

MODELADO DEL FLUJO EN UNA TUBERÍA PARA DETECCIÓN DE OBSTRUCCIONES UTILIZANDO EL MÉTODO DE COLOCACIÓN Y EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

MARCOS GUILLÉN, JEAN-F. DULHOSTE, RAFAEL SANTOS

Grupo de Termofluidodinámica. Dpto. de Ciencias Térmicas. Escuela de Ingeniería Mecánica.
Universidad de Los Andes.

e-mails: marcosg@ula.ve, djean@ula.ve, rsantosl@ula.ve

Recibido: julio 2016

Aprobado para publicación: diciembre 2016

RESUMEN

Este trabajo presenta el desarrollo de un modelo de flujo incompresible no estacionario en una tubería para la detección de obstrucciones. Primero, se muestra el modelado aproximando de las ecuaciones de golpe de ariete mediante el método de colocación, utilizando como condiciones de frontera el caudal de entrada y la presión de salida de la tubería. En este primer modelado la tubería se divide en dos partes: la primera aguas arriba de la obstrucción y una segunda aguas abajo de la misma. Cada una de las partes tiene dos secciones en donde se utilizan tres puntos de colocación, tanto para la presión (H_i) como para el caudal (Q_i). Estas dos partes están unidas por una ecuación que modela la obstrucción parcial que está presente en la tubería. Seguidamente, se presenta un segundo modelado, que contempla el método de diferencias finitas, utilizando la lógica usada en el primer modelado. En cada una de las dos secciones que están antes y después de la obstrucción, el cálculo se hace a través del método de diferencias finitas. El objetivo de este trabajo no es mostrar en detalle el comportamiento fluidodinámico desde el punto de vista clásico de los volúmenes finitos o diferencias finitas, el objetivo es identificar hasta qué punto, una representación mínima (en cuanto a número de nodos) es capaz de mostrar los fenómenos transitorios del flujo en puntos específicos de la tubería cuando se presenta una obstrucción.

Palabras clave: ecuaciones de golpe de ariete, método de colocación, método de diferencias finitas, obstrucciones

FLOW MODELING IN A PIPELINE FOR OBSTRUCTION DETECTION USING THE COLLOCATION METHOD AND THE FINITE DIFFERENCE METHOD

ABSTRACT

This paper presents the development of a pipeline model for non-stationary incompressible flow to detect blockages. First, the modeling of the water hammer equations by the Collocation Method, using the inlet flow and outlet pressure of the pipe as boundary conditions is presented. In this first modeling, the pipe is divided into two parts, the first part, upstream of the blockage and the second one downstream thereof. Each part has two sections, where three collocation points are used for both, pressure (H_i) and flow (Q_i). The two parts are joined by an equation that models the partial blockage that is present in the pipe. Then, a second modeling, which includes the Finite Difference Method, but using the same logic of the first model is presented. In each of the two sections that is before and after of the blockage the calculation is made by the finite differences method. The aim of this work is not to show in detail the fluid dynamics behaviors from the classical finite volumes or finite differences point of view, the aim is to see to what extent, a minimal representation (minimal number of nodes) is able to show the transient phenomena of the flow at specific points in the pipeline when an obstruction occurs.

Keywords: water hammer equations, the collocation method, finite difference method, blockage

INTRODUCCIÓN

Actualmente las redes de tuberías son parte esencial de los sistemas de transporte de fluidos en la sociedad moderna. El transporte de fluidos a través de tuberías, es una forma económica y eficiente de transportar el mismo. Igualmente, en las tuberías se pueden presentar fallas tales como obstrucciones (o fugas) que pueden generar pérdidas de dinero y tiempo si éstas no se detectan y localizan a tiempo (Souza et al., 2000). Existen en la literatura diversos trabajos de investigación que han abordado modelos de flujo para la detección y localización de fugas (Castro y Valdez, 2009), (Torres et al., 2008) y (Besançon et al., 2007). Sin embargo, el modelado de flujo en una tubería para detección de obstrucciones ha sido menos abordado, ejemplos de estos son (Xiao et al., 2005), (Lee et al., 2008), (Ma et al., 2007) y (Guillén et al., 2014). En el presente trabajo, se presentan dos formas de abordar el modelado de flujo en una tubería: por medio del uso del método de colocación y el método de diferencias finitas.

