

UNA APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA A LA CARACTERIZACIÓN DEL BILLAR DE SINAI

IMRE MIKOSS^{1,2}, PEDRO GARCÍA²

¹Universidad Simón Bolívar. Departamento de Formación y Ciencias Básicas. Baruta. Venezuela.

²Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ingeniería. Departamento de Física Aplicada.
Laboratorio de Sistemas Complejos. Caracas, Venezuela. e-mail: pedro@fisica.ciens.ucv.ve

Recibido: junio de 2009

Recibido en forma final revisado: febrero de 2010

RESUMEN

En este trabajo se construye, a partir de consideraciones puramente geométricas, un mapa para las reflexiones sucesivas de una partícula libre en el dispersor central de un billar de Sinai en el límite en el cual el diámetro del dispersor es máximo. El mapa es validado verificando cómo el resultado de iteraciones sucesivas del mismo se corresponde con reflexiones especulares en las secciones planas de la frontera. Resultados que pueden ser de utilidad no sólo en la caracterización del billar de Sinai, sino también en áreas como Ensayos No Destructivos, son presentados.

Palabras clave: Sistema caótico, Billar de Sinai, Mapa discreto, Caos Hamiltoniano, Caos cuántico.

A GEOMETRICAL APPROACH TO THE CHARACTERIZATION OF THE SINAI BILLIARD

ABSTRACT

We present a geometrical construction of the map associated to the Sinai billiard in the largest scatterer limit. The main result is validated by checking how consecutive iterations of the map are in agreement with symmetrical reflections on the plane sections of the boundary. Results that can be useful not only in the characterization of the Sinai's billiard but in areas such as Non-Destructive Testing are shown.

Keywords: Chaotic system, Sinai's Billiard, Discrete map, Hamiltonian chaos, Quantum chaos.

INTRODUCCIÓN

Al sistema dinámico que representa el movimiento de una partícula libre dentro de una región acotada del espacio, con reflexiones elásticas en las fronteras, se le conoce como un billar (Birhoff, 1927).

Las órbitas de estos sistemas pueden ser representadas por una sucesión de segmentos de recta, conectados en el lugar donde ocurre la colisión con la frontera y orientados de acuerdo a la regla: ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión. Si prestamos atención solamente a la ubicación de la colisión y al ángulo de incidencia, el flujo asociado a este sistema se transforma en un mapa discreto de la forma $(r', \theta')^T$. Donde r es la posición del impacto en la frontera, θ es el ángulo de inclinación de la trayectoria y f es una función vectorial.

nadas por la forma de la frontera y pueden variar desde los comportamientos totalmente regulares hasta los totalmente desordenados o caóticos, similares en muchos aspectos al de los sistemas de evolución aleatoria.

Los ejemplos mejor estudiados de esta última clase de sistemas son los billares de Sinai (Sinai, 1969) y Bunimovich (Bunimovich, 1979). Particularmente el billar de Sinai consiste en una partícula rebotando dentro de un cuadrado reflector perfecto con un dispersor circular central, igualmente reflector.

A pesar de su simplicidad estos sistemas pueden exhibir una gama de comportamientos numerosa y es por esta razón que son usados como modelos de la evolución de una gran cantidad de sistemas reales (Fromhold, 1997; Louis *et al.* 1997; Sridhar *et al.* 1992).

Las propiedades dinámicas de los billares están determi-

Las investigaciones sobre estos modelos van desde las de

carácter fundamental, como lo es el estudio de la relación entre billares caóticos y la hipótesis de Riemann (Gutzwiller, 1990; Berry *et al.* 1999a), hasta los netamente aplicados, como lo son el estudio de la resistencia fractal en transistores (Fromhold, 1997), la caracterización de metales granulares (Louis *et al.* 1997), el estudio experimental de propagación de microondas en billares caóticos (Sridhar, 1992) o la caracterización de la propagación de ondas mecánicas en términos de la dinámica de rayos (Tanner *et al.* 2007). Este último tipo de estudio por su parte, podría ser de utilidad en áreas como Ensayos No Destructivos, donde esta clase de situación es usada en la caracterización de fallas en probetas.

