriría de modificar dichos coeficientes.

La fuerza de arrastre

La fuerza de arrastre es el resultado de pequeños desbalances de la presión del aire en diferentes partes de la pelota y su dirección es la misma pero en sentido contrario al vector velocidad relativa (Figura 1). A partir de estudios teóricos y experimentales se ha encontrado que la fuerza de arrastre para una pelota de beisbol se puede escribir como (Adair, 2002; Nathan, 2008-a):

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} \rho C_d A V^2 \hat{V} \quad (4)$$

$$C_d = 0,50 - \frac{0,227}{1 + e^{-\frac{(1,467V - 108,7)}{21,0}}} \quad (5)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_p - \vec{V}_v \quad (6)$$

Donde

\vec{V} : Vector de la velocidad relativa de la pelota con respecto al viento.

V: Rapidez relativa de la pelota o módulo del vector \vec{V} .

\hat{V} : Vector unitario en la dirección de \vec{V} .

\vec{V}_p : Vector de la velocidad traslacional de la pelota con respecto al sistema fijo a tierra.

V_v : Rapidez del viento o módulo del vector \vec{V}_v .

ρ : Densidad de masa del aire.

C_d : Coeficiente de arrastre. En la Ec. 5 la rapidez V está en mph.

A: Área de la sección transversal de la pelota, igual a πR^2 donde R es el radio de la pelota.

El efecto del viento está incluido dentro de la fuerza de arrastre la cual depende de la velocidad relativa entre la pelota y el viento (Ec. 6). Si no hubiese viento (estadio techado) V sería la rapidez de la pelota con respecto al sistema tierra. En el caso teórico de que la velocidad del viento tuviese la misma magnitud y sentido que la velocidad de la pelota, la fuerza de arrastre se haría nula. Se supone que el viento mantiene su dirección y su magnitud en todo el trayecto de la pelota.

La fuerza de arrastre, Ec. 4, incorpora la resistencia de fricción debida al rozamiento entre el aire y la pelota, y la resistencia de forma la cual es un efecto aerodinámico inducido por la separación entre el flujo de aire y la pelota. El coeficiente de arrastre C_d para una pelota de beisbol dado por la Ec. 5 es un ajuste obtenido mediante ensayos en túneles de viento y disminuye con un aumento en la rapidez relativa de la pelota (Adair, 2002). Mayor discusión al respecto se presentó previamente en López et al. (2017-a).

La fuerza de Magnus

La fuerza de Magnus se suele expresar de la siguiente forma (McBeath et al., 2008):

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} \rho C_m A V^2 (\hat{\omega} \times \hat{V}) \quad (7)$$

Donde:

C_m : Coeficiente de Magnus.

$\hat{\omega}$: Vector unitario en la dirección del vector velocidad rotacional $\vec{\omega}$.

ω : Rapidez rotacional de la pelota o módulo de $\vec{\omega}$.

$$\hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \quad \hat{V} = \frac{\vec{V}}{V} \quad (8 \text{ a, b})$$

La dirección de la fuerza de Magnus está definida por un vector que es simultáneamente perpendicular a los vectores \vec{V} y $\vec{\omega}$ (Figura 1). El símbolo x en la Ec. 7 significa producto vectorial. La siguiente expresión para C_m de una pelota de beisbol es debida a Sawicki *et al.* (2002) la cual tiene un buen ajuste con datos experimentales (Nathan, 2008-a):

$$C_m = 1,5 S \quad \text{para } S \leq 0,1 \quad (9)$$

$$C_m = 0,09 + 0,6 S \quad \text{para } S > 0,1 \quad (10)$$

S es una variable adimensional dada por:

$$S = \frac{R \omega}{V} \cdot \kappa^t \quad (11)$$

Donde R es el radio de la pelota, V es la rapidez relativa de traslación y ω es la rapidez rotacional en radianes/segundo.

$$V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \quad (12)$$

$$\omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2} \quad (13)$$

El parámetro $R \cdot \omega / V$ en la Ec. 11 se le conoce como el factor de rotación. El decaimiento de ω durante la trayectoria de la pelota se ha incorporado al modelo en la Ec. 11 multiplicando el factor de rotación por κ^t donde κ es el factor de decaimiento de la rotación y t es el tiempo en segundos. Por ejemplo, un valor de $\kappa = 0,98$ significa que la velocidad rotacional decae 2% cada segundo. Similarmente,

cada componente rotacional (ω_x , ω_y , ω_z) es multiplicada por κ^t . En Nathan (2008-b) se indica que el decaimiento de la velocidad rotacional tiene una importancia menor en influenciar la trayectoria de la pelota.

El módulo F_m de la fuerza de Magnus en la Ec. 7 se puede expresar en función del ángulo γ que forman los vectores $\vec{\omega}$ y \vec{V} :

$$F_m = \frac{1}{2} \rho C_m A V^2 \text{sen } \gamma \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{V})}{\omega V} \quad (15)$$

El símbolo \cdot en la Ec. 13 denota el producto escalar entre los vectores $\vec{\omega}$ y \vec{V} . En el sistema fijo-global de coordenadas (x, y, z), estos vectores vienen dados en términos de sus componentes escalares y los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} a lo largo de las coordenadas x, y, z , respectivamente:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \quad (16)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \quad (17)$$

LA VELOCIDAD ROTACIONAL Y SUS COMPONENTES

Durante el movimiento de una bola lanzada o bateada, ésta puede rotar debido a las condiciones iniciales impuestas, ya sea por el lanzador o por el impacto del bate. En el caso del bateador, la rotación se genera cuando el bate golpea la pelota en un punto tal que genera una fuerza de fricción, tangencial a la superficie de la pelota, la cual causa un torque. El vector de la velocidad rotacional se puede describir en términos de sus componentes según los ejes fijos (x, y, z) tal como se indicó en la Ec. 17. Sin embargo, es conveniente expresar también el vector velocidad rotacional en términos de sus tres componentes locales: a) Rotación con eje horizontal que puede ser hacia atrás (*backspin*) o hacia adelante (*topspin*); b) Rotación lateral (*sidespin*) y c) Rotación en tirabuzón (*gyrospin*) cuyo eje es a lo largo de la dirección del movimiento. Sean (b, s, g) los ejes locales descritos por sus vectores unitarios los cuales se definen por:

$$\hat{e}_b = \hat{V} \times \hat{k}; \quad \hat{e}_s = \hat{e}_b \times \hat{V}; \quad \hat{e}_g = \hat{e}_s \times \hat{e}_b = \hat{V} \quad (18 \text{ a,b,c})$$

Donde el vector \hat{e}_b , está contenido en un plano horizontal y es perpendicular al vector velocidad traslacional \vec{V} , el

vector \hat{e}_s es perpendicular a \vec{V} y a \hat{e}_b y el vector \hat{e}_g tiene la misma dirección de \vec{V} y es perpendicular a los anteriores. Los vectores ($\hat{e}_b, \hat{e}_s, \hat{e}_g$) constituyen una base de vectores ortonormales cuyas direcciones varían en el tiempo según la trayectoria que siga la pelota.

El vector velocidad rotacional $\vec{\omega}$ puede ser escrito en términos de los vectores ortonormales $\hat{e}_b, \hat{e}_s, \hat{e}_g$ y de las rapidezces rotacionales $\omega_b, \omega_s, \omega_g$ las cuales son definidas como la componente de eje horizontal, de rotación lateral y de rotación en tirabuzón, respectivamente:

$$\vec{\omega} = \omega_b \hat{e}_b + \omega_s \hat{e}_s + \omega_g \hat{e}_g \quad (19)$$

Sustituyendo (16) en (18) y desarrollando los productos vectoriales se obtiene:

$$\hat{e}_b = \frac{1}{V_{xy}} (V_y \hat{i} - V_x \hat{j}) \quad (20)$$

$$\hat{e}_s = \frac{1}{VV_{xy}} [-(V_x V_z) \hat{i} - (V_y V_z) \hat{j} + (V_x^2 + V_y^2) \hat{k}] \quad (21)$$

$$\hat{e}_g = \frac{1}{V} (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \quad (22)$$

Donde:

$$V_{xy} = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones 20 a 22 en 19 e igualando con 17 se obtiene una expresión que relaciona las componentes de en el sistema global (fijo) y en el sistema local (móvil) la cual se presenta en forma matricial compacta en la Ec. 24 y expandida en la Ec. 25. ω_G es el vector que contiene las componentes en el sistema global (x, y, z) y ω_L el vector de las componentes en el sistema local (b, s, g). La matriz de transformación A es una matriz ortogonal.

$$\omega_G = A \omega_L \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_y/V_{xy} & -V_x V_z/VV_{xy} & V_x/V \\ -V_x/V_{xy} & -V_y V_z/VV_{xy} & V_y/V \\ 0 & V_{xy}/V & V_z/V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_b \\ \omega_s \\ \omega_g \end{bmatrix} \quad (25)$$

La relación inversa que permite calcular ω_L a partir de ω_G está dada por la Ec.26 donde A' es la matriz transpuesta de A :

$$\omega_L = A' \omega_G \quad (26)$$

En el caso de una pelota bateada se dispone de información medida sobre los valores iniciales del módulo (ω) de la velocidad rotacional al momento del impacto; dependiendo de la posición relativa del bate y la pelota se pueden estimar las contribuciones a ω de sus componentes ω_b y ω_s ; adicionalmente se suele adoptar un valor inicial nulo de la componente ω_g .

