

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DEL FLUJO TURBULENTO BASADA EN TRAYECTORIAS CARACTERÍSTICAS MEDIANTE EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO. PARTE 2: MALLAS MULTIBLOQUES NO CONFORMES

EUGENIO SANSONE

Universidad Central de Venezuela. Escuela de Ingeniería Mecánica. Departamento de Energética.
e-mail: eugenio.sansone@ucv.ve

Recibido: febrero 2015

Aprobado para publicación: marzo 2016

RESUMEN

Se presentan los resultados obtenidos con la aplicación de un código computacional académico desarrollado en su totalidad por el autor, en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central de Venezuela, que permite resolver de forma discreta las ecuaciones que rigen el flujo turbulento incompresible de un fluido newtoniano mediante el método del elemento finito. El trabajo es la continuación de un primer artículo previamente publicado. En esta oportunidad se detalla el procedimiento computacional que fue desarrollado para el tratamiento de dominios discretizados con mallas multibloques no conformes fijas. Por esta razón, se continuó utilizando como ejemplo demostrativo de la técnica aplicada, el caso del flujo turbulento bidimensional transversal a un cilindro circular donde se comparan los resultados obtenidos para dos mallas diferentes con datos experimentales apropiados y para un número de Reynolds en particular.

Palabras clave: flujo turbulento, fronteras entre bloques, mallas multibloques no conformes, método del elemento finito, multiplicadores de lagrange, polinomios de interpolación de orden variable

NUMERICAL SOLUTION OF THE TURBULENT FLOW EQUATIONS BASED ON CHARACTERISTIC PATHS BY MEANS OF THE FINITE ELEMENT METHOD, PART 2: NON-CONFORM MULTI-BLOCK GRIDS

ABSTRACT

This paper presents the results obtained with the implementation of a computational code written by the author at the Mechanical School of the Engineering Faculty of Universidad Central de Venezuela. The computational code based on the Finite Element Method is applied to solve the partial differential equations that rule the turbulent flow for a single phase newtonian fluid. The work that is a continuation of an article that was previously published, introduces in detail the computational procedure that was followed to deal with non-conform multi-block grids. For this reason, as it was made in the first part, a bi-dimensional turbulent flow around a circular cylinder was used as a validation of the procedure developed. The results obtained for a single Reynolds number in two different mesh configurations were compared with suitable experimental data.

Keywords: turbulent flow, blocks frontiers, non-conform multi-blocks grids, finite element method, lagrange multipliers, variable order interpolation polynomials

INTRODUCCIÓN

En la dinámica de fluidos computacional, la utilización de mallas multibloques ha resultado de gran utilidad sobre todo para el análisis numérico de flujos complejos, como aquellos que se presentan en las turbomáquinas (Hathaway *et al.*, 1997; Zath *et al.*, 2013; Drtina *et al.*, 1999; Cinnella *et al.*, 2004). La complejidad de estos flujos está asociada, por un lado, a la geometría del dominio que, en el caso de las

turbomáquinas, está constituida por partes fijas y móviles; por otro lado, a los fenómenos de separación del flujo próximo a cuerpos sólidos curvados o no, que conducen a la aparición de estelas de vórtices y estructuras de flujo secundario que afectan el comportamiento de la presión y otras variables de interés.

El concepto de mallas multibloques, asociado a los denominados Métodos de Descomposición de Dominios,

resulta sumamente práctico para el tratamiento de geometrías complejas, debido a la subdivisión del dominio principal en subdominios regulares, donde se pueden definir de forma independiente en cada bloque, mallas estructuradas o no estructuradas y se puede hacer de forma conforme o no conforme, la conexión entre bloques.

En el caso conforme, el número de nodos resultantes en la frontera común entre dos bloques es el mismo. Estos comparten las mismas coordenadas espaciales, lo que permite, cuando se utilizan mallas estructuradas por bloque, el afinamiento de forma regular hacia las zonas donde se esperarían gradientes importantes en el campo de flujo, por ejemplo, en la vecindad de un cuerpo sólido presente en el dominio. Otra ventaja significativa que tiene la utilización del concepto de mallas multibloques, es la posibilidad de realizar en paralelo el procedimiento de solución computacional del sistema de ecuaciones que resulta luego de la aplicación de alguna técnica numérica, como el método del elemento finito, el método del volumen finito o el método de las diferencias finitas. Entre las técnicas de solución que se conocen, destacan algunos métodos iterativos, como los procedimientos multiplicativos y aditivos de Schwarz, señalados en Chung (2006) y en (Borello *et al.*, 2000), donde se aplican técnicas de preconditionamiento y subestructuración de la matriz principal; así como algunos métodos iterativos aplicados en el caso de soluciones implícitas en tiempo, para el tratamiento de matrices no simétricas, destacando los procedimientos residuales como la técnica GMRES (Generalized Minimal Residual). Todos estos procedimientos pueden también ser aplicados en el caso de subdominios que se solapan.

Por otro lado, en el caso de los subdominios interconectados de forma no conforme, la dificultad surge de establecer correctamente la continuidad del campo de flujo, lo cual se logra utilizando adecuadas funciones de interpolación, generalmente polinomios de orden diverso. El auge computacional sobre este asunto ha sido importante en los últimos años; hoy la mayoría de los códigos académicos y comerciales utilizados en dinámica de fluidos computacional emplean distintas técnicas de paralelización y esquemas de discretización basados en los Métodos de Descomposición de Dominios.

En este trabajo se desarrolló un procedimiento computacional para el tratamiento de mallas multibloques no conformes, que permitió obtener en dos partes la solución directa del sistema de ecuaciones resultantes luego de la aplicación del método del elemento finito en las ecuaciones diferenciales del flujo turbulento. Dicho procedimiento consistió en la implementación de una técnica eficiente de

subestructuración matricial, en la primera parte y el empleo en la segunda parte, de la técnica de los Multiplicadores de Lagrange. Con esta metodología se logra establecer de forma bastante satisfactoria la continuidad del campo de flujo entre bloques no conformes.

También se utilizó la librería OPENMP para C/C++, que permitió el cálculo en paralelo en una arquitectura de múltiples núcleos de procesamiento y memoria compartida. A través del procesamiento en paralelo se trataron de forma independiente el procedimiento de subestructuración matricial por bloque, en la primera fase de cálculo y la reducción por bandas de la matriz aumentada con las ecuaciones de compatibilidad del campo de flujo, en la fase final de solución. El procedimiento aplicado es tan eficiente y rápido en tiempo de cálculo como los procedimientos iterativos previamente señalados. Forma parte del código computacional desarrollado por el autor, el cual fue explicado en su totalidad en la primera parte de este trabajo (Sansone, 2013).