Por otro lado, la descripción cuántica en el límite semiclásico de los billares caóticos, constituye uno de los paradigmas de lo que se conoce como *caos cuántico* (Gutzwiller 1990; Berry *et al.* 1999-b). Entendiéndose este término como el nombre que engloba el comportamiento dinámico de sistemas clásicamente caóticos, cuando se le observa en régimen cuántico.

En este caso, es bien sabido que los autovalores de energía de una partícula rebotando dentro de un billar como el de Sinai, poseen en la diferencia, con sus primeros vecinos, una distribución similar a la de los ceros de la función Zeta de Riemann (Gutzwiller, 1990). A principios del siglo pasado, Hilbert y Polya (citado por Gutzwiller (1990) y Berry *et al.* (1999)), hicieron una conjetura respecto a los ceros de la función Zeta de Riemann y supusieron que debería existir algún operador hermítico cuyos autovalores fuesen dichas cantidades precisamente. La existencia de dicho operador está ligada a la hipótesis de Riemann (citado por Gutzwiller, 1990), la cual supone que todos los ceros no triviales de la función Zeta están localizados sobre la línea compleja con parte real $1/2$.

Todo lo anterior indica que por alguna razón, aún no muy clara, los autovalores de energía de una partícula dentro de la versión semiclásica de un billar como el de Sinai, están relacionados con las posiciones de los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann. Estos últimos están a su vez relacionados íntimamente con la secuencia de los números primos debido a la fórmula de Euler, que es una forma alternativa de expresar la función Zeta de Riemann como una productoria de números primos, y que expresa en realidad la posibilidad de descomponer cualquier número en factores primos, esto es, el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Es claro que una aproximación a la caracterización del mapa que describe las trayectorias en un billar de Sinai arrojaría luz a algunos de los problemas anteriormente considerados.

Con este fin, el artículo está organizado como sigue: en la sección I se presenta un esquema para la determinación del mapa de un billar cuadrado, basado en la idea de asociar a las intersecciones de una recta con una retícula infinita. En la sección II esta idea es usada para la construcción del mapa de las reflexiones de un billar de Sinai en el límite en el cual el reflector central tiene el diámetro máximo. En la sección III se da una suerte de validación del mapa. Finalmente en la sección IV se presentan algunas conclusiones.

MAPA DE REFLEXIONES EN LAS FRONTERAS DE UN BILLAR CUADRADO

La idea detrás de la deducción de un mapa, para las reflexiones sucesivas de la partícula dentro del billar, está en la equivalencia de la trayectoria real de la partícula con una trayectoria imaginaria rectilínea (Kruelle, 1997). Dicha trayectoria recorre el espacio plano sin fronteras, al cual se sobrepone una retícula cuyas celdas son idénticas al billar original. En la figura 1 se observa como las reflexiones en las fronteras del billar pueden ser asociadas con las intersecciones de la trayectoria rectilínea con la retícula. La correspondencia entre la retícula y las paredes del billar es simple: una línea de la retícula siempre representa el mismo lado del billar. Ello implica que dentro de la retícula las infinitas imágenes del billar son reflexiones respecto a los ejes de simetría del mismo.

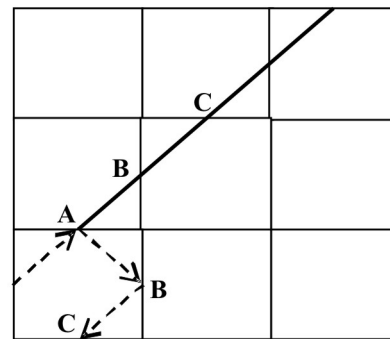


Figura 1. Equivalencia entre trayectorias reales y trayectorias rectas en el reticulado.

De esta forma, cada casilla de la cuadrícula es equivalente al billar original bajo una o dos transformaciones de reflexión especular.

MAPA DE REFLEXIONES EN EL DISPERSOR CENTRAL DE UN BILLAR DE SINAI

Este trabajo se enfoca en el caso del billar de Sinai con la pared circular de máximo diámetro, como se muestra en la figura 2. De esta manera el movimiento de la partícula queda restringido a una esquina de billar. Sumado a esto, la descripción de las trayectorias se hace considerando re-

flexiones en el dispersor central, utilizando para ello como variable de estado el ángulo (α) formado por el vector posición con la horizontal y el ángulo (θ) formado por la trayectoria y la tangente a la frontera en el punto de impacto.

