

JESÚS F. BACETA V.

LÓGICA, MUNDOS POSIBLES Y CONEXIONES DE GALOIS

Resumen: Se argumenta que la característica distintiva de las lógicas contemporáneas, proposicional, cuantificacional y sus tipos modales, son un tipo de oposiciones de oposiciones llamadas “conexiones de Galois”. Para ello, se explica la noción de mundo posible kripkeano, se explicitan las conexiones de Galois presentes en la cuantificación, en las modalidades aléticas y se muestra cómo estas oposiciones, mediante una sugerencia de Montague, aparecen en el tratamiento de modalidades no-aléticas como la posibilidad y necesidad física.

Palabras clave: mundos posibles, conexión de Galois, modelos de Kripke.

LOGIC, POSSIBLE WORLDS AND GALOIS CONECTIONS

Abstract: It is argued that the distinguishing feature of contemporary logic, propositional, quantificational and modal types, are a type of oppositions of oppositions called "Galois connections". To do this, the Kripkean notion of possible world is explained, Galois connections present in quantification are made explicit, in alethic modalities and it is shown how these oppositions, by Montague's suggestion, appear in the treatment of non-alethic modalities as the possibility and physical need.

Keywords: possible worlds, Galois connections, Kripke's models.

La expresión “mundo posible”, propia de los lógicos y filósofos analíticos, codifica a cualquier oración en modo potencial o en modo subjuntivo. Si decimos que una oración es verdadera en un mundo posible, solo decimos que lo que expresa el verbo de la oración es posible o que es una marca de nuestra subjetividad, por ejemplo, de lo que creemos, entendemos, dudamos, sabemos, esperamos, imaginamos, deseamos, prohibimos, tememos, necesitamos, ya sea en el pasado, en el ahora o en el futuro. Un buen filósofo analítico no dirá: “Es posible que llueva hoy”; diría, con preciso uso de la jerga kripkeana, “Hay un mundo posible donde la oración *Hoy llueve* es verdadera”; tampoco dirá, nuestro hacedor de mundos, “Creo que estoy feliz”; en cambio con corrección y menos economía, declarará “Hay un conjunto de mis creencias donde la oración *Estoy feliz* es verdadera”. De donde se colige que lo que es posible, lo que puede ser verdaderamente posible, no es el hecho que expresa la oración, sino la oración en modo indicativo verdadera en algún contexto ontológico de ficción, el llamado *contenido proposicional*. Los hechos no son posibles; son posibles los deseos expresados en una oración con respecto a un imaginario estado de cosas.

¿Qué es un mundo posible? Son posibilidades ontológicas, son los posibles subconjuntos de objetos de un mundo real. Por ejemplo, supongamos que el mundo real tiene una parca ontología trina: {George, John, Paul}. Supongamos esta austera ontología por un momento. Si tales fueran los objetos en nuestro módico mundo real, las combinaciones, los posibles mundos de ficción, las posibles ontologías que pudiera imaginar, son 2^n , donde n es el número de objetos en el mundo real, en nuestro caso los mundos de ficción serían $2^3 = 8$ mundos de ficción. ¿Cuáles son? Es claro que el mundo real es posible, mi primogénito mundo trino, {George, John, Paul}; son posibles las combinaciones de dos en dos {George, John}, {George, Paul}, {John, Paul}; por supuesto, son posibles los mundos solitarios {George}, {John} y {Paul}; por último, es posible un mundo donde no existen objetos, la nonada, \emptyset . Cuéntelos y verá que mis fantasías ontológicas, mis distribuciones de los objetos, no pueden ser más que ocho, si mi mundo real tiene solo tres objetos. La ficción, claro está, es exponencial como la

función 2^n . Mi mundo real podría incluir a Ringo, con lo cual mis mundos posibles aumentan a 16. Kripke, no obstante, elimina a la fantasía de los mundos posibles cuando, explícitamente, en su famoso artículo sobre la completación de la lógica modal¹, destierra a los mundos vacíos al exigir que el dominio del discurso no puede carecer de elementos, esta decisión le permite preservar la referencia objetiva y la identidad transmundana².