TRATAMIENTO COMPUTACIONAL DE LAS ECUACIONES GENERALES QUE RIGEN EL FLUJO TURBULENTO

Como se dijo en la primera parte del artículo, el procedimiento computacional que se utilizó para la solución de las ecuaciones generales del flujo de fluidos filtradas espacialmente (símbolo supra barra) y promediadas de forma másica (símbolo supra tilde), se basa en la aplicación de una formulación explícita en tiempo que toma en cuenta las direcciones en la que se propagan las variables del flujo en el dominio por acción de la propia convección del flujo *Characteristic Based Split Method* (Zienkiewicz *et al.*, 2005) y son discretizadas según el método del elemento finito, empleando la formulación *Bubnov-Galerkin*, (Huebner *et al.*, 2001). De forma general estas ecuaciones pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R(x_j) \quad (1)$$

El vector U contiene las incógnitas principales expresadas de forma conservativa. El vector residual $R(x_j)$ está constituido por los siguientes términos:

$$R(x_j) = \frac{\partial C}{\partial x_j} + \frac{\partial D}{\partial x_j} + Q \quad (2)$$

Los vectores C , D y Q contienen, respectivamente, los términos convectivos, los términos difusivos y los términos

fuentes. Todos estos vectores pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u}_i \\ \bar{\rho}\bar{z} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{u}_j \\ \bar{\rho}\bar{u}_j\bar{u}_i \\ \bar{\rho}\bar{u}_j\bar{z} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{ij} + \bar{T}_{ij} \\ \kappa\bar{\theta}_j + \bar{u}_i\bar{\sigma}_{ij} + \bar{Q}_j \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{p}_i + \bar{\rho}g_i \\ \bar{\rho}\bar{u}_i g_i + \dot{q} \end{pmatrix}$$

Como ecuación de cierre para el tensor de esfuerzo residual de subrejilla del flujo turbulento T_{ij} , se emplea el modelo de Smagorinsky (1963). En el caso del vector residual de flujo de calor turbulento Q_j , el modelo de turbulencia aplicado está vinculado al modelo de Smagorinsky a través del número de Prandtl turbulento.

Luego de la aplicación del método de las trayectorias características de flujo, donde se establece un cambio de coordenadas tal que: $x_j^{t+1} = x_j^t - (\Delta t)u_j$, la ecuación (1) puede ser escrita mediante el procedimiento numérico de las marchas temporales de la siguiente forma:

$$\Delta U = (\Delta t)R(x_j) - \frac{\Delta t^2}{2} a_j \frac{\partial R^t(x_j)}{\partial x_j} \quad (4)$$

donde $\Delta U = U^{t+1} - U^t$ es el vector de incremento en el tiempo de las incógnitas principales y a_j^t es la matriz jacobiana de convección. Para un tratamiento computacional adecuado de las variables del flujo, el paso de tiempo Δt es fraccionado, de forma tal que las incógnitas principales se resuelven secuencialmente, empezando por las ecuaciones de cantidad de movimiento donde se hace una estimación previa del campo de la presión, siguiendo con la ecuación de la continuidad, a través de la cual se corrige el campo de la presión, luego se corrigen las ecuaciones de cantidad de movimiento y finalmente, si es necesario, se calcula el campo de la temperatura a través de la ecuación de la energía y otras variables asociadas al flujo, con ecuaciones similares a la que se presenta en (4). El desarrollo de estas ecuaciones de forma extendida fue presentado en la primera parte de este trabajo (Sansone, 2013).

Cuando se aplica el método del elemento finito al sistema de ecuaciones (4), se obtiene en general un sistema matricial de la forma:

$$[M]\{x\} = \{y\} \quad (5)$$

Para obtener soluciones adecuadas en el caso del flujo transitorio, la matriz global se debe resolver de forma consistente. Si se aplica un procedimiento de aglutinamiento matricial, se debe utilizar una técnica iterativa conveniente en cada paso de tiempo, (Zienkiewicz *et al.*, 2005).

CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno aplicadas para resolver el sistema de ecuaciones globales pueden ser de tipo Dirichlet, Neumann y mixtas (combinación de las dos primeras). En el caso de la metodología desarrollada, se requiere agregar en cada subdominio computacional o bloque, una condición de contorno adicional para las fronteras internas entre bloques, relacionada a la continuidad de las variables del flujo. Esta condición se establece a través de una matriz $[B]$, formada con un conjunto de ecuaciones de restricción, tal que:

$$[B]\{x\}_f = \{0\} \quad (6)$$

La matriz $[B]$ afecta solo a las incógnitas que están asignadas en los nodos pertenecientes a la frontera común entre bloques $\{x\}_f$ que no forman parte de los nodos asignados a la frontera del dominio computacional, Ω . El vector $\{x\}_f$ es un subconjunto del vector de incógnitas del bloque, tal que $\{x\}_b = \{x\}_i + \{x\}_f$ donde $\{x\}_i$ es el vector que contiene todos los nodos internos del bloque.

Las ecuaciones (5) y (6) pueden ser escritas para un subdominio cualquiera, en forma de ecuaciones de trabajo o energía virtual, multiplicando respectivamente estas, por los vectores $\delta\{x\}_f^T$ y $\{\lambda\}_f^T$, como sigue:

$$([M]\{x\}_b - \{y\})\delta\{x\}_f^T = \{0\} \quad (7)$$

$$\{\lambda\}_f^T [B]\{x\}_b = \{0\} \quad (8)$$

la ecuación (7) también puede ser escrita en forma de una función variacional de energía virtual:

$$\delta\phi = \delta\left(\frac{1}{2}\{x\}_f^T [M]\{x\}_b - \{y\}\{x\}_f^T\right) = \{0\} \quad (9)$$

por lo que el funcional de energía virtual en el subdominio es invariante y es de la forma:

$$\phi = \frac{1}{2}\{x\}_f^T [M]\{x\}_b - \{y\}\{x\}_f^T \quad (10)$$

El funcional de energía virtual total en el subdominio, tomando en cuenta lo que ocurre en el contorno, se obtiene adicionando (8) a (10):

$$\zeta = \frac{1}{2} \{x\}_f^T [M] \{x\}_b - \{y\} \{x\}_f^T + \{\lambda\}^T [B] \{x\}_f \quad (11)$$