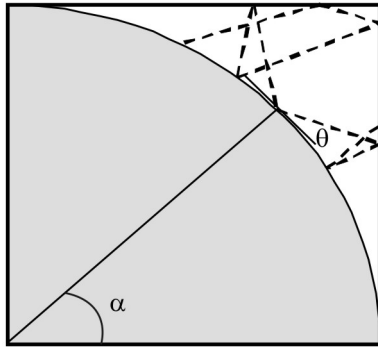


Figura 2. Un ejemplo de trayectoria.

En contraste con el caso anterior, en el cual se estudian explícitamente las intersecciones de la trayectoria recta con la retícula, para estudiar las reflexiones, debidas al dispersor central, se consideran sólo las intersecciones de la trayectoria con versiones del arco dispersor adecuadamente reflejado respecto a los ejes. Para ello, se pensaron en dos clases de reflexiones en las paredes planas del billar, las de las trayectorias que van del dispersor central a la pared plana y luego al dispersor y las que van del dispersor a una pared plana, luego a la otra y de vuelta al dispersor. Cada una de estas clases de reflexiones está representada en la figura 3 por una reflexión del arco dispersor original. Las de la primera clase están representadas por las reflexiones respecto al eje vertical y horizontal y las de la segunda clase por una doble reflexión primero respecto a un eje y luego respecto al otro (reflector diagonalmente opuesto).

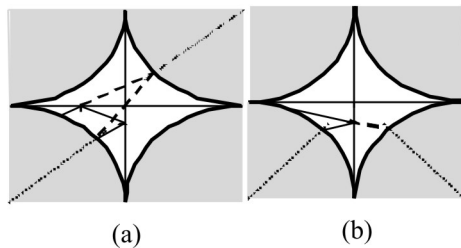


Figura 3. Equivalencia entre reflexiones en los arcos de la frontera y reflexiones de la partícula en las secciones planas del billar.

Los diagramas de las figuras 4 y 5 permiten deducir la relación geométrica entre reflexiones sucesivas de la partícula.

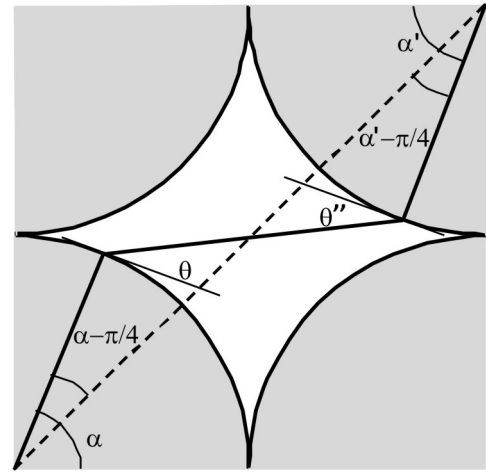


Figura 4. Estimación de la primera parte del mapa.

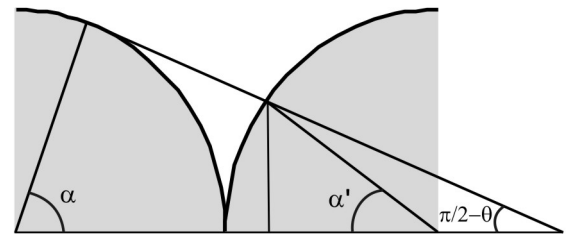


Figura 5. Estimación de la segunda parte del mapa.

Particularmente en la figura 4 se observa como la trayectoria de una partícula saliente del arco inferior izquierdo puede tener como destino, cualquiera de los tres arcos vecinos. Sin embargo, sólo dos destinos son diferentes ya que por simetría el arco superior es equivalente al arco lateral. De esta manera, los destinos a considerar son: el arco diagonalmente opuesto o el arco lateral. En esta misma figura se relacionan los ángulos de salida α y θ con los ángulos de llegada α' y θ' . La clave para establecer las relaciones geométricas es la diagonal de longitud $2\sqrt{2}R$ y el ángulo $\alpha - \pi/4$, señalado en la figura 4 y subtendido por la misma diagonal. Como los ángulos internos de un triángulo deben sumar π , se establece una primera igualdad en los 2 triángulos que forma la diagonal: $3\pi/4 - (\alpha + \theta) = 3\pi/4 - (\alpha' + \theta')$. Se sigue directamente que $\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$.

