

## NUEVA METODOLOGÍA PARA MODELAR POZOS HORIZONTALES EN YACIMIENTOS PETROLÍFEROS MEDIANTE FUNCIONES GENERALIZADAS

REINALDO J. GONZÁLEZ<sup>1</sup>, A. K. FERMÍN<sup>2</sup> Y J. M. GUEVARA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Central de Venezuela, Escuela de Ingeniería de Petróleo, Apartado 47724, Caracas 1010-A, Venezuela

<sup>2</sup> Universidad Central de Venezuela, Escuela de Matemática, Apartado 20513, Caracas 1020-A, Venezuela

Recibido: Enero de 1999

Recibido en forma final revisado: Febrero de 2001

### RESUMEN

Se presenta una nueva metodología para evaluar el comportamiento evolutivo de la presión generada por un pozo horizontal o tortuoso en un yacimiento petrolífero. El pozo es representado explícitamente en la Ecuación de Difusión mediante una función generalizada. Este modelo matemático implícito para la presión es resuelto analíticamente y numéricamente para obtener su validación. La solución analítica coincide con la propuesta de Babu y Odeh (1989, 1994) para pozos horizontales aunque ella es deducida mediante métodos matemáticos distintos a los empleados por estos autores. Para la solución numérica, se propone una nueva técnica que combina los métodos de Green y de sustracción de singularidades con los esquemas tradicionales de elementos finitos o diferencias finitas. Esta nueva estrategia computacional presenta convergencia cuadrática en dos dimensiones sobre mallas muy poco refinadas y, en el caso tridimensional, los resultados son también satisfactorios. Los principales aportes de este método numérico son la independencia de la malla utilizada con respecto a la forma geométrica del pozo, la flexibilidad para modelar trayectorias del pozo horizontal de geometría arbitraria, y su aplicabilidad a yacimientos con frontera (o límite) irregular como se muestra en los casos estudiados.

*Palabras clave:* pozos horizontales, modelo matemático, distribución de presión, yacimientos, elementos finitos, función generalizada

### NEW METHODOLOGY FOR MODELING HORIZONTAL WELLS IN PETROLEUM RESERVOIRS USING GENERALIZED FUNCTIONS

### ABSTRACT

A new methodology for assessing the transient behavior of pressure generated by horizontal or tortuous wells in a petroleum reservoir is presented. Wells are explicitly represented in the diffusivity equation by a generalized function. For validation purposes, this mathematical, implicit model for measuring pressure is solved both analytically and numerically. While the analytical solution does match the Babu and Odeh (1989, 1994) proposal for horizontal wells, it is obtained by different mathematical methods. A new technique is submitted for the numerical solution that combines the Green's function approach, and removing singularities methods with traditional finite elements or differences schemes. This new computational approach yields square convergence in coarse grids for 20 cases and very satisfactory results on 30 cases. The major contributions from this numerical method are its independence from the types of grid used in connection with the well's geometric shape; flexibility to model horizontal well trajectories of arbitrary geometry, and its applicability to arbitrary shaped reservoirs, as shown in the studied cases.

*Keywords:* horizontal well, mathematical model, pressure distribution, reservoirs, finite elements, generalized functions

### INTRODUCCIÓN

Desde principios de la década de los ochenta, la industria petrolera ha presenciado la proliferación de pozos horizontales en todo el ámbito mundial (Butler, 1994). En los últimos veinte años, el avance en las técnicas de perforación y producción ha impulsado el desarrollo, estudio y adopción de nuevos modelos para representar pozos horizontales que permitan analizar mejor su comportamiento.

En este artículo se plantea un modelo matemático para un pozo horizontal, o tortuoso, partiendo de la Ecuación de Difusión no homogénea la cual considera explícitamente al pozo modelado como una función generalizada. Esta manera de modelar un pozo no es natural y pudiera ser cuestionada a priori ya que el pozo, rigurosamente hablando, debería ser representado como una condición de borde (Craft y Hawkins, 1957; Dake, 1978). Sin embargo, al analizar las soluciones obtenidas al considerar al pozo

como una condición de borde del problema y en un dominio representando un yacimiento infinito, puede probarse que al sustituir dichas soluciones directamente en las respectivas ecuaciones, conducen a funciones generalizadas. Esto ha motivado la utilización de dichas funciones para representar un pozo. Cabe acotar que a los efectos de equiparar la terminología petrolera con la jerga matemática, se entenderá como frontera o borde del yacimiento a los límites físicos del mismo.

El uso explícito de funciones generalizadas en la Ecuación de Difusión para establecer el modelo matemático de un pozo de trayectoria arbitraria en un yacimiento petrolífero es uno de los objetivos de este trabajo. En la literatura petrolera, al estudiar las soluciones de la distribución de presión en yacimientos infinitos y con formas rectangulares (Azar-Nejad *et al.*, 1996a, 1996b, 1996c, 1996d; Babu y Odeh, 1989, 1994; Gringarten y Ramey, 1973; Ozkan y Raghavan, 1991a, 1991b, 1994; Raghavan, 1993; Roper *et al.*, 1962; Rosa y Carvalho, 1986), puede encontrarse el empleo tácito de funciones generalizadas como representación de pozos verticales, horizontales y fracturados. Así mismo, en la obra de Liggett y Liu (1983) se encuentra la representación de pozos verticales mediante funciones del tipo deltas de Dirac convenientemente reformuladas por los autores pero que pierden su carácter riguroso de función generalizada.

En este trabajo, se utiliza la solución analítica de la Ecuación de Difusión con una función generalizada explícita modelando al pozo, dada por Fermín (1998) mediante el método de Fourier y la teoría de Sturm Liouville. Esta solución, que coincide con la obtenida por Babu y Odeh (1985) mediante el método de Neumann, es usada en aquellos ejemplos donde el yacimiento es representado a través de dominios rectangulares.

Para resolver el modelo de pozo planteado en el caso de yacimientos con frontera arbitraria en dos y tres dimensiones, es preciso proponer un esquema numérico especialmente diseñado para este propósito en razón de que las funciones generalizadas presentan dificultades para ser representadas a través de los métodos numéricos tradicionales de diferencias finitas y/o elementos finitos (Lapidus y Pinder, 1988). Por ello se plantea un algoritmo que combina el método de sustracción de singularidades, las funciones de Green y los elementos finitos en una sola estrategia computacional coherente a los fines de resolver numéricamente el problema de valor inicial y de frontera que se deriva. Este método numérico, el cual denotaremos en lo sucesivo por MCSS (Método Con Sustracción de Singularidades), en su concepción no es nuevo y ha sido empleado en el caso de ecuaciones elípticas por diversos autores (Douglas *et al.*,

1983; Ewing, 1983; Ewing y Wheeler, 1983; Hayes *et al.*, 1977; Roper *et al.*, 1962; Russell y Wheeler, 1983). Para la Ecuación de Difusión, la sustracción de singularidades no es tan directa debido al carácter temporal de la función delta de Dirac implicada en la ecuación diferencial parcial y por ello debe ser replanteada. Esta metodología reformulada ha sido originalmente aplicada al caso de pozos verticales en regiones rectangulares usando diferencias finitas (Astudillo y Guédez, 1993). En este sentido la contribución principal de este artículo es extender y validar el MCSS para el caso del modelo matemático propuesto para pozos horizontales o tortuosos. Hasta el conocimiento de estos autores, esta extensión del MCSS no ha sido reportada previamente en la literatura especializada y constituye un aporte original (Fermín, 1998; Guevara *et al.*, 1999).

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo básico que determina la distribución de presión generada por un pozo de trayectoria arbitraria  $\vec{\gamma}$  en un medio poroso anisotrópico infinito viene dada por la siguiente ecuación (Fermín, 1998):

$$C_t \mu \phi \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot (\tilde{K}(\nabla P - g\rho\nabla D)) = \frac{1}{\rho} \int_a^b q(\vec{\gamma}(u), t) \delta(\vec{x} - \vec{\gamma}(u)) \|\vec{\gamma}'(u)\| du \quad (1)$$

En esta expresión,  $P$  es la presión,  $C_t$  es la compresibilidad,  $\mu$  es la viscosidad,  $\phi$  es la porosidad,  $\rho$  es la densidad,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $K$  es el tensor de permeabilidad,  $D$  es la profundidad,  $t$  es el tiempo,  $q$  es la tasa de producción en un punto del pozo,  $\delta$  es la función delta de Dirac (Duchateau y Zachmann, 1978; Vladimirov, 1971), la integral de línea está basada en la parametrización  $\vec{\gamma}(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), \gamma_3(u))$  adoptada para representar la trayectoria del pozo y  $\|\vec{\gamma}'(u)\|$  es el módulo del vector velocidad el cual es tangente a la curva en el punto  $\vec{\gamma}(u)$ . Cabe acotar que  $\vec{\gamma}(u)$  es una función vectorial con valores en  $\mathfrak{R}^3$ , definida sobre el intervalo  $a \leq u \leq b$  y que debe cumplir ciertas condiciones de diferenciabilidad para asegurar la existencia de las funciones de curvatura y torsión de la trayectoria (O'Neill, 1976).