El valor estacionario de este funcional se obtiene derivando la ecuación (11), respecto de las incógnitas $\{x\}$ y $\{\lambda\}$:

$$\delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial\{x\}} \delta\{x\} + \frac{\partial\zeta}{\partial\{\lambda\}} \delta\{\lambda\} = 0 \quad (12)$$

siendo los vectores $\delta\{x\}$ y $\delta\{\lambda\}$ no triviales y notando que $\{\lambda\}^T [B] = [B]^T \{\lambda\}$, se obtiene finalmente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[M] \{x\}_b + [B]^T \{\lambda\} = \{y\} \quad (13)$$

$$[B] \{x\}_f = \{0\} \quad (14)$$

donde el vector de incógnitas adicionales $\{\lambda\}$ o vector de multiplicadores de Lagrange, garantiza en este caso, la continuidad de las variables $\{x\}_f$ en la frontera común entre dos subdominios cualquiera. Por otro lado, la matriz $[B]$ está compuesta de los coeficientes de las funciones de interpolación que vinculan a las variables nodales compartidas por dos subdominios distintos.

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

En esta parte se describen las estrategias concebidas, desarrolladas y aplicadas para la solución de mallas multibloques no conformes.

Polinomios de interpolación utilizados en la frontera de los bloques

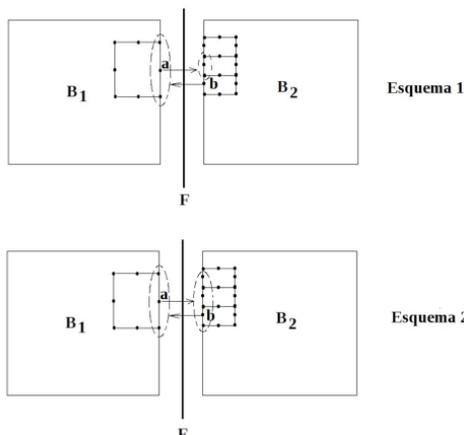


Figura 1. Esquemas de interpolación usados en la frontera común entre bloques o subdominios

Se ensayaron dos tipos de funciones de interpolación para tratar las fronteras internas que se generan cuando se utilizan mallas multibloques, particularmente bloques no conformes en el número de nodos en sus fronteras. El primero corresponde a un tipo de función polinomial que tiene el mismo orden que el de los polinomios de interpolación usados en los elementos finitos que comparten la frontera de los bloques. Estos polinomios corresponden a las funciones de forma locales, N_r , definidas para cada nodo r del elemento. Cualquier variable de flujo asignada a un nodo i , perteneciente al elemento finito que se encuentra a un lado de la frontera F , es interpolada con las variables asignadas a los nodos del elemento finito en el que se haya encontrado el nodo i , al otro lado de la frontera (nodos a y b mostrados en el esquema 1 de la Figura 1).

El segundo tipo de interpolación que fue concebido corresponde a la utilización de polinomios de Lagrange de orden variable. En este caso, el orden del polinomio es función del número de nodos en la frontera entre bloques, que comparten un mismo elemento finito. Así, para un nodo en particular, i , perteneciente a un elemento finito que se encuentra a un lado de la frontera, la interpolación de cualquier variable del flujo se realiza no solo con las variables nodales del elemento finito al otro lado de la frontera donde se detectó la presencia del nodo i , sino también mediante las variables nodales pertenecientes a todos los elementos finitos que dan contribución al elemento al que pertenece el nodo i .

En el esquema 2 de la Figura 1, se aprecia que la información para el nodo a se interpola, al otro lado de la frontera, con la información nodal de todos los nodos encerrados por medio de la curva segmentada, que dan contribución al elemento donde se encuentra el nodo a . En ambos casos y para este ejemplo en particular, la variable nodal asignada al nodo b resulta interpolada solo con la información que se encuentra en los tres nodos del elemento al que pertenece el nodo a . Estos polinomios normalizados de orden variable tienen la siguiente estructura en el caso unidimensional:

$$P_i(x) = \prod_{j=1, n}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i \neq j \quad (15)$$

donde n es el número de nodos totales que son asignados para realizar la interpolación en un determinado nodo i , mientras que x es una coordenada local establecida en el contorno del bloque.

Detección automática de nodos en la frontera común entre bloques

A fin de construir los coeficientes polinomiales de estos dos tipos de funciones de interpolación, se desarrolló una subrutina de detección automática de nodos en la frontera, escrita en lenguaje C, válida para cualquier tipo de configuración de bloques y para cualquier tipo de geometría. La detección automática de nodos compartidos en las fronteras comunes entre bloques se lleva a cabo antes de comenzar el procedimiento computacional de las marchas temporales y es independiente de la forma en la que se enumeran los bloques, siendo sumamente rápida y efectiva. Los datos de salida que produce la subrutina de detección son, por un lado, el tipo de nodo de frontera donde se utilizó la denominación “nodos maestros” y “nodos esclavos”. Esta denominación se hace acorde al número del bloque en el que se detecta un nodo que no pertenece a dicho bloque en una de sus fronteras, respecto del número del bloque al que pertenece tal nodo. Si, por ejemplo, el número del bloque donde se consigue el nodo es mayor al del bloque donde pertenece, el nodo se denomina “maestro”. Por otro lado, se especifican también en el archivo de salida los coeficientes normalizados (valores comprendidos entre -1 y +1, ambos inclusive) de los polinomios de interpolación que están asociados a cada nodo, maestro o esclavo, en la frontera.

Solución del sistema de ecuaciones

Para la solución del sistema de ecuaciones resultante por cada variable del flujo (ecuación 5), se desarrolló un método directo que permite resolver todas las incógnitas en dos partes.

En la primera parte, se aplica un procedimiento de reducción matricial por bloque conocido como subestructuración (Huebner *et al.*, 2001), que permite eliminar las ecuaciones asociadas a los nodos internos en cada bloque, quedando en las matrices reducidas solo los coeficientes de los nodos alojados en las fronteras comunes. Partiendo de la ecuación 5 aplicada por bloque, se puede escribir el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} [M_{1,1}] & [M_{1,2}] \\ [M_{2,1}] & [M_{2,2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x\}_i \\ \{x\}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{y\}_i \\ \{y\}_f \end{bmatrix} \quad (16)$$

La eliminación del vector de nodos internos $\{x\}_i$ permite transformar la matriz $[M]$ en una matriz reducida $[\bar{M}]$, por bloque. Esta matriz contendrá solo los coeficientes del sistema de ecuaciones relacionado al vector $\{x\}_f$. El sistema reducido de ecuaciones por bloque será:

$$[\bar{M}]\{x\}_f = [\bar{y}] \quad (17)$$

donde las formas de la matriz reducida y el vector reducido al lado derecho, se obtienen por manipulación algebraica del sistema matricial 16:

$$[\bar{M}] = [M_{2,2}] - [M_{2,1}][M_{1,1}]^{-1}[M_{1,2}] \quad (18)$$

$$[\bar{y}] = \{y\}_f - [M_{2,1}][M_{1,1}]^{-1}\{y\}_i \quad (19)$$

En este trabajo, el proceso de eliminación de nodos internos por bloque se realizó mediante el método frontal (Taylor *et al.*, 1981), adaptado y puesto a punto para el tratamiento de mallas multibloques. El método frontal permite eliminar las variables nodales inmediatamente cuando estas son ensambladas a través del último elemento finito del bloque que aporta contribución sobre estas, de manera que el sistema total de ecuaciones a reducir no requiere ser ensamblado en su totalidad y tampoco se requiere realizar el procedimiento de inversión matricial indicado en las ecuaciones 18 y 19.

La reducción sistemática de ecuaciones por bloque, según la ecuación 17, se realiza en paralelo. Cada núcleo de un procesador multinúcleos de memoria compartida procesa de forma independiente un bloque del dominio de cálculo. Cuando el número de bloques es mayor al número de núcleos del procesador físico, se hace automáticamente una repartición equitativa del número de bloques que será procesado simultáneamente por núcleo.

En la segunda parte del proceso de solución, las matrices reducidas por bloque se ensamblan en una matriz global aumentada, denotada por “G”, que contiene los coeficientes de las variables nodales pertenecientes a las fronteras comunes entre bloques, los coeficientes de las ecuaciones de interpolación empleadas entre bloques y el vector de variables concerniente a los multiplicadores de Lagrange. De acuerdo a las ecuaciones 13 y 14, se tiene:

$$\begin{bmatrix} [\bar{M}] & [B]^T \\ [B] & [0] \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \{x\}_f \\ \{\lambda\} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \{\bar{y}\} \\ \{0\} \end{bmatrix}_G \quad (20)$$

Para la solución de este sistema de ecuaciones se aplicó también el método frontal, en un procedimiento dinámico de eliminación de variables nodales que se hace ahora por bloques y no por elementos finitos, donde las variables se van eliminando sistemáticamente luego de que el último bloque que da contribución sobre estas variables haya sido

ensamblado, lo que evita el ensamblaje total del sistema global durante todo el proceso de eliminación.

A diferencia de la primera etapa, donde la reducción de los nodos internos se efectúa de forma independiente de un bloque al otro, en la segunda etapa, el procedimiento es estrictamente secuencial, comenzando desde el ensamblaje del primer bloque y la matriz de ecuaciones de restricción correspondiente, en la matriz global. Sin embargo, para este caso fue concebido y se puso a punto un procedimiento dinámico de partición en bandas verticales de igual ancho de la matriz global; a medida que se van ensamblando los bloques y las matrices concernientes a las ecuaciones de restricción, dichas bandas matriciales son asignadas a cada núcleo del procesador, permitiendo repartir de esta forma, el trabajo de eliminación en forma paralela. Si en una etapa del proceso de factorización matricial, el número de bandas es mayor al número de núcleos de procesamiento, automáticamente se reparte el número de bandas matriciales a procesar por núcleo.

Como segunda metodología de solución para esta etapa, también se puso a punto un procedimiento iterativo basado en direcciones ortogonales de búsqueda (método del Gradiente Conjugado). Sin embargo, el método iterativo es efectivo solo en el caso de mallas multibloques conformes, donde la matriz global es simétrica y positiva definida. En el caso de mallas multibloques no conformes la última condición no necesariamente se satisface y el procedimiento resulta divergente, por lo que sería recomendable incorporar una técnica de búsqueda iterativa más robusta, por ejemplo, el método *GMRES*, previamente mencionado. Esto sería parte de otro estudio que está fuera del alcance de este trabajo.

Debido a que las ecuaciones del flujo son resueltas de forma explícita, según la ecuación 1, el procedimiento de solución del sistema de ecuaciones de forma directa que se acaba de describir solo se aplica, para todas las incógnitas principales, en el paso de tiempo inicial, donde se registran por bloques las estructuras de las matrices factorizadas y donde solo se requiere construir el vector residual $\mathbf{R}(\mathbf{x}_j)$. En los pasos de tiempo subsiguientes, esto acelera considerablemente el tiempo de cálculo computacional.

CASO DE APLICACIÓN

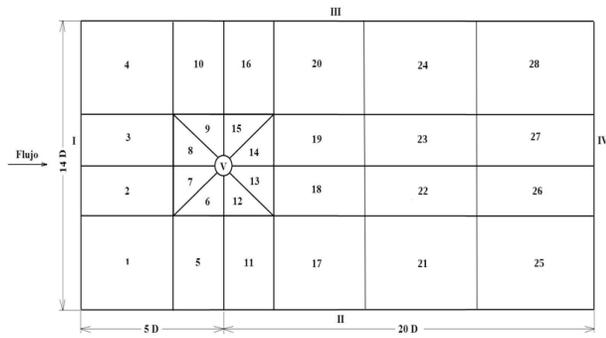


Figura 2. Distribución de bloques alrededor de un cilindro

A fin de demostrar la validez de la metodología computacional desarrollada de la misma forma como se hizo en la primera parte del artículo, se resolvió el flujo turbulento bidimensional transversal a un cilindro circular. En este tipo de flujos los efectos convectivos y transitorios son importantes detrás del cilindro, ya que se producen inestabilidades que conducen a la formación de una estela de vórtices que se pueden desprender de forma alternante o no. Este tipo de flujo ha sido ampliamente reportado en trabajos de corte experimental y numérico y representa lo que se denomina un calibrador de modelos fluido dinámicos computacionales (Breuer, 2000; Cantwell *et al.*, 1983).

La geometría utilizada para el cálculo del flujo es indicada en la Figura 2. El dominio ha sido dividido en 28 bloques. Los bloques que rodean el cilindro, 6-9 y 12-15, son conectados de forma conforme entre ellos, pero de forma no conforme con el resto de los bloques de la malla de cálculo. De esta forma, se puede afinar tanto como se desee la malla en la proximidad del cilindro, manteniendo constante la malla utilizada para el resto del dominio. La discretización del dominio se realizó con elementos cuadrilaterales de ocho nodos.

Dos tipos de malla fueron utilizados en los cálculos, variando el número de elementos alrededor del cilindro solo para los bloques antes mencionados. Detalles de las mallas en la proximidad del cilindro son mostradas en las Figuras 3 y 4.

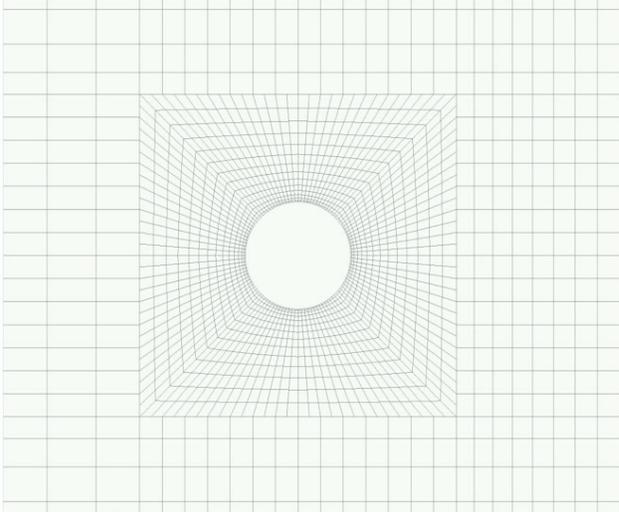


Figura 3. Detalle de la malla N°. 1

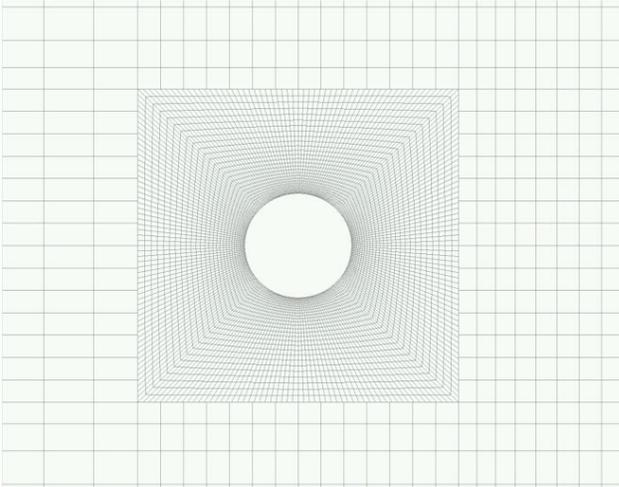


Figura 4. Detalle de la malla N°. 2

Las condiciones de contorno fueron impuestas de forma similar a como fueron mencionadas en la primera parte, excepto a la salida del dominio. Así, y utilizando la notación que se indica en la Figura 2, en el contorno (I), que corresponde a la entrada del dominio, se aplicó una condición de flujo uniforme. En los contornos laterales (II) y (III), se aplicó una condición de simetría del flujo, donde el flujo normal a través de tales fronteras es nulo ($u_n=0$). En el contorno (IV) que corresponde a la salida del flujo, se aplicó una condición de presión flotante por medio de la ecuación de la energía. De esta forma, la presión se puede ajustar con el flujo que sale del dominio, a través de la siguiente ecuación:

$$p_s = p_e + \frac{1}{2}(\rho_e u_e^2 - \rho_s u_s^2) - (\rho_e e_e - \rho_s e_s) \quad (21)$$

donde los subíndices e y s denotan entrada y salida del flujo en el dominio. En la entrada, se impuso como valor de referencia para la presión el valor de la presión atmosférica. Los dos últimos términos de la ecuación 21, encerrados entre paréntesis, dan cuenta de la disipación de la energía interna estática en el flujo debido a los efectos de la viscosidad del fluido; esta disipación es primordialmente función de la temperatura. Ya que en los casos estudiados no se utilizó la ecuación de la energía en los cálculos, debido a que la temperatura se consideró invariante (flujo isotérmico), el término disipativo no aporta información.

Finalmente, en el contorno (V), que corresponde a la pared del cilindro, se aplicó la condición de no deslizamiento del flujo turbulento.

RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos con las metodologías computacionales descritas. El número de Reynolds utilizado basado en el diámetro del cilindro fue $R_D = 1,4e+5$, que corresponde al número de Reynolds empleado en el trabajo experimental de Cantwell *et al.* (1983), con el cual se comparan las soluciones en dos secciones transversales específicas. En relación al modelo de turbulencia utilizado, se aplicó cerca de la pared del cilindro, una función de amortiguación de la turbulencia, basada en la formulación de Van Driest, según el trabajo de Breuer (2000). El coeficiente del modelo de Smagorinsky utilizado fue $C_s=0,1$ y la función de Van Driest para el tratamiento parietal de la turbulencia es de la forma:

$$f(y^+) = \left[1 - \exp\left(\frac{-y^+}{25}\right) \right]^A \quad (22)$$

donde los exponentes empleados fueron $A = 3$ y $B = 1$.

Se ensayaron para cada malla de cálculo los dos procedimientos que fueron explicados para el tratamiento de las fronteras comunes entre bloques, produciendo un conjunto de cuatro (4) soluciones. La Figura 5 muestra el comportamiento del coeficiente de arrastre en la malla 1.

Se aprecia que para las dos metodologías aplicadas, el comportamiento del coeficiente de arrastre es prácticamente el mismo, ya que los resultados obtenidos aparecen superpuestos. Esto se explica por el hecho de que el orden polinomial que se consigue para los polinomios de Lagrange no es muy diferente al de las funciones de forma estándar utilizadas por elemento finito cuando la diferencia nodal existente en la frontera entre dos bloques no es muy grande, como ocurre en la malla 1.

La diferencia de los resultados es apreciable en la malla 2, como se muestra en la Figura 6, donde la diferencia nodal entre bloques no conformes es también significativa. En este caso, el orden de los polinomios de Lagrange es mucho mayor que el de las funciones estándar típicas de los elementos finitos que se encuentran en las fronteras de los bloques.

A pesar de estas diferencias se aprecian similitudes en el comportamiento del coeficiente de arrastre, por ejemplo, en ambos casos se aprecia que el comportamiento oscilante del coeficiente de arrastre que ocurre como consecuencia del desprendimiento alterno de vórtices se produce para pasos de tiempo superiores a 40000. Por debajo de este paso de tiempo, el comportamiento temporal del coeficiente de arrastre es similar en los dos casos.

También se aprecia que las amplitudes de las oscilaciones del coeficiente de arrastre que toman lugar en la fase de desprendimiento de vórtices, son comparables tanto en la malla 1 como en la malla 2. La Tabla 1 muestra los coeficientes de arrastre promediados en el tiempo luego de la fase de desprendimiento de vórtices para las cuatro soluciones obtenidas.

En general, los valores obtenidos son bastante cercanos entre sí y están por debajo del valor experimental reportado en el trabajo de Achenbach (1971), donde se reporte un valor de $C_d = 0,1$.

Tabla 1. Coeficiente de arrastre promedio

	Malla 1		Malla 2	
	Estándar	Lagrange	Estándar	Lagrange
C_d	0,8278	0,8282	0,8238	0,7540

En la Figura 7 se muestran las distribuciones de la componente u_x de la velocidad en la sección transversal $x/D=1$, que fueron conseguidas con los distintos procedimientos aplicados. Se aprecia para el caso de utilización de la malla 1, que no existen diferencias marcables en las distribuciones de la velocidad cuando fueron aplicados los procedimientos de interpolación estándar y Lagrange, ya que los perfiles de velocidades se superponen. Se aprecia también que el ajuste logrado con la malla 1 para las dos técnicas desarrolladas es bastante bueno en relación al trabajo experimental y se logra reproducir muy bien el defecto de la velocidad del perfil de velocidades en una zona próxima al cilindro.

En el caso de la malla 2 aparecen discrepancias en relación al trabajo experimental, donde el punto de mínima velocidad se posiciona abajo del mínimo experimental reportado, cuando fue aplicada la interpolación estándar, mientras que con la interpolación de Lagrange este se posicionó arriba del punto mínimo experimental. Sin embargo, ambas metodologías en el caso de la malla 2 evidencian un sesgo en el defecto de la velocidad que se produce hacia la izquierda del valor central. Este comportamiento puede estar asociado más bien a la respuesta que da el modelo de turbulencia, que depende del tamaño de la malla de cálculo, y en menor medida a las metodologías de interpolación, que producen respuestas similares.

En la Figura 8 se reportan los resultados de la distribución u_x en la sección transversal $x/D=3$. A diferencia de lo que ocurre respecto de la gráfica anterior. La malla 1 produce una difusión mucho más marcada del defecto de la velocidad para esta sección que el que se produce con la malla 2. En el caso de la malla 1, nuevamente no hay diferencias entre las metodologías de interpolación aplicadas y estas se superponen completamente. En el caso de la malla 2, se aprecian diferencias en el defecto de la velocidad cuando se aplicaron los dos procedimientos de interpolación. Sin embargo, estos perfiles reproducen mejor el defecto de la velocidad en esta sección en relación a lo que es reportado en el trabajo experimental de Cantwell *et al.*, (1983).

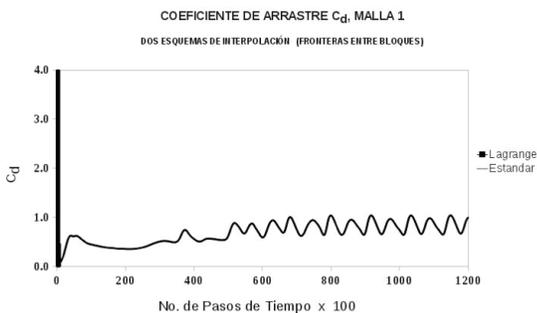


Figura 5. Coeficiente de arrastre, malla N° 1

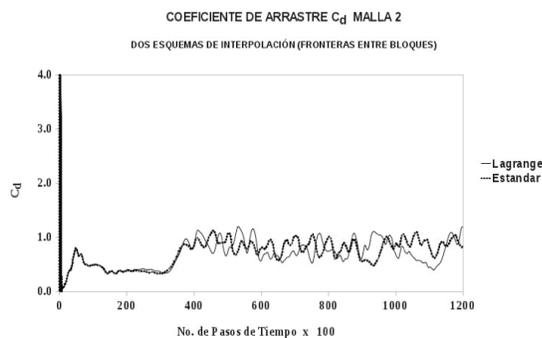


Figura 6. Coeficiente de arrastre, malla N° 2

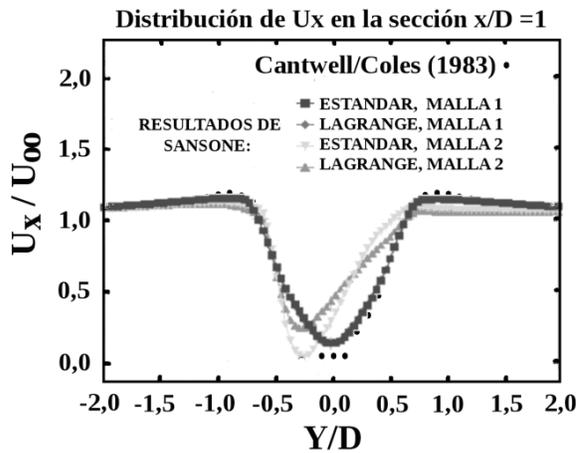


Figura 7. Distribución de la componente u_x de la velocidad en la sección $x/D = 1$

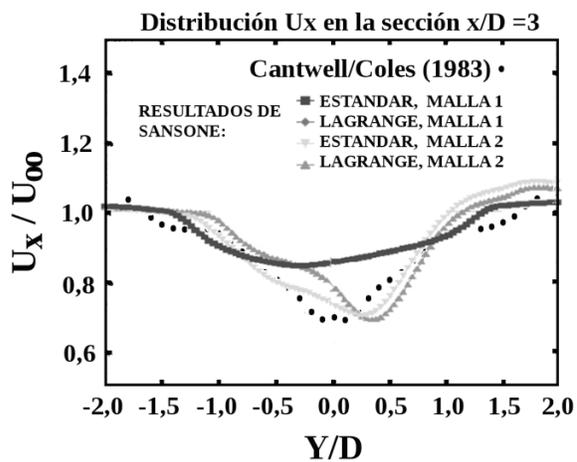


Figura 8. Distribución de la componente u_x de la velocidad en la sección $x/D = 3$

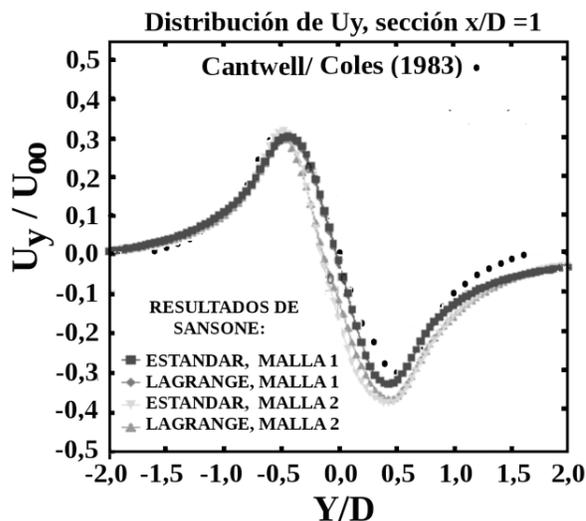


Figura 9. Distribución de la componente u_y de la velocidad en la sección $x/D = 1$

La Figura 9 muestra la distribución de la componente u_y de la velocidad en la sección transversal $x/D=1$. Se aprecia en este caso que las distribuciones conseguidas se adaptan bastante bien a los datos experimentales siguiendo la forma de esta distribución, reproduciendo muy bien, en todos los casos, los dos puntos de inflexión ubicados cerca de los valores $y/D = +0,5, y/D = -0,5$.

Las mejores aproximaciones numéricas fueron obtenidas en la malla 1, donde nuevamente se aprecia que no existen discrepancias entre los resultados conseguidos mediante los dos procedimientos de interpolación aplicados. En el caso de la malla 2, las dos metodologías de interpolación arrojan distribuciones que son muy similares entre sí, que se aproximan bien a los datos experimentales. La distribución de la componente u_y está asociada al tránsito de vórtices que se produce desde el cilindro y este comportamiento fue muy bien reproducido en las cuatro soluciones obtenidas.

Las Figuras 10 a 13 muestran el campo de velocidades y las líneas de corriente montadas sobre la distribución de la presión para las cuatro soluciones obtenidas y para el último paso de tiempo registrado, luego de haberse alcanzado la fase de desprendimiento periódico de vórtices en la estela detrás del cilindro. En general, se aprecia con claridad la continuidad de los patrones de flujo pasando entre bloques no conformes en los cuatro cálculos efectuados, lo que muestra la efectividad de los procedimientos computacionales desarrollados. También se detallan en todos los casos, las estructuras del flujo muy cerca del cilindro, apreciándose la formación de vórtices desde la pared. Estas estructuras conseguidas de forma numérica son influenciadas tanto por el modelo de turbulencia como por el número de elementos finitos utilizados en cada malla. En este trabajo no se consideró realizar un análisis exhaustivo de la influencia de estos factores, ya que el objetivo principal fue el de evaluar la validez del procedimiento de cálculo para el tratamiento de dominios compuestos por bloques no conformes.

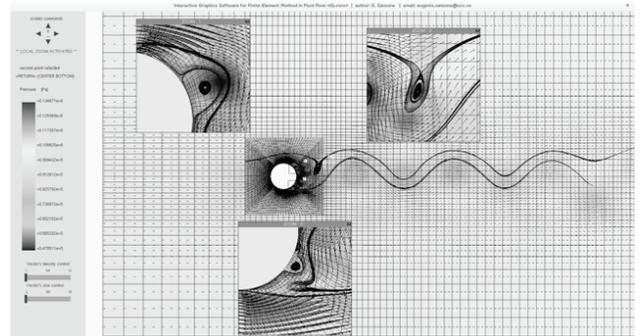


Figura 10. Campo de velocidades y líneas de corriente, malla N° 1. Esquema de intepolación estándar

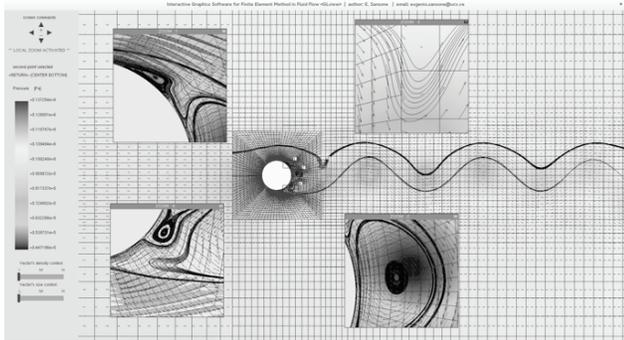


Figura 11. Campo de velocidades y líneas de corriente.
Malla #1. Esquema de interpolación de Lagrange



Figura 14. Distribución de energía cinética, malla N° 1.
Esquema de interpolación estándar

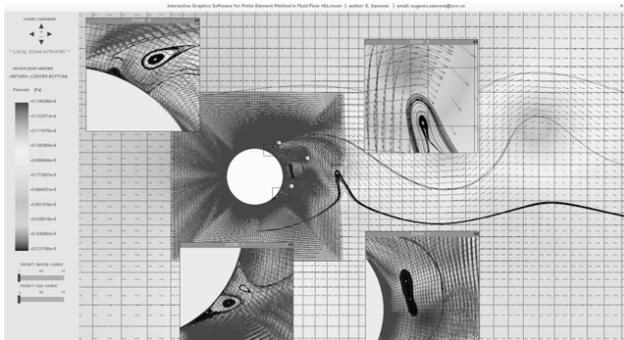


Figura 12. Campo de velocidades y líneas de corriente,
malla N° 2. Esquema de interpolación estándar

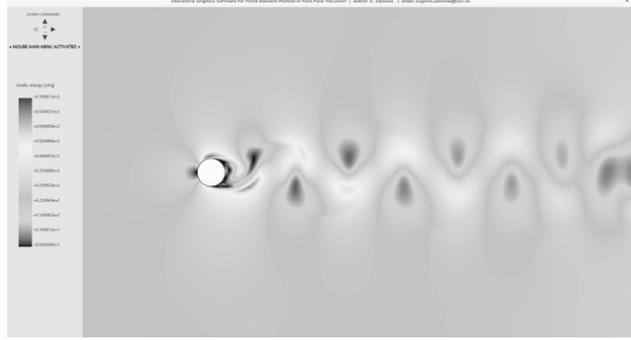


Figura 15. Distribución de energía cinética, malla N° 1.
Esquema de interpolación de Lagrange

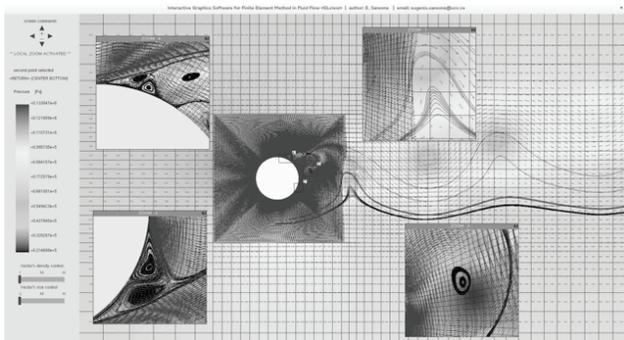


Figura 13. Campo de velocidades y líneas de corriente,
malla N° 2. Esquema de interpolación de Lagrange



Figura 16. Distribución de energía cinética, malla N° 2.
Esquema de interpolación estándar

En las Figuras 14 a 17 se muestran las distribuciones de la energía cinética para cada uno de los casos considerados. En general, se aprecia la continuidad del campo de energía cinética, que ratifica la validez de los procedimientos de interpolación aplicados para las dos mallas. En los casos resueltos con la malla 2, se aprecia un ligero sesgo de la estela de vórtices hacia la parte superior del dominio, que coincide con el sesgo que se aprecia en el defecto de la velocidad u_x , obtenido en la sección $x/D=1$. Debido a que ambos procedimientos de interpolación evidencian este ligero sesgo, el mismo puede ser causado por el modelo de turbulencia y esto debería ser investigado más en detalle.



Figura 17. Distribución de energía cinética, malla N° 2.
Esquema de interpolación de Lagrange

CONCLUSIÓN

Se desarrollaron dos procedimientos de interpolación para tratar mallas multibloques no conformes, que permite la solución de las ecuaciones del flujo de fluidos mediante el método del elemento finito en dominios complejos. También se puso a punto un procedimiento de solución directa del sistema de ecuaciones en dos etapas que puede ser utilizado sobre plataformas *CPU* con múltiples núcleos de procesamiento y memoria compartida. Todos estos procedimientos escritos en lenguaje *C* forman parte del código computacional que ha sido desarrollado totalmente por el autor. En el caso del procesamiento en paralelo, se utilizó la librería *OPENMP* para *C/C++*.

Los procedimientos desarrollados fueron aplicados para la solución del flujo turbulento alrededor de un cilindro circular, siendo el número de Reynolds del flujo, basado en el diámetro: $R_D = 1,4e^{+5}$, que fue el mismo reportado en trabajo experimental de Cantwell *et al.*, (1983). En general fue apreciado para todos los casos calculados, que en la malla 1, donde la diferencia nodal en los contornos de los bloques no es muy grande, los procedimientos de interpolación estándar y de Lagrange, arrojaron prácticamente los mismos resultados. En el caso de la malla 2, se consiguieron diferencias notables en todos los resultados cuando se utilizaron los dos esquemas de interpolación.

Analizando el defecto de la velocidad producido por el cilindro sobre el flujo turbulento, se apreció que la malla 1 produjo mejores resultados que la malla 2 en la sección $x/D=1$, mientras que la malla 2 produjo mejores resultados en la sección $x/D=3$. En términos generales, sin embargo, se puede concluir que la malla 2, que es más fina, permitió captar mejor el fenómeno de difusión de la velocidad en la estela entre las dos secciones, en comparación al trabajo experimental utilizado.

En relación a la distribución de la componente transversal de la velocidad u_y , se reportaron resultados bastante aceptables para los cuatro casos estudiados, reflejando el buen acuerdo del procedimiento numérico desarrollado para simular el proceso de tránsito de vórtices en la estela.

Los efectos del tamaño de la malla deben ser estudiados en profundidad, ya que el modelo de turbulencia es dependiente de la malla empleada. Como fue apreciado en el curso de este trabajo, aparecieron diferencias importantes en los patrones de flujo que están más relacionados con la malla utilizada que con las técnicas de interpolación desarrolladas.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar de manera muy especial su agradecimiento a las siguientes personas e instituciones que sirvieron para llevar a término el presente trabajo:

Al profesor Jorge Cruz Moreno (Departamento de Diseño, Escuela de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela), quien por su excelente disposición y conocimiento, sirvió de motivación para la aplicación de la técnica de los Multiplicadores de Lagrange en el tratamiento de mallas no conformes que se desarrolló en este trabajo.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) de la Universidad Central de Venezuela, institución que apoyó y financió el Proyecto de Investigación de Grupo PG08-8290-2011-1, a través del cual se adquirieron dos servidores HP con procesadores de múltiples núcleos y memoria compartida de tipo *CPU* y *GPU*, los cuales permitieron poner a punto las técnicas de procesamiento en paralelo que fueron descritas en este trabajo y donde se llevaron a cabo las distintas corridas del código computacional que fue desarrollado completamente por el autor.

REFERENCIAS

- ACHENBACH, E. (1971). Influence of surface roughness on the cross-flow around a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*; pp 331-335.
- BORELLO, D., CORSINI, A., RISPOLI, F. (2000). A Finite element parallel domain decomposition method for incompressible turbomachinery flow. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. ECCOMAS, Barcelona, September*.
- BREUER, M. (2000). A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*; pp 648-654.
- CANTWELL, B., COLES, D. (1983). An experimental study on entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*; pp 321-374.
- CHUNG, T. J. (2006). *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge: University Press.

- CINNELLA, P., DE PALMA, P., PASCAZIO, G., NAPOLITANO, M. (2004). A numerical method for turbomachinery aeroelasticity. *Journal of Turbomachinery*; pp 310-316.
- DRTINA, P., SALLABERGER, M. (1999). Hydraulic turbine-basic principles and state of the art computational fluid dynamics applications. *Journal of Mechanical Engineering Science. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C*; pp 85-102.
- HATHAWAY, M. D., WOOD, J. R. (1997). Application of a multi-block cfd code to investigate the impact of geometry modelling on centrifugal compressor flow field predictions. *Journal of Turbomachinery*, 119(4): pp 820-830.
- HUEBNER, K. H., DEWHIRST, D.L., SMITH, D.E., BYROM, T.G. (2001). *The Finite Element Method for Engineers*. New York: John Wiley & Sons, INC.
- SANSONE, E., (2013). Solución numérica de las ecuaciones del flujo turbulento basada en trayectorias características mediante el método del elemento finito. Parte 1: Dominios multi bloques en conexión estructurada. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, 28(2); pp 87-100.
- SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations, *Mon. Weath Rev.*, 91(3); pp 99-164.
- TAYLOR, C., HUGHES, T. G. (1981). *Finite element programming of the Navier-Stokes equations*. Swansea, U.K: Pineridge Press Ltd, 1th edition.
- ZATB, A., TUCKER, P. G. (2013). Multiblock structured mesh generation for turbomachinery flows. In *Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, PA, September.
- ZIENKIEWICZ, R. L., TAYLOR, R. L., NITHIARASU, P. (2005). *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Amsterdam: Elsevier, Butterworth Heinemann.