Otra relación se deriva de la ley de los senos aplicada al mismo par de triángulos. Llamando h y h' a los lados respectivos que cada triángulo forma con la diagonal, se tiene

que:

$$\begin{aligned}
 h + h' &= 2\sqrt{2}R, \\
 \frac{h}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} &= \frac{R}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - (\alpha + \theta)\right)}, \\
 \frac{h'}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta'\right)} &= \frac{R}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - (\alpha' + \theta')\right)} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Un poco de álgebra devela una parte del mapeo buscado:

$$\begin{aligned}
 \theta' &= \pi - \cos^{-1}[2(\cos(\alpha + \theta) + \text{sen}(\alpha + \theta)) - \cos(\theta)] \\
 \alpha' &= \alpha + \cos^{-1}[2(\cos(\alpha + \theta) + \text{sen}(\alpha + \theta)) - \cos(\theta)] \quad (2)
 \end{aligned}$$

Como puede observarse en la figura 3(a), para encontrar θ' hay que restarle θ'' a π . Este es el motivo por el cual aparece dicha cantidad en el renglón superior de la ecuación (2).

El resto del mapa se obtiene a partir de la configuración presentada en la figura 5.

En ella se observan los dos cuartos de círculo unidos lateralmente. Las relaciones geométricas entre (α, θ) y (α', θ') se establecen con la ayuda de los 2 triángulos cuyo ángulo y lado en común son respectivamente α y R . Directamente del triángulo mayor se puede deducir lo siguiente:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right) = \frac{R\text{sen}(\alpha')}{\frac{R\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)} - 2R + R\cos(\alpha')} \quad (3)$$

En el denominador de la ecuación anterior se usó nuevamente el teorema del seno para calcular el primer término, el cual representa el tamaño de la base del triángulo mayor. Simplificando y usando la relación:

$$\theta + \theta' + \alpha + \alpha' = \pi,$$

se obtiene finalmente el mapa para las reflexiones sobre el arco lateral. Igual que en el caso anterior θ' es el ángulo antes de rebotar, para obtenerlo después del rebote hay que restárselo a π , ambos cambios se han realizado en la ecuación que sigue:

$$\begin{aligned}
 \theta' &= \cos^{-1}[2(\cos(\alpha + \theta)) - \cos(\theta)] \\
 \alpha' &= \cos^{-1}[2(\cos(\alpha + \theta) + \cos(\theta)) - \cos(\alpha)] - (\alpha + \theta) \quad (4)
 \end{aligned}$$

La situación mostrada en la figura 5 es precisamente una situación extrema donde el triángulo menor subtiende el ángulo α' en su intersección con el arco vecino. Dicho ángulo es el menor posible (el correspondiente a $\theta = 0$), que puede alcanzar α' . Para completar el mapa hay que simetrizar la ecuación (4), para que represente los rebotes en el arco vecino superior, y hay que hallar el valor de θ al cual ocurre el cambio de vecino. Esto sucede cuando el argumento del arcocoseno en la ecuación (4) vale -1. En dicha situación, la intersección de la trayectoria con el arco vecino se vuelve tangente y por ende único (en general una recta corta un círculo en dos puntos). Posteriormente cuando el argumento se hace menor que -1, los resultados de aplicar la ecuación (4) son complejos, lo que significa que la trayectoria no está intersectando ya al arco vecino lateral y por ende está intersectando al arco vecino oblicuamente opuesto. Entonces si el argumento es menor que -1 los valores de α' y θ' ya no están dados por la ecuación (4) sino por la ecuación (3). Este valor límite de θ depende de α de la siguiente forma:

$$\theta_{\text{lim}} = \cos^{-1} \left[\frac{1 - 2\cos(\alpha) + 4\sqrt{2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}(\alpha)}}{5 - 4\cos(\alpha)} \right] \quad (5)$$