Carnap en *Meaning and Necessity*³ supuso, entre otras, una ontología del mundo real que consta de hechos, no de objetos. Las expresiones de los hechos son las proposiciones, conjuntos de mundos posibles, de oraciones aseverativas que tienen el mismo significado o refieren al mismo hecho. Por ejemplo, la oración “llueve” expresa un hecho. Es claro, que la negación de una oración verdadera es falsa y la negación de una falsa, verdadera. Si el mundo se codifica proposicionalmente, la imaginación nuevamente es exponencial; en este caso, en 2^n , n es el número de oraciones distintas, pero, eso sí, con una restricción, la restricción de la consistencia. ¿Por qué? Consideremos un mundo donde hay solo dos hechos, supongamos “llueve” y “graniza”, entonces mis mundos posibles son exactamente 4:

Mundo 1	Llueve y graniza
Mundo 2	Llueve y no graniza
Mundo 3	No llueve y graniza
Mundo 4	No llueve y no graniza

Mis mundos posibles son mutuamente excluyentes. No puedo conjugar cualesquiera dos mundos, porque inmediatamente el mundo posible deviene absurdo. Por ejemplo, de la conjunción del primer mundo y el tercer mundo se obtiene un mundo donde graniza pero donde llueve y no llueve, es decir, un mundo imposible delatado por una contradicción. Esta característica de exclusión mutua entre mundos

- 1 Kripke, S., “A Completeness Theorem in Modal Logic”, *Journal of Symbolic Logic*, 1959, 24:1-14.
- 2 Una introducción a los modelos de Kripke puede verse en: Burgess, J., “Kripke Models” en Berger (Ed.), *Saul Kripke*, Cambridge University Press, 2011.
- 3 Carnap, R., *Meaning and Necessity*, Chicago, University Press, 1956.

se llama ostentosamente “consistencia máxima”. Por eso la mayoría de los matemáticos y filósofos definen a los mundos posibles como conjuntos máximamente consistentes.

Mi imaginación, mis mundos de ficción, no son independientes de lo que conozco; la imaginación no es autónoma del mundo real, éste que vivimos, éste que sufrimos, en el que discurren todas nuestras fantasías.

Cada día la ciencia y la técnica nos permiten crear nuevos objetos y ampliar nuestro espectro de hechos. Como se puede apreciar, a mayor cantidad de objetos, de hechos, mayor es el número de nuestros mundos de ficción; mayor el número de oraciones posibles. En el siglo XV era inconcebible la comunicación inalámbrica no trascendente, ahora nos parece común y física.

Sin duda alguna, nuestro mundo, el mundo real, es el mejor mundo posible. Nuestro mundo real proporciona la mayor posibilidad de combinación a nuestra imaginación. ¡Viva Leibniz! Bueno, no exageremos; el cándido mundo real es el mejor de los mundos, solo desde el punto de vista referencial.

Tan fresca y clara como la actual noción de “mundo posible”, se presenta la destacada noción de “accesibilidad transmundana” de Kripke. Puedo acceder a otros mundos mediante algunos predicados, por ejemplo, de aquellos que refieren a los integrantes de Los Beatles a través de su historia. Puedo exigir que Jhon pertenezca siempre al conjunto. Puedo desear, en alguna ficción, solo eso. Las referencias de uno y otro mundo me pueden ser accesibles. Esto no es necesario, puede ser que en un mundo no exista Jhon; puede que en otro mundo no exista Ringo; puede que en otro sí. Lo que es seguro es que tengo que saber la referencia del mundo real, para mantener la identidad transmundana. Jhon es Jhon en todos los mundos posibles y Ringo refiere al mismo Ringo en todas las ficciones. En la jerga de Kripke, un término *designa rígidamente* un objeto, si existe necesariamente un objeto designado por ese término. Usando lógica modal:

$$a \text{ designa rígidamente} =df (\exists x) \Box(x = a)$$

Es común en la filosofía contemporánea analizar la relación entre ciertos procesos llamados “mentales” como una accesibilidad entre mundos posibles⁴.

¿Cómo distingo el perfume de una rosa, si en mi mundo no hay rosas? ¿Cómo desprecio el olor de la humedad, si no sé lo que es ésta? ¿Cómo imagino lo que no conozco? Si en mi mundo no hay mujeres, puedo imaginar el perfume de una rosa como el perfume de una mujer. Si en mi mundo hay rosas, puedo sospechar que la esencia de una mujer es espinosa y agradable como lo es esa flor. La analogía es el acceso predicativo entre mundos. ¿Por qué predicativo? Volvamos de nuevo a nuestro trino, primogénito y austero mundo. Recordemos que en él solo hay tres objetos {George, John, Paul}, en ese, mi mundo hipotético real, el predicado “hombre” coincide con la extensión {George, John, Paul}; decir hombre es tanto como decir George, John y Paul. Total, son los únicos hombres. ¿Y las mujeres? En ese mundo, no existen, son, con las contradicciones, una de las tantas referencias de la nada.