Bajo las consideraciones estándares utilizadas por otros autores acerca de las condiciones del yacimiento (Azar-Nejad *et al.*, 1996a, 1996b, 1996c, 1996d; Babu y Odeh, 1989, 1994; Gringarten y Ramey, 1973; Ozkan y Raghavan, 1991a, 1991b, 1994; Raghavan, 1993; Roper *et al.*, 1962; Rosa y Carvalho, 1986) y, escrita en su forma adimensional o normalizada, la ecuación (1) puede simplificarse a la

siguiente expresión que será utilizada para el anterior análisis:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P = \int_a^b q(\vec{\gamma}(u), t) \delta(\vec{x} - \vec{\gamma}(u)) \|\vec{\gamma}'(u)\| du \quad (2)$$

Como puede observarse, el modelo aquí utilizado se basa en resolver la Ecuación de Difusión en coordenadas cartesianas. En realidad, esta ecuación modela el potencial más que la presión misma. Éste permite una apropiada inclusión de los efectos de gravedad en la solución y es conocido como el potencial de Hubbert (Azar-Nejad *et al.*, 1996a, 1996b, 1996c, 1996d; Dake, 1978); también, produce la libre aparición del Laplaciano en (2). Por comodidad y abuso del lenguaje, se han utilizado los mismos símbolos de (1) para las correspondientes variables adimensionales y al potencial de Hubbert en la ecuación (2). Además, se seguirá refiriendo como presión, a la solución de esta ecuación. A continuación, las siguientes condiciones tradicionalmente consideradas en este tipo de estudio para derivar la ecuación (2):

El yacimiento es homogéneo e isotrópico y el caso anisótropico puede ser llevado al isotrópico mediante convenientes cambios de variables.

La compresibilidad de la roca yacimiento es constante.

El flujo del fluido y los gradientes de presión están relacionados a través de la Ley de Darcy.

El yacimiento está completamente saturado de fluido mono-fásico, de compresibilidad constante y ligeramente compresible.

El fluido exhibe conducta Newtoniana.

Como ya fue mencionado, el efecto de gravedad se considera a través del potencial de Hubert.

Los pozos están totalmente completados.

El sistema es isotérmico y ningún tipo de cambio químico o de fase tiene lugar.

Usualmente, en las aplicaciones (como en los casos aquí estudiados), sólo se conoce la tasa total de producción del pozo,  $Q(t)$ . Esta condición para la tasa de producción del pozo, es conocida como Condición de Flujo Uniforme (Gringarten y Ramey, 1973; Raghavan, 1993) y  $Q(t)$  es tal que

debe satisfacer la relación  $Q(t) = \int_a^b q(\vec{\gamma}(u), t) \|\vec{\gamma}'(u)\| du$ .

Consecuentemente, a la ecuación (2) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P = Q(t) \int_a^b \delta(\vec{x} - \vec{\gamma}(u)) \|\vec{\gamma}'(u)\| du \quad (3)$$

Todas las funciones que forman el término no homogéneo de las ecuaciones anteriores son funciones generalizadas. Quizás la más sencilla de ellas viene dada en (3) y puede definirse equivalentemente por la relación (4) en la que  $l(\vec{\gamma}) = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(u)\| du$  (O'Neill, 1976) y representa la longitud de la trayectoria del pozo:

$$Q(t) \int_a^b \delta(\vec{x} - \vec{\gamma}(u)) \|\vec{\gamma}'(u)\| du = \begin{cases} \frac{Q(t)}{l(\vec{\gamma})}, & \text{si } \vec{x} \text{ esta en } \vec{\gamma}(u) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4)$$

## TÉRMINO FUENTE

Las soluciones analíticas de las ecuaciones (2) o (3) sin considerar condiciones de borde, las denominaremos *Término Fuente* y las denotaremos por *TF*. Por otro lado, llamaremos *soluciones fundamentales* a las tradicionalmente denominadas funciones libres de Green las cuales resuelven la Ecuación de Difusión con una fuente puntual e instantánea como término no homogéneo (Vladimirov, 1971).

Las soluciones de (2) y (3) para trayectorias rectas y dominios infinitos y/o rectangulares, son bien conocidas en la industria petrolera debido a sus aplicaciones en el estudio de pozos fracturados y, últimamente, en pozos horizontales; véanse a manera de ejemplo los trabajos de Azar-Nejad *et al.* (1996a, 1996b, 1996c); Gringarten y Ramey<sup>18</sup>, Ozkan y Raghavan, 1991b, 1994; Raghavan, 1993; Rosa y Carvalho (1986). Aunque son obtenidas por métodos distintos a los aquí expuestos, todas ellas se obtienen matemáticamente al calcular la integral, a lo largo de la trayectoria del pozo, de la función resultante de aplicar el principio de Duhamel (Carslaw y Jaeger, 1959; Duchateau y Zachmann, 1978; Vladimirov, 1971) a la solución fundamental de la Ecuación de Difusión. Esta técnica está justificada en el texto clásico de Carslaw y Jaeger (1959) sobre soluciones matemáticas de la conducción del calor en sólidos. En virtud de los comentarios anteriores, el término fuente para (2) y (3) pueden escribirse mediante las siguientes expresiones:

$$TF(\bar{x}, t) = \int_0^t \int_a^b \frac{q(\bar{\gamma}(u), \tau)}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^n}} \exp\left[-\frac{\|\bar{x} - \bar{\gamma}(u)\|^2}{4(t-\tau)}\right] \|\bar{\gamma}'(u)\| du d\tau \quad (5)$$

$$TF(\bar{x}, t) = \int_0^t \int_a^b \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^n}} \exp\left[-\frac{\|\bar{x} - \bar{\gamma}(u)\|^2}{4(t-\tau)}\right] \|\bar{\gamma}'(u)\| du d\tau \quad (6)$$

Aquí  $n$  será 2 o 3 dependiendo de la dimensión del espacio considerado y con su correspondiente norma euclidiana. Es interesante notar que estas expresiones son fácilmente motivadas por el modelo matemático basado en funciones generalizadas. Por ejemplo, hubiese sido mucho más difícil llegar a una expresión como la (6) utilizando el lado derecho de (4) como modelo de pozo, el cual es más simple de formular puesto que evita las deltas de Dirac, pero proporciona mucho menos información sobre la naturaleza físico- matemática del problema en estudio.

### SUSTRACCIÓN DE SINGULARIDADES

El modelar y simular el comportamiento de presión generado por un pozo tortuoso en un yacimiento  $\Omega$  exige resolver la ecuación (2) sujeta a ciertas condiciones en la frontera  $\partial\Omega$  del yacimiento y con una condición inicial dada. En este trabajo, consideraremos solamente la ausencia de flujo en  $\partial\Omega$  lo que matemáticamente se traduce en una condición de Neumann nula. Sin embargo, el método es perfectamente aplicable para una condición no nula; para cualquier condición de Dirichlet o para condiciones mixtas. En consecuencia, para el caso de la ecuación (2) se establece el siguiente problema de valor inicial y de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P &= \int_a^b q(\bar{\gamma}(u), t) \delta(\bar{x} - \bar{\gamma}(u)) \|\bar{\gamma}'(u)\| du \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial P}{\partial \bar{n}}(\bar{x}, t) &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ P(\bar{x}, 0) &= 0, \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (7)$$

donde el intervalo semi-infinito está asociado al tiempo y la condición inicial nula es consistente con la forma adimensionada o normalizada comúnmente usada en estos estudios. La solución de (7) en una región regular, por ejemplo un paralelepípedo o un rectángulo, puede ser fácilmente determinada mediante métodos analíticos tal como lo muestra Fermín (1998). Cuando la frontera de  $\Omega$  es arbitraria, se hace inevitable recurrir a métodos numéricos los cuales, en general (Lapidus y Pínder, 1988), no son capaces de manejar adecuadamente la función generalizada que aparece en la Ecuación de Difusión puesto que no han sido creados para tratar con funciones del tipo delta de Dirac. Por este motivo, se recurre al llamado Método de Sustracción de Singularidades que consiste en expresar la solución  $P$  de (7) como la suma del término fuente asociado a la función generalizada y una función suave,

denotada por  $P_{suave}$  que puede obtenerse como la solución mediante métodos numéricos convencionales del problema simplificado dado por (9), es decir:

$$P = P_{suave} + TF \quad (8)$$

y, por linealidad, puede verse que  $P_{suave}$  satisface el siguiente problema de valor inicial y de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{suave}}{\partial t} - \Delta P_{suave} &= 0, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial P_{suave}}{\partial \bar{n}}(\bar{x}, t) &= -\frac{\partial TF}{\partial \bar{n}}(\bar{x}, t, \bar{\gamma}), \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ P_{suave}(\bar{x}, 0) &= 0, \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

Este problema presenta una serie de ventajas con respecto al problema original dado en (7). En primer lugar, se observa en (9) la ausencia de las funciones generalizadas. Por otro lado, el término no homogéneo de la Ecuación de Difusión en (7) ha sido trasladado a la condición de borde en (9) a través del término fuente  $TF$  con la ventaja de que éste y su derivada direccional son funciones diferenciables en la frontera. Igualmente, se nota que la condición inicial queda inalterada independientemente de cuál hubiese sido originalmente en (7). Resumiendo los comentarios anteriores, la mayor ventaja que muestra (9) es que representa un problema de valor inicial y de contorno totalmente convencional para la Ecuación de Difusión y que puede resolverse por cualquier método numérico escogido o, de darse el caso, algún método analítico pertinente o una combinación de ambas posibilidades. Una vez evaluada  $P_{suave}$  por cualquier medio, la presión  $P$  solución de (7) queda determinada de forma única mediante la relación (8).