El valor de θ al cual esta transición ocurre entre el semicírculo vecino lateral y el semicírculo vecino superior, se puede hallar a partir del anterior usando argumentos de simetría. Sumando todos los resultados anteriores, incluyendo los que se obtengan por simetría a partir de las ecuaciones (4) y (5), se presenta finalmente el mapa completo de α' y θ' en función de α y θ en la ecuación (7), la cual es una función recurrente, continua a trozos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\alpha}(\alpha_n, \theta_n) \\ f_{\theta}(\alpha_n, \theta_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde, si llamamos $v_n = \alpha_n + \theta_n$, $f_{\alpha}(\alpha_n, \theta_n)$ y $f_{\theta}(\alpha_n, \theta_n)$ están dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha}(\alpha_n, \theta_n) &= \begin{cases} \cos^{-1}[2\cos(v_n) - \cos(\theta_n)] - (v_n) & 0 < \theta_n < l_1 \\ \cos^{-1}[2(\cos(v_n) - \text{sen}(v_n)) - \cos(\theta_n)] & l_1 < \theta_n < l_2 \\ \pi - v_n - \cos^{-1}[\cos(\theta_n) - \text{sen}(v_n)] & l_2 < \theta_n < \pi \end{cases} \\
 f_{\theta}(\alpha_n, \theta_n) &= \begin{cases} \cos^{-1}[2\cos(v_n) - \cos(\theta_n)] & 0 < \theta_n < l_1 \\ \pi - \cos^{-1}[2(\cos(v_n) - \text{sen}(v_n)) - \cos(\theta_n)] & l_1 < \theta_n < l_2 \\ \pi - v_n - \cos^{-1}[\cos(\theta_n) - \text{sen}(v_n)] & l_2 < \theta_n < \pi \end{cases} \quad (7)
 \end{aligned}$$

En la ecuación (7) los límites l_1 y l_2 están dados por:

$$l_1 = \cos^{-1} \left[\frac{1 - 2\cos(\alpha_n) + 4 \operatorname{sen}(\alpha_n/2)\operatorname{sen}(\alpha_n)}{5 - 4\cos(\alpha_n)} \right]$$

$$l_2 = \pi - \cos^{-1} \left[\frac{1 + 4\cos(\alpha_n)[\cos(\alpha_n) - \operatorname{sen}(\alpha_n/2) - \operatorname{sen}(\alpha_n)]}{5 - 4\operatorname{sen}(\alpha_n)} \right] \quad (8)$$

Finalmente, las iteraciones sucesivas de este mapa generan todas las trayectorias posibles de una partícula, a partir de cualquier condición inicial. Cada iteración equivale a un nuevo rebote con el dispersor.

ALGUNOS RESULTADOS

La siguiente sección está dedicada a la validación del mapa obtenido y a la presentación de trayectorias generadas con el mismo. Con el objeto de cumplir con la primera tarea, se muestra cómo los pares $[(\alpha_n, \theta_n), (\alpha_{n+1}, \theta_{n+1})]$ asociados a los impactos de la partícula, con el dispersor central, son consistentes con reflexiones especulares en las secciones rectas de la frontera. Por simplicidad se consideran separadamente las dos clases de reflexiones anteriormente nombradas:

Reflexiones clase I

Acá se consideran las reflexiones de trayectorias que van del dispersor a alguna pared para luego regresar al dispersor.

En la figura 6 es fácil notar que $\beta + \alpha + \theta = \pi/2$. Con esta rela-

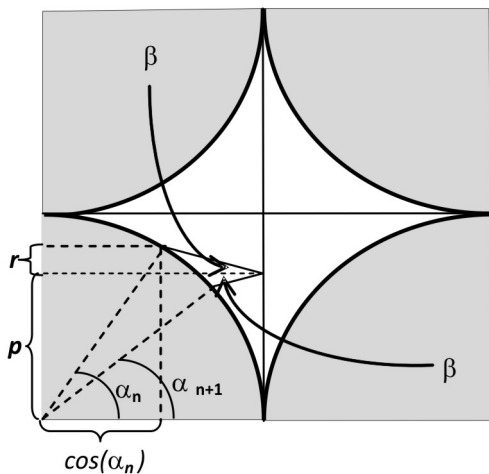


Figura 6. La figura muestra la equivalencia entre ángulos para impactos sucesivos y reflexiones especulares en las paredes planas para las reflexiones de clase I.

ción y calculando r puede obtenerse p , dado por:

$$p = \frac{\cos(\theta_n) - \cos(\alpha_n + \theta_n)}{\operatorname{sen}(\alpha_n + \theta_n)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n) - p}{1 - \cos(\alpha_n)} = \operatorname{ctg}(\alpha_n + \theta_n)$$

$$\operatorname{tg}(\beta') = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_{n+1}) - p}{1 - \cos(\alpha_{n+1})} = -\operatorname{ctg}(\alpha_n + \theta_n) \quad (9)$$

Donde la segunda igualdad en la ecuación (9) se ha obtenido escribiendo la dependencia de α_{n+1} con α_n y θ_n y para luego simplificar la expresión usando el software de programación simbólica *mathematica*®.