En uno de los nuevos mundos posibles, abruptamente irrumpió Yoko. Decir que algo es mujer es decir, sin duda alguna, que es Yoko. No hay más mujeres que Yoko. El predicado mujer siempre refiere, inexorablemente, bajo el estado de cosas supuesto, a Yoko. No hay otra mujer; en ese estado de cosas, ella es la mujer. La ontología de Kripke siempre es extensional y está en miras al mundo real y la cuantificación recorre todos los universos del discurso dependientes del mundo real. Lo que existe ahora recorre las posibles ontologías, los mundos posibles, y en ese tránsito toma los elementos necesarios para decidir las posibilidades y las necesidades. Así es la verdad modal. No es ajena a nuestro mundo y nunca lo será. Fue lo que nos enseñó Kripke. ¿Qué es la accesibilidad? Una relación entre ficciones que nos permite compartir la extensión de varios predicados en varios mundos posibles. Es simple; es el solapamiento de nuestras creencias. La relación de accesibilidad kripkeana, sin duda alguna, codifica nuestra única y maravillosa facultad de la imaginación.

Si hay esencias, están atadas al mundo real. Esto es tanto como decir que lo esencial es real. La esencia es, precisamente, la referencia que

4 Cf., e.g., Bruner, J., *Realidad mental y mundos posibles*, Barcelona, Gedisa, 1998.

se mantiene común a todos los solapamientos de las extensiones de los predicados en cada mundo de ficción con respecto al mundo real. Si las extensiones de algún predicado en todos los mundos posibles se pueden ordenar mediante una relación de inclusión, entonces esa propiedad es esencial. Necesaria, pero claramente *a posteriori*. La existencia, sin duda, precede a la esencia. La esencia misma es una ficción empírica.

La accesibilidad modal nos permite entender los distintos cambios de la concepción ontológica que se ocasionaron según la historia de la ciencia. Toda la clave está en los solapamientos referenciales de los predicados usados en teorías distintas que nos permiten entender la parte de la designación que les es común. De un universo con la tierra en su centro a un Sol que arrastra toda una grey planetaria, incluyendo en su sequito, por supuesto, a la Tierra. De unas estrellas sujetas firmemente a la esfera celeste, a un ballet de estrellas con la Tierra siguiendo el compás. De un corpúsculo a una onda, pasando por la postulación de una nueva entidad que sirviera como un medio para la transmisión de la onda y, de ellos, a una clara conciliación óptica y a una desintegración ontológica de aquel éter que otrora llenaba el espacio como un sólido elástico de enorme rigidez. De ese éter, que era como una especie de materialización del espacio absoluto de Newton, a un espacio relativo y en función de los objetos. De la pregunta de qué era lo que mantenía el movimiento de los cuerpos, a la pregunta de Galileo de qué los hacía detenerse o cambiar su estado de movimiento. De una época en que se concentraba la atención en la chatarra electromagnética visible, a Faraday quien se fijó en el rico contenido invisible del espacio circundante, una nueva entidad, el campo electromagnético.

Se puede especular sobre algunas modificaciones de la entrañable ontología de las partículas elementales que inducirían a abandonarlas como valores de las variables:

Ciertos hallazgos, que se conocen como las estadísticas de Bose–Einstein y de Fermi–Einstein, sugieren que [...] no hay diferencia, ni siquiera en principio, entre decir que dos partículas elementales de un cierto tipo se encuentran situadas, respectivamente, en los puntos *a* y *b*. Parecería, pues, no sólo que las partículas elementales son distintas de los cuerpos; habría que concluir, además, que no existen en absoluto habitantes del espacio–tiempo y que deberíamos limitarnos a decir que los lugares distintos *a* y *b* se encuentran

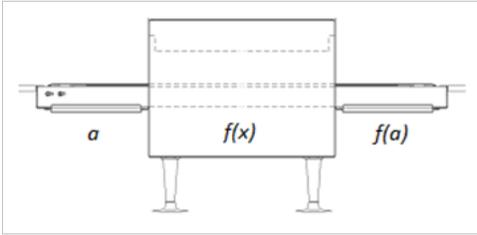
en dos estados determinados [...] en vez de decir que están ocupados por dos cosas⁵.

La accesibilidad permite acceder de un mundo a otro, mediante la referencia que es común a mis mundos reales y de ficción. Así es la accesibilidad, accidental.