Para concluir cabe comentar que, en virtud de su formulación, este método permite aceptar la trayectoria del pozo horizontal tan curvada y/o torcida como la matemática pueda concebir. Por ejemplo, se puede obtener la distribución de presión generada por un pozo horizontal "ficticio" con una trayectoria dada por una hélice circular (González, 2000; Guevara et. al, 1999). Esta potencialidad del método es otro aporte de esta metodología en vista de que en la literatura especializada, por ejemplo, lo más tortuoso en pozos horizontales encontrado por estos autores es el caso de un pozo horizontal curvado pero sin torsión mostrado por Koh y Tiab (1993) en su trabajo y los casos, también sin torsión, estudiados por Azar-Nejad y colaboradores (1996d). Además de las posibilidades para geometrías arbitrarias de los pozos, la metodología puede extenderse para representar otras anomalías de yacimiento como por ejemplo, fracturas.

## MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Para la aplicación numérica del MCSS reportado en este trabajo, se escogió al MEF (Lapidus y Pinder, 1988; Sewell, 1985) como técnica numérica para la resolución de la Ecuación de Difusión. Para ello, se utilizó el paquete de elementos finitos PDE2D (Sewell, 1985) que permite resolver, usando bases polinómicas hasta de cuarto orden, sistemas generales de ecuaciones en derivadas parciales sobre regiones de forma arbitraria, en dos dimensiones y en cajas de forma ortoédrica en el espacio.

La selección del MEF fue determinada por su superioridad en el manejo de las condiciones de borde, lo cual es un factor importante para la utilización del MCSS. Más aún, el MEF podría amoldarse a formas tortuosas de un pozo horizontal utilizando grandes y complejos refinamientos de mallas (Morita, 1993) pero el costo computacional asociado a esta situación lo puede hacer inoperante particularmente en tres dimensiones, para flujo no estacionario y en dominios de frontera arbitraria.

La base polinómica utilizada en todos los ejemplos bidimensionales es de primer orden, lo cual bajo condiciones muy generales (Ewing y Wheeler, 1983), produce una discretización equivalente al método de diferencias finitas. En el caso tridimensional, PDE2D solamente permite bases polinómicas de orden 3 o Hermíticas. Esto se refleja en el número limitado de bloques permitidos para estudiar problemas tridimensionales lo que se agrava todavía más en los equipos empleados.

La discretización producida por PDE2D en cualquier dimensión es completamente implícita. Esto evita la restricción en la longitud de los pasos de tiempo basada en la condición de Courant-Friedrich-Lewy (Lapidus y Pinder, 1988). En su lugar, para las soluciones correspondientes a pasos de tiempo consecutivos y por razones de estabilidad y calidad de la solución, se exige una variación menor a  $10.e-04$  lo cual permite emplear en las simulaciones un número menor de pasos.

Un análisis más detallado del MEF está fuera de los objetivos de este trabajo ya que se ha hecho más énfasis en la potencialidad y flexibilidad que tiene el método para poder modelar y resolver los casos seleccionados. El MEF es una técnica bien conocida en las aplicaciones para ciencias e ingeniería y está ampliamente documentada en las referencias mencionadas.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se estudiarán cuatro ejemplos específicos para validar el modelo matemático y el MCSS propuesto para simular la distribución de presión generada por pozos horizontales. Dos de estos ejemplos son bidimensionales y los otros dos corresponden a casos tridimensionales.

### Ejemplo 1 (Validación en dos dimensiones)

Para fines de validación es conveniente utilizar un yacimiento homogéneo de forma rectangular, que contiene un pozo horizontal de longitud unitaria paralelo al lado de mayor extensión del dominio y cuyo centro coincide con el de  $\Omega$  tal como se ilustra en la Fig. 1; además, para este caso la solución analítica es conocida. Se supuso que la tasa total de producción del pozo es constante y de magnitud unitaria. Matemáticamente, el ejemplo planteado consiste en resolver la ecuación (10) sujeta a las condiciones de borde dadas en (7).

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P = \delta(y - 0.5) \int_{0.5}^{1.5} \delta(x - x_w) dx_w \quad (10)$$

A los fines de apreciar las ventajas del MCSS, se abordó también la solución del problema anterior aplicando, directamente, el MEF pero a la ecuación dada en (11) bajo las condiciones de borde dadas en (7). En este nuevo problema, la función generalizada ha sido aproximada por la función indicadora definida en el lado derecho de (11)<sup>1</sup>.

$$\frac{\partial P_a}{\partial t} - \Delta P_a = \begin{cases} 256 & \text{si } (x,y) \in [0.5, 1.5] \times \left[0.5 - \frac{1}{512}, 0.5 + \frac{1}{512}\right] \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (11)$$

El valor 256 en esta ecuación es el inverso del área del rectángulo que representa al pozo el cual tiene también longitud unitaria. Esta representación del pozo permite su consideración al aplicarse el método de los elementos finitos. Esto es relevante ya que la omisión del pozo, como pudiese ocurrir si directamente se usa la definición dada en (4) para representar la función generalizada, puede distorsionar sustancialmente el problema originalmente formulado. Puede demostrarse (Chavent and Jaffre, 1986; Raghavan and Ozkan, 1994) que en el proceso límite (conceptualmente hablando) y bajo refinamientos de malla (numéricamente hablando), esta función indicadora converge a la función generalizada de la ecuación (10), mientras que la correspondiente solución  $P_a$  lo hace a la solución analítica  $P$ . En la fig. 2.a se muestra la malla gruesa al lado de la malla fina (Fig. 2.b) que fueron utilizadas en el primer ejemplo. En esta última, la solución de (11) converge a la solución analítica propuesta por Fermín (1998) para el

<sup>1</sup> Denotaremos por MEFD a la aplicación directa del MEF al resolver la ecuación de difusión con un término no homogéneo dado por una función indicadora como la presentada en (11). 267



caso de yacimientos bidimensionales.

Es importante acotar que todas las mallas usadas en este ejemplo, tanto en el MCSS como en el MEFD, fueron diseñadas tomando en cuenta la presencia de la delgada banda rectangular utilizada en (11) como representación del pozo horizontal. Esto es definitivamente innecesario para obtener la solución a través del MCSS, pero se trabajó con este prescindible mallado sólo a los efectos de equiparar las condiciones de trabajo utilizadas en la solución determinada por el MEFD.

La validación del MCSS consistió en calcular la solución de (10) a distintos tiempos sobre mallas con distintos grados de refinamiento, para luego obtener el error absoluto cometido en la norma  $L^2$ . Para cada instante  $t$ , el error en norma  $L^2$  entre la solución analítica de la ecuación (10) y cualquier solución numérica se define por la fórmula (Russell and Wheeler, 1983):

$$\left( \iint_{\Omega} |P_{ana}(\vec{x}, t) - P_{num}(\vec{x}, t)|^2 d\Omega_{\vec{x}} \right)^{1/2} \quad (12)$$

la cual debe ser calculada numéricamente sobre todo el yacimiento. La tabla 1, presentada a continuación,

**Tabla 1.** Errores en Norma  $L^2$

<i>MCSS (Método Con Sustracción de Singularidades)</i>	
Log(h)	Log  Analítica-Numérica
-1.0986	-8.0102
-1.6094	-9.2567
-1.9459	-9.6800

<i>MEFD (Método de Elementos Finitos Directo)</i>	
Log(h)	Log    Analítica -Numérica
-2.3979	-9.0612
-2.7081	-9.3093
-3.2189	-9.7180

resume el logaritmo de los errores calculados al tiempo adimensional  $t = 1$  cuando las soluciones de presión han alcanzado el llamado *Estado Pseudo Estacionario* y con distintos mallados. El uso de la escala logarítmica permite obtener directamente el posible orden de convergencia de cada método a través de la pendiente de la recta que mejor se ajusta al gráfico de los errores vs. las longitudes de malla.

En la Tabla N° 1, puede observarse cómo el error absoluto en la norma  $L^2$  decrece a medida que se refina la malla. Es conveniente recordar que en el caso de elementos finitos, el refinamiento de mallas se determina en términos de la magnitud  $h$  que representa la longitud máxima de todos los

elementos que conforman la malla. Por otro lado, la Fig. 3 muestra la conducta establecida en la mencionada tabla así como las pendientes de las rectas allí presentadas las cuales permiten inferir el orden de convergencia de cada método. En el caso del MCSS, se registra una convergencia que tiende a ser cuadrática aún sobre mallas poco refinadas mientras que el MEFD tiende a converger linealmente logrando equiparar los resultados del MCSS sólo sobre mallas muy refinadas.