ECUACIONES BÁSICAS DEL MODELO DE TUBERÍA: ECUACIONES DE GOLPE DE ARIETE

El modelo de flujo será desarrollado utilizando las ecuaciones del golpe de ariete, las cuales representan los fenómenos que suceden en una tubería cuando ocurren cambios en la misma y son las utilizadas para desarrollar los modelos de tubería (Souza et al., 2000, Chaudry, 2014). Si se realiza un balance de masa y energía en la tubería, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -Ag \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{f}{2DA} Q|Q| \quad (2)$$

Donde: z y t son coordenadas de espacio y tiempo, H carga de presión, Q flujo en la tubería, c velocidad del sonido, D diámetro tubería, A área, g aceleración de gravedad, f coeficiente de fricción (Chaudry, 2014).

Discretización espacial para Q y H

Las ecuaciones (1) y (2) se conocen como la forma simplificada de las ecuaciones para flujo transitorio en conductos cerrados, y representan un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales e hiperbólicas (Chaudry, 2014). Existen varios métodos para obtener una solución a este tipo de sistemas. Sin embargo, los más utilizados son el método de la característica y el de diferencias finitas

ya que son más sencillos y adecuados para el modelado unidimensional (Chaudry, 2014). Igualmente, existe otro método, el cual ha sido utilizado poco para sistemas hidráulicos, y que también presenta la ventaja de ser simple y adecuado para las simulaciones unidimensionales. Este es el método de colocación (Villadsen y Stewart, 1967), (Fletcher, 2006). En el presente trabajo las ecuaciones (1) y (2) serán discretizadas por medio de estos dos métodos, el de colocación y el de diferencias finitas.

Discretización por el método de colocación

El método de colocación es un procedimiento de resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno. El método consiste en la aplicación de residuos ponderados a puntos particulares del dominio, donde se aproxima el valor de la ecuación diferencial a valores obtenidos por una función en forma de polinomio (Fletcher, 2006).

Solución de las ecuaciones del golpe de ariete por el método de colocación

El método de colocación aplicado a las ecuaciones de golpe de ariete consiste en realizar una aproximación de la sección a modelar mediante una función de polinomios $N_j(z)$, evaluados en los puntos de colocación (z). Para ello se debe escoger un número n de puntos de colocación y por cada punto se hace la siguiente aproximación:

$$H_a(z_i, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t) N_j(z_i) \quad (3)$$

$$Q_a(z_i, t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t) N_j(z_i) \quad (4)$$

Donde $\bar{Q} = \{Q_j(t)\}$ y $\bar{H} = \{H_j(t)\}$ son los coeficientes a calcular. Las $N_j(z)$ denotan las funciones de forma elegidas, las cuales son evaluadas en z_i . H_a y Q_a son los valores aproximados de las variables, los cuales simplificando la notación podemos escribir de la siguiente manera:

$$H_a(z_i, t) = H_a, Q_a(z_i, t) = Q_a, H_j(t) = H_j, Q_j(t) = Q_j$$

Escribiendo las ecuaciones (1) y (2) en función de los valores aproximados de las variables, para cada uno de los puntos de colocación seleccionados, se generará un residuo, ya que al ser valores aproximados la igualdad a cero no se cumple exactamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{a_i}}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q_{a_i}}{\partial z} &= R_1(z_j, \bar{H}, \bar{Q}) \\ \frac{\partial Q_{a_i}}{\partial t} + Ag \frac{\partial H_{a_i}}{\partial z} + \frac{f}{2DA} Q_{a_i}^2 &= R_2(z_j, \bar{H}, \bar{Q}) \end{aligned} \quad (5)$$

para $i=1, \dots, n$

Donde $R_1(z_j, \bar{H}, \bar{Q})$ y $R_2(z_j, \bar{H}, \bar{Q})$ representan el valor de los residuos.