¿Cuál es la conexión entre los mundos posibles? Existe una conexión, una precisa relación matemática, se conoce con el nombre de “conexión de Galois”. Este tipo de vínculo está presente en la obra de Frege. La emancipación de la lógica aristotélica, liderada por el amable Frege, fue una revolucionaria conexión de Galois. La gradación modal, también es otra conexión de Galois. Me explico en lo que sigue.

Comienzo con lo básico. Una función es una especie de artilugio que procesa un objeto y da como resultado otro. Supongamos que tenemos una máquina de hornear pizzas que consiste en una banda transportadora que gira lentamente a través de una cámara de cocción, de un infernal horno. En la cinta se coloca en un recipiente una masa cruda con distintos condimentos, aceite de oliva, salsa de tomate, queso mozzarella u otro queso blando, hierbas frescas y otros ingredientes. Ese objeto crudo, llamémoslo a , es la cosa que entra por el lado izquierdo de la cinta. Esta máquina hornea, en un lento tránsito por la banda transportadora, la pasta y sus añadidos. No hace más. Una máquina, $f(x)$, siempre realiza la función para la cual fue creada. No más. Al cabo de cierto tiempo, digamos cinco minutos, sale una sabrosa pizza que es el resultado de aplicar el horno, $f(x)$, al conjunto de compuestos crudos a ; la pizza es $f(a)$, el agregado de ingredientes crudos horneados por la máquina. Note que la salida de la máquina es única: de cada agregado de ingredientes sale una, y sólo una, pizza. No salen dos o más pizzas; la pizza, la salida de la función, es única. Las pizzas pueden ser similares; si incorporo a la masa los ingredientes de una pizza de pepperoni, la salida es una pizza de pepperoni; y siempre que ponga en la masa los ingredientes de una pizza de pepperoni, saldrá una pizza de pepperoni; no una pizza de pepperoni y, a la vez, digamos, una pizza margarita. Si los ingredientes son distintos, saldrá otro tipo de pizza. Si el producto inicial es distinto, el resultado final también lo es.

5 Quine, W., *La búsqueda de la verdad*, (Traducido por J. Rodríguez), Barcelona, Crítica, 1992, p. 61.



La máquina de cocción de la gastronomía matemática

La máquina no solo puede hornear pizzas; también es ideal para preparar galletas, tostadas de ajo, sándwiches y otros alimentos. Pero para cada caso hay que elegir, sin duda alguna, cuáles son los objetos que hornea la máquina. Si la máquina hornea galletas, ya no es una máquina de hornear pizzas. Si los objetos de entrada de una función pertenecen a otro y distinto dominio, la función es otra, la salida de la máquina es diferente.

Las funciones son las máquinas de cocción de la gastronomía matemática. Las funciones no son milagrosas. Convertir el agua en vino es muy fácil: agregue al agua al menos un tercio del vino de que dispone. ¡Voilà! Ya tenemos más vino, sobre todo si el vino es de mala calidad y estamos a la mitad de una boda donde todos están ebrios. ¡Así es el milagro de la templanza!

Bueno, la original idea de Frege fue meter varios objetos en el demoníaco horno matemático para obtener expresiones predicativas, es decir, trató a los predicados como máquinas funcionales. ¿Qué objetos entran por la máquina?, ¿cuál es el horno?, ¿qué objetos preparados salen por la función?

Por la máquina de Frege entran palabras que refieren cualquier tipo de objetos, desde los átomos, una pequeña partícula de polvo, los nombres de Ud. y el mío, de aquel lago, de aquella ciudad, de los planetas, estrellas, galaxias y hasta del universo mismo. El horno aplica el predicado a los nombres de los objetos que se introducen en la máquina. La salida es un pastel llamado *proposición*. Por ejemplo, supongamos que la función, $f(x)$, sea el predicado “ x es un planeta”, abreviadamente $P(x)$. Si por la máquina entra una palabra que refiere un planeta, di-

gamos “Marte”, abreviadamente m , la salida es $P(m)$, es decir, la proposición “Marte es un planeta”. A f sola, sin variable, la llama Frege “concepto”; así P , “planeta”, es un concepto, $P(x)$ una función, y $P(m)$ la oración aseverativa o proposición resultante de aplicar el concepto a un objeto. Marte cae bajo el concepto de “Planeta”.