La Fig. 4.a muestra el perfil de presión adimensional para el tiempo adimensional  $t = 1$ , obtenida al utilizar el MCSS en la resolución de la ecuación (10) sobre la malla gruesa. Así mismo, la Fig. 4.b muestra la solución numérica utilizando el MEFD al resolver la ecuación (11) también sobre la malla menos refinada. Este tipo de figura representa dualmente la distribución de presión; es decir, a través de la superficie expuesta y a través de las isocurvas registradas en el plano horizontal.

En la Fig. 4.a pueden notarse, sobre el plano horizontal representando al yacimiento, las isocurvas de presión concéntricas al centro del pozo como ha sido reportado en la obra de Butler (1994) y en los trabajos de Azar-Nejad *et al.* (1996a, 1996b) cuando la presión alcanza el período pseudo estacionario. La Fig. 4.b muestra unas líneas de isopresión en el plano  $x$ - $y$  que lucen como elipses concéntricas al pozo horizontal lo cual es un comportamiento distinto al teóricamente esperado para esta etapa no transitoria de la conducta de presión.

Al comparar las correspondientes superficies, puede notarse el cambio gradual en la solución dada por el MCSS en contraste con los cambios bruscos de los valores obtenidos por el MEFD debido a sus respectivas capacidades numéricas de resolución. Esta comparación evidencia que el MCSS produce, aún sobre mallas pocas refinadas, mejores aproximaciones que el MEFD. Como conclusión de este análisis, se puede afirmar que, en el ejemplo considerado, una de las ventajas del MCSS con respecto al MEFD es que el primero converge con más rapidez.

### **Ejemplo 2 (Aplicación del MCSS a regiones irregulares en dos dimensiones)**

En este ejemplo se utilizará el MCSS para simular numéricamente el comportamiento de presión generado por un pozo horizontal en un yacimiento de frontera irregular. Para ello, se consideró la región  $\Omega$  de la Fig. 5 con la misma condición inicial y de frontera dada en (7). Al igual que en el anterior, la longitud del pozo es unitaria y produce a una tasa total constante de magnitud unitaria. La ecuación que

describe la distribución de presión generada por este pozo viene dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P = \delta(y - 0.6020) \int_{-0.4759}^{0.5241} \delta(x - x_w) dx_w \quad (13)$$

Procediendo como antes, también se resolverá el problema asociado a éste en el cual la función generalizada se aproxima por una función indicadora y cuya solución será obtenida mediante el MEFD. Esta ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial P_a}{\partial t} - \Delta P_a = \begin{cases} 256 & \text{si } (x, y) \in [-0.4759, 0.524] \times [0.6, 0.6039] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (14)$$

En la Fig. 6.a y la Fig. 6.b se muestran las mallas utilizadas en las aplicaciones del MCSS y el MEFD. En ellas, ambos métodos han convergido a la solución correcta. En este ejemplo y por carecer de la solución analítica del problema, se consideró como criterio de convergencia que un método numérico converge sobre una cierta malla, si las soluciones numéricas obtenidas en sus refinamientos no difieren puntualmente en más de  $10 \cdot 10^{-6}$  para el tiempo en consideración. Los mismos comentarios hechos en el Ejemplo 1 acerca del diseño de mallas y la presencia del pozo, son igualmente válidos aquí. Es importante recalcar que las mallas usadas sí consideran la posición del pozo horizontal y que son requeridas sólo al aplicar el MEFD. Para aplicar el MCSS no es necesario que la malla considere la localización del pozo como se mostrará en los ejemplos tridimensionales.

En la Fig. 7.a se muestra el área de drenaje generada por el pozo horizontal para el tiempo  $t = 0.01$ . Ella evidencia que en este tiempo la presión en el borde del pozo se comporta como si el yacimiento fuera infinito. Igualmente, las curvas de nivel definen, sin ambigüedades, la posición geométrica del pozo horizontal. La Fig. 7.b describe la evolución del área de drenaje para el tiempo  $t = 0.1$ , y en ella se observa que esta área alcanza primero aquellas partes de la frontera del yacimiento más cercanas a la parte longitudinal del pozo horizontal que es precisamente de donde se extrae la mayor cantidad de fluido. El área de drenaje final se aprecia en la Fig. 7.c y corresponde a la distribución de presión para el tiempo adimensional  $t = 1.0$  cuando ya se alcanzó la condición pseudo estacionaria. Para este tiempo, el área de drenaje es todo el yacimiento y por lo tanto ha dejado de expandirse. Además, se observa que las líneas de contorno cerca del pozo horizontal no son concéntricas con el mismo, como sí acontece en la gráfica anterior, sino más bien son concéntricas con su centro, lo cual es consecuencia de haber adoptado una tasa de producción constante y

uniforme para el pozo horizontal. Este comportamiento de la presión es típico de pozos verticales fracturados, en los cuales el fluido extraído por la fractura tiende a moverse hacia el centro de la misma donde supuestamente se ubica el pozo vertical que bombea el fluido hacia la superficie. Por este motivo muchos de los resultados disponibles para pozos fracturados son muchas veces aplicables a pozos horizontales. Cabe comentar que los pozos horizontales no siempre extraen el fluido por el centro sino por uno de sus extremos o en subintervalos de su trayectoria. Obviamente, son problemas que manejan otras hipótesis al momento de ser modelados, pero igualmente pueden ser abordados por el MCSS.

En la Fig. 8.a aparece la superficie que describe, para el tiempo adimensional  $t = 0.01$ , la distribución de presión en el yacimiento. En ella se observa que la presión a lo largo del pozo es casi constante excepto en sus extremos. Por el contrario, en la Fig. 8.b, correspondiente a la distribución de presión para  $t = 1.0$ , se observa el gradiente de presión existente a lo largo del pozo horizontal el cual obliga al fluido dentro del pozo a moverse hacia su centro. Esta conducta es similar a la observada en una fractura producida por un pozo vertical fracturado.

Fermin (1998), reporta cómo los contornos de presión producidos por el MEFD utilizando la malla gruesa de la Fig. 6.a en el tiempo  $t = 1.0$  parecen como si un pozo vertical estuviese colocado en el extremo más cercano del pozo horizontal con el borde del yacimiento. La solución obtenida sobre esta misma malla con el MCSS es la presentada en la Fig. 7.c y es cónsona con los resultados previstos.

En conclusión, este ejemplo muestra la capacidad del MCSS para simular la conducta no estacionaria de la presión generada por un pozo horizontal en un yacimiento bidimensional de frontera arbitraria.

### Ejemplo 3 (Validación en tres dimensiones)

Siguiendo el mismo razonamiento del Ejemplo 1, la validación del MCSS en tres dimensiones se realizó en un yacimiento ortoédrico. Sin embargo, en este caso no fue posible realizar refinamientos sucesivos de mallas para obtener la convergencia a la solución analítica debido a que el paquete PDE2D, en tres dimensiones, no es capaz de resolver mallas de orden superior a  $10 \times 10 \times 10$ . Más aún, el tiempo de ejecución requerido para procesar esta malla resultó excesivamente largo. Por tales motivos, los resultados generados en tres dimensiones usando el MCSS fueron generados en una malla de dimensión  $5 \times 5 \times 5$ .

Esta malla obligó a evaluar el MCSS utilizando el concepto de índice de productividad (Babu y Odeh, 1989; Butler, 1994; Craft y Hawkins, 1957). Para ello se emplearon pozos horizontales de diferentes longitudes, paralelos al eje  $x$  y cuyos centros coincidieron con el del dominio tomado por yacimiento:  $\Omega = [0,2] \times [0,1] \times [0,1]$ . Las longitudes de los pozos horizontales utilizados fueron 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0 respectivamente. Todos los pozos producen a una tasa total constante de magnitud unitaria. Matemáticamente, la presión generada por estos pozos viene determinada por la solución de la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P = \delta(y - 0.5)\delta(z - 0.5) \int_{l-1/2}^{l+1/2} \delta(x - x_w) dx_w \quad (15)$$

donde  $l$  es la longitud de los pozos. Esta ecuación fue resuelta tanto analíticamente como por el MCSS y el MEFD; además, se utilizó la misma condición inicial y de borde definidos en (7).

Por otro lado, en su concepción más simple, el índice de productividad se define por la relación (Craft y Hawkins, 1957)

$$J = \frac{Q}{P_e - P_{wf}} \quad (16)$$

donde  $Q$  es la tasa total de producción del pozo,  $P_e$  es la presión estática del yacimiento en el límite del área de drenaje del pozo y  $P_{wf}$  es la presión fluyente en el pozo. En cada caso, la solución se obtuvo al alcanzar el estado pseudo estacionario, es decir, la presión  $P_{wf}$  y la presión  $P_e$  fueron registradas en el tiempo  $t = 1.0$  (las dimensiones consideradas para la zona de drenaje fueron las de todo el dominio  $\Omega$ ).

En el caso presentado de un pozo horizontal modelado como una línea fuente, la presión fluyente en el pozo,  $P_{wf}$  se tomó como el promedio de las presiones sobre una superficie cilíndrica conteniendo al pozo en su interior (Babu y Odeh, 1989) y cuyos puntos distan de él una distancia igual a 0.00025. Este último valor fue escogido considerando que el cociente entre el radio exterior del yacimiento y el radio del pozo es aproximadamente 2000 (Craft y Hawkins, 1957). El radio adoptado como exterior al pozo y en la dirección radial al mismo fue de 0.5 en todos los casos.

Por otro lado, la presión  $P_e$  se tomó como la presión promedio del yacimiento y fue calculada dividiendo la integral volumétrica de la presión entre el volumen total del yacimiento (Craft y Hawkins, 1957). Los índices de productividad obtenidos aparecen resumidos en la Tabla N° 2.

Para fines de la validación, se consideró como el índice de productividad correcto aquel obtenido mediante el uso de la solución analítica, es decir  $J_A$ . Es evidente, al inspeccionar la Tabla N° 2, que las diferencias entre los índices  $J_{MEFD}$  y  $J_A$  son significativas y, en consecuencia, se puede esperar que el MEFD no produzca soluciones confiables para la presión bajo las limitaciones numéricas establecidas en la realización de este ejemplo. Por otro lado, los índices  $J_{MCSS}$  y  $J_A$  presentan discrepancias menores a pesar de las limitaciones establecidas. Para cuantificar los errores cometidos en el cálculo de los índices de productividad, se utilizó la siguiente fórmula para estimar el error relativo  $ER$  en la cual  $J_{NUM}$  puede adoptar cualquiera de los valores  $J_{MCSS}$  y  $J_{MEFD}$ .

**Tabla 2.** Índices de productividad

Longitud del Pozo $l$	Índice Analítico $J_A$	Índice MCSS $J_{MCSS}$	Índice MEFD $J_{MEFD}$
0.5	0.803056	0.738001	0.141712
1.0	1.516920	1.491960	0.387190
1.5	2.241470	2.204800	0.595675
2.0	3.328300	3.442710	0.845343

$$ER = \frac{J_A - J_{NUM}}{J_A} \quad (17)$$

La Fig. 9 muestra los errores relativos de cada método contra la longitud de cada pozo horizontal. El error relativo porcentual para todos los casos resueltos por el MCSS es menor o igual al 10%, lo cual implica que, a pesar de las mallas gruesas utilizadas, el MCSS produce resultados útiles para la ingeniería de yacimientos. Por el contrario, todos los errores relativos porcentuales del MEFD son superiores al 80% debido a que el tipo de malla utilizada no fue lo suficientemente fina para permitir la convergencia a la solución verdadera. Lo comentado puede apreciarse perfectamente en la Fig. 10 en la cual se presentan simultáneamente la solución analítica, la solución del MCSS y la solución del MEFD evaluadas en un punto cercano a la parte central del pozo horizontal. En esta gráfica, puede apreciarse que los altos errores producidos por el MEFD pueden ser atribuidos a una pobre resolución de los valores de presión en el periodo transitorio. Consecuentemente, la utilización del índice de productividad como criterio para evaluar el MCSS está bien concebido ya que ha sido capaz de considerar implícita y simultáneamente los periodos transitorio y pseudo estacionario de la respuesta de presión generada por el pozo.



**Ejemplo 4 (Aplicación del MCSS a pozos con orientación arbitraria en tres dimensiones)**

En este cuarto caso se propone evaluar la evolución de la presión asociada a un pozo rectilíneo e inclinado. Para tal fin, se escogió un pozo ubicado en una de las diagonales principales del yacimiento  $\Omega$  del ejemplo anterior, con centro coincidente al del yacimiento y de longitud 1.5. Se supuso una tasa de producción constante unitaria. La Fig. 11 representa aproximadamente la disposición espacial del pozo en el yacimiento. Específicamente, el comportamiento de presión para este pozo viene descrito por la ecuación (18) en la cual  $\vec{\gamma}(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), \gamma_3(u)) = \vec{x}_i + (1-u)(\vec{x}_f - \vec{x}_i)$  es la representación paramétrica del pozo horizontal cuyos puntos extremos,  $\vec{x}_f$  y  $\vec{x}_i$ , vienen dados por  $(1 \pm 2\sqrt{3}/32, 1/2 \pm \sqrt{3}/32, 1/2 \pm \sqrt{3}/32)$ , y  $u \in [0, 1]$ .

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta P = \int_0^1 \delta(\vec{x} - \vec{\gamma}(u)) \|\vec{\gamma}'(u)\| du \quad (18)$$

Esta ecuación fue resuelta únicamente por el MCSS, puesto que con la malla utilizada de 5 x 5 x 5 bloques, el MEFD no produce resultados satisfactorios en virtud de que resulta demasiado gruesa.

Los resultados obtenidos se presentan en la secuencia de la Fig. 12 para los tiempos 0.001, 0.1 y 1.0. Para el primer tiempo, se cumple que el volumen de drenaje se restringe únicamente a un volumen cercano al pozo y por lo tanto la distribución de presión se comporta como si el yacimiento fuera infinito. En el tiempo adimensional 0.01, la superficie de nivel que describe el volumen de drenaje se expandió hasta alcanzar el borde del yacimiento lo que indica la finalización del periodo transitorio y el comienzo del estado pseudo estacionario. Finalmente, en la Fig. 12.c se aprecia el volumen de drenaje abarcando todo el yacimiento lo que implica que se ha alcanzado del estado pseudo estacionario.

Esta figura también muestra que la conducta de la presión a lo largo del pozo, pareciera ser diferente al descrito en el caso bidimensional donde la acentuada variación de la presión en el pozo, era similar al comportamiento de un pozo vertical fracturado. En el caso tridimensional, este gradiente de presión no es tan evidente y los autores atribuimos esta diferencia, respecto al caso bidimensional, a la no equivalencia físico-matemática entre la solución fundamental de la Ecuación de Difusión en dos dimensiones y la correspondiente solución fundamental 3D.

Para concluir, se determinó el índice de productividad del pozo inclinado, de valor 0.7852, el cual es menor al obtenido para el pozo de misma longitud en el Ejemplo

3. Esta disminución en el índice de productividad es físicamente justificable debido a que el pozo inclinado está más cerca del borde del yacimiento que el pozo considerado en el Ejemplo 3.

Con este ejemplo, se ilustra una aplicación del MCSS en la cual se pone de manifiesto la independencia existente entre la malla utilizada y la forma y orientación del pozo modelado. Esto obedece a que la expresión analítica de la trayectoria del pozo no está presente en el problema simplificado que debe ser resuelto numéricamente. Consecuentemente, es posible vislumbrar la potencialidad de emular trayectorias del pozo tan curvadas y/o torcidas como lo permita su representatividad matemática tal como es mostrado por Guevara *et al.* (1999) y González (2000) al presentar el caso de un pozo horizontal con trayectoria en forma de hélice circular.

Los resultados obtenidos en este ejemplo 3D, aunque de precisión limitada por las restricciones de la malla, son físicamente coherentes y de gran utilidad práctica para el tipo de análisis cualitativo realizado en simulación de yacimientos.

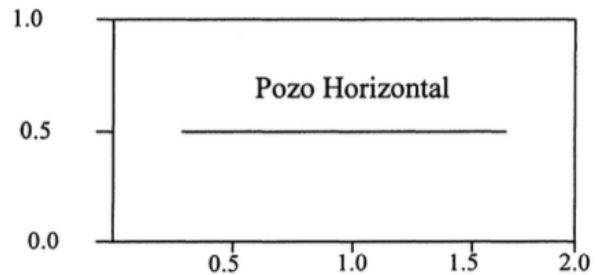


Figura 1. Pozo horizontal recto en un yacimiento finito y rectangular

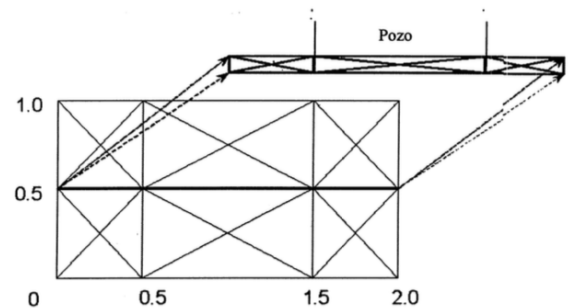


Figura 2.a. Malla gruesa utilizada en las soluciones numéricas del MEFD y el MCSS (ejm. 1)

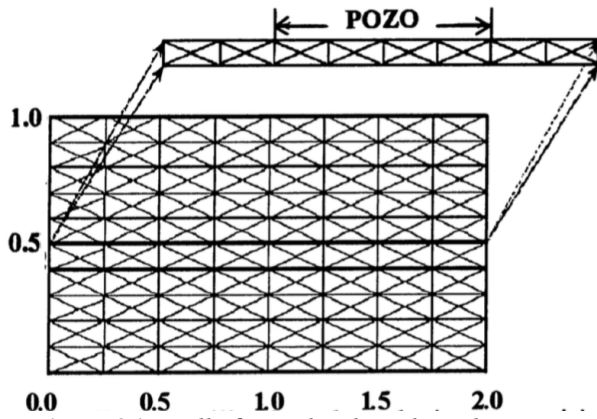


Figura 2.b. Malla fina utilizada en las soluciones numéricas del MEFD y el MCSS (ejm. 2)

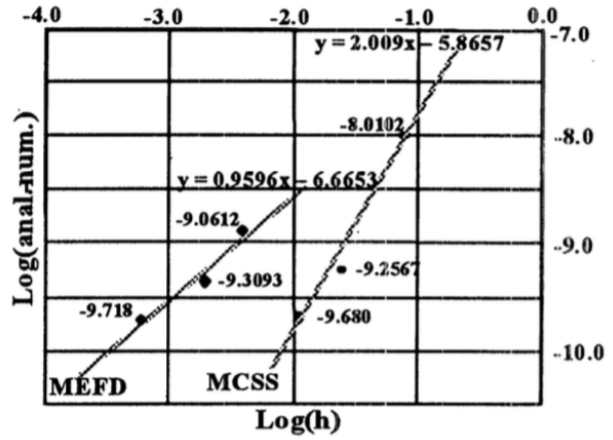


Figura 3. Error  $L^2$  vs. longitud de malla (escalas logarítmicas)

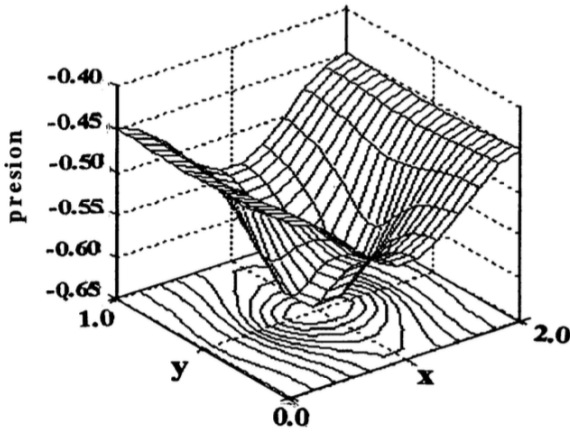


Figura 4.a. Perfil de presión por el MCSS en malla

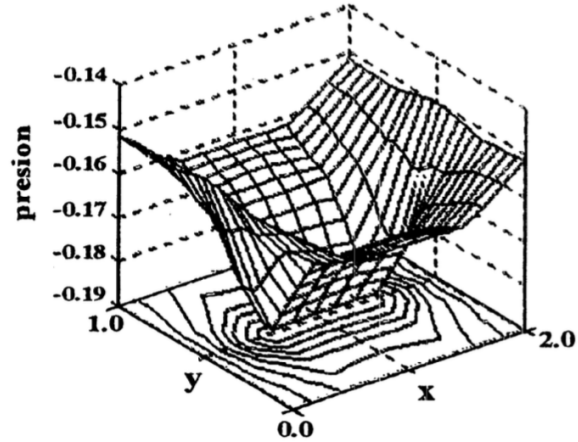


Figura 4.b. Perfil de presión por el MEFD en malla gruesa y a tiempo adimensional  $t=1.0$  (ejm. 1)

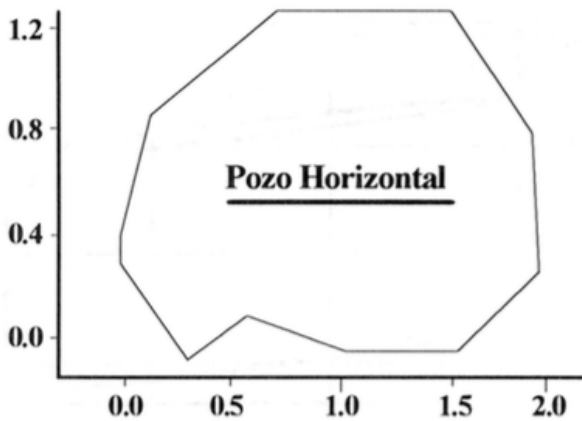


Figura 5. Pozo horizontal recto en un yacimiento de forma arbitraria (ejm. 2)

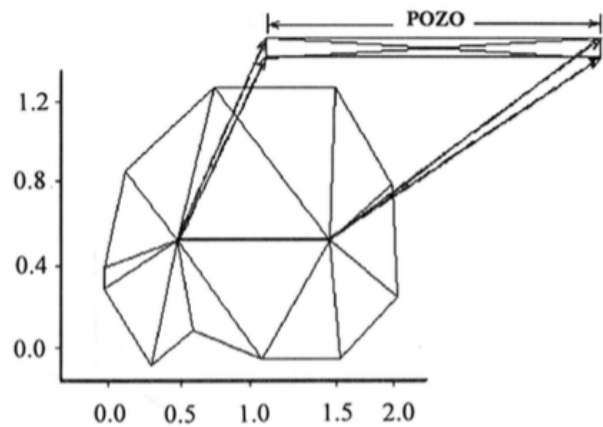


Figura 6.a. Malla gruesa utilizada en las soluciones numéricas del MEFD y el MCSS (ejm. 2)

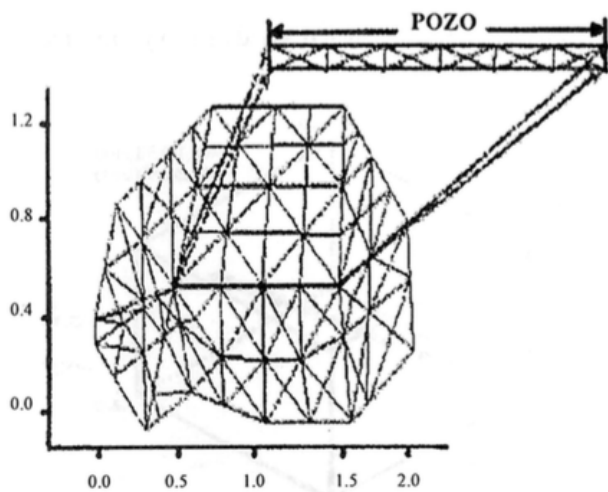


Figura 6.b. Malla fina utilizada en las soluciones numéricas del MEFD y el MCSS

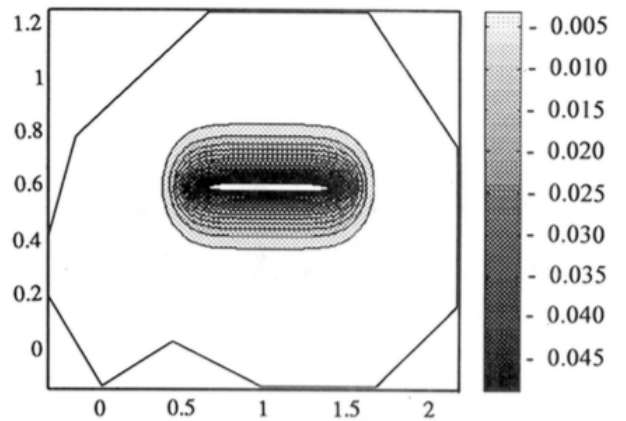


Figura 7.a. Isolneas de presión alrededor del pozo horizontal al tiempo adimensional  $t=0.01$

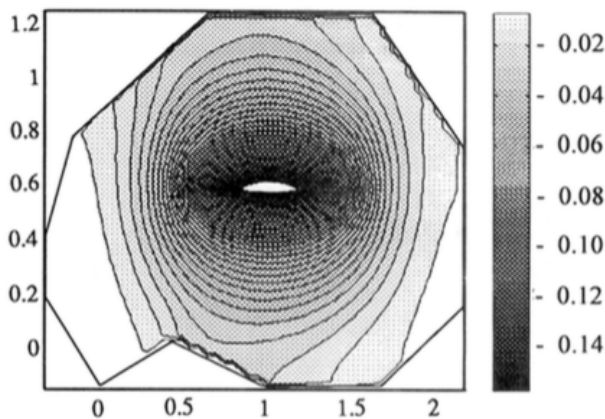


Figura 7.b. Distribución de presión alrededor del pozo

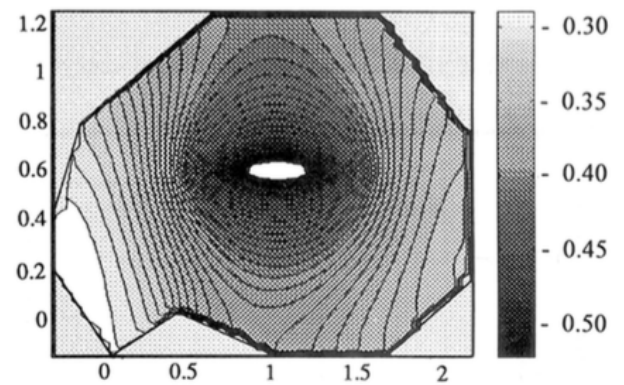


Figura 7.c. Líneas de isopresión alrededor del pozo

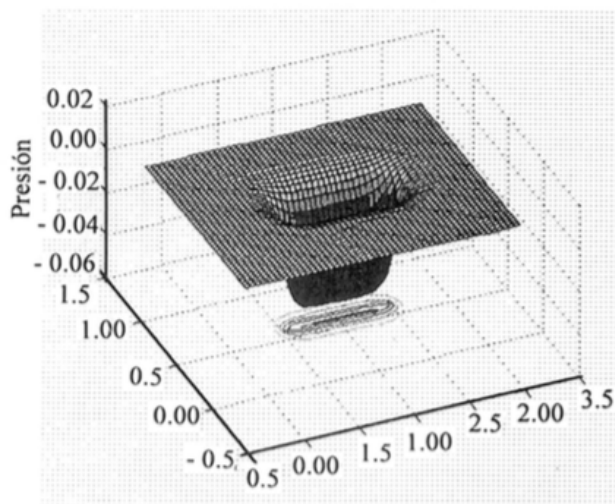


Figura 8.a. Perfil de presión por el MCSS al tiempo adimensional  $t=0.01$  (ejm 2)

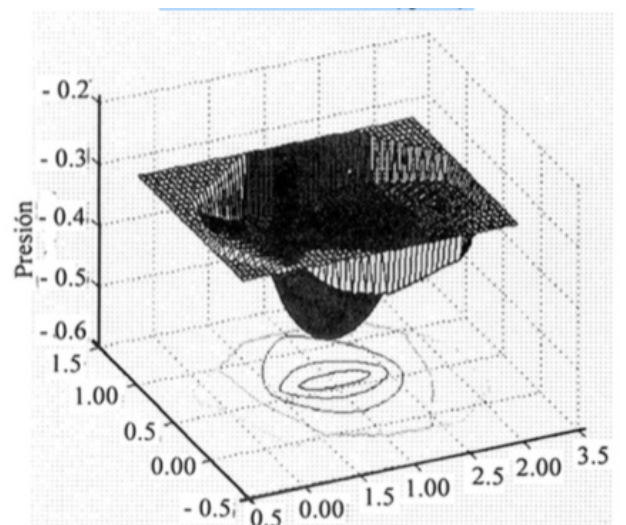


Figura 8.b. Perfil de presión por el MCSS al tiempo adimensional  $t=1.0$  (ejm 2)



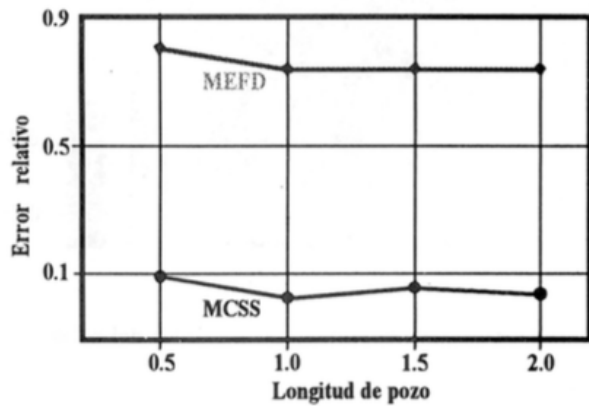


Figura 9. Error relativo del índice de productividad vs. longitud de pozo (ejm. 3)

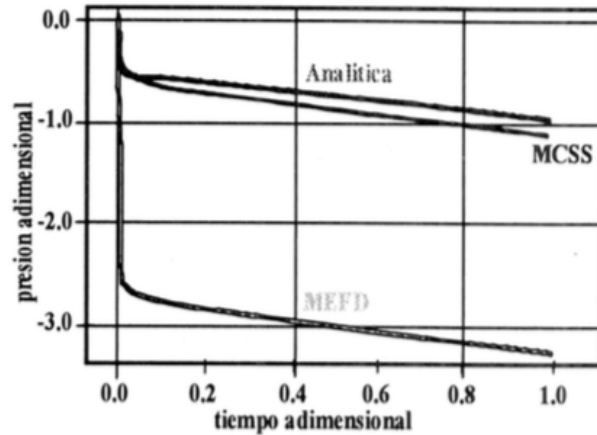


Figura 10. Soluciones de la presión transitoria en un punto del pozo por tres métodos (ejm. 3)

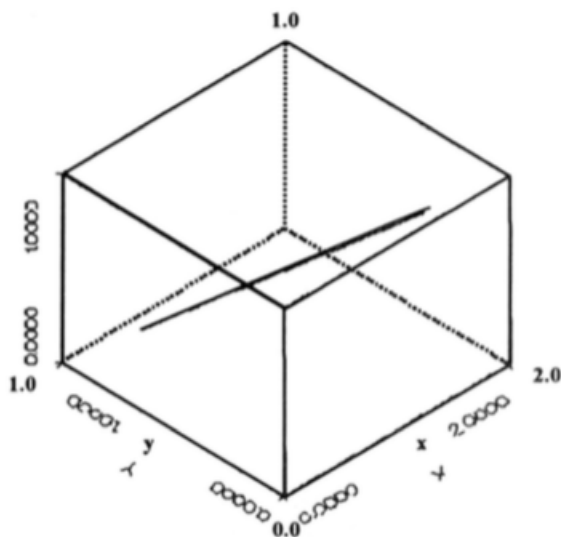


Figura 11. Pozo horizontal desviado en un yacimiento

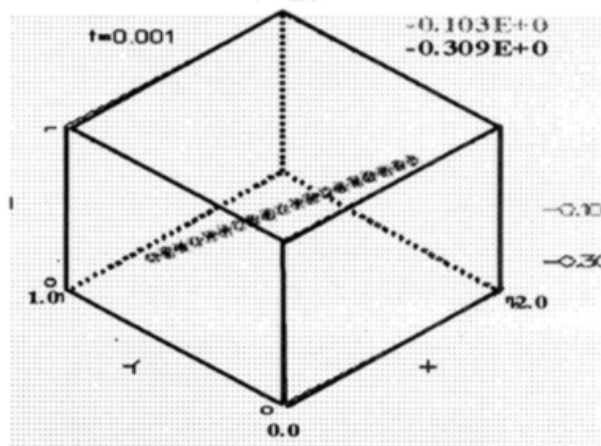


Figura 12.a. Distribución de presión alrededor del pozo desviado al tiempo  $t = 0.001$  (ejm. 4)

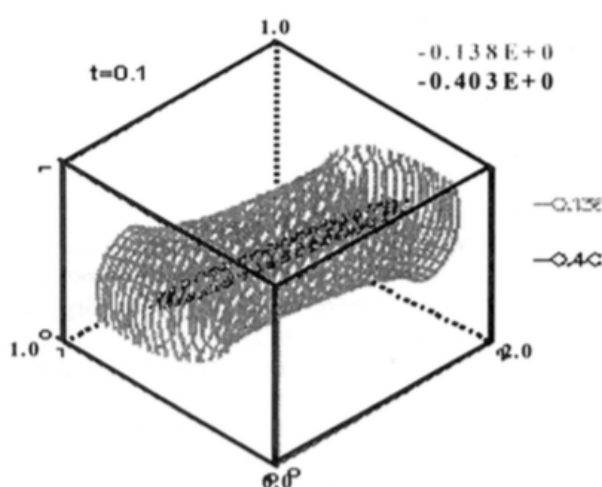


Figura 12.b. Superficies de isopresión alrededor del pozo desviado al tiempo  $t = 0.1$  (ejm. 4)

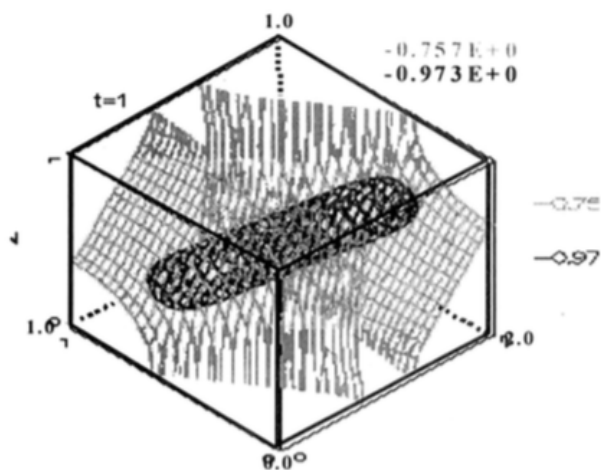


Figura 12.c. Isosuperficies de presión alrededor del pozo desviado al tiempo  $t = 1.0$  (ejm. 4)

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha mostrado y validado una nueva metodología para evaluar el comportamiento de la presión no estacionaria generada por un pozo horizontal, inclinado o tortuoso en un yacimiento petrolífero.

En el caso bidimensional, el MCSS propuesto como nueva metodología, presentó excelentes resultados. Se estableció numéricamente que, para casos bidimensionales, el orden de convergencia del MCSS tiende a ser cuadrático lo que le da mayor velocidad de convergencia que el MEFD.

La metodología propuesta permite obtener exitosamente la distribución de presión no estacionaria generada por un pozo horizontal en yacimientos con fronteras de forma arbitraria.

En aquellos casos que lo permitieron, las soluciones obtenidas con el MCSS sobre el mallado grueso, equiparan aquellas obtenidas por el MEFD en el mallado más fino lo cual evidencia su superioridad.

Los resultados en tres dimensiones, aunque menos precisos, fueron indicativos de la potencialidad del MCSS con relación a otros métodos tradicionales.

La utilización del índice de productividad como un criterio apropiado para evaluar el MCSS, está bien concebido en virtud de que fue capaz de considerar implícita y simultáneamente los períodos transitorio y pseudo estacionario de la respuesta de presión generada por el pozo horizontal.

El MCSS permite una total independencia entre la malla utilizada para resolver numéricamente el problema simplificado asociado, y la localización y orientación de la trayectoria del pozo.

En resumen, las principales ventajas del MCSS son la convergencia en mallas poco refinadas y la independencia de estas últimas con respecto a la localización y geometría de la trayectoria del pozo a modelar. Esto último le da el potencial de emular una trayectoria del pozo horizontal tan curvada y/o torcida como se quiera. Además, puede ser aplicado en yacimientos con fronteras de forma irregular.

## RECOMENDACIONES

A lo largo de este estudio, muchos aspectos importantes han quedado a la espera de ser atendidos. Desde el punto de vista de la ingeniería de yacimientos, podemos

mencionar aplicaciones de la metodología a la simulación de diversos pozos (horizontales y/o verticales) actuando simultáneamente; al modelado de pozos con subintervalos productores; el amplio espectro de aplicaciones de las pruebas de presión en la caracterización de yacimientos; el tratamiento correctivo de la presión de pozo y la presión del bloque de simulación; el modelar otros tipos de anomalías presentes en los yacimientos, etc.

Desde un punto de vista numérico, cabe formular estudios comparativos acerca de los tiempos de ejecución; la utilización de algoritmos eficientes del MEF para aplicaciones en tres dimensiones; la inclusión del método de elementos de frontera ("Boundary Element Method") como técnica numérica a utilizarse en la resolución del problema simplificado, etc.

Desde el punto de vista matemático, en el presente se trabaja (González, 2000) en la justificación analítica acerca de la convergencia numérica del método y sus ventajas sobre otras técnicas conocidas para manejar numéricamente singularidades implicadas en la Ecuación de Difusión bajo condiciones de frontera adecuadas a problemas de yacimientos.

Conocemos la importancia de los aspectos arriba mencionados y, por esta razón, creemos estar frente a toda una línea de futuras investigaciones vinculadas a nuestra propuesta. Ciertamente, las aplicaciones a la ingeniería de yacimientos son problemas ya abordados en la literatura; sin embargo, estos han sido estudiados con herramientas analíticas y/o numéricas que no cuentan con la flexibilidad ni la capacidad de modelar que tiene esta metodología. Estas cualidades ofrecen la posibilidad de potenciar ampliamente los resultados ya conocidos de los estudios de muchos de estos problemas.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue financiado parcialmente por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) de la Universidad Central de Venezuela a través del proyecto 03-11-3879/97. Así mismo, los autores agradecen los valiosos comentarios realizados por el profesor Vianey Villamizar.

## REFERENCIAS

ASTUOILLO, C. AND E. GUÉDEZ 1993. Tratamiento de singularidades en el modelaje de pozos de un yacimiento petrolífero. Tesis de grado dirigida por el Prof. R. González y el Prof. V. Villamizar. Escuela de



- Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- AZAR-NEJAO, F., W. TORTIKE, AND S. FAROUQ ALI 1996a. Potential distribution around the sources with finite length (horizontal, vertical partially penetrating wells and fractures). Part II: transient flow. Society of Petroleum Engineers, paper 35269.
- AZAR-NEJAO, F., W. TORTIKE, AND M. FAROUQ ALI 1996b. Potential distribution around the sources with finite length (horizontal, vertical partially penetrating wells and fractures). Part I: steady state fluid flow. Society of Petroleum Engineers, paper 35270.
- AZAR-NEJAD, F., W. TORTIKE, AND S. FAROUQ ALI 1996c. 3D analytical solution to the diffusivity equation for finite sources with applications to horizontal wells. Society of Petroleum Engineers, paper 35512.
- AZAR-NEJAO, F., W. TORTIKE, AND S. FAROUQ ALI. 1996d. Performance of horizontal wells with irregular geometry. Society of Petroleum Engineers, paper 36550.
- BABU, D.K., AND A. ODEH 1985. Productivity of horizontal wells. Society of Petroleum Engineers, paper 18298.
- BABU, D.K., AND A. ODEH 1989. Transient flow horizontal well, pressure drawdown, and buildup analysis. Society of Petroleum Engineers, paper 18802.
- BUTLER, R.M. 1994. Horizontal wells for the recovery of oil, gas and bitumen. The Petroleum Society of the Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum, Monograph No.2, Calgary.
- CARSLAW, H.S. AND J. JAEGER 1959. Conduction of heat in solids. Oxford University Press.
- CHAVENT, G. AND JAFRE J. 1986. Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation. North-Holland.
- CRAFT, B.C. AND M. HAWKINS 1957. Applied petroleum reservoir engineering. Prentice Hall.
- DAKE, L.P. (1978). Fundamentals of reservoir engineering. Elsevier.
- DOUGLAS, J., R. EWING, AND M. WHEELER 1983. Approximation of the pressure by a mixed method in the simulation of miscible displacement. R.A.I.R.O Analyse Numerique, Vol.17.
- DUCHATEAU, P. AND ZACHMANN, D.W. 1988. Partial Differential Equations. McGraw Hill.
- EWING, R. 1983. Problems arising in the modeling of processes for hydrocarbon recovery. In R.E. Ewing, (Ed.), SIAM books, The mathematics of reservoir simulation. Chapter I.
- EWING, R. AND WHEELER, M.F. 1983. "Galerkin methods for miscible displacement problems with point sources and sinks-unit mobility ratio", Mathematical Methods for Energy Research, SIAM.
- FERMÍN, A. 1998. Método de Green para la simulación numérica de pozos horizontales. Tesis de grado dirigida por el Prof. J. Guevara y el Prof. R. González. Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- GRINGARTEN, A.C. AND H. RAMEY, H.J 1973. The use of source and Green functions in solving unsteady flow problems in reservoirs. Society of and Petroleum Engineers, paper 3818.
- GONZÁLEZ, R. 2000. Metodologías Alternas para la Solución Numérica de la Ecuación de Difusión bajo Condiciones de Borde Pertinentes a las Aplicaciones en Simulación de Yacimientos. Tesis Doctoral a ser sometida. Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- GUEVARA, J., A. FERMÍN, AND R. GONZÁLEZ 1999. A new approach for horizontal wells singularities in petroleum engineering. Society of Petroleum Engineers, paper 51924.
- HAYES, L., R. KENDALL, AND WHEELER 1977. Treatment of source and sinks in steady state reservoir engineering simulations. In Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations II, IMACS (AICA).
- KOH, L.S., AND D. TIAB 1993. A boundary element algorithm for modeling 3D horizontal well problems using 2D grids", Society of Petroleum Engineers, paper 26228.
- LIGGETT, J. AND P. LIU 1983. Boundary integral equation method for porous media flow. George Allen & Unwin Publishers.

- LAPIDUS, L. AND G. PINDER 1988. Numerical Solution. of Partial Differential' Equations in Sciences and Engineering. John Wiley.
- MORITA, N 1993. Transient finite element code: a versatile tool for well performance analysis. Society of Petroleum Engineers, paper 25878.
- NEWMAN, A.B. 1942: Heating and cooling rectangular and cylindrical solids, Ind. and Eng. Chem. Vol. 34, pp. 874.
- O'NEILL, B. 1976. Elementary differential geometry. Academic Press.
- OZKAN, E. AND R. RAGHAVAN 1991a. New solution for well test analysis problems: part 1 -analytical considerations. Society of Petroleum Engineers, paper 18615.
- OZKAN, E. AND R. RAGHAVAN 1991b. New solution for well test analysis problems: part 2 - computational considerations and applications. Society of Petroleum Engineers, paper 18616.
- OZKAN, E. AND R. RAGHAVAN 1994. New solution for well test analysis problems: part 3 -additional algorithms. Society of Petroleum Engineers, paper 23593.
- RAGHAVAN, R. 1993. Well test analysis. Penn Well.
- ROPER W. A., J. MERCHANT, AND C. DUVALL 1962. Combination of numerical and analytical techniques to improve waterflood model efficiency. Society of Petroleum Engineers, paper 2031.
- RAGHAVAN, R. AND E. OZKAN 1994. A method for computing unsteady flows in porous media. Longman Scientific & Technical.
- ROSA A. J. AND R. CARVALHO 1986. A mathematical model for pressure evaluation in an infinite conductivity horizontal well. Society of Petroleum Engineers, paper 15967.
- RUSSELL, T.F. AND M. WHEELER M.F 1983. Finite element and finite differences methods for continuous flow in porous media. In R.E. Ewing (Ed.), SIAM books, The mathematics of reservoir simulation. Chapter II.
- SEWELL, G.V. 1985. Analysis of finite element method: PDE2D/Protran. Springer-Verlag.
- VLADIMIROV, V.S. 1971. Equations of mathematical physics. Marcel Dekker, Inc.