Para que las ecuaciones aproximadas representen correctamente las ecuaciones exactas, los residuos deben ser lo más cercano posible a cero. Del sistema de ecuaciones (5) se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas \bar{H} y \bar{Q} , para cada punto de colocación:

$$\begin{aligned} R_1(x_i, \bar{H}, \bar{Q}) &= 0 \\ R_2(x_i, \bar{H}, \bar{Q}) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo la ecuación (6) en la (5) se obtiene una forma aproximada de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{a_i}}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q_{a_i}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial Q_{a_i}}{\partial t} + Ag \frac{\partial H_{a_i}}{\partial z} + \frac{f}{2DA} Q_{a_i}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Los términos $N_j(z_i)$ dependen solo de z_i y los coeficientes H_j y Q_j dependen solamente de t . Es posible entonces simplificar la ecuación mediante la derivación de los términos correspondientes, siendo los términos $N_j(z_i)$ constantes una vez introducidos los puntos de colocación para una función de forma dada, por lo tanto, es posible escribir una matriz N_{ji} de valores constantes y de igual manera para las derivadas con respecto a z en la matriz N'_{ji} , tal como:

$$[N_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} N_1(x_1) & N_1(x_2) & \dots & N_1(x_n) \\ N_2(x_1) & N_2(x_2) & \dots & N_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(x_1) & N_n(x_2) & \dots & N_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Las derivadas con respecto de z de la función de forma, evaluadas en z_p , son los elementos de la siguiente matriz:

$$\begin{aligned} [N'_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n} &= \left[\frac{\partial N_{ji}}{\partial z}(z_i) \right] = \dots \\ &= \begin{bmatrix} N'_1(z_1) & N'_1(z_2) & \dots & N'_1(z_n) \\ N'_2(z_1) & N'_2(z_2) & \dots & N'_2(z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N'_n(z_1) & N'_n(z_2) & \dots & N'_n(z_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Por otro lado, las derivadas espaciales y temporales de las sumatorias (3) y (4) son expresadas por:

$$\frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial z} = H_j(t) N'_{ji} \quad (10)$$

$$\frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial z} = Q_j(t) N'_{ji} \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial t} = \dot{H}_j(t) N_{ji} \quad (12)$$

$$\frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial t} = \dot{Q}_j(t) N_{ji} \quad (13)$$

Luego, con la sustitución de las ecuaciones (10), (11), (12) y (13) en las ecuaciones con derivadas parciales, el nuevo sistema se convierte en:

$$\sum_{j=1}^n \dot{H}_j(t) N_{ji}(z_i) = -\frac{c^2}{gA} \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji}(z_i) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dot{Q}_j N_{ji}(z_i) &= -Ag \sum_{j=1}^n H_j N'_{ji}(z_i) \\ &\quad - \frac{f}{2DA} \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji}(z_i) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Se ha transformado un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales, con dos incógnitas, en un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias con $2n$ incógnitas, siendo n el número de puntos de colocación.

Para la implementación del método de colocación es necesario seleccionar las funciones de forma que en este caso son las funciones de interpolación de Lagrange (Dulhoste et al., 2004). El interés de utilizar estas funciones, es la obtención de los coeficientes $H_j(t)$ y $Q_j(t)$ correspondientes a los valores físicos de presiones y caudales en los puntos de colocación. Este tipo de funciones presenta la ventaja de producir valores de "1" para la variable con el índice correspondiente al punto de colocación y "0" para los otros valores, es decir:

$$N_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (16)$$

Por tanto, la matriz $[N_{ji}] = I$ cuando $j = i$. Así, las ecuaciones (14) y (15) se simplifican en:

$$\dot{H}_i = -\frac{c^2}{gA} \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji}(z_i) \quad (17)$$

$$\dot{Q}_i = -Ag \sum_{j=1}^n H_j N'_{ji}(z_i) - \frac{f}{2DA} \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right)^2 \quad (18)$$

La Figura 1 muestra un esquema de esta discretización. Allí se observa que para cada punto de colocación corresponden un valor de presión y un valor de caudal. Por otro lado, el número de ecuaciones para las presiones $H_j(t)$ y los caudales $Q_j(t)$ dependen de las condiciones de frontera empleadas.