Supongamos, una máquina muy similar a la anterior, pero con un horno más sofisticado. Ahora a la máquina entran los pasteles proposicionales y la máquina arroja una etiqueta que dice “verdad”, si los objetos están bajo el campo de predicación de la función; por el contrario, dice “falsedad”. Por ejemplo, supongamos que entra la proposición $P(m)$, entonces la máquina arroja una etiqueta que dice “verdad”, es decir, el que Marte sea un planeta es verdad. Si por la máquina entra otra proposición, digamos “El Sol es un planeta”, $P(s)$, la máquina dice “falso”, es falso que el Sol sea un planeta. Esta máquina discrimina entre los alimentos que son aptos para el consumo, la verdad, y aquellos que no, la falsedad.

Las anteriores máquinas trabajan en serie y por ellas entran, no solo palabras que refieren objetos individuales, también que refieren parejas de objetos, tríos de objetos, cuaternas y pare Ud. de contar. Por ejemplo, supongamos que entran el par de nombres “María” y “Jesús” en ese orden. Sea el horno la función “ x es madre de y ”; la máquina arrojará verdad porque en efecto María es madre de Jesús. Si hubiésemos cambiado el orden de entrada del par de palabras que refieren individuos, esto es, si primero entra “Jesús” y luego “María”, el dispositivo arrojará falsedad porque, en efecto, Jesús no es madre de María. La máquina también decide sobre la verdad y falsedad de las oraciones que afirman que un objeto está relacionado con otros dos; por ejemplo, cuando uno está entre otros dos. También decide sobre expresiones que denotan el orden de cuaterna de objetos, por ejemplo cuando se dice que dos objetos separan a otros dos; análogo para la sucesiones de objetos de mayor orden. Aquí lo relevante es el orden. El invento de Frege discrimina la verdad y falsedad de todo tipo de expresión predicativa relacional.

La revolución de la lógica no se dio solo por la anterior máquina que discrimina la verdad de la falsedad en el conjunto de expresiones predicativas. Sin duda, un buen cacharro. Otro artificio fue el que pro-

dujo la verdadera revolución industrial de la lógica, solo comparable con la producción en cadena de Henry Ford, la cuantificación. ¿Qué hace este dispositivo? ¿Qué objetos entran por la máquina?, ¿cuál es el horno?, ¿qué objetos preparados salen por la función? Veamos.

El corazón de la asombrosa cadena de montaje de la cuantificación se debe, realmente, a Tarski; pero el diseño de la fabulosa interpretación que revolucionó la lógica se debe a Frege. Por la cadena de producción cuantificacional entran infinidad de objetos; el horno discrimina las secuencias que hacen verdaderas a la función y arroja verdad si, *todas* las sucesiones de nombres que refieren objetos satisfacen la función y devuelve falsedad, si es falsa para todas las sucesiones. Vimos que la oración “María es madre de Jesús” es verdadera, si por el horno de la verdad pasa primero “María” y, luego, “Jesús”; suponga que después de ellos pasan los nombres de infinidad de objetos, ¡qué importa! “María es madre de Jesús” sigue siendo verdad porque primero entró “María” y, luego, “Jesús” en ese orden. Así que *todas* las secuencias que entren por la máquina hacen verdadera “María es madre de Jesús”, si entró primero “María” y, luego “Jesús”; a partir de estos dos elementos es irrelevante lo que meta en la máquina, la oración seguirá siendo verdadera. También vimos que si primero entra “Jesús” y luego “María”, “Jesús es madre de María” es falsa y continuará siendo falsa no importe lo que entre en la máquina. Este es uno de los maravillosos cacharros de Tarski. Así, una oración es verdadera, si es satisfecha por toda secuencia de objetos y, es falsa, si ninguna secuencia la satisface. Precisamente esta es la observación que Frege legó a Tarski y a la humanidad. Una curiosa relación entre todo y ninguno en la que media una función de predicación.

Frege se dio cuenta de un grato fenómeno. Si de todos los objetos de un conjunto se predica lo mismo, ninguno pertenece a un concepto diferente y, viceversa, si de ninguno se predica lo mismo, todos pertenecen a conceptos distintos. Si de todos los individuos se predica que son hombres, ninguno pertenece a un conjunto distinto al de hombre y si de ninguno se predica que son hombres, todos pertenecen a un conjunto distinto al de hombre. Frege se dio cuenta que la oposición entre “todos” y “ninguno” no es un antagonismo absoluto, sino que se da en combinación con la oposición entre pertenecer al campo de

predicación de un concepto o no. No es como en la lógica aristotélica donde “todos” y “ninguno” son contrarios sin mediar por objeto alguno. Ahora “Todo” es contrario con “ninguno”, si se da una curiosa función de oposición: la oposición entre los conceptos “todo” y “ninguno” no se postula, se obtiene en combinación con la imaginaria oposición entre tener o no tener una propiedad. Si todas las secuencias hacen verdadera a la oración, todas las secuencias de objetos satisfacen el predicado, entonces ninguna secuencia hace falsa a la oración y, recíprocamente, si ninguna secuencia hace falsa a la oración, ninguna satisface el predicado, entonces todas las secuencias hacen verdadera a la oración. La ficción es tener o no tener una propiedad, he ahí la cuestión.