En el caso de una bola lanzada por el *pitcher* se han hecho mediciones de la rapidez rotacional inicial la cual se puede asociar a (*backspin*) en el caso de una recta o a $-\omega_b$ en el caso de una curva (*topspin*) o a ω_s en el caso de una slider (*sidespin*) o a una combinación de ellas.

Conocidos los valores iniciales de ($\omega_b, \omega_s, \omega_g$) de la bola bateada o lanzada, las componentes iniciales $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en el sistema global de coordenadas se calculan de la Ec. 25. Despreciando el decaimiento de la rapidez rotacional con el tiempo, el momento angular se conserva durante el vuelo de la pelota y en consecuencia el vector velocidad rotacional $\vec{\omega}$ permanece constante en el sistema inercial (x, y, z), es decir mantiene su dirección y módulo durante toda su trayectoria. Sin embargo, debido al cambio en la dirección del vector velocidad \vec{V} el sistema de rotación local no es un sistema inercial y las componentes rotacionales $\omega_b, \omega_s, \omega_g$ pueden cambiar; ellas se calculan con la Ec. 26 en cada instante de tiempo.

Solución de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones 1 a 26 se pueden aplicar a cualquier situación en un juego de beisbol, y son válidas para pelotas bateadas o lanzadas por el *pitcher* o por cualquier otro jugador.

Introduciendo las ecuaciones 2, 4 y 7 en 1, la Segunda Ley de Newton puede escribirse como:

$$m\vec{a} = -m \cdot g \hat{k} - \frac{1}{2} \rho C_d A V^2 + \frac{1}{2} \rho C_m A V^2 (\hat{\omega} \times \hat{V}) \quad (27)$$

La ecuación vectorial 27 contiene tres ecuaciones escalares, una para cada dirección x, y, z . Sustituyendo las ecuaciones, 3, 8, 12, 13, 16 y 17 en 27 y despejando las aceleraciones se tiene para cada una de las direcciones en el plano tridimensional:

$$a_x = \frac{dV_{px}}{dt} = \frac{1}{m} \left[-\frac{1}{2} \rho C_d A V V_{x^2} + \frac{1}{2} C_m \frac{\rho A V}{\omega} (\omega_y V_z - \omega_z V_y) \right] \quad (28)$$

$$a_y = \frac{dV_{py}}{dt} = \frac{1}{m} \left[-\frac{1}{2} \rho C_d A V V_y + \frac{1}{2} C_m \frac{\rho A V}{\omega} (\omega_x V_x - \omega_y V_z) \right] \quad (29)$$

$$a_z = \frac{dV_{pz}}{dt} = \frac{1}{m} \left[-mg - \frac{1}{2} \rho C_d A V V_z + \frac{1}{2} C_m \frac{\rho A V}{\omega} (\omega_x V_y - \omega_y V_x) \right] \quad (30)$$

Donde V_{px} , V_{py} , V_{pz} son las componentes de la velocidad de la pelota (Ec. 6) en las direcciones x , y , z , respectivamente. En las ecuaciones 28 a 30 la variable independiente es el tiempo t y las variables dependientes son las rapidezces V_{px} , V_{py} , V_{pz} . Las rapidezces relativas V_x , V_y y V_z son función de y y se calculan con las ecuaciones 6 y 12. La rapidez rotacional ω y sus componentes ω_x , ω_y , ω_z adoptan valores iniciales al momento del impacto del bate (Ec. 25) y luego decaen ligeramente con el tiempo, de manera no lineal. C_m y C_d son variables que dependen de las velocidades. A , m , ρ y g son constantes. Las ecuaciones 28 a 30 constituyen un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, no lineales, con coeficientes variables, las cuales no tienen solución analítica. Las tres ecuaciones están acopladas y deben ser resueltas en forma simultánea mediante métodos numéricos. Una vez que se conocen las velocidades V_{px} , V_{py} , V_{pz} las coordenadas (x, y, z) del vector de posición de la pelota se determinan a partir de resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$V_{px} = \frac{dx}{dt} \quad V_{py} = \frac{dy}{dt} \quad V_{pz} = \frac{dz}{dt} \quad (31 \text{ a,b,c})$$

Las condiciones iniciales que deben ser estipuladas para la pelota en el tiempo $t = 0$ son las siguientes:

- x_o, y_o, z_o : Coordenadas del vector de posición.
- $V_{pxo}, V_{pyo}, V_{pzo}$: Componentes de la rapidez traslacional.
- $\omega_{bo}, \omega_{so}, \omega_{go}$: Componentes de la rapidez rotacional en los ejes b , s , g .
- $\omega_{xo}, \omega_{yo}, \omega_{zo}$: Componentes de la rapidez rotacional en los ejes x , y , z .
- V_o : Rapidez traslacional.
- ω_o : Rapidez rotacional.

El conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales representadas por las ecuaciones 28 a 30 es resuelto por diferencias finitas mediante el método de Euler considerando intervalos muy pequeños de tiempo, en el orden de milésimas de segundos. Las ecuaciones 31 a, b y c son resueltas usando dos términos de la serie de Taylor. Los cálculos son hechos con varios intervalos de tiempo, reduciendo el valor del intervalo a fin de evaluar la convergencia del procedimiento numérico.

Para los cálculos que se presentan más adelante, se adopta el siguiente sistema de coordenadas (Figura 2): El origen está en la esquina posterior del plato, el eje- x apunta hacia la derecha del receptor, el eje- y apunta hacia la segunda base y el eje- z apunta en la dirección vertical. En la figura, V_o es la rapidez traslacional inicial, β_o es el ángulo horizontal de salida y θ_o es el ángulo vertical de salida.

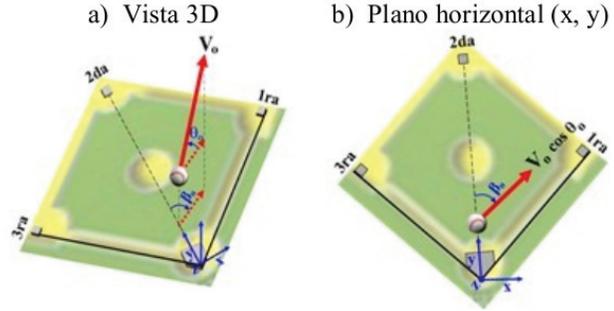


Figura 2. Sistema de coordenadas (x, y, z) , ángulo vertical θ_o y horizontal β_o de salida de la pelota y rapidez inicial V_o . La pelota está colocada en el punto donde el bate la impacta lo que define su posición inicial

VALIDACIÓN DEL MODELO

La validación del modelo matemático se lleva a cabo con dos ejemplos.

Caso teórico sin resistencia del aire

Despreciando la resistencia del aire se eliminan las fuerzas de arrastre y de Magnus y la solución al problema de determinar la trayectoria de la pelota está dada por la teoría clásica del movimiento de proyectiles.

Sea el caso de una pelota bateada con una altura inicial h_o , rapidez traslacional inicial V_o , ángulo inicial de salida con respecto a la horizontal de θ_o . La solución clásica nos suministra los valores de la distancia total recorrida (D) durante el tiempo de llegada (t_D) hasta caer al suelo ($h=0$) y la altura máxima alcanzada (H) en el tiempo t_H :

$$D = (V_o \cos \theta_o) t_D; \quad t_D = \frac{V_o \sin \theta_o + \sqrt{(V_o \sin \theta_o)^2 + 2g h_o}}{g} \quad (32 \text{ a,b})$$

$$H = h_o + \frac{(V_o \sin \theta_o)^2}{2g}; \quad t_H = \frac{V_o \sin \theta_o}{g} \quad (33 \text{ a,b})$$

Sea la altura inicial $h_o = 1$ metro = 3,28 ft, una velocidad de salida $V_o = 110$ mph y un ángulo de salida $\theta_o = 35^\circ$; las ecuaciones anteriores dan los siguientes resultados:

$H = 136,31$ ft en un tiempo $t_H = 2,875$ s y $D = 764,6$ ft en $t_D = 5,786$ s.

Para el cálculo con el modelo matemático se adoptan $C_d = 0$ y $C_L = 0$ y se resuelven las ecuaciones 27 a 30 usando un intervalo de tiempo de 0,001 segundos. Los resultados son $H = 136,35$ ft en $t_H = 2,875$ s y $D = 764,7$ en $t_D = 5,786$ s, valores prácticamente iguales a los de la teoría clásica, con pequeñas diferencias atribuibles a la discretización computacional.

Caso real de bola bateada en un juego de beisbol

El segundo ejemplo de calibración evalúa el modelo matemático mediante la comparación con datos de la trayectoria real seguida por una pelota durante un juego de las grandes ligas (MLB), la cual fue medida por el sistema Statcast. Este es un sistema implementado desde el año 2015 en todos los estadios de la MLB, el cual mide múltiples parámetros por medio de cámaras de video y radares de alta precisión. El caso de estudio intenta reproducir un elevado bateado por Kris Bryant en un juego de la serie de campeonato de la Liga Nacional el año 2006, reportado por Nathan (2016), en el cual la bola describió una inusual trayectoria curva que causó confusión en el jardinero central al tratar de capturarla (Figura 3).

Dada la gran rotación que llevaba la pelota, este es un excelente ejemplo para evaluar la precisión del modelo matemático aquí desarrollado para seguir el movimiento tridimensional de una pelota en el espacio que experimenta rotaciones según sus tres ejes locales.

El juego tuvo lugar en el Dodger Stadium, en Octubre 20, 2016. Los datos de Statcast muestran que la bola salió despedida por el bate con una velocidad de salida $V_o = 107,1$ mph, un ángulo vertical de despegue $\theta_o = 20,8^\circ$ y un ángulo inicial horizontal $\beta_o = -2,4^\circ$ apuntando ligeramente hacia la parte izquierda del *center field* (jardín central). La bola aterrizó en un punto a 382,6 ft del plato en un ángulo horizontal final de $\beta_f = 4,4^\circ$ ligeramente hacia la parte derecha de lo más profundo del *center field*, con un tiempo de recorrido de $t = 3,9$ s. La trayectoria completa de la pelota, en un plano vertical y en un plano horizontal, se muestra gráficamente en el artículo de Nathan y se reproduce en la Figura 3.b. La vista de la pelota desde arriba (plano horizontal) muestra una trayectoria curvilínea, indicando que la pelota bateada tuvo una fuerte componente de rotación de lado (*sidespin*), tomando en cuenta que no había viento. La elevación reportada del Dodger Stadium es de 515 ft sobre el nivel del mar. De acuerdo al *boxscore*, el juego comenzó a las 5:09 pm y el elevado de Bryant ocurrió en el tope del quinto inning lo cual se estima que ocurrió aproximadamente a las 6:40 pm. Para ese momento, la página Weather Underground en la estación climatológica más cercana indicaba una temperatura del aire de 80,96 °F, una presión barométrica de 1010,9 hPa y un punto de rocío de 28,04 °F, sin presencia de viento. Usando estos datos la densidad del aire resulta ser $= 0,073$ lb/ft³.

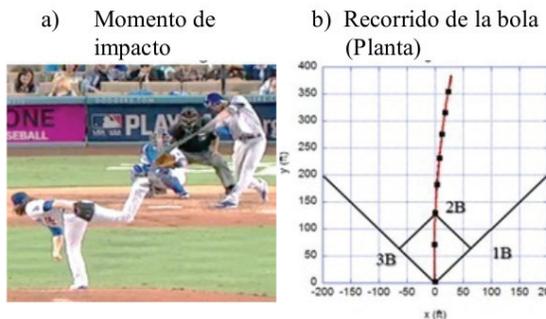


Figura 3. Batazo de Kris Bryant medido con el sistema Statcast

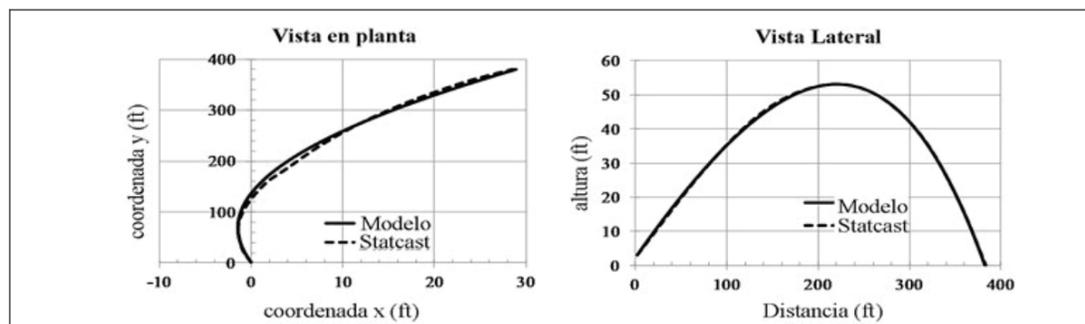


Figura 4. Comparación de las trayectorias medidas por Statcast (Nathan, 2016) y las calculadas con el modelo matemático de este estudio. Elevado de Kris Bryant, mostrado en el plano horizontal (izquierda) (escala distorsionada) y en el plano vertical (derecha)

Se adopta un radio de la pelota de $R= 0,121$ ft y un peso de $0,320$ lb lo que equivale a una masa $m=0,009955$ lb.s² / ft, valores típicos de una pelota en la MLB. Para ejecutar el modelo, se requiere información adicional sobre la velocidad de rotación de salida de la pelota, pero este dato no se presenta en el trabajo de Nathan (datos sobre las velocidades de rotación de las pelotas bateadas no se reportan en Statcast). La observación del video muestra que el bate de Bryant estaba inclinado unos 45° hacia abajo en el momento de hacer impacto con la pelota, por lo que asumimos que la bola sale despedida del bate con una cantidad similar de *backspin* y de *sidepin* (Figura 3.a).

Entonces, el problema se formula de la siguiente forma: dadas las condiciones iniciales conocidas: V_o , θ_o y β_o la meta de la simulación es ajustar los valores de las rotaciones iniciales ω_{bo} y ω_{so} de manera de replicar, de la forma más precisa posible, la trayectoria medida.

De acuerdo al sistema de coordenadas definido previamente (Figura 2), la posición inicial de la bola se estima del gráfico de Nathan como $x_o = 0$, $y_o = 2$ ft y $z_o = 3$ ft (Figura 4). La solución numérica fue calculada con un intervalo de tiempo de $0,001$ segundos. Después de algunas iteraciones con diferentes velocidades de rotación, los mejores resultados fueron obtenidos con $\omega_{bo} = 830$ rpm y $\omega_{so} = -820$ rpm, adoptando $\omega_g = 0$. Se usó un factor de decaimiento rotacional de $\kappa = 0,98$.

Los resultados del modelo se comparan con los datos medidos en la Figura 4.

Las escalas han sido distorsionadas en las figuras para permitir que las pequeñas diferencias sean apreciadas. La variable Distancia en la Figura 4 (derecha) es la distancia horizontal medida desde el origen de coordenadas. Los datos medidos por Statcast fueron extraídos del gráfico de Nathan mediante la digitalización de la trayectoria de la pelota. Los resultados que se muestran en la Figura 4 (vistas en planta y lateral) muestran una muy buena correspondencia entre los datos y el modelo. El modelo conduce a una distancia horizontal de $382,6$ ft en $t=4,0$ s y un ángulo final horizontal de $\beta_f = 4,4^\circ$, comparado con $382,6$ ft en $t = 3,9$ s y $\beta_f = 4,4^\circ$ de Statcast. Se concluye entonces que el modelo reproduce satisfactoriamente la trayectoria medida de la pelota.

Variación en el tiempo de las fuerzas y sus componentes rotacionales

El batazo de Bryant presentado en el ejemplo anterior permite analizar las variaciones que pueden experimentar las fuerzas y las rapidezces rotacionales durante la trayectoria de una pelota. La variación temporal de ω y sus componentes ω_b , ω_s y ω_g se calcularon con la Ec. 26 y sus valores absolutos se muestran en la Figura 5.

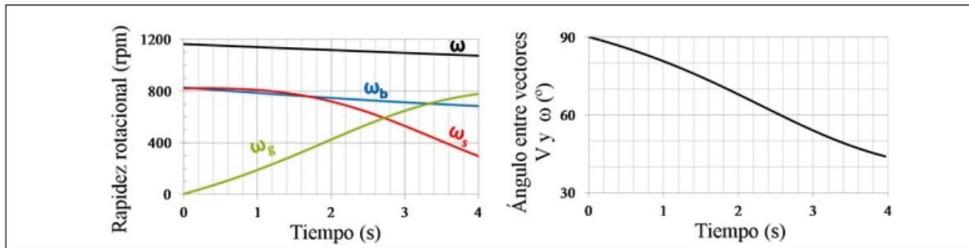


Figura 5. Variación temporal de los valores calculados de la velocidad de rotación y sus componentes (valores absolutos) y del ángulo entre los vectores \vec{V} y $\vec{\omega}$ durante el vuelo de la pelota

La Tabla 1 muestra los valores iniciales y finales de las diferentes componentes de la velocidad de rotación.

Tabla 1. Valores iniciales y finales de las componentes de la velocidad de rotación durante la trayectoria del elevado de Bryant.

Valores iniciales				γ ($^\circ$)	Valores finales				γ ($^\circ$)
Rapidez rotacional (rpm)					Rapidez rotacional (rpm)				
ω_o	ω_{bo}	ω_{so}	ω_{go}	ω	ω_b	ω_s	ω_g		
1167	830	-820	0	90	1077	685	-306	773	44

La reducción gradual en ω_b y ω_s en el tiempo se compensa por el incremento en ω_g durante los dos primeros segundos del vuelo, significando que parte del *backspin* y del *sidespin* están siendo convertidos en *gyrospin*. Una declinación más pronunciada en ω_s comienza a desarrollarse después que la bola alcanza su altura máxima en el tiempo de $1,87$ s. Sorprendentemente la componente *gyrospin* de la velocidad rotacional es mayor que las componentes del *backspin* y del *sidespin* al final del vuelo de la bola. El vector velocidad ya no es perpendicular al vector de la velocidad rotacional como fuese al inicio y el ángulo γ entre ellos (Ec. 15) evoluciona de un valor inicial de 90° a un valor de $44,2^\circ$ al final de la trayectoria en un tiempo de $t = 3,96$ s.

La ligera reducción que se observa en ω es debido al factor de decaimiento rotacional usado en la simulación.

En la Figura 6.a se presenta la evolución de las fuerzas de arrastre y de Magnus con el tiempo para el batazo de Bryant.

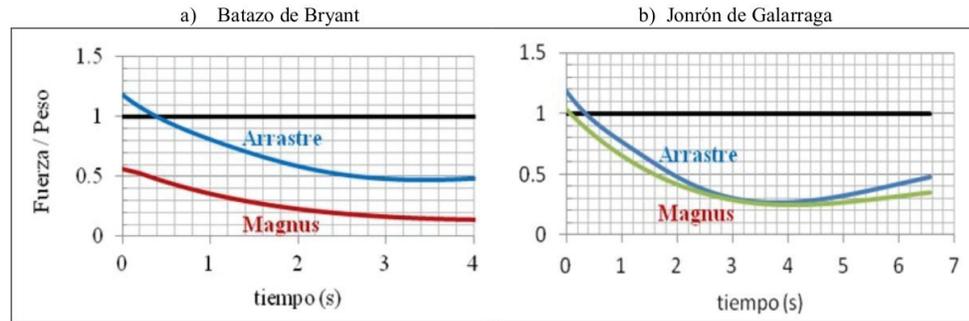


Figura 6. Módulo de la fuerza de arrastre y de la fuerza de Magnus, divididos entre el peso de la pelota

Se muestran las fuerzas en forma adimensional donde el módulo de cada una está dividido entre la fuerza de gravedad o peso de la pelota (m.g). La línea horizontal igual a 1 representa una fuerza igual al peso.

Se aprecia que en los primeros instantes la fuerza de arrastre excede el valor del peso para luego decrecer y volver a aumentar hasta un valor aproximado de 0,5. La fuerza de Magnus vale 0,6 veces el peso en los primeros instantes y luego desciende hasta 0,15. La fuerza de Magnus puede llegar a igualar el peso de la pelota en otras situaciones, tal como se muestra en la Figura 6.b que corresponde al gran jonrón de Galarraga (Tabla 2, Solución 6) el cual es discutido en la siguiente sección. Debido a la mayor rapidez rotacional del batazo, la fuerza de Magnus excede ligeramente el peso de la pelota en los primeros instantes para luego disminuir con un valor mínimo de 0,25.

ANÁLISIS DEL JONRÓN DE GALARRAGA CON EL MODELO 3D

En un trabajo previo (López et al., 2017-a) los autores desarrollaron un modelo 2D y analizaron el famoso jonrón de Andrés Galarraga del 31/05/1997. Un modelo 2D es aquel en el cual la trayectoria de la pelota está contenida en un plano y se describe solamente por dos coordenadas, una horizontal (x) y otra vertical (z). Sin embargo, la pelota puede desviarse del movimiento plano debido a la acción del viento o de la fuerza de Magnus asociada a una rotación de lado; en este caso el modelo 3D con sus tres coordenadas (x, y, z) debe suministrar una determinación más precisa del movimiento de la pelota. En esta sección se evalúa de nuevo el jonrón de Galarraga con el Modelo 3D y adicionalmente se consideran tres modelos de viento dadas las incertidumbres respecto a su magnitud y su velocidad durante el juego.

El jonrón de Andrés Galarraga

El 31 de mayo de 1997 Andrés Galarraga de los Rockies de Colorado conectó un batazo al jardín izquierdo que se depositó en la fila 20 del segundo piso del Pro-Player Stadium de Miami, Florida (Figura 7). La distancia fue estimada inicialmente por las autoridades del estadio en 529 ft (Rocky Mountain News, 1997). Por distancia de un jonrón se entiende la distancia horizontal total que viajaría la pelota sin ningún impedimento, es decir si hubiese aterrizado en el terreno y no en las gradas del estadio. El video del jonrón de puede ver en la página de la *Major League of Baseball* (MLB) (www.mlb.com) o en *YouTube* (www.youtube.com). El jonrón fue considerado uno de los más largos en la historia de la MLB y uno de los pocos en haber excedido la distancia de 500 ft (Birnie, 2016). Otro autor estudioso de los grandes jonrones le asignó una distancia algo menor, 509 ft (Jenkinson, 2010). Sin embargo Rybarczyk, analista de beisbol del portal ESPN y fundador de la página Home Run Tracker (ESPN, 2016), rebaja a 468 pies el batazo de Galarraga excluyéndolo del selecto grupo de 500 ft. En el trabajo previo de los autores con el Modelo 2D se obtuvo una distancia media de 527 ft para las cuatro soluciones encontradas (López et al., 2017-a).

a) Galarraga observa el recorrido de la pelota justo después del batazo (Video de Fox). b) Imagen del recorrido de la pelota y su extensión virtual más allá del estadio.



Figura 7. Jonrón de Andrés Galarraga e imagen virtual del estadio y del trayecto de la pelota

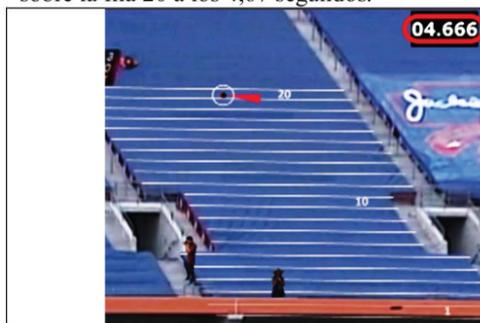
En la metodología que han propuesto los autores se definen y diferencian dos categorías de incógnitas que deben ser determinadas antes de calcular la distancia total recorrida por el jonrón. La primera categoría se refiere al tiempo de vuelo (t_v), las coordenadas (d, h) del punto donde la bola impactó el estadio y las condiciones climáticas (densidad del aire y velocidad y dirección del viento). La segunda categoría de incógnitas tiene un mayor nivel de incertidumbre que las de la primera categoría, y son las condiciones iniciales en el momento en que el bate golpea la pelota. En el Modelo 3D éstas son la rapidez traslacional inicial (V_o), el ángulo vertical de salida (θ_o), el ángulo horizontal de salida (β_o) y las componentes de rapidez rotacional hacia atrás ω_{bo} y lateral ω_{so} . Se supone $\omega_{go} = 0$.

Tiempo de vuelo, punto de impacto, densidad del aire

Estas primeras incógnitas ya fueron determinadas en el análisis con el Modelo 2D de manera que aquí solo se

presentan los resultados obtenidos (López *et al.*, 2017-a). A partir de un análisis detallado del video se determinó que el tiempo de vuelo desde que sale la pelota hasta que impacta las gradas del estadio es de 4,67 segundos, y el punto de impacto está en la mitad de la fila 20 en el tercer sector del último piso (contado desde la línea de *foul* del jardín izquierdo) que tiene 30 filas (Figura 8, izquierda). Las coordenadas del punto de impacto y del plato fueron determinadas mediante la tecnología LIDAR (Detección de Imágenes Laser) la cual suministra mapas 3D de alta resolución del Estadio (USGS, 2016). La ubicación del plato y del punto de impacto se muestran en la Figura 8.b. Se obtuvo una distancia horizontal (d) de 413,1 pies medida desde el punto de la esquina trasera del plato y una altura (h) de 97,5 pies sobre el nivel del terreno.

a) Cuadro del video indicando el punto de impacto sobre la fila 20 a los 4,67 segundos.



b) Imagen LIDAR indicando la distancia horizontal desde el plato al punto de impacto.

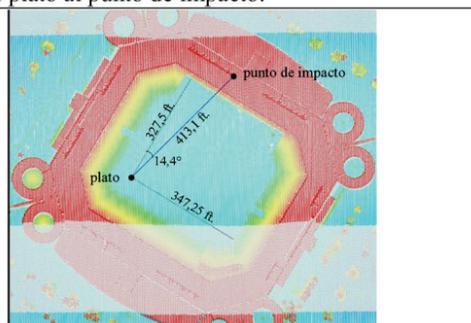


Figura 8. Cuadro de video y nube de puntos LIDAR en una planta del estadio. El cuadro de video ha sido modificado para resaltar las filas que estaban cubiertas por una manta

La distancia del plato a las cercas del *left field*, LF, y del *right field*, RF, así como el ángulo ($14,4^\circ$) entre la línea que conecta el plato con el punto de impacto y la línea de *foul* del jardín izquierdo, son ligeramente distintas a los valores presentados en el estudio previo con el Modelo 2D y constituyen un refinamiento en los cálculos.

El *box score* del juego indicó una temperatura de 87° F, un cielo nublado sin precipitaciones y un comienzo a la 1:17 pm con una duración de 3 h y 32' (Sports Reference, 2016). Las condiciones climáticas fueron: humedad relativa promedio de 72% con un máximo de 97% y una presión a nivel del mar de 1013 hPa (The Weather Company, 2016). La altitud es de 1 m. Con estos valores se calculó una densidad del aire de $1,148 \text{ kg/m}^3$.

Modelos de Viento

En el *box score* se anota un viento de 6 millas por hora hacia el jardín central al comienzo del juego (1:17 pm). Sin embargo, un análisis del *box score* sugiere que el jonrón pudo haber ocurrido en algún momento entre las 2:40 pm y las 3:00 pm. A las 2:40 pm la estación meteorológica más cercana (KOPF, aproximadamente a 4 millas del Estadio) indicó vientos de 11 millas por hora con una inclinación de unos 11° hacia la izquierda de la línea del jardín izquierdo y a aproximadamente las 3:00 pm se registraron vientos de 13 mph de derecha a izquierda (The Weather Company, 2016). Dadas las incertidumbres con respecto a la velocidad y dirección del viento en el momento del batazo, se consideraron tres modelos de viento:

1) Viento de 6 mph hacia el centro del campo (datos del *box score*). Este es el modelo usado en el estudio previo 2D de los autores.

2) Viento de 11 mph dirigido a 11° hacia la izquierda de la línea de foul del jardín izquierdo (KOPF, 2:40 pm).

3) Viento de 13 mph soplando de derecha (primera base) a izquierda (tercera base) (KOPF, 3:00 pm). Este es el modelo usado por ESPN (2016).

Condiciones iniciales

Se puede ver en el video que el bate hace contacto con la pelota a aproximadamente 3 pies (distancia vertical) sobre el nivel del terreno. Suponemos que la pelota fue golpeada a 2 pies (distancia horizontal) desde el punto más atrás del plato. Por tanto las coordenadas iniciales en el sistema de la Figura 3 son: $x_o = 0$, $y_o = 2$, $z_o = 3$. Dado que las otras condiciones iniciales de la pelota (V_o , θ_o , β_o , ω_{bo} and ω_{so}) son desconocidas, ellas tienen que ser supuestas. No es necesario suponer valores totalmente arbitrarios puesto que en los últimos dos años Statcast ha medido la rapidez inicial (V_o) y el ángulo vertical de salida (θ_o) de los jonrones conectados en las Grandes Ligas (MLB). De manera similar a como se hizo en el análisis 2D se adoptaron los siguientes rangos de valores: para V_o entre 101 y 119 mph y para θ_o entre 18° and 45° . Con base a la dirección del batazo que sugiere el punto de impacto (Figure 8.b), el rango adoptado para el ángulo horizontal de salida, no presente en el Modelo 2D, es entre 5° y 30° medido desde la línea de foul del jardín izquierdo, lo que equivale a un β_o entre -15° y -40° .

Las velocidades de rotación (no reportadas por Statcast) han sido obtenidas indirectamente por Nathan (2013) en su análisis de jonrones que alcanzaron distancias por encima de 450 pies. Con este sustento, la gama de valores posibles de ω_o considerados en el cálculo fue de 1000 rpm a 3500 rpm. Puesto que la pelota fue bateada hacia el jardín izquierdo, se supone que hay una componente de rotación lateral ω_s que hace que la pelota curvee hacia la línea de *foul* del jardín izquierdo lo cual se basa en datos medidos por Statcast

(Nathan, 2016). Esto representa un ω_s de signo positivo, de acuerdo a la convención de signos de la Figura 3. Teniendo en cuenta que en el momento del impacto el bate estaba inclinado hacia abajo un ángulo de aproximadamente 20° con respecto al plano horizontal, se adoptan valores de rapidez rotacional inicial de $\omega_{bo} = \omega_o \cdot \cos(20^\circ) = 0,94\omega_o$ y $\omega_{so} = \omega_o \cdot \sin(20^\circ) = 0,34\omega_o$, respectivamente. Se adopta $\omega_{go} = 0$. La influencia de otros valores posibles de ω_{bo} y se discutirá más adelante. Se supuso un valor de decaimiento de la rapidez rotacional $\kappa = 0.98$.

Soluciones

El problema a resolver es encontrar una trayectoria tal que a los 4,67 segundos la pelota esté en el punto de impacto observado en el estadio el cual está definido por la altura $h = 97,5$ pies por encima del nivel del campo y la distancia horizontal $d = 413,1$ pies desde el origen de coordenadas (punto trasero del plato) (Figura 8.b). Para cada conjunto de condiciones iniciales, la trayectoria de la bola se obtiene resolviendo la (Ec. 1) con un intervalo de tiempo de 0,005 s el cual se consideró adecuado para la convergencia de la solución. El problema no tiene una solución única.

El procedimiento de cálculo es el siguiente. Para cada modelo de viento se varió la rapidez de rotación inicial (ω_o) en incrementos de 500 rpm entre 1000 y 3500 rpm generando así un total de 6 casos (Tabla 2).

Para cada valor de ω_o , sus componentes se obtienen como $\omega_{bo} = 0,94\omega_o$, $\omega_{so} = 0,34\omega_o$ y $\omega_{go} = 0$. En cada caso, las condiciones iniciales restantes (V_o , θ_o , β_o) fueron variadas dentro de los rangos seleccionados y por un proceso de iteraciones sucesivas se encuentra la mejor trayectoria con la condición de que el punto calculado de impacto de la pelota en el estadio coincida con el punto observado en el tiempo preciso de 4,67 segundos, aceptando un margen de error relativo en las coordenadas del punto de impacto no mayor a 0,25 por mil. Dado que hay tres modelos de viento se tiene un total de 18 casos.

La Tabla 2 presenta los resultados de los 18 casos analizados.

Tabla 2. Soluciones para el Jonrón de Galarraga. Las filas sombreadas indican las siete soluciones más confiables.

Modelo de Viento	Solución #	Rapidez Rotacional Inicial	Rapidez Inicial	Ángulo Vertical Inicial	Ángulo Horizontal Inicial	Altura Máxima	Tiempo de Altura Máxima	Distancia Total
		ω_o	V_o	θ_o	β_o	H	t_{max}	D
		(rpm)	(mph)	(grados)	(grados)	(ft)	(seg)	(ft)
1 	1	1000	118.8	35.6	-28.6	138.7	2.9	502.3
	2	1500	118.0	33.8	-27.7	135.9	2.9	506.2
	3	2000	117.3	32.3	-27.2	133.0	3.0	510.2
	4	2500	116.7	30.8	-26.2	130.4	3.0	513.5
	5	3000	116.1	29.3	-25.5	127.8	3.1	517.5
	6	3500	115.5	27.9	-24.8	125.3	3.1	521.0
2 	7	1000	116.0	37.0	-26.1	139.6	2.9	508.7
	8	1500	115.2	35.4	-25.3	136.9	2.9	512.5
	9	2000	114.4	34.0	-24.6	134.3	3.0	516.6
	10	2500	113.7	32.6	-23.9	131.7	3.0	521.0
	11	3000	113.1	31.2	-23.1	129.2	3.0	525.0
	12	3500	112.4	29.8	-22.4	126.8	3.1	529.4
3 	13	1000	117.4	35.8	-23.7	138.4	2.9	505.9
	14	1500	116.4	34.0	-22.8	135.4	2.9	510.3
	15	2000	115.4	32.6	-22.0	132.5	3.0	516.4
	16	2500	114.6	31.1	-21.3	129.6	3.0	519.3
	17	3000	113.7	29.6	-20.6	126.9	3.1	524.8
	18	3500	112.9	28.1	-19.8	124.3	3.1	528.5

Se muestran las condiciones iniciales ($\omega_o, V_o, \theta_o, \beta_o$), la altura máxima (H) alcanzada por la pelota y su tiempo de ocurrencia (t_{max}) y la distancia total (D) recorrida por la pelota. La distancia D es la distancia medida desde el punto donde el bate golpea la pelota (Figura 2) hasta el punto donde la bola hubiese caído en el terreno si no estuviese presente el estadio. Las filas sombreadas en la Tabla 2 indican las 7 soluciones más confiables que se identifican en la siguiente sección. Debe destacarse que la distancia total recorrida (D) resultó ser superior a 500 pies para todos los 18 casos.

La Figura 9 presenta la trayectoria de la pelota en cada uno de los 18 casos, notándose el sitio del impacto con el escalón 20 del estadio y el recorrido virtual que hubiese seguido la pelota hasta su llegada al nivel del terreno. La trayectoria se muestra en una vista lateral donde el eje horizontal es la distancia horizontal desde el punto de impacto del bate. La curvatura de la trayectoria de la bola que se muestra en la vista en planta es el resultado de la acción combinada del viento y de la rapidez rotacional lateral.

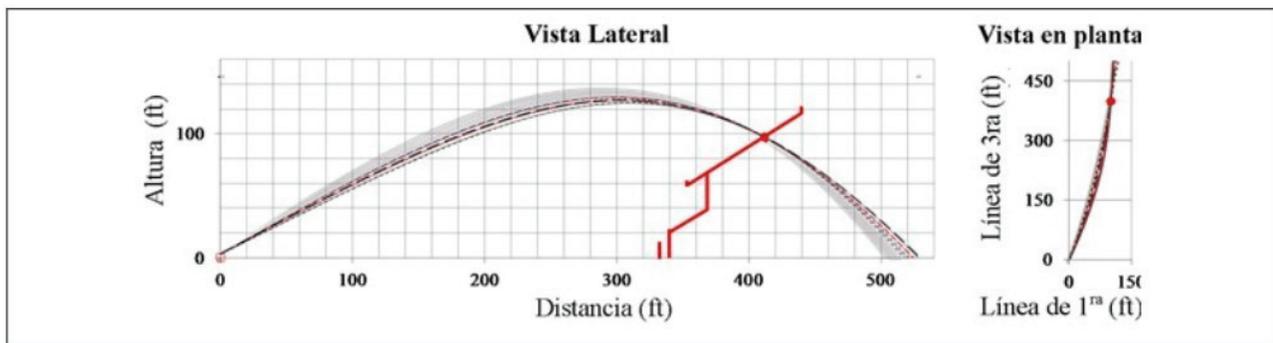


Figura 9. Trayectorias de las soluciones obtenidas con el Modelo 3D para el jonrón de Galarraga. La vista en planta muestra la curvatura que describe la pelota debido al efecto combinado del viento y del sidespin

Debe tenerse en cuenta que la solución depende de la magnitud y el signo de la rapidez rotacional lateral (*sidespin*) adoptada. Otro conjunto de 18 casos también

se generó cambiando el signo de la rotación lateral, manteniendo su magnitud, de modo que la pelota curva de izquierda a derecha (sentido de las agujas del reloj),

aunque esta hipótesis tiene una probabilidad muy pequeña de ocurrencia según los datos medidos por Statcast (Figura 4 en Nathan 2016). Para esta suposición los resultados indican una pequeña variación en la distancia total (D) en comparación con los resultados mostrados en la Tabla 2, menos del 2%, y de nuevo todos los casos superan los 500 pies.

Las soluciones mostradas en la Tabla 2 se generaron suponiendo componentes iniciales de rapidez rotacional hacia atrás (ω_{bo}) y de lado (ω_{so}) de $0,94 \omega_o$ y $0,34 \omega_o$, respectivamente. Otro conjunto de soluciones fueron adicionalmente generadas adoptando $\omega_{bo} = 0,80 \omega_o$ y $\omega_{so} = 0,60 \omega_o$; los resultados indican una pequeña reducción de menos del 0,5% en la distancia total (D) para las 18 soluciones mostradas en la Tabla 2.

Cuando el análisis se lleva a cabo en ausencia de viento, los resultados indican una reducción de menos del 3% en la distancia total (D) para todos los casos mostrados en la Tabla 2; además, todas las siete soluciones más confiables superan los 500 pies.

Los 18 casos mostrados en la Tabla 2 representan posibles soluciones teniendo en cuenta las incertidumbres respecto a las condiciones iniciales y a la velocidad y dirección del viento. Sin embargo, algunas soluciones son más confiables que otras, como se describe a continuación, donde la geometría descriptiva y el análisis detallado del video se introducen en la discusión.

Confiabilidad de las soluciones mediante la Geometría Descriptiva.

Para seleccionar las soluciones más confiables, la altura máxima (H) alcanzada por la pelota en cada una de las 18 trayectorias obtenidas (Tabla 2) es comparada con la altura real mostrada en el video la cual es determinada a partir de un análisis geométrico descriptivo del mismo mediante el uso de proyecciones ortogonales y cónicas, así como de un programa profesional de edición de video. El procedimiento se ilustra en la Figura 10 sobre una imagen 3D del estadio. En dicha imagen se observa que una trayectoria calculada con el modelo matemático, es proyectada cónicamente sobre la proyección cónica de la trayectoria real obtenida del video, la cual se muestra en el cuadro de video a la izquierda de la figura donde la trayectoria calculada es comparada con la trayectoria real. Para realizar dicha proyección de manera detallada se define el plano vertical de un corte (A-A) cuya dirección es determinada por la línea que une el punto de ubicación de la cámara con el punto de impacto. A partir de este corte y de su correspondiente proyección horizontal, los cuales veremos más adelante, la trayectoria calculada y tres puntos se proyectan con precisión: el punto inicial de la pelota, su punto de impacto y el punto de ubicación de la cámara desde donde se grabó el video. También se ubican dos puntos adicionales en la trayectoria: el punto de altura máxima real (H_{real}) y el punto donde la línea de proyección que sale de la cámara es tangente a la trayectoria.



Figura 10. Proyección cónica de la trayectoria calculada de la pelota y comparación con la trayectoria en el video

La altura de este último punto luce en el video como la altura máxima a pesar de no serlo y es denominada aquí como altura máxima aparente ($H_{aparente}$); este efecto óptico se produce porque la ubicación de la cámara está a baja altura y cerca del plato. El procedimiento descrito se explica en detalle a continuación aplicándolo al caso del jonrón de Galarraga.

La Figura 11 (arriba) muestra una vista en planta del estadio obtenida de la nube de puntos LIDAR utilizando el programa Global Mapper. Las proyecciones del plato, del punto de impacto de la pelota y de la cámara se indican en este plano horizontal. El Corte A-A (abajo) muestra una vista del estadio en un plano vertical que pasa por la cámara y por el punto de impacto de la pelota. Nótese los

puntos coloreados de LIDAR (abajo) que delinear el sector derecho del estadio donde se encuentra el palco de prensa y la cámara, así como el sector izquierdo donde la pelota golpea la fila 20.

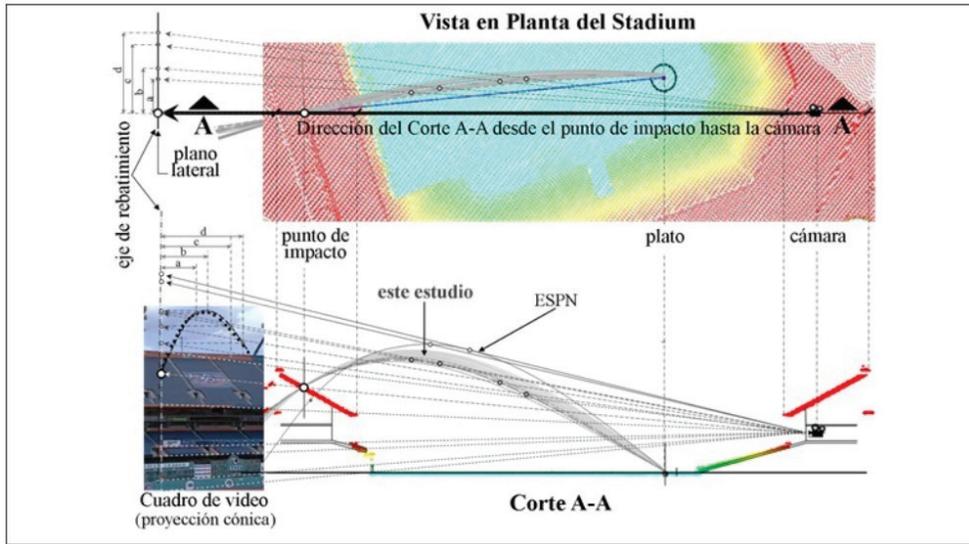


Figura 11. Planta del estadio, corte A-A y proyecciones cónicas del estadio y de la trayectoria de la pelota indicadas sobre un cuadro del video

Las 18 trayectorias calculadas también se muestran proyectadas ortogonalmente en la Figura 11; las líneas oscuras indican las 7 soluciones más confiables (Tabla 2) y las líneas más claras indican las 11 soluciones restantes. La trayectoria dada por ESPN (2016) también se proyecta en estos planos.

(Tabla 2) se muestran en la Figura 12 así como la solución propuesta por ESPN (2016).

A partir de las proyecciones horizontal y vertical se hicieron las proyecciones cónicas que se muestran en el plano lateral a la izquierda en la Figura 11 y en su ampliación de la Figura 12.

La Figura 12 muestra una ampliación de la porción inferior de la Figura 11. Solo las 7 soluciones más confiables

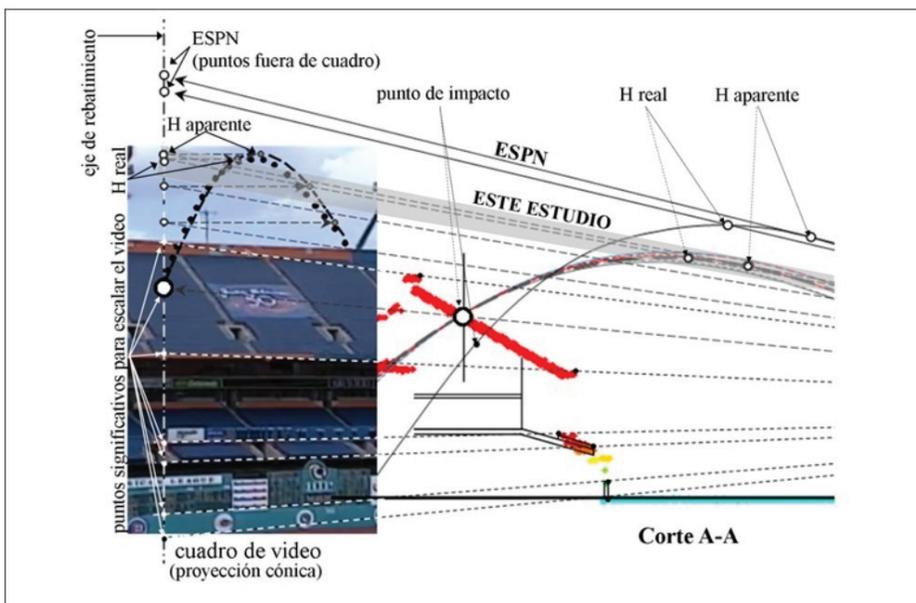


Figura 12. Proyección cónica de la trayectoria de la pelota y comparación con la trayectoria observada en el video. Las 7 soluciones más confiables de este estudio se mantienen dentro del cuadro de video. La solución de ESPN se sale del cuadro del video

Varios rayos van desde el foco ubicado en la cámara hasta el plano de proyección lateral que se muestra en el extremo izquierdo de las figuras 11 y 12. Esos rayos pasan por varios puntos, como el punto de impacto de la pelota, las alturas máximas de las trayectorias y varios puntos significativos de la estructura del estadio. Para fines de visualización, este plano de proyección lateral se rebate 90° a lo largo de su eje y se muestra en el extremo izquierdo de las figuras 11 y 12 donde se superpone un cuadro de video que muestra una imagen del estadio desde abajo hasta arriba, que incluye el punto de impacto de la pelota. Para escalar correctamente el cuadro de video con las proyecciones ortogonales, su tamaño se ajusta utilizando los rayos mencionados haciendo coincidir algunos puntos característicos del estadio en las proyecciones ortogonales con el cuadro de video ubicado en el plano lateral. Estos puntos son los bordes superior e inferior de las barandas de las gradas y el punto de impacto, entre otros. Para la discusión que sigue, debe tenerse en cuenta que en el video la bola en su punto más alto siempre se muestra dentro de los cuadros durante toda la filmación, es decir, el camarógrafo nunca perdió de vista la pelota hasta el momento en que impactó el escalón 20. En la Figura 12, la altura máxima indicada por el cuadro de video se puede comparar con las alturas máximas de las soluciones encontradas. Aun cuando el análisis geométrico se efectuó para las dieciocho soluciones (Tabla 2), solo siete se muestran en la Figura 12 porque mantienen sus alturas máximas dentro del cuadro de video tal como se indica por el tono gris superpuesto a los rayos de proyección de dichas alturas máximas; las otras soluciones fueron descartadas porque alcanzaron alturas que estaban fuera del video y, por lo tanto, no se consideran soluciones confiables. La altura máxima de ESPN también se sale del cuadro de video como se muestra en la misma figura, por lo que no se considera una solución confiable. Como resultado, las soluciones más confiables cuyas alturas máximas permanecen dentro del video son las siguientes: Soluciones N° 4, 5 y 6 para el Modelo de Viento 1, soluciones N° 11 y 12 para el Modelo de Viento 2 y soluciones N° 17 y 18 para el Modelo de Viento 3, las cuales se destacan en la Tabla 2.

La Figura 12 indica dos alturas máximas para cada solución: la altura máxima real (H_{real}) y la altura máxima aparente ($H_{aparente}$). El tiempo en el cual se alcanza la H_{real} está entre 3,0 y 3,1 segundos según se muestra en la Tabla 2 para las siete soluciones más confiables. Aun cuando el video pareciera indicar que la altura máxima ocurre en el tiempo de 2,5 segundos, esta altura corresponde a la altura máxima aparente ($H_{aparente}$) tal como se ilustra en las figuras 10 y 12. El tiempo de ocurrencia de la $H_{aparente}$ también se obtuvo para las 7 soluciones seleccionadas usando el modelo matemático, encontrándose valores entre 2,4 y 2,6

segundos, similares a los 2,5 segundos estimados del video.

Comparación entre el Modelo 2D y el Modelo 3D Un modelo 2D es aquel en el cual la trayectoria de la pelota está contenida en un plano y se describe solamente por dos coordenadas, una horizontal (x) y otra vertical (z). Entre otras diferencias que existen entre ambos modelos se mencionan: en el Modelo 2D el eje de rotación de la pelota tiene una dirección fija durante toda la trayectoria y es perpendicular al plano del movimiento; la bola solo puede experimentar rotación hacia atrás (*backspin*) o hacia adelante (*topspin*), no puede desarrollar rotación de lado (*sidespin*) ni de tirabuzón (*gyrospin*) y por tanto los vectores velocidad traslacional \vec{v} y velocidad rotacional $\vec{\omega}$ se mantienen perpendiculares entre sí. En el Modelo 3D aparecen también rotaciones de lado y de tirabuzón y los vectores \vec{v} y $\vec{\omega}$ no mantienen su perpendicularidad.

Las diferencias entre los resultados que pueden surgir de aplicar un Modelo 2D o un Modelo 3D en el recorrido de una pelota de beisbol se analizan a continuación para el caso de Andrés Galarraga descrito previamente con el Modelo 3D y se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Comparación de resultados con los modelos 2D y 3D para el jonrón de Galarraga, para la misma condición de viento.

Modelo	Rapidez inicial de rotación			Rapidez inicial de traslación	Ángulo de salida	Distancia total
	ω_o (rpm)	ω_{bo} (rpm)	ω_{so} (rpm)			
2D	2780	-	-	115,0	29,0	526,7
3D	3250	3054	1112	115,8	28,6	519,2

Resultados con un Modelo 2D fueron presentados previamente en López et al. (2017-a). En relación a la Figura 9 (derecha), el Modelo 2D produce una trayectoria que va en línea recta desde el punto inicial hasta el punto final y no es capaz de reproducir la curvatura de la trayectoria de la pelota que se aprecia en dicha figura determinada con el Modelo 3D. La Tabla 3 compara la distancia total obtenida con los modelos 2D y 3D y las condiciones iniciales asociadas. Se comparan resultados obtenidos con el mismo modelo de viento.

Los valores de la Tabla 3 corresponden a la media de los 4 resultados más confiables obtenidos con el Modelo 2D y a

la media de los 2 resultados más confiables obtenidos con el modelo de viento 1 en el Modelo 3D (Tabla 2, Soluciones 5 y 6). Se aprecia una reducción en la distancia total recorrida por la pelota en el Modelo 3D debida al efecto de las rotaciones de lado y de tirabuzón que no están presentes en el Modelo 2D. Sin embargo, en este caso se obtiene un error menor al 1,5% de sobreestimación de la distancia final por parte del Modelo 2D.

CONCLUSIONES

a) Se desarrolló un modelo matemático en tres dimensiones (3D) para determinar la trayectoria de una pelota en el espacio sujeta a las fuerzas aerodinámicas y gravitatorias, a la cual se le imparten condiciones iniciales al momento de su salida. El modelo considera las tres componentes de rotación y las fuerzas asociadas de Magnus que se pueden generar durante el vuelo de la pelota. El modelo es aplicable a diversos deportes tales como beisbol, futbol, tenis y golf, siempre que se utilicen los coeficientes de arrastre y de Magnus correspondientes al tipo de pelota analizada. Para el caso particular del beisbol, se seleccionaron coeficientes de arrastre y de Magnus propuestos en la bibliografía especializada con respaldo experimental.

b) El modelo matemático fue validado mediante la comparación de la trayectoria calculada con la trayectoria medida por Statcast en un juego de las grandes ligas (MLB) en el cual la pelota bateada describe una amplia trayectoria curva inducida por la componente de velocidad rotacional de lado (*sidespin*); la trayectoria predicha por el modelo en el plano tridimensional mostró una excelente concordancia con la trayectoria medida. El análisis pone de manifiesto la contribución que tiene cada componente rotacional en la trayectoria de la pelota.

c) Los casos analizados han mostrado que las fuerzas aerodinámicas (arrastre y Magnus) que se generan durante el vuelo de la bola de baseball, pueden ser del mismo orden de magnitud que el peso de la pelota.

d) El modelo 3D fue utilizado para reevaluar el jonrón de Andrés Galarraga de 1997 del cual se han publicado informaciones distintas sobre la distancia recorrida: 529 ft (Rocky Mountain News, 1997), 509 ft (Jenkinson, 2010), 468 ft (ESPN, 2016) y 527 ft por los mismos autores con un modelo 2D (López et al., 2017-a). Se combinan cuatro disciplinas, la física, la geomática (tecnología LIDAR), la geometría descriptiva y el análisis de vídeo, para encontrar resultados más confiables en este estudio. Se analizaron 18 casos para tener en cuenta las incertidumbres respecto a las condiciones iniciales y la velocidad y dirección del viento.

Las siete soluciones más confiables se seleccionaron comparando la altura máxima de la bola en cada caso analizado con la altura real mostrada en el cuadro de video después de aplicar técnicas de geometría descriptiva. La exactitud de las soluciones fue validada comparando las trayectorias predichas por el modelo con la trayectoria mostrada por el video. La distancia total del jonrón de Galarraga se encuentra entre 517 y 529 pies con un valor medio de 524 pies.

e) La distancia total de 468 pies encontrada por ESPN (2016) es menor que la encontrada en este estudio, principalmente porque utilizaron un punto de impacto en la fila 20 que es 15 pies más bajo y 9 pies más cerca del plato que las distancias obtenidas con la tecnología LIDAR que se considera más confiable por su alta precisión y porque corresponde al estadio construido. Además, ESPN utilizó un tiempo de vuelo de 4,97 segundos, un poco mayor que los 4,67 de este estudio verificado en el video con tres cronómetros no manuales e independientes, y no consideró las incertidumbres asociadas a las condiciones iniciales y al viento.

f) El Modelo 3D representa una mejora sobre los modelos 2D dado que incorpora las rotaciones de lado (*sidespin*) y de tirabuzón (*gyrospin*) que puede experimentar la pelota durante el vuelo, lo que permite describir mejor su trayectoria en el espacio. En lo que respecta a la determinación de la distancia total recorrida por el jonrón de Galarraga, el Modelo 2D sobrestima ligeramente la distancia predicha por el Modelo 3D.

REFERENCIAS

- ADAIR, R. K. (2002). *The Physics of Baseball*. New York: Harper-Collins Publishers Inc. Third Edition.
- BIRNIE N. (2016). *Top 15 Longest Home Runs in MLB History*. Recuperado el 12-09-2016 de <http://www.thesportster.com/>
- CLANET C. (2015). Sports Ballistics. *Annual Review Fluid Mechanics*, 47:455–78.
- ESPN (2016). “*ESPN Home Run Tracker*”. Recuperado el 26-07-2016, de http://www.hittrackeronline.com/historic.php?id=1997_21
- FROHLICH C. (1984). Aerodynamic drag crisis and its possible effect on the flight of baseballs. *American Journal of Physics*, 52 (4), 325–334.

- JENKINSON, B. (2010). “Baseball’s Ultimate Power”, *Lions Press*, Connecticut.
- LÓPEZ J. L., LÓPEZ O. A., RAVEN R. (2017-a). La Física del Beisbol y Análisis del Extraordinario Homerun de Galarraga. *Revista de la Facultad de Ingeniería de la UCV*. Vol. 32, N° 2, pp. 35-52, 2017
- LÓPEZ J. L., LÓPEZ O. A., RAVEN R., LÓPEZ A. (2017-b). Analysis of Andrés Galarraga’s Home Run of May 31, 1997. *The Baseball Research Journal*, Fall 2017. Volume 46, Number 2.
- MCBEATH M.K.,NATHAN A.M., BAHILL A.T.,BALDWIN D.G. 2008. Paradoxical pop-ups: Why are they difficult to catch? *American Journal of Physics*,76:723-29.
- NATHAN A. M. (2008-a). “The Effect of Spin on the Flight of a Baseball”. *American Journal of Physics*, 76 (2): 119-124.
- NATHAN A. M. (2008-b). *The Effect of Spin-Down on the Flight of a Baseball*. Department of Physics, University of Illinois, Urbana.
- NATHAN A. M. (2013). *How Far Did That Fly Ball Travel?* Baseball ProGUESTus. Recuperado el 15-10-2016 de <http://www.baseballprospectus.com>.
- NATHAN A. M. (2016) *Spinning Out of Control* October 26, 2016-FANGRAPHS. Recuperado el 10-01-2017 de <http://www.fangraphs.com/blogs/spinning-out-of-control/>
- REX A. F. (1985). The effect of spin on the flight of batted baseballs. *American Journal of Physics*. 53 (11), 1073–1075.
- ROCKY MOUNTAIN NEWS. *Newspaper*, June 1, 1997. Denver, Colorado.
- SAWICKI G. S., HUBBARD M. Y STRONGE W. (2003). How to hit home runs: Optimum baseball bat swing parameters for maximum range trajectories. *American Journal of Physics*, 71 (11), (2003): 1152–1162.
- SPORTS REFERENCE (2016). *Baseball Reference*. Recuperado el 15-10-2016 de <http://www.baseball-reference.com/>
- THE WEATHER COMPANY (2016). *Weather Underground*. Recuperado el 20-01-2017 de <https://www.wunderground.com/>
- USGS (2016). USGS Earth Explorer. Imagen LIDAR FL_BrowardCo_2007_000519. Recovered from <https://earthexplorer.usgs.gov/>