Reflexiones clase II

Las reflexiones de la clase II son tales que la partícula parte del dispersor para luego reflejarse en una pared plana, luego en la otra y de vuelta al dispersor.

En la figura 7 las relaciones angulares, en este caso, están dadas por $\beta = \alpha + \theta + \pi/2$ y p resulta en la misma cantidad

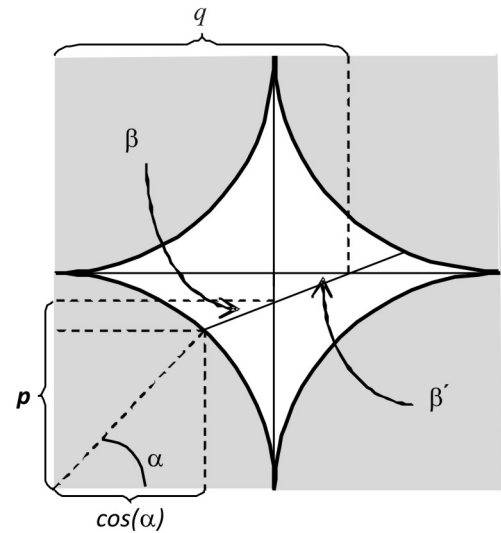


Figura 7. La figura muestra la equivalencia entre ángulos para impactos sucesivos y reflexiones especulares en las paredes planas, para las reflexiones de clase II.

anterior. Por su parte q estará dada por:

$$q = \frac{\cos(\theta_n) - \operatorname{sen}(\alpha_n + \theta_n)}{\cos(\alpha_n + \theta_n)}$$

$$tg(\beta) = \frac{p - \text{sen}(\alpha_n)}{1 - \text{cos}(\alpha_n)} = -ctg(\alpha_n + \theta_n)$$

$$tg(\beta') = \frac{q - 1}{1 - p} = ctg(\alpha_n + \theta_n) \quad (10)$$

El procedimiento seguido para alcanzar la última identidad es el mismo que en el caso anterior. De esta manera se muestra la validez del mapa además de completarlo, ya que en estas últimas estimaciones se calculan, la ubicación y los ángulos de colisión para los choques en las fronteras planas.

La figura 8 muestra una trayectoria del mapa (6), generada numéricamente. Adicionalmente, con los resultados anteriores es posible generar trayectorias reales de la partícula a partir del mapa de las colisiones con el dispersor. La figura 9 muestra una de esas trayectorias.

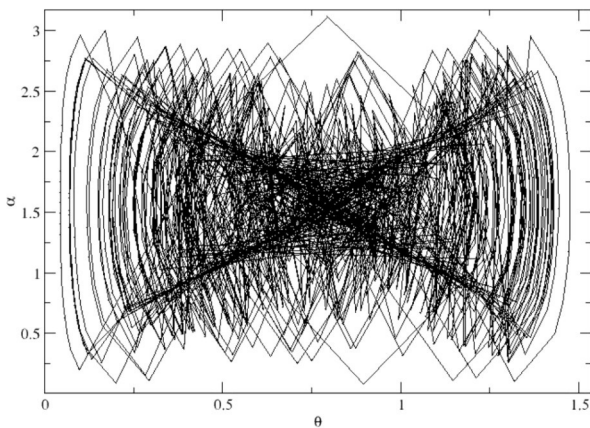


Figura 8. Mapa de las reflexiones en el dispersor circular.