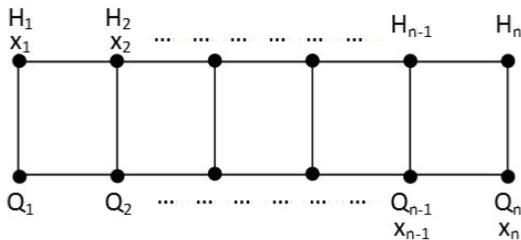


Figura 1. Esquema de discretización por el Método de Colocación

En este trabajo, se utiliza igual número de puntos de colocación para las presiones y los caudales. También, la posición en la que se van a colocar estos puntos de colocación va a ser la misma para ambas variables (H y Q).

Discretización por el método de diferencias finitas

Existen varias formas de diferencias finitas, en este trabajo se realiza una discretización espacial explícita (Souza et al., 2000), donde se aproxima la longitud de la tubería (la cual es continua) utilizando secciones espaciales discretas. Para realizar la discretización se divide la tubería en N secciones, tal como se muestra en la Figura 2.

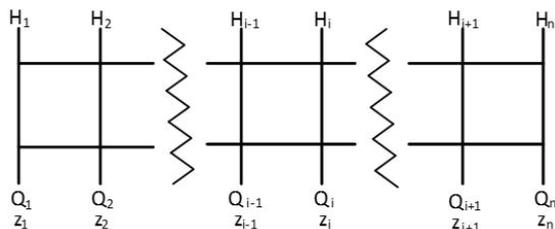


Figura 2. Esquema de discretización por el Método de Diferencias Finitas

Las derivadas parciales con respecto a z se aproximan mediante diferencias finitas de primer orden según las condiciones de frontera que se tomen en consideración. En el sistema de ecuaciones (19) se muestran las aproximaciones realizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z,t)}{\partial z} &\approx \frac{\Delta H_i(t)}{\Delta z_i} = \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta z_i} \\ \frac{\partial Q(z,t)}{\partial z} &\approx \frac{\Delta Q_i(t)}{\Delta z_i} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta z_i} \end{aligned} \quad (19)$$

Es importante remarcar que el modelo discreto (1) y (2) depende de las condiciones de frontera que se elijan para la discretización. En este trabajo se escogen como condiciones de frontera al caudal de entrada Q_i y la presión de salida H_n (Guillén et al., 2012), (Guillén et al., 2016).

MODELOS DE FLUJO DISEÑADOS

En las secciones anteriores se mostraron dos métodos por medio de los cuales se pueden discretizar las ecuaciones de golpe de ariete. A continuación se muestra en detalle cada uno de los modelos obtenidos con estos métodos de discretización.

Modelo de flujo discretizado por el método de colocación

Una diferencia que presenta el método de colocación con el de diferencias finitas es que el de colocación no permite que se incluyan discontinuidades, que es lo que ocurre cuando se presenta una obstrucción en una tubería (Guillén et al., 2014), (Guillén et al., 2016). Para solventar esto, la tubería se divide en dos partes, una primera parte antes de la obstrucción y una segunda parte después de la misma. Cada una de estas partes consta de dos secciones de tubería, en donde se utilizan tres puntos de colocación para las presiones (H_i) y tres puntos de colocación para los caudales (Q_i). Estas dos partes están unidas por una ecuación que toma en cuenta la obstrucción que se está presentando en la tubería. En la Figura 3 se muestra un esquema de lo planteado.

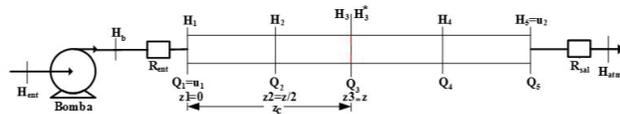


Figura 3. Esquema de la Tubería por el Método de Colocación

Para modelar la tubería se utiliza como base las ecuaciones (1) y (2). Luego se realiza una aproximación de la sección a modelar mediante una función de polinomios $N_j(z_i)$, evaluados en los puntos de colocación (z_i). Las ecuaciones (1) y (2), después de aplicado el método de colación, quedan escritas como:

$$\dot{H}_i = -\frac{c^2}{gA} \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji}(z_i) \quad (20)$$

$$\dot{Q}_i = -Ag \sum_{j=1}^n H_j N'_{ji}(z_i) - \frac{f}{2DA} \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right)^2 \quad (21)$$