Estas funciones de oposición, donde se oponen dos conceptos mediante otra oposición, se llaman *conexiones de Galois*⁶. La conexión de Galois es una estupenda máquina de cocción. Es una máquina cuya cinta transportadora funciona en dos direcciones. Este es el gran hito de la revolución de la lógica moderna, hacer mediar entre las cuantificaciones a los objetos. La cuantificación es una conexión de Galois. Curiosamente Tarski se dio cuenta que Aristóteles había previsto esta conexión de Galois:

*Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso y decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero*⁷.

Pero eso no es todo; nuestra moderna interpretación de los operadores modales también se debe, por extensión, a otra revolucionaria conexión de Galois. Es falso que una oración que sea posible no sea necesaria, ni recíprocamente. Es posible la posibilidad de lo expresado por una oración necesaria; también es posible que una oración exprese algo imposible e innecesario, siempre con respecto a algunos mundos de ficción anclados al mundo real. No obstante, si hacemos mediar entre lo posible y lo necesario a la verdad y la falsedad, se obtiene la

6 Sean dos mundos M_1 y M_2 . Supongamos que en el mundo M_1 usamos la relación de orden $<$ para comparar sus elementos. Supongamos que en el mundo M_2 usamos una relación diferente: \langle . Entonces hay dos caminos que nos conducen del mundo M_1 al M_2 usando una función f y otra que nos lleva de M_2 a M_1 usando una función g . La conexión de Galois entre esos mundos es: $m_1 < g(m_2)$ sí, y sólo sí, $f(m_1) \langle m_2$, donde $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$.

7 Aristóteles., *Metafísica*, IV, 7.

siguiente conexión de Galois, base de toda la lógica modal moderna: si una oración expresa algo necesariamente verdadero, no es posible que sea falsa, e, inversamente, si una oración es posiblemente verdadera, no es necesario que sea falsa. Una conexión de Galois es lo que define nuestros modernos operadores modales.

Disculpen tanto, quizá, innecesario circunloquio retórico; mi comprensión es gótica y llena de detalles; superfluos para algunos, necesarios para todos. Galois era, como se ve, un gran arquitecto minimalista.

La relación entre mundos es modal, anacrónica y transmundana; todo ello por medio de una conexión de Galois.

La ciencia es una de las más hermosas ficciones que creó el ser humano. Según Quine, concebimos:

[...] el esquema conceptual de la ciencia como un instrumento destinado en última instancia a predecir la experiencia futura a la luz de la experiencia pasada. *Introducimos con razón conceptualmente los objetos físicos en esta situación porque son intermediarios convenientes, no por definición en términos de experiencia, sino irreductiblemente puestos con un estatuto epistemológico comparable al de los dioses de Homero.* Yo por mi parte, como físico lego que soy, creo en los objetos físicos y no creo en los dioses de Homero, y considero un error científico orientar su creencia de otro modo. Pero en cuanto a fundamento epistemológico los objetos físicos y los dioses difieren sólo en grado, no en esencia. Ambas suertes de entidades integran nuestras concepciones sólo como elementos de cultura. El mito de los objetos físicos es epistemológicamente superior a muchos otros mitos porque ha probado ser más eficaz que ellos como procedimiento para elaborar una estructura más manejable en el flujo de la experiencia⁸.

En fin, Quine también creía en ficciones, aunque las negara.

La ontología de la lógica modal es una extensión que conserva, en sus mundos posibles, la realidad. ¿Qué es la realidad? En este contexto, una elección metafísica.

En vista a lo anterior, creemos plausible la siguiente hipótesis empírica: La investigación científica se vale de la ampliación que hacemos de las extensiones de los predicados con los objetos de ficción. Los objetos de ficción los creamos según una aproximada imagen y se-

8 Quine, W., “Dos dogmas del empirismo”, *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona, Orbis, 1951, p. 79.

mejanza de los objetos que refieren nuestros predicados reales. Así la imaginación, al menos la modal, es una relación bidireccional entre la ficción y la realidad; un intercambio semiótico en una espiral ilimitada de denotaciones que se codifica mediante la relación de accesibilidad.

La esencia no es más que la referencia que dejamos constante en todos nuestros usos de un término general. La esencia es accidental, también lo diría Sartre; un accidente que preserva, en los distintos mundos posibles, parte de la referencia objetiva.

Richard Montague en *Necesidad lógica, necesidad física, ética y cuantificadores*⁹ sugirió otra maravillosa conexión de Galois cuando indagó bajo qué criterios afirma un físico que es posible o que es necesario la ocurrencia de un evento. Para finalizar, caracterizamos la función de Galois sugerida por Montague.

Richard Montague propuso¹⁰ que un evento es *físicamente necesario*, si la afirmación de hecho sobre dicho acontecimiento se infiere de una teoría física exitosa. A su vez, propuso que un evento es *físicamente posible*, si la oración que nombra al posible evento no contradice las teorías físicas vigentes. Estas sugerencias requieren ciertas precisiones a los fines de la codificación.

¿Qué entendemos por teoría física, exitosa y vigente? Siguiendo a los estructuralistas, una *teoría física exitosa* está formada por una estructura matemática, que determina los modelos admisibles de la teoría, más un conjunto abierto de aplicaciones propuestas. Nótese que no estamos usando la palabra *teoría* en el sentido clásico, neopositivista, como conjunto de axiomas lógicos y extralógicos, y sus consecuencias. Aquí las teorías serían especies de grandes formas proposicionales que incluyen ciertas oraciones privilegiadas y sus consecuencias, satisfechas por ciertos objetos y por otros no. Por ejemplo, la mecánica clásica de partículas es una teoría física exitosa, con determinada estructura matemática, que es satisfecha, entre otros objetos, por el par Tierra-Luna, mientras que no es satisfecha por el par Sol-Mercurio (por la falsa predicción que arroja con respecto al perihelio de Mercurio). Las teorías

9 Montague, R., "Logical Necessity, Physical Necessity Ethics and Quantifiers", *Formal Philosophy*, New Haven and London, Yale University Press, 1974, pp. 71-83.

10 *Idem*.

físicas serían, entonces, grandes y complejos predicados satisfechos por ciertos objetos y por otros no. En sentido estricto se podría decir que el par (Tierra, Luna) es una mecánica clásica de partículas y que el par (Tierra-Mercurio) no lo es, tal como podemos decir que Bugs Bunny satisface la forma proposicional “x es un conejo”, mientras que no ocurre lo mismo con Porky. "¡Eso es to... eso es to... e-eeesto es todo amigos!" lo que diremos sobre las teorías físicas y, a los fines de la simbolización, cada una será designada con la letra mayúscula “F” y un subíndice que la distingue. Con esto y con los elementos básicos de la lógica modal proposicional, procedemos a codificar las nociones modales en cuestión, para luego demostrar su definición en términos mutuos:

Definición:

a. $\Box_{F_i}(X)$ es una abreviatura de “El evento X es *físicamente necesario*”.

$$\Box_{F_i}(X) \leftrightarrow \Box(F_i \rightarrow X)$$

b. $\Box_{F_i}(X)$ es una abreviatura de “El evento X es *físicamente posible*”.

$$\Box_{F_i}(X) \leftrightarrow \Diamond(F_i \wedge X)$$

La definición a) caracteriza al operador modal de necesidad física; dice que una afirmación sobre un evento es *físicamente necesaria*, si es una consecuencia lógica de las teorías físicas vigentes. La definición b) dice que la afirmación sobre un evento es *físicamente posible*, si no contradice a las teorías físicas vigentes. Por ejemplo, se excluyen del ámbito de la posibilidad física acontecimientos como la transmisión de calor de un cuerpo de menor temperatura a uno de mayor temperatura y la transmisión de una señal con velocidad infinita. En cambio, la oración “el timbre suena” es *físicamente posible*, ya que no es incompatible con el conjunto de teorías físicas conocidas. Acontecimientos físicamente necesarios son la absorción de un rayo de luz y el desprendimiento de gotas de una caída de agua.

Ahora estamos en condiciones de demostrar la interdefinibilidad de las nociones modales físicas en cuestión:

Teorema:

i. La afirmación de un evento es *físicamente necesaria* si, y sólo si, es imposible físicamente que sea falsa.

$$\Box_{Fi}(X) \leftrightarrow \sim \Diamond_{Fi}(\sim X)$$

ii. La afirmación de un evento es *físicamente posible* si, y sólo si, es innecesario físicamente que sea falsa.

$$\Diamond_{Fi}(X) \leftrightarrow \sim \Box_{Fi}(\sim X)$$

Demostración:

i) Premisa	$\Box_{Fi}(X)$
Por definición a	$\Box(F_i \rightarrow X)$
Por def. $\Box \leftrightarrow \sim \Diamond \sim$	$\sim \Diamond \sim (F_i \rightarrow X)$
Por def. \rightarrow	$\sim \Diamond (F_i \wedge \sim X)$
Por definición b	$\sim \Diamond_{Fi}(\sim X)$

ii) Premisa	$\Diamond_{Fi}(X)$
Por definición b	$\Diamond(F_i \wedge X)$
Por def. $\Diamond \leftrightarrow \sim \Box \sim$	$\sim \Box \sim (F_i \wedge X)$
Por def. \rightarrow	$\sim \Box (F_i \rightarrow \sim X)$
Por definición a	$\sim \Box_{Fi}(\sim X)$
QED	

En términos de la semántica de Kripke. Sea α un mundo en un modelo de Kripke:

$$A = \langle W, R, \langle p \rangle_{p \in \text{atom}}^A \rangle$$

Y sea X un acontecimiento físicamente posible:

$$\models_{\alpha} \Diamond_{Fi}(X)$$

Si, y sólo si, por definición a:

$$\models_{\alpha} \Diamond(F_i \wedge X)$$

Si, y sólo si, por evaluación de modalidad y definición $\Diamond \leftrightarrow \sim \Box \sim$:

Es falso que para todo β en A , tal que $\alpha R \beta$, $\models_{\alpha} \sim (F_i \wedge X)$

Si, y sólo si, por definición de modelo:

Es falso, para todo β en A , tal que $\alpha R \beta$, que la $v(\sim (F_i \wedge X))=1$

Si, y sólo si, por evaluación de la negación:

Es falso, para todo β en A , tal que $\alpha R \beta$, que la $v(F_i \wedge X)=0$

Si, y sólo si, por evaluación de la conjunción:

Es falso, para todo β en A , tal que $\alpha R\beta$, que $v(F_i) = 0$ ó que la $v(X) = 0$

Si, y sólo si, por evaluación de la negación:

Es falso, para todo β en A , tal que $\alpha R\beta$, que $v(F_i) = 0$ ó que la $v(\sim X) = 1$

Si, y sólo si, por evaluación del condicional:

Es falso, para todo β en A , tal que $\alpha R\beta$, que $v(F_i \rightarrow \sim X) = 1$

Si, y sólo si, por definición de modelo:

Es falso, para todo β en A , tal que $\alpha R\beta$, que $\models_{\alpha} (F_i \rightarrow \sim X)$

Si, y sólo si, por evaluación de modalidad:

Es falso, $\models_{\alpha} \Box(F_i \rightarrow \sim X)$

Si, y sólo si, por evaluación de la negación:

$\models_{\alpha} \sim \Box(F_i \rightarrow \sim X)$ y, finalmente, por definición a, $\models_{\alpha} \sim \Box_{F_i}(\sim X)$.

De donde los modelos de $\models_{\alpha} \Diamond_{F_i}(X)$ son los modelos de $\models_{\alpha} \sim \Box_{F_i}(\sim X)$.

Similarmente discurre la comprobación de la segunda parte del análogo. QED

Así como la necesidad y la posibilidad se oponen mediante la verdad y la falsedad, la necesidad física y la posibilidad física se oponen mediante la necesidad y posibilidad alética.

No todo lo posible es necesario, puede ser innecesario; no obstante, todo lo necesario es posible. También hay proposiciones que no son posibles. Pero lo que resulta claro, por conexión de Galois, es que si una proposición es necesariamente verdadera, no es posible que sea falsa, así como la contraria, si puede ser verdadera, no es necesario que sea falsa. De tal manera, si una proposición es físicamente necesaria, es necesaria en el mundo posible de una teoría física, es una consecuencia lógica en esa teoría, y si puede ser físicamente posible, no puede ser contradictoria con respecto al mundo posible de la teoría física en el que es evaluada.

Aristóteles dio cuenta de lo posible y de lo necesario en la intimidad de la poesía: “No es asunto del poeta decir lo que pasó, sino el tipo de cosas que pasarían, lo que es posible según la posibilidad y la

necesidad”¹¹. Poeta es el que crea; poeta es el que imita de acuerdo a los cánones que imponen el ritmo, el lenguaje y la armonía. Poeta es el que prevé el acto en la potencia en los distintos mundos posibles. Poeta es el que opone conceptos mediante otra oposición y elude las oposiciones exhaