

ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE TALUDES CON GRIETA DE TRACCIÓN EN MACIZOS ROCOSOS

ROBERTO UCAR¹, NORLY BELANDRIA¹, FERRI HASSANI²

¹Universidad de Los Andes. Escuela de Ingeniería Geológica, Grupo de Investigación en Geología Aplicada (GIGA).

²Department of Mining and Material Engineering, McGill University, Montreal, Canada,

e-mails: robertoucar@gmail.com / norlyb@gmail.com / ferri.hassani@mcgill.ca

RESUMEN

A través de la presente investigación se describe una metodología analítica, la cual permite determinar el mínimo factor de seguridad en función de la profundidad de la grieta de tracción y de la inclinación del plano de rotura en la condición más crítica, considerando a la vez, la sobrecarga, el efecto sísmico y las presiones intersticiales. Por consiguiente, se estudia la estabilidad en macizos rocosos tomando en cuenta que la superficie potencial de rotura la constituyen dos bloques con inclinaciones diferentes. El bloque superior del talud está limitado por una grieta de tracción, que está representada por una fractura sin movimiento. Por otra parte, en el bloque inferior la geometría está formada por un plano potencial de deslizamiento de inclinación α con la horizontal, bajo la acción de tensiones cortantes. La fractura en el bloque superior se caracteriza por un campo de esfuerzos normales de tracción que actúan sobre la grieta, cuya presencia se origina al perder la roca la cohesión original. Finalmente, los ejemplos de aplicación demuestran la importancia de la metodología desarrollada porque mejoran la forma de determinar la posición más crítica de superficie de rotura de los dos bloques, además del punto de intersección entre la grieta de tracción y la corona del talud, lo que permite conocer también la distancia entre dicho punto y el borde de la cara del talud.

Palabras claves: grieta de tracción, factor de seguridad, macizo rocoso, estabilidad de taludes.

MINIMUM SAFETY FACTOR ON ROCK MASS WITH TENSION CRACK

ABSTRACT

This research describes an analytic methodology, which allows to determine the minimum safety factor depending on the depth of tension crack and the inclination of surface failure on the most critical condition, considering at the same time, surcharge, seismic effect and water pressure. Therefore, it studies the stability of rock slopes considering that the potential of the failure surface it is constituted by two blocks with different inclinations. The superior block it is limited by a tension crack that it is represented by a fracture without displacement. On the other hand, on the inferior block, geometry it is formed by a potential slide plane of α inclination with the horizontal axis, in which are acting shear stresses. Fracture on the superior block is characterized by a normal-tensile stress field that acts over the crack whose presence is originated when the rock loses its original cohesion. At last, application examples prove the importance of the methodology developed, which improves the way to determine both the most critical position of failure surface on the two blocks, and the intersection point between the tension crack and upper slope, which allows to determining also, the distance between this point and the slope edge.

Keywords: tension crack, safety factor, slope stability, rock mass.

INTRODUCCIÓN

Una forma aproximada de analizar la superficie de rotura en suelos y macizos rocosos, es dividirla en dos planos de rotura, (Hoek y Bray, 1981), (Hoek y Brown, 1980, 1988, 1989, 1997), (Hoek, Carranza, Corkum 2002), (Priest, 2005), (Pariseau, 2007), entre otros.

Actualmente, otros investigadores han estado trabajando en la estabilidad de taludes con grieta de tracción considerando: carga sísmica, rotura espiral, agua y sobrecarga, tales como, (Shukla, Khandelwal, Verma, Sivakugan, 2009), (Zhao, Cheng, Zhang, Li. L, Li 2016) y (Ukritchon and Keawsawasvong, 2018).

Para esta investigación, la parte superior colindante con la cresta o cabecera del talud (figura 1) se caracteriza por una grieta sometida a tracción, la cual es vertical en la mayoría de los casos, originada por la ausencia de la resistencia al corte al perder la masa rocosa la cohesión original y, por lo tanto, desapareciendo la unión de las fuerzas de enlace entre los granos minerales de la roca.

También cabe destacar que en el presente análisis de estabilidad no se ha considerado utilizar inclinaciones de la grieta de tracción superiores a los noventa grados. Lo previamente indicado, genera como consecuencia la presencia de tensiones cortantes al suponer que la tensión principal menor es horizontal, práctica común la cual no es siempre correcta. Por supuesto, el problema es más complejo si las tensiones principales se encuentran rotadas con respecto al eje horizontal y el vertical.

Adicionalmente, la zona de potencial de rotura por corte, se analiza a través del criterio lineal de Mohr-Coulomb en función de la resistencia cohesiva y del ángulo de fricción interna de la roca. En general, es habitual que dichos parámetros se determinen en forma aproximada caracterizando el macizo rocoso. Posteriormente se calculan los parámetros de corte equivalentes mediante reconocidos programas asistidos por el ordenador y aplicando el criterio de rotura no lineal de (Hoek y Brown, 1989).

Por otra parte, a través de esta investigación se analiza específicamente la estabilidad del macizo rocoso para la condición en la cual no existe la presencia del nivel freático, o sea, la condición seca. Sin embargo, las ecuaciones que se demuestran tienen en cuenta el efecto de las presiones intersticiales que actúan sobre ambos planos potenciales de rotura, es decir, considerando previamente la existencia de la grieta en el bloque superior y la fractura en el bloque inferior, el agua por efecto de las lluvias realiza un empuje de ambos bloques debido al llenado de la fractura y la grieta.

DESARROLLO ANALÍTICO DE LA GRIETA A TRACCIÓN

A continuación, se describe el desarrollo analítico de un talud con grieta a tracción, teniendo en cuenta las fuerzas sísmicas, sobrecarga y las presiones intersticiales. De acuerdo a la figura 1, los parámetros utilizados en el desarrollo analítico son los siguientes:

A (0,0), es el punto que define el origen de coordenadas en el pie del talud. B (X_B, Y_B), es la coordenadas del punto ubicado en la parte superior de la cara del talud. $Y_B = H$, es la altura del talud. C (X_C, Y_C): la coordenada del punto de intersección entre la grieta de tracción y la corona del talud. D (X_D, Y_D): la coordenada del punto del punto inferior perteneciente a la grieta de tracción. β , es el ángulo que forma el plano o cara del talud con la horizontal. α : el ángulo que forma el plano potencial de deslizamiento con la horizontal. ψ , es el ángulo de inclinación de la grieta de tracción con la horizontal. β_t , es el ángulo que forma el plano de la corona o cresta del talud con la horizontal. Q, representa la sobrecarga. U, es la fuerza resultante de las presiones intersticiales actuando sobre el plano potencial de falla. V: la fuerza resultante de las presiones intersticiales actuando sobre la grieta de tracción. Z = ($Y_C - Y_D$), es la profundidad de la grieta de tracción. Z_w , significa la altura de agua en la grieta de tracción. BC: la distancia medida en el plano de la corona del talud donde actúa la sobrecarga sobre los bloques potenciales de falla. $d = (X_C - X_D) = BC \cdot \cos \beta_t$, es la distancia horizontal. W_T , es el peso de los dos bloques potenciales de falla considerando un ancho unidad. k_h , representa el coeficiente sísmico horizontal. k_v , es el coeficiente sísmico vertical. $\tan \varepsilon = k_h / (1 + k_v)$, donde ε = Ángulo que forma la resultante R con la vertical (figura 2), b: la distancia entre el centro de coordenadas y, finalmente y, que es el corte de la recta DC con el eje de las ordenadas.

El próximo paso es determinar las coordenadas del punto D considerando las ecuaciones de las rectas correspondientes a la del plano de rotura $Y_{AD} = Y_t$, y a la grieta de tracción $Y_{CD} = Y_g$.

$$Y_t = X \cdot \tan \alpha \quad (1)$$

$$Y_g = X \cdot \tan \psi + b \quad (2)$$

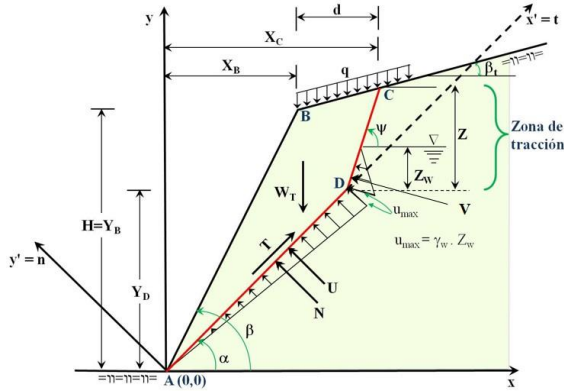


Figura 1. Geometría del talud mostrando los dos planos potenciales de rotura, la profundidad de la grieta de tracción y la distribución de las presiones intersticiales.

En el punto (D) resulta:

$$Y_D = X_D \cdot \tan \alpha \quad (3)$$

$$Y_D = X_D \cdot \tan \psi + b \quad (4)$$

A través de las ecuaciones (3 - 4) la abscisa X_D toma el valor:

$$X_D = \frac{-\left(\frac{b}{\tan \psi}\right)}{1 - \tan \alpha \cdot \cot \psi} \quad (5)$$

Empleando la ecuación (2) y considerando el punto (C), resulta:

$$Y_C = X_C \cdot \tan \psi + b \quad (6)$$

$$-\left(\frac{b}{\tan \psi}\right) = d + H \cot \beta - \frac{Y_C}{\tan \psi} \quad (7)$$

$$-\left(\frac{b}{\tan \psi}\right) = \left[d \cdot (1 - \tan \beta_t \cdot \cot \psi) + H (\cot \beta - \cot \psi) \right] \quad (8)$$

De acuerdo a (Priest, 2005) la expresión contenida en el corchete de la ecuación anterior, está representada por

el siguiente parámetro:
 $M = d \cdot (1 - \tan \beta_t \cdot \cot \psi) + H (\cot \beta - \cot \psi)$.

Por otra parte, el valor de la abscisa X_D en función X_C se determina a través de las ecuaciones (5-7) y considerando además que:

$$\tan \beta_t = \left(\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} \right) = \left(\frac{Y_C - H}{X_C - H / \tan \beta} \right) \quad (9)$$

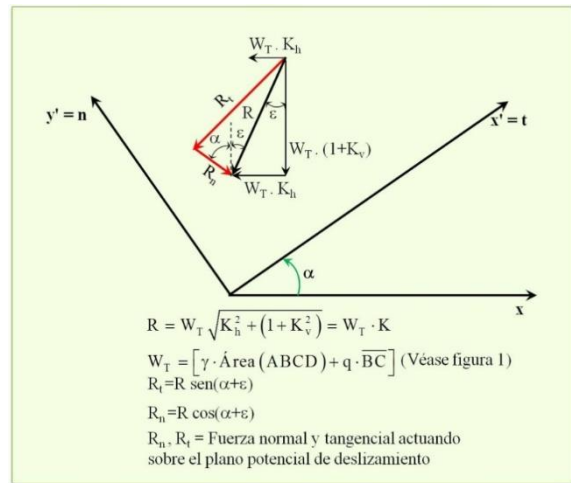


Figura 2. Fuerzas sísmicas actuando en el talud.

En estas condiciones, mediante operaciones algebraicas y trigonométricas resulta la expresión:

$$X_D = \left(\frac{X_C \cdot (\tan \psi - \tan \beta_t) + H \left(\frac{\tan \beta_t}{\tan \beta} - 1 \right)}{(\tan \psi - \tan \alpha)} \right) \quad (10)$$

Para el caso en el cual $\tan \psi \rightarrow \infty \Rightarrow X_D = X_C$. A través de (10), finalmente resulta que el parámetro M puede calcularse igualmente a través de (5), obteniéndose:

$$M = X_D (1 - \tan \alpha \cdot \cot \psi) \quad (11)$$

Siendo, adicionalmente la ordenada del punto (D) igual a:

$$Y_D = X_D \cdot \tan \alpha = \frac{M}{(\cot \alpha - \cot \psi)} \quad (12)$$

De la figura (1) se puede apreciar que:

$$l_{CD} = \overline{CD} = \frac{(Y_C - Y_D)}{\sen \psi} \quad (13)$$

$$Z = (Y_C - Y_D) = \overline{CD} \cdot \sen \psi \quad (14)$$

$$Z = (H + d \cdot \tan \beta_t) - \frac{M}{(\cot \alpha - \cot \psi)} \quad (15)$$

Remplazando el valor de M en la ecuación anterior y normalizando Z con respecto a H, resulta:

$$\left(\frac{Z}{H}\right) = \frac{\sen \psi \left[\sen(\beta - \alpha) + \frac{d}{H} (\tan \beta_t - 1) \cdot \sen \alpha \cdot \sen \beta \right]}{\sen \beta \cdot \sen(\psi - \alpha)} \quad (16)$$

Así mismo, el área del polígono ABCDA se calcula mediante la regla de la multiplicación cruzada, la cual se obtiene al considerar las coordenadas de los vértices (X_C, Y_C), (X_B, Y_B), (X_A, Y_A) y (X_D, Y_D).

Resultando, por lo tanto, la siguiente área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left[(X_C \cdot Y_B - X_B \cdot Y_C) + (X_B \cdot Y_A - X_A \cdot Y_B) \right. \\ \left. + (X_A \cdot Y_D - X_D \cdot Y_A) + (X_D \cdot Y_C - X_C \cdot Y_D) \right] \quad (17)$$

Puesto que X_A = 0 y Y_A = 0, la ecuación anterior toma la forma:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left[X_C \cdot (Y_B - Y_D) + Y_C \cdot (X_D - X_B) \right] \quad (18)$$

En estas condiciones, el peso total W_T de los dos bloques potenciales de rotura junto con la sobrecarga es:

$$W_T = \frac{\gamma}{2} \left[X_C (Y_B - Y_D) + Y_C (X_D - X_B) \right] + q \cdot \overbrace{(X_C - X_B)}^d \quad (19)$$

Siendo, Y_B = H. γ = Peso unitario de la masa rocosa. d = $\overline{BC} = (X_C - X_B)$, (figura1). Por otro lado, al considerar las fuerzas sísmicas la resultante R es:

$$R = W_T \sqrt{k_h^2 + (1 + k_v^2)} \Rightarrow R = W_T \cdot k \quad (20)$$

$$k = \sqrt{k_h^2 + (1 + k_v^2)}$$

La abscisa X_D en función de la profundidad de la grieta de tracción

A continuación, se expresa la abscisa X_D en función de la profundidad de la grieta de tracción Z, permitiendo posteriormente minimizar el factor de seguridad en función de α y Z, manteniendo constante la inclinación de la grieta de tracción ψ.

En la tabla 1, se resumen las ecuaciones deducidas a partir de la ecuación 1.

Tabla 1. Expresiones de las diferentes variables utilizadas en el análisis.

De la figura (1)

$$\tan \beta_t = \left(\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} \right) = \left(\frac{Y_C - H}{X_C - H \cot \beta} \right)$$

Resultando:

$$Y_C = H + [X_C - H \cdot \cot \beta] \tan \beta_t$$

Por otra parte,

$$Z = (Y_C - Y_D) \Rightarrow Y_D = (Y_C - Z)$$

$$Y_D = \overbrace{\left\{ H + [X_C - H \cdot \cot \beta] \tan \beta_t \right\}}^{Y_C} - Z$$

$$Y_D = X_C \tan \beta_t + \overbrace{H(1 - \cot \beta \tan \beta_t)}^{b_1} - Z$$

Adicionalmente,

$$\frac{Z}{(X_C - X_D)} = \tan \psi \Rightarrow X_D = (X_C - Z \cot \psi)$$

$$Y_D = X_D \cdot \tan \alpha = (X_C - Z \cot \psi) \cdot \tan \alpha$$

Es importante mencionar que en los siguientes procedimientos de cálculo se ha utilizado el parámetro λ = Z/H, por cuanto se logra entender y analizar mejor la estabilidad del terreno en su conjunto. Adicionalmente, permite acotar qué fracción de la altura del talud corresponde a la profundidad de la grieta de tracción. Si λ = 0, por supuesto no hay fractura por tracción. Por otro lado, la experiencia ha demostrado que por lo general se obtienen valores λ ≤ 0,50.

A través de la tabla 1, e igualando las ecuaciones que representan ordenada Y_D , se obtiene:

$$\begin{aligned} H + [X_C - H \cdot \cot \beta_t] \tan \beta_t - Z &= \\ X_D \cdot \tan \alpha &= (X_C - Z \cot \psi) \cdot \tan \alpha \end{aligned} \quad (21)$$

Al despejar X_C , resulta finalmente:

$$X_C = \frac{H(1 - \cot \beta_t \cdot \tan \beta_t) - Z(1 - \cot \psi \cdot \tan \alpha)}{(\tan \alpha - \tan \beta_t)} \quad (22)$$

Considerando la figura (1) se observa que en el punto D, la presión máxima debida al agua es: $u_{\max} = \gamma_w \cdot Z_w$. Por otra parte, la fuerza resultante U generada por las presiones intersticiales que actúan sobre el plano de área \overline{AD} x1 (ancho unidad), se expresa:

$$U = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_w \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_w \cdot \frac{Y_D}{\sin \alpha} \quad (23)$$

Adicionalmente, al considerar la ecuación (14) la ecuación anterior se transforma:

$$U = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_w \cdot \left(\frac{M}{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cot \psi} \right) \quad (24)$$

A la vez, la resultante de las presiones intersticiales que actúan sobre la grieta de tracción es:

$$V = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_w^2 \cdot \csc \psi \quad (25)$$

Al observar la figura 3 se obtiene las componentes de V , las cuales son:

$$\begin{aligned} V_n &= V \cdot \cos(\psi - \alpha) \\ V_t &= V \cdot \sin(\psi - \alpha) \\ R_t &= R \cdot \sin(\alpha + \varepsilon) = W_T \cdot k \cdot \sin(\alpha + \varepsilon) \end{aligned} \quad (26)$$

Luego, teniendo en cuenta las (figuras 1 a 3) y aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta:

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow N + V_n + U - R_n = 0 \quad (27)$$

$$N = R_n - U - V_n \quad (28)$$

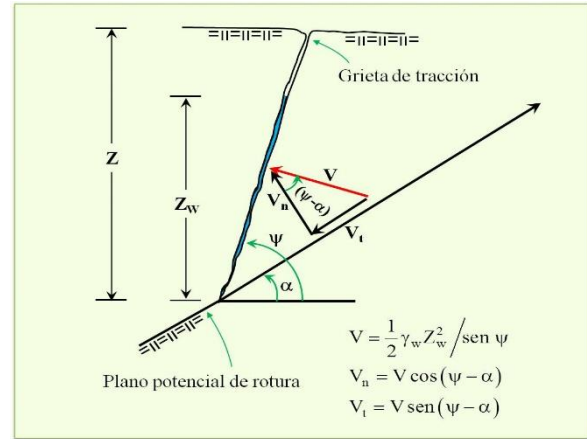


Figura 3. Componente normal y tangencial de la resultante V de las presiones intersticiales que actúan sobre la grieta de tracción.

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow T - R_t - V_t = 0 \quad (29)$$

$$T = R_t + V_t \quad (30)$$

El factor de seguridad al aplicar el criterio de rotura lineal de Mohr- Coulomb es, por tanto:

$$FS = \frac{C \cdot \overline{AD} + (W_T \cdot k \cos(\alpha + \varepsilon) - V \cos(\psi - \alpha) - U) \tan \phi}{(W_T \cdot k \cdot \sin(\alpha + \varepsilon) + V \cdot \sin(\psi - \alpha))} \quad (31)$$

En la tabla 2 se resumen las ecuaciones que involucran las coordenadas de los puntos B, C y D. Las referidas ecuaciones se utilizan en el cálculo del mínimo factor de seguridad aplicando la hoja de cálculo de Excel a través del programa de optimización Solver.

Aplicación del programa Solver para determinar el mínimo factor de seguridad.

Solver es un complemento adicional de la hoja de cálculo Excel diseñado para la resolución de problemas básicos de optimización. Su fácil aplicación resulta como una alternativa muy práctica para dificultades que no son de gran escala. Este complemento tiene la ventaja que puede resolver problemas de optimización lineal y no lineal junto con determinadas restricciones de las variables involucradas.

Tabla 2. Valores de las coordenadas B, C y D con los parámetros M y d.

B	$Y_B = H$	$X_B = \frac{H}{\tan \beta}$
C	$X_C = \frac{H(1 - \cot \beta \cdot \tan \beta_t) - Z(1 - \cot \psi \cdot \tan \alpha)}{(\tan \alpha - \tan \beta_t)}$	$Y_C = X_C \cdot \tan \beta_t$
	$X_C = (b_2 - Z \cdot b_3)$	$+ H \left(1 - \frac{\tan \beta_t}{\tan \beta} \right)$
	$b_2 = \frac{H \cdot (1 - \cot \beta \cdot \tan \beta_t)}{(\tan \alpha - \tan \beta_t)}$	$Y_C = X_C \cdot \tan \beta_t + b_1$
	$b_3 = \frac{(1 - \cot \psi \cdot \tan \alpha)}{(\tan \alpha - \tan \beta_t)}$	$b_1 = H \left(1 - \frac{\tan \beta_t}{\tan \beta} \right)$
D	$X_D = \frac{M}{(1 - \tan \alpha \cdot \cot \psi)}$	$Y_D = X_D \cdot \tan \alpha$
	$M = d \cdot (1 - \tan \beta_t \cdot \cot \psi) + H(\cot \beta - \cot \psi)$	$= \frac{M}{(\cot \alpha - \cot \psi)}$
	$Y_D = (Y_C - Z)$	$Z = \lambda \cdot H$
	$d = (X_C - X_B) = \left(X_C - \frac{H}{\tan \beta} \right)$	$Y_D = \frac{Y_C}{X_C \cdot \tan \beta_t + b_1} - \lambda \cdot H$
D	$X_D = \frac{X_C \cdot (\tan \psi - \tan \beta_t) + H \left(\frac{\tan \beta_t}{\tan \beta} - 1 \right)}{(\tan \psi - \tan \alpha)}$	$= X_C \cdot b_5 - b_6$
	$b_5 = \frac{(\tan \psi - \tan \beta_t)}{(\tan \psi - \tan \alpha)}$	$b_6 = \frac{H \left(\frac{\tan \beta_t}{\tan \beta} - 1 \right)}{(\tan \psi - \tan \alpha)}$
	$X_D = \frac{Y_D}{\tan \alpha} = \frac{(X_C \cdot \tan \beta_t + b_1) - \lambda \cdot H}{\tan \alpha}$	

En general, con Solver se determina el valor óptimo para una celda, la cual se conoce como celda objetivo, siendo la función objeto $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$.

Solver también puede cambiar los valores de un grupo de celdas que se denominan celdas cambiantes, las cuales están involucradas tanto directa o indirectamente con la ecuación de la celda objeto. Adicionalmente, Solver puede agregar restricciones mediante una expresión del tipo $g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ en una celda, especificando a la vez que la celda es, mayor o igual,

igual o menor, o igual que otra celda definida por una constante k.

Los tres métodos de solución a través del referido programa son:

- Método Simplex LP, el cual se utiliza para modelos con ecuaciones de primer orden, es decir, donde las variables de decisión están elevadas a la primera potencia.
- Método Evolutivo (Evolutionary), se utiliza si cualquiera de las funciones del modelo propuesto son discontinuas, o lo que es lo mismo, no diferenciables. Se conoce como procedimiento evolutivo, por cuanto se fundamenta en algoritmos evolutivos.
- Método GRG. El algoritmo utilizado por Solver es el Gradiente Reducido Generalizado, el cual ha sido diseñado para resolver problemas no lineales. Se fundamenta en una solución factible previamente conocida como punto inicial.

El algoritmo busca desplazarse en función del referido punto en una determinada dirección a través de una región que sea viable, de forma tal que el valor de la función objeto mejore. En estas condiciones, el proceso continúa hasta que el algoritmo logre un punto en el cual no existe una dirección posible para desplazarse que mejore el valor de la función objeto.

Cabe destacar, que el algoritmo puede terminar el proceso en un óptimo local, el cual no corresponde al óptimo global del problema. En definitiva, no se conoce si la función obtenida es un óptimo global, por lo tanto, se pretende aplicar el proceso desde diferentes puntos para determinar si el problema posee varias soluciones óptimas.

Sin embargo, el método GRG de Solver tiene una casilla con la opción denominada **Inicio Múltiple (Multistart)**, la cual permite seleccionar un número diferente de puntos de inicio, generando diferentes soluciones óptimas locales. En estas condiciones, se selecciona la mejor como solución global óptima propuesta.

Debe mencionarse, que en el presente estudio se aplica el método GRG (Gradiente Reducido Generalizado) a través de la herramienta de Solver para determinar el mínimo factor de seguridad en taludes con grietas de tracción.

Por otra parte, el procedimiento de búsqueda se ha llevado a cabo con diferentes valores iniciales para las celdas cambiantes. Este procedimiento se logra con la referida opción de **Inicio Múltiple (Multistart)**. Los

elementos principales que hay que agregar para optimizar el problema propuesto son los siguientes:

- 1) **Establecer objetivo (Celda objetivo):** En esta barra se coloca la celda **FS**, la cual representa la función objetivo que en esta investigación corresponde al factor de seguridad.
- 2) En la **dirección de optimización (Valor de la celda objetivo)** se observan los círculos: **O** Max, **O** Min, y **O**. En el caso estudiado se marca el círculo **O** Min, por cuanto se desea minimizar el factor de seguridad.
- 3) Luego en la barra **cambiando las celdas de variables** se incluyen las celdas correspondientes a la variable de decisión λ y α utilizadas específicamente para minimizar el factor de seguridad.
- 4) Posteriormente se utiliza el cuadro de elemento de conexión sujeto a las siguientes restricciones: aquí es recomendable insertar las restricciones ordenando las desigualdades, primero las que tienen \geq , luego las de \leq y posteriormente, se introducen las ecuaciones.

RESULTADOS

Talud con grieta vertical, ejemplos de aplicación

A continuación, se lleva a cabo un simple ejemplo, en el cual se analiza la estabilidad de un talud con grieta de tracción vertical aplicando Solver y comparando los resultados con las ecuaciones desarrolladas por (Ucar, 2003, 2011). De acuerdo a la figura 4, el referido autor determina el mínimo factor de seguridad para el caso particular en que no hay presencia del efecto sísmico, la sobrecarga y tampoco de las presiones intersticiales. El mínimo factor de seguridad lo obtiene al considerar: $(\partial FS/\partial \alpha)=0$ y $(\partial FS/\partial \lambda)=0$.

Resultando las siguientes ecuaciones en función de α y λ :

$$(1-\lambda^2)(1-2\cos^2\alpha) + \left(\frac{2\cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{\tan\beta} \right) - \frac{\gamma \cdot H \cdot \tan\phi \cdot \cos^2\alpha}{2 \cdot C(1-\lambda)} \left[(1-\lambda) - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \right]^2 = 0$$

$$\lambda + \left(\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \right)^{1/2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - \sqrt{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}} \quad (32)$$

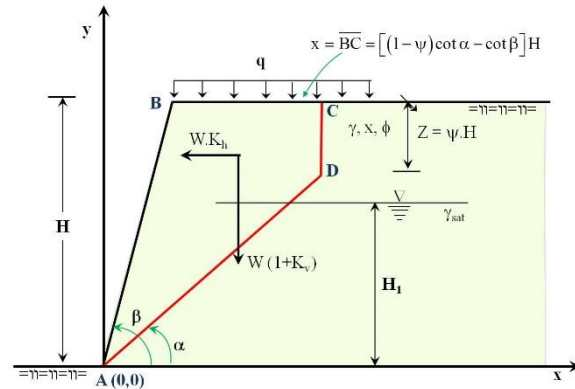


Figura 4. Geometría de talud empleando el método bidimensional mostrando la posición de la grieta de tracción según (Ucar, 2003, 2011).

Adicionalmente, el valor del FS se ha calculado teniendo en cuenta los parámetros de corte equivalentes C y ϕ de la masa rocosa a través del procedimiento de linealización. En estas condiciones, se facilita el análisis de problemas geotécnicos con programas asistidos por el ordenador cuya curva de resistencia intrínseca es lineal. (Puell, De la Fuente, Arenillas, 2004) mencionan que existen varios métodos de linealización para determinar el ángulo de rozamiento y la cohesión equivalentes. Esta metodología es utilizada en diferentes estudios geotécnicos aplicando el criterio de rotura empírico de (Hoek y Brown, 1989). Otros métodos de linealización pueden ser utilizados aplicando criterios no lineales son: (Barton y Choubey 1976), (Murrell, 1965), (Bieniawski, 1974, 1989), (Rammamurthy, 1986), (Mogi, 1971, 2007), (Yu, 2002, 2003) y más recientemente el desarrollado por (Ucar, 2003, 2011) entre otros.

A continuación, se equiparan los resultados entre el procedimiento propuesto por (Ucar, 2003, 2011) y el comando Solver, empleando los siguientes datos: altura del talud, $H=52,00$ m. Ángulo aproximado del talud $\beta=76^\circ$, $1/4:1$ (v). Peso unitario, $\gamma=25$ kN/m². Tipo de roca excavada: arenisca. Índice de calidad de Bieniawski, Rock Mass Rating = RMR=40, resistencia a compresión simple de la roca intacta, $\sigma_c=32$ MPa. Parámetros de corte equivalentes: $\phi=38^\circ$, $(C/\sigma_c)=0,0156$, siendo $C=0,50$ MPa.

Determinación del FS a través de la herramienta Solver

Al aplicar el complemento Solver de la hoja de cálculo de Excel, y teniendo en cuenta las tablas (1 - 2) y la ecuación (31), el factor de seguridad se ha minimizado utilizando como algoritmo el Gradiente Generalizado

Reducido (GRG) junto con las respectivas restricciones a través del comando Solver. Por otra parte, el procedimiento de búsqueda se ha llevado a cabo con diferentes valores iniciales para las celdas cambiantes. Este procedimiento se logra con la referida opción de **Inicio Múltiple (Multistart)**.

En la tabla 3 se han incluido las siguientes restricciones utilizando para el ejercicio planteado:

Tabla 3. Restricciones de los parámetros de Solver

Parámetros de Solver	
$\lambda \geq 0$	$Y_C \geq H$
$\lambda \leq 1$	$\psi \leq 1.57$
$\alpha \geq \phi$	$Y_C \geq Y_D$
$\alpha \leq \beta$	$d \leq d_s$
$X_C \geq X_B$	$d \geq d_l$
$R = 0$	

Cabe indicar que a través de la hoja de cálculo (tabla 4), y aplicando la herramienta de optimización de Solver,

se ha obtenido igual resultado al compararse con el procedimiento de (Ucar, 2003, 2011).

Los resultados del programa Solver son los siguientes:

$\alpha = \alpha_{\text{crítico}} = 45,12^\circ$, mínimo coeficiente de seguridad FS = 2,32, profundidad crítica Z de la grieta de tracción es: $Z = \lambda \cdot H = 0,50 \cdot 52,00 \text{ m} = 26,00 \text{ m}$.

Igualmente se observa que la distancia entre la grieta de tracción y el borde de la cara del talud es:

$BC = H[(1-\lambda)\cot\alpha - \cot\beta] = 52,00[(1-0,50) \cdot \cot 45,12^\circ - \cot 76^\circ] = 12,93 \text{ m}$

Finalmente, para conocer el efecto de las presiones intersticiales, por supuesto, es necesaria la presencia de la grieta y además conocer la elevación del nivel del agua dentro de ella. Lo anterior indica que el resto de la masa rocosa es impermeable, y lógicamente no es un argumento sólido y es poco probable que ocurra.

Teniendo en cuenta los datos del ejemplo anterior, y considerando, por ejemplo, que Z_w es un 60% de Z, es decir, 15,60 m, el coeficiente de seguridad debido al efecto de las presiones intersticiales disminuye a FS=1,94 (tabla 5).

Tabla 4. Hoja de cálculo mostrando los resultados, sin presencia de agua.

γ (kN/m ³)	γ_w (kN/m ³)	YB (m)	β	X_B (m)	β_t	d_l	d_s
25	9.81	52	76°	12.96	0°	2.6	26
q (kN/m ²)	k_h	k_v	ϵ	BC = d (m)	X_C (m)	Y_C (m)	
0	0	0	0°	12.93	25.89	52	
X_D (m)	Y_D (m)	α	ψ	Z	Wt (kN/m)	k	R
25.87	25.99	45.12°	89.95	26,00	16811.48	1	0
Rt (kN/m)	AD (m)	M	K_w	Z_w	Umax (kN/m ²)	U (kN/m)	V (kN/m)
16811.48	36.67	25.85	0	0	0	0	0
C (kN/m ²)	ϕ	FS	λ	b1	b2	b3	
500	38°	2.317	0.5	52	51.77	0.994	

Tabla 5. Hoja de cálculo mostrando los resultados, sin presencia de agua.

γ (kN/m ³)	γ_w (kN/m ³)	Y_B (m)	β	X_B (m)	β_t	d_t	d_s
25	9.81	52	76°	12.96	0°	2.6	26
q (kN/m ²)	k_h	k_v	ε	BC =d (m)	X_C (m)	Y_C (m)	
0	0	0	0°	12.93	25.89	52	
X_D (m)	Y_D (m)	α	ψ	Z	Wt (kN/m)	k	R
25.87	25.99	45°	89.95	26,00	16811.48	1	0
Rt (kN/m)	AD (m)	M	K_w	Z_w	Umax (kN/m²)	U (kN/m)	V (kN/m)
16811.48	36.67	25.85	0.6	15.60	153.08	2807.29	1194.44
C (kN/m ²)	ϕ	FS	λ	b1	b2	b3	
500	38°	1.94	0.5	52	51.77	0.994	

Un caso realista y objetivo, es por supuesto considerar que se conoce la ubicación de grieta de tracción y su distancia al borde de la cara del talud. Adicionalmente, si se tiene en cuenta que es difícil comprobar la profundidad exacta de la grieta, lo recomendable es analizar el bloque potencial de falla más crítico a través de Solver.

En estas circunstancias, el valor de la ordenada X_C en la celda de la hoja de cálculo es un dato conocido, debiéndose posteriormente minimizar el factor de seguridad para obtener los valores críticos de α y λ ($Z = \lambda \cdot H$).

La fase de cálculo siguiente, es determinar cómo decrece el valor de FS cuando la altura del nivel de agua Z_w es igual a la altura Z de la grieta. Es decir, el caso más desfavorable.

Otra alternativa para comprobar que el valor del Factor de Seguridad es un mínimo global

El próximo paso es determinar el peso de los dos bloques potenciales de falla en términos de la abscisa X_C , por cuanto X_C se ha expresado en función de $X_C = f(\alpha, \lambda, \psi, \beta, \beta_t, H)$. Esto facilita determinar la deriva de FS con respecto a las variables λ y α , manteniendo constantes los parámetros ψ, β, β_t , y H .

Principalmente, lo que se persigue es incluir dos restricciones más, las cuales corresponden a las derivadas: $(\partial FS / \partial \lambda) = 0$ y $(\partial FS / \partial \alpha) = 0$. Por lo tanto, se minimiza nuevamente el FS, por cuanto lo que se desea es comprobar que las dos restricciones se cumplen al aplicar el método de optimización de Solver. Como se podrá apreciar en las hojas de cálculo (tablas 6 -7), los valores de FS en ambos casos son iguales al equiparar resultados.

El cálculo de las derivadas se lleva a cabo considerando que, $W_T = \eta(\alpha, \lambda)$, $\overline{AD} = \xi(\alpha, \lambda)$, $X_C = \zeta(\alpha, \lambda)$. Por lo tanto, al minimizar, se obtiene:

$$\frac{\partial FS}{\partial \lambda} = \left[\frac{C}{k \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon)} \right] \cdot \frac{W_T \left(\frac{\partial \overline{AD}}{\partial \lambda} \right) - \overline{AD} \left(\frac{\partial W_T}{\partial \lambda} \right)}{W_T^2} \quad (33)$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \alpha} = \left(\frac{C}{k} \right) \cdot \frac{\left(\frac{\partial \overline{AD}}{\partial \alpha} \right) W_T \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon) - \overline{AD} \left(\frac{\partial W_T}{\partial \alpha} \right) \text{sen}(\alpha + \varepsilon) + W_T \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)}{[W_T \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon)]^2} - \frac{\tan \phi}{\text{sen}^2(\alpha + \varepsilon)} \quad (34)$$

Tabla 6. Hoja de cálculo mostrando los resultados, sin presencia de agua incluyendo las derivadas $(\partial FS/\partial \lambda) = 0$ y $(\partial FS/\partial \alpha) = 0$.

γ (kN/m ³)	γ_w (kN/m ³)	Y_B (m)	β	X_B (m)	β_t	d_I	d_S
25	9.81	52	76°	12.96	0°	2.6	26
q (kN/m ²)	k_h	k_v	ε	BC	XC (m)	YC (m)	d (m)
0	0	0	0°	12.94	25.90	52	12.94
X_D (m)	Y_D (m)	α	ψ	Z	Wt (kN/m)	K	R
25.90	26.01	45.12°	89.95	25.98	16822.75	1	0
Rt (kN/m)	AD (m)	M	K_w	Z_w	U_{max} (kN/m²)	U (kN/m)	V (kN/m)
16822.75	36.70	25.89	0	0	0	0	0
C (kN/m ²)	ϕ	FS	λ	b1	b2	b3	
500	38°	2.317	0.499	52	51.77	0.994	
$\partial FS/\partial \alpha$	$\partial FS/\partial \lambda$						
-2.22e-11	-5.11e-07						

El cálculo de las derivadas se lleva a cabo considerando que,

$W_T = \eta(\alpha, \lambda)$, $\overline{AD} = \xi(\alpha, \lambda)$, $X_C = \zeta(\alpha, \lambda)$. Por lo tanto, al minimizar, se obtiene:

$$\frac{\partial FS}{\partial \lambda} = \left[\frac{C}{k \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon)} \right] \cdot \frac{W_T \left(\frac{\partial \overline{AD}}{\partial \lambda} \right) - \overline{AD} \left(\frac{\partial W_T}{\partial \lambda} \right)}{W_T^2} \quad (33)$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \alpha} = \left(\frac{C}{k} \right) \cdot \frac{\left(\frac{\partial \overline{AD}}{\partial \alpha} \right) W_T \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon) - \overline{AD} \left(\frac{\partial W_T}{\partial \alpha} \right) \text{sen}(\alpha + \varepsilon) + W_T \cdot \text{cos}(\alpha + \varepsilon)}{[W_T \cdot \text{sen}(\alpha + \varepsilon)]^2} - \frac{\tan \phi}{\text{sen}^2(\alpha + \varepsilon)} \quad (34)$$

Ambas derivadas con sus respectivas ecuaciones han sido incluidas como restricciones en el programa Solver.

Debe señalarse que, adicionalmente, se ha calculado la derivada de FS con respecto a λ y α por diferenciación numérica con la ayuda del uso de simples ecuaciones que otorga el análisis numérico para aproximar la derivada $f'(x)$. La comprobación se llevó a cabo mediante la conocida ecuación:

$$f'(x_0) \approx 1/h [-1,5f(x_0) + 2f(x_1) - 0,50f(x_2)]. \quad (35)$$

Siendo adicionalmente $x_1 = (x_0 + h)$ y el valor de $x_2 = (x_1 + h)$

De esta forma se ha verificado que el desarrollo analítico de las derivadas ha sido obtenido correctamente y no hay errores en las expresiones algebraicas y en las que están involucradas las funciones trigonométricas. Todo esto, por supuesto con la ayuda de la hoja de cálculo de Excel.

Una vez incluida ambas derivadas en la herramienta Solver se comprueba que los valores $(\partial FS/\partial \lambda) \approx 0$ y $(\partial FS/\partial \alpha) \approx 0$, demostrándose a la vez que el resultado obtenido al minimizar el FS es el mismo. Esta simple verificación de resultados, permite tener la seguridad que para el caso en el cual no se incorporan las referidas restricciones el valor del mínimo factor de seguridad corresponde a un **mínimo global**.

En la tabla 6 se muestran los resultados al incluir las derivadas en la hoja de cálculo de Excel del ejemplo anterior.

Efecto sísmico, la sobrecarga y la inclinación de la corona del talud, ejemplo de aplicación

Con el objeto de tener una visión más general, se ha incluido un ejemplo incorporando el efecto sísmico, la sobrecarga y la inclinación de la corona del talud. Seguidamente, se ha minimizando el factor de

seguridad aplicando el comando Solver incluyendo las derivadas $(\partial FS/\partial \lambda)$ y $(\partial FS/\partial \alpha)$.

Los datos son: altura del talud, $H=52,00$ m. sobrecarga, $q=300,00$ kN/m². Inclinación de la cresta del talud, $\beta_t = 12^\circ$, coeficiente sísmico, $k_h=0,30$ y $k_v=0,15$. Inclinación del talud, $\beta = 76^\circ$ con una pendiente aproximada de 1/4: 1 (v). Ángulo de fricción interna $\phi=38^\circ$. Cohesión, $C= 500,00$ kN/m² (0,50 MPa) y peso unitario, $\gamma = 25,00$ kN/m³

Luego, al emplear el comando Solver se obtienen los siguientes resultados: mínimo factor de seguridad:

$$FS= 1,27; \alpha= \alpha_{\text{critico}} \approx 44^\circ .$$

$$\lambda = \left(\frac{Z}{H} \right) = 0,43$$

$$Z=22,51 \text{ m, } d=22,54 \text{ m.}$$

Adicionalmente, a través de la hoja de cálculo (tabla 7) se observa que los valores de $(\partial FS/\partial \lambda) \approx 0$ y $(\partial FS/\partial \alpha) \approx 0$. Dicho resultado indica que el factor de seguridad es un mínimo global. Todo esto utilizando como algoritmo el Gradiente Generalizado Reducido (GRG) junto con las respectivas restricciones a través del complemento Solver.

Tabla 7. Hoja de cálculo, considerando carga sísmica y sobrecarga

γ (kN/m ³)	γ_w (kN/m ³)	YB (m)	β	X _B (m)	β_t	dI	dS
25	9.81	52	76°	12.96	0°	2.6	26
q (kN/m ²)	k_h	k_v	ϵ	BC (m)	X _C (m)	Y _C (m)	d (m)
300	0.3	0.15	0.25°	23.04	35.50	56.79	22.54
X _D (m)	Y _D (m)	α	ψ	Z	Wt (kN/m)	k	R
35.50	34.27	43.99°	89.95	22.51	30625.44	1.18	0
Rt (kN/m)	AD (m)	M	K _w	Z _w	U _{max} (kN/m ²)	U (kN/m)	V (kN/m)
36397.93	49.34	35.49	0	0	0	0	0
C (kN/m ²)	ϕ	FS	λ	b1	b2	b3	
500	38°	1.27	0.432	49.24	65.39	1.32	
$\partial FS/\partial \alpha$	$\partial FS/\partial \lambda$						
-1.71e-12	-1.06e-07						

CONCLUSIONES

A través de la presente investigación se ha determinado el mínimo factor de seguridad en función de la profundidad de la grieta de tracción y de la inclinación del plano de rotura en la condición más crítica, considerando a la vez: la sobrecarga, el efecto sísmico y las presiones intersticiales. En este último caso, partiendo del hecho de que se conoce la ubicación de la referida grieta.

El procedimiento analítico desarrollado se compara con el complemento de optimización Solver de la hoja de cálculo de Excel, cuyo algoritmo ha sido diseñado para resolver problemas no lineales. Al equiparar ambos resultados se obtienen los mismos valores.

Un aspecto importante de la presente investigación ha sido el desarrollo matemático de $(\partial FS/\partial \lambda) = 0$ y $(\partial FS/\partial \alpha) = 0$. Ambas derivadas se han incluido como restricciones, lo que ha permitido comprobar que el mínimo factor de seguridad aplicando el método GRG es un óptimo global.

En definitiva: con la ayuda de las herramientas que nos concede la geometría analítica y el cálculo diferencial se ha corroborado que el mínimo factor de seguridad obtenido a través de Solver es un óptimo global. Cabe destacar, que es posible encontrar en otros modelos matemáticos de optimización que la solución corresponda a un óptimo local, y, por tanto, no es precisamente global. Es decir, el algoritmo

puede terminar en un óptimo local, sin que corresponda a un óptimo global del problema.

Igualmente, a través de la metodología desarrollada en la presente investigación se puede conocer con mayor exactitud la posición de la cuña potencial de falla.

Por otra parte, en el caso de estructuras próximas al pie del talud, se tiene la ventaja de delimitar una zona de seguridad de una manera más real o efectiva. Esto como resultado de minimizar el factor de seguridad de los dos bloques potenciales de rotura, siendo la cuña superior definida por la grieta a tracción.

REFERENCIAS

- BARTON, N, CHOUBEY V. (1976). The shear strength of rock joints in theory and practice. *Rock Mechanics*, Springer –Verlag. 10:1-54.
- BIENIAWSKI T. (1989). *Engineering rock mechanics classifications*. John Wiley and Sons. 251.
- BIENIAWSKI T. (1974). Estimating the strength of rock materials. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*. 74 (8): 312-320.
- HOEK, E; Y BRAY JW. (1981). *Rock Slope Engineering*. Institution of Mining and Metallurgy, Revised Third Edition, London. 358.
- HOEK E, BROWN T. (1980). Empirical strength criterion for rock masses. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*. 106 (GT9): 1013-1035.
- HOEK E, BROWN T. (1988). Practical estimates of rock mass strength. *Int. J. Rock. Mech. Min Sci*. 1997; 34 (8): 1165-1186.
- HOEK E, BROWN T. (1989). The Hoek-Brown failure criterion - a 1988 updated in *Rock engineering for undergrounds excavations*. Proceedings of the 15th Canadian Rock Mechanics Symposium (ed.J.C. Curran), Toronto. Dpt. Civil. Engineering, University of Toronto. 31-38.
- HOEK, E., & BROWN, E. T. (1997). Practical estimates of rock mass strength. *International journal of rock mechanics and mining sciences*, 34(8), 1165-1186.
- HOEK E, CARRANZA-TORRES C, CORKUM B. (2002). Hoek–Brown failure criterion -2002 edition. Proceedings of the 5th North American Rock Mechanics Symposium and 17thTunnelling Association of Canada Conference: NARMS-TAC, July 7-10. University of Toronto. 267-271.
- MOGI K. (2007). *Experimental rock mechanics*. Taylor and Francis. 361.
- MOGI K. (1971). Fracture and flow of rocks under triaxial compression. *Journal of Geophysical Research*. 76(5): 1255-1269.
- MURRELL SA. (1965). The effect of triaxial stress system on the strength of rocks at atmospheric temperatures. *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society*. 10: 231-281.
- PARISEAU W. (2007). *Design Analysis in Rock Mechanics*. Taylor and Francis. 560.
- PRIEST S. (2005). Determination of Shear Strength and Three-dimensional Yield Strength for the Hoek–Brown Criterion. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 38(4):299-327.
- PUELL F, DE LA FUENTE P, ARENILLAS M. (2004). La linealización del criterio de Hoek y Brown en el análisis de la estabilidad de taludes en roca. *Revista de Obras Públicas*, Julio – Agosto. 3.446: 37-44.
- RAMAMURTHY T. (1986). Stability of rock mass. *Indian Geotechnical Journal*. 16: (1)74.
- SHUKLA SK, KHANDELWAL S, VERMA VN, SIVAKUGAN N. (2009). Effect of Surcharge on the Stability of Anchored Rock Slope with Water Filled Tension Crack under Seismic Loading Condition. *Geotech Geol Eng*. 27:529–538.
- UCAR R. (2011). Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos. Proceedings of PanAm CGS Geotechnical Conference, Toronto, Canadá. 3: 2694-2700.
- UCAR R. (2003). Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos. *Ingeniería del Terreno, E.T.S.I Minas*. Universidad Politécnica de Madrid. Editor Carlos López. Madrid. 3: 99-117.
- UKRITCHON B, KEAWSAWASVONG S. (2018). Discussion on “Seismic displacement along a log-spiral failure surface with crack using rock Hoek–Brown failure criterion” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 110: 141–144.
- YU MH. (2002). Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20 Century. *Applied Mechanics Reviews*. 55 (3): 169-218.
- YU MH. (2003). *Unified strength theory and its applications*. Springer. 412.

ZHAO LH, CHENG X, ZHANG Y, LI L, LI DL.
(2016). Stability analysis of seismic slopes with
cracks. *Computers and Geotechnics*. 77: 77–90.