Para cada una de las dos partes de la tubería, el caudal a la entrada y la presión a la salida serán tomados como condiciones de frontera (entradas u) y se ensamblarán las dos secciones de manera que, el caudal calculado en el primer tramo sirva de entrada para el segundo y la presión calculada en el segundo tramo sea entrada del primero, agregando una ecuación que represente la obstrucción (Guillén et al., 2014), más específicamente una ecuación que relaciona a H_3 con H_3^* (H_3^* es la presión H_3 pero afectada por el efecto de la obstrucción).

Desarrollando las ecuaciones (20) y (21) para las dos primeras secciones antes de la obstrucción, las funciones de forma se pueden expresar de forma general como sigue:

$$N_j(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{z-z_i}{z_j-z_i} \quad (22)$$

Se definen los puntos de colocación como (ver Figura 3):

$$z_1=0; \quad z_2=z/2 \quad y \quad z_3=z$$

donde $z=z_c$ es la posición donde está ubicada la obstrucción. A partir de estos valores se obtienen las matrices de los coeficientes que representan las funciones de forma N_{ji} :

$$N_{ji} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Desarrollando la ecuación (22) y evaluando en los puntos de colocación quedaría:

$$N_{11} = N_1 \Big|_{z=z_1=0} = \frac{0-\frac{z}{2}}{0-\frac{z}{2}} \frac{0-z}{0-z} = 1 \rightarrow N_{11} = 1$$

$$N_{12} = N_1 \Big|_{z=z_2=\frac{z}{2}} = \frac{\frac{z}{2}-\frac{z}{2}}{0-\frac{z}{2}} \frac{\frac{z}{2}-z}{0-z} = 0 \rightarrow N_{12} = 0$$

$$N_{13} = N_1 \Big|_{z=z_3=z} = \frac{z-\frac{z}{2}}{0-\frac{z}{2}} \frac{z-z}{0-z} = 0 \rightarrow N_{13} = 0$$

Así se desarrolla el resto de los elementos resultando en:

$$N_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualmente, derivando la matriz (23) para obtener $N'_{ji} = \frac{\partial N_{ji}}{\partial z} \Big|_{z=z_i}$ y desarrollando el resto de los elementos quedaría:

$$N'_{ji} = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De igual manera a como se hizo con las dos primeras secciones de tubería, se deben desarrollar las funciones de forma para las dos secciones que están después de la obstrucción. Entonces de las ecuaciones (20) y (21) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= -\frac{c^2}{gAz} (-3u_1 + 4Q_2 - Q_3) \\ \dot{Q}_2 &= -\frac{Ag}{z} (-H_1 + H_3) - \frac{f}{2DA} Q_2^2 \\ \dot{H}_2 &= -\frac{c^2}{gAz} (-u_1 + Q_3) \\ \dot{Q}_3 &= -\frac{Ag}{z} (H_1 - 4H_2 + 3H_3) - \frac{f}{2DA} Q_3^2 \\ \dot{H}_3 &= -\frac{c^2}{gA(L-z)} (-3Q_3^* + 4Q_4 - Q_5) \\ \dot{Q}_4 &= -\frac{Ag}{L-z} (H_3^* + u_2) - \frac{f}{2DA} Q_4^2 \\ \dot{H}_4 &= -\frac{c^2}{gA(L-z)} (-Q_3^i + Q_5) \\ \dot{Q}_5 &= -\frac{Ag}{L-z} (H_3^i - 4H_4 + 3u_2) - \frac{f}{2DA} Q_5^2 \end{aligned} \quad (24)$$

La presión H_3^* , es la presión o la ecuación que une las dos partes de la tubería. Esta ecuación contempla la obstrucción que se está presentando, la cual se modela como una obstrucción puntual y cuyo modelo es el siguiente (Guillén et al., 2014):

$$H_3^* = H_3 - \frac{Q_3^2}{2gA_0^2} \left(1 - \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \right) \quad (25)$$

Donde: A es el área de sección transversal de la tubería y A_0 es el área de la obstrucción.

Igualmente, $u_1 = Q_1$ está en función de los parámetros de la bomba y de la restricción hidráulica de la entrada R_{ent} (Guillén et al., 2016) (ver Figura 3):

$$u_1 = Q_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4(R_{ent} + C_0)(-C_2 + H_1 - H_{ent})}}{2(R_{ent} + C_0)} \quad (26)$$

De la misma forma $u_2 = H_5$ está en función de la restricción de salida R_{sal} :

$$u_2 = R_{sal} Q_5^2 + H_{atm} \quad (27)$$

Modelo de flujo discretizado por el método de diferencias finitas en dos partes

En esta sección se presenta el modelado que utiliza el método de diferencias finitas pero, utilizando la lógica que se utilizó con el método de colocación, la cual consistió en, dividir la tubería en dos partes. Este modelo también contempla dos secciones antes y dos secciones después de la obstrucción (tal como en la Figura 3). Cada una de estas dos secciones de tubería están unidas por una ecuación que toma en cuenta la obstrucción parcial que se está presentando, pero el cálculo de las presiones (H_i) y los caudales (Q_i) se hace a través del método de diferencias finitas. A continuación el desarrollo de las ecuaciones de golpe de ariete:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_2 - u_1}{z_2 - z_1} \\ \dot{Q}_2 &= -Ag \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1} - \frac{f_2}{2DA} Q_2^2 \\ \dot{H}_2 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_3 - Q_2}{z_3 - z_2} \\ \dot{Q}_3 &= -Ag \frac{H_3 - H_2}{z_3 - z_2} - \frac{f_3}{2DA} Q_3^2 \\ \dot{H}_3 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_4 - Q_3}{z_4 - z_3} \\ \dot{Q}_4 &= -Ag \frac{H_4 - H_3^*}{z_4 - z_3} - \frac{f_3}{2DA} Q_4^2 \\ \dot{H}_4 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_4 - Q_3}{z_4 - z_3} \\ \dot{Q}_5 &= -Ag \frac{u_2 - H_3^*}{z_4 - z_3} - \frac{f_3}{2DA} Q_5^2 \end{aligned} \quad (28)$$

La presión H_3^* está representada por la ecuación (25), u_1 por la ecuación (26) y u_2 por la (27).

SIMULACIONES Y RESULTADOS

En primer lugar se presenta el modelo obtenido por el método de colocación, el cual está representado por el sistema de ecuaciones (24). Este modelo de tubería se implementó en MatLab, utilizando los siguientes parámetros de simulación: Type: Variable-step y solver: ode113. Los resultados se muestran en la Figura 4. La simulación consistió en colocar una obstrucción con un valor de $A_0 = 0.5A$ de manera tal que se presente en el instante $t = 50s$, lo que significa que al principio (instante $t = 0s$) no hay obstrucción en la tubería. Igualmente, se tomó en cuenta el ruido que se presenta en un sistema de tubería real, por tanto se agregó ruido blanco a las dos variables de entrada del modelo de tubería, es decir a las entradas u_1 y u_2 (ver Figura 3).

Una obstrucción se caracteriza por la disminución del flujo a lo largo de toda la tubería, el incremento de la presión de entrada y la disminución de la presión de salida aguas abajo de la obstrucción. En la Figura 4, se ve cómo el modelo (24) tiene un comportamiento como el descrito anteriormente, donde se observa que Q_{sal} así como Q_{ent} disminuyen debido a la obstrucción, mientras que H_{sal} disminuye y H_{ent} aumenta aguas arriba de la obstrucción. La misma simulación se realizó en el modelo de tubería (28) (método de diferencias finitas), y se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 5. Allí destaca que el modelo por diferencias finitas también se adecua al comportamiento de una tubería cuando se presenta una obstrucción, vale decir, que se produce una disminución de Q_{sal} , Q_{ent} y H_{sal} y aumento de H_{ent} .

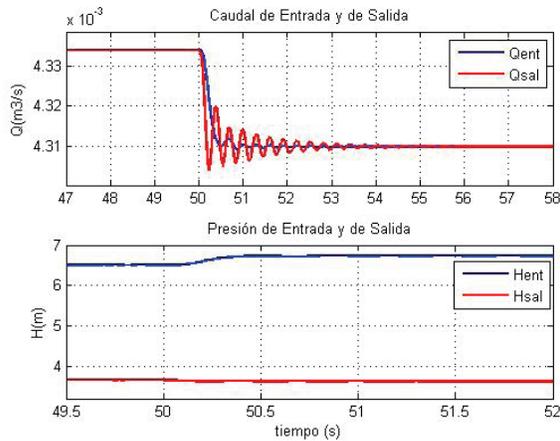


Figura 4. Método de colocación $A_0 = 0.5A$

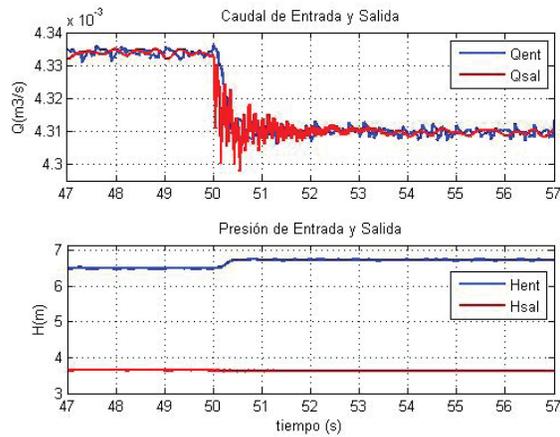


Figura 5. Método de diferencias finitas $A_0 = 0.5A$

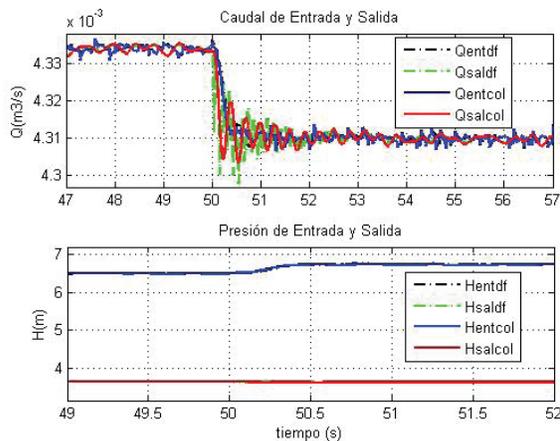


Figura 6. Comparación de los dos modelos

Finalmente, se realizó una comparación entre los dos modelos, la cual se muestra en la Figura 6. En ésta se observa que, tanto los caudales, como las presiones de ambos modelos, tienen un comportamiento muy similar, en especial las presiones, que se solapan entre ellas. Sin

embargo, los caudales de salida presentan cierta diferencia (Q_{saldf} presenta un comportamiento más oscilatorio que Q_{salcol}).

El comportamiento de los dos modelos muestra resultados satisfactorios, ya que la dinámica de ambos concuerda con lo que ocurre en una tubería cuando se presenta una obstrucción. Sin embargo, esta comparación no es una validación completa, debido a que ninguno de los dos modelos, ha sido comparado con datos reales de algún banco de pruebas, porque no se dispone de dichos datos.

CONCLUSIONES

El primer modelo fue obtenido al discretizar las ecuaciones de golpe de ariete por medio del método de colocación. Para aplicar este método, la tubería se dividió en dos partes, una primera antes de la obstrucción y una segunda después de la misma. Luego, esas dos partes se unieron por medio de una ecuación que toma en cuenta la obstrucción que se está presentando en la tubería. Este modelo se implementó en MatLab y se realizó una simulación de una obstrucción. El comportamiento de este modelo fue satisfactorio, ya que se adecua a lo que sucede en una tubería cuando se presenta una obstrucción, es decir, se observó disminución en Q_{ent} , Q_{sal} y H_{sal} . Igualmente, se observó un incremento en H_{ent} . Después, se presentó un segundo modelo, el cual, se obtuvo por medio del método de diferencias finitas. En este caso la tubería se dividió de la misma forma en que se hizo con el método de colocación, solo que el cálculo de las presiones y los caudales se realizó, a través del método de diferencias finitas. En este modelo, también se observaron los fenómenos que ocurren en una tubería cuando se presenta una obstrucción.

Por tanto, se concluye que ambos modelos son adecuados para modelar los fenómenos que suceden en una tubería cuando se presenta una obstrucción. Sin embargo, hace falta realizar una comparación de ambos modelos con datos reales de una tubería donde se presente una obstrucción, para así de esta manera, obtener una validación experimental y, determinar cuál de estos modelos representa mejor los fenómenos que suceden por causa de la obstrucción.

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen al programa de colaboración Franco-Venezolano ECOS-Nord V11M02 / PI-2010000303 Fonacit, Fundayacucho Venezuela 2011 quien financió parcialmente este trabajo.

REFERENCIAS

- BESANÇON G, GEORGES D, BEGOVICH O, VERDE C, ALDANA C. Direct observer design for leak detection and estimation in pipelines, in European Control Conference, Kos, Greece, July 2-5, 2007.
- CASTRO B LUCÍA, HÉCTOR VALDÉS-GONZÁLEZ. Detección de pérdidas en tuberías de agua. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, vol. 17 N° 3, 2009, pp. 375-385.
- CHAUDRY M. H., *Applied Hydraulic Transients*. Third Edition, Springer New York Heidelberg Dordrecht London 2014.
- DULHOSTE J. F., D. GEORGES, AND G. BESANÇON. Nonlinear control of open channel water flow based on collocation control model. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 30, no. 3, pp. 254–266, 2004.
- FLETCHER C. A. J, *Computational Galerkin Methods*. Springer Verlag, 2006.
- GUILLÉN M L ET AL. Un enfoque para la detección y localización de fugas en tuberías utilizando observadores de estado. *Ciencia e Ingeniería*, [S.l.], p. 71-80, abr. 2016. ISSN 2244-8780. Disponible en: <http://erevistas.saber.ula.ve/index.php/cienciaeingenieria/article/view/7442>.
- GUILLÉN M, J-F DULHOSTE, G. BESANÇON AND R. SANTOS. Study of a Flow Model for Detection and Location of Leaks and Obstructions in Pipes. 9th International Conference of Modeling, Optimization and Simulation-MOSIM'12 June 06-08, 2012 Bordeaux-France.
- GUILLÉN M., J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS, I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES ET AL. Modelo dinámico para la detección y localización de obstrucciones parciales en tuberías. Dans: Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas. 2014 (cf. p. 3).
- J MA, M J S LOWE AND F SIMONETTI. Feasibility study of sludge and blockage detection inside pipes using guided torsional waves. *Meas. Sci. Technol.* 18 (2007) 2629–2641.
- LEE P J.; JOHN P. VÍTKOVSKÝ; MARTIN F. LAMBERT; ANGUS R. SIMPSON; AND JAMES A. LIGGETT. Discrete Blockage Detection in Pipelines Using the Frequency Response Diagram: Numerical Study. *Journal of Hydraulic Engineering* © ASCE / MAY 2008.
- SOUZA A.L., S.L.CRUZ AND J.F.R. Pereira. Leak detection in pipelines through spectral analysis of pressure signals. *Braz. J. Chem. Eng.* vol.17 n.4-7 São Paulo Dec. 2000.
- TORRES L, BESANCON AND D. GEORGES. A collocation model for water-hammer dynamics with application to leak detection. Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008.
- VILLADSEN J. V. AND W. E. STEWART. Solution of boundary value problems by orthogonal collocation. *International Journal of Mathematics and computers in simulation*, vol. 1, no. 4, pp. 350–355, 1967.
- XIAO-JIAN WANG; MARTIN F. LAMBERT; AND ANGUS R. SIMPSON, M.ASCE. Detection and Location of a Partial Blockage in a Pipeline Using Damping of Fluid Transients. *Journal of Water Resources Planning and Management* © ASCE / MAY/JUNE 2005.