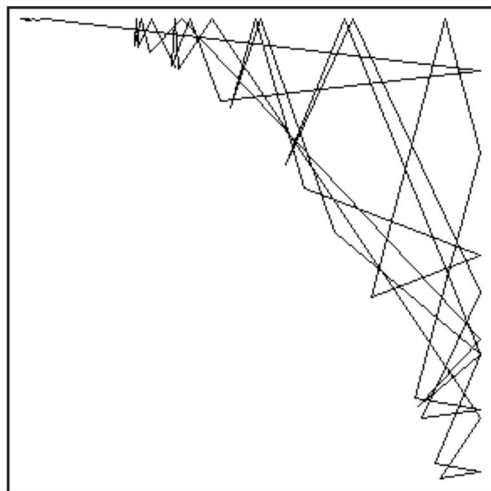


Figura 9. Un ejemplo de trayectoria generada usando f .

En la figura 10 se presentan las trayectorias seguidas por el sistema para dos condiciones iniciales cercanas. El gráfico muestra la sensibilidad de la órbita a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. Esto es un comportamiento esperado, dado el resultado de Sinai (Sinai, 1969) donde se muestra que para billares acotados por curvas suaves a trozos y estrictamente convexas hacia adentro el comportamiento de la trayectoria es caótico.

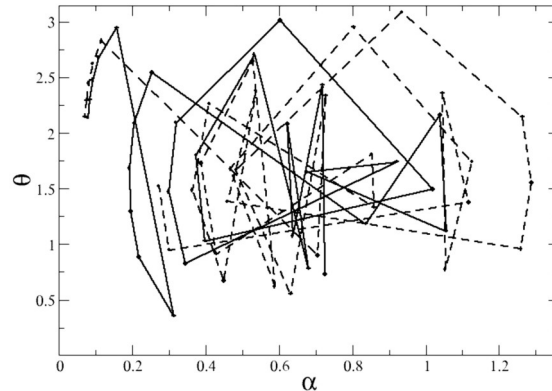


Figura 10. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Acá se muestra cómo dos órbitas inicialmente cercanas son alejadas rápidamente por acción de la dinámica.

CONCLUSIONES

En este trabajo se construye a partir de consideraciones puramente geométricas, un mapa que representa los rebotes sucesivos de una partícula puntual en el dispersor central del billar de Sinai, en el límite en el cual el dispersor es máximo.

Cabe destacar que un mapa de este tipo facilita la determinación de las órbitas periódicas inestables asociadas al sistema, lo que a su vez puede ser de utilidad no sólo en el estudio de la versión cuántica de estos sistemas sino en la caracterización de la propagación de ondas en este tipo de sistema.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela.

REFERENCIAS

- BEERRY, M.V. & KEATING, J.P. (1999-a). $H = xp$ and the Riemann zeros, in Keating, Jonathan P.; Khmelnitski, David E. & Lerner, Igor V. *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, New York: Plenum, ISBN 978-0-306-45933-7.

- BEERRY, M.V. & KEATING, J.P. (1999-b). The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics. *SIAM Review*, 41, 2, 236-266.
- BIRKOFF, G. (1927). On the periodic motions of dynamics. *Acta Math*, 50, 359-379.
- BNIMOVICH, L.A. (1979). On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards, *Commun Math Phys*, 65, 295-312.
- FROMHOLD, T.M. (1997). Fractal Resistance in a Transistor, *Nature*. 386, 6621, 123-125.
- GUTZWILLE, M.C. (1990). *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-97173-4.
- KRUELLE, C.A., KITTEL, A., PEINKE, J., RICHTER., & HUEBENER, R.P. (1997). Chaotic billiards seen as mirror cabinets. *Physica D*, 102, 227-233.
- LOUIS, E., VERGÉS, J.A., CUEVAS, E., ORTUÑO, M. (1997). A new model of quantum chaotic billiards: application to granular metals. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*. 103, 2, 297-304.
- RITCHER, A. (2001). Wave dynamical chaos: An experimental approach in billiards. *Physica Scripta*. T90, 212-222.
- SINAI, Y.G. (1969). Dynamical Systems with Elastic reflections, *Russ. Math. Surv.* 25, 137-189.
- SRIDHAR, S., HOGENBOOM, D.O., WILLEMSSEN, B.A. (1992). Microwave experiments on chaotic billiards. *Journal of Statistical Physics*. 68, 1-2, 239-258.
- TANER, G. & SØNDERGAARD, N. (2007). Wave chaos in acoustics and elasticity. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40, R443-R509, s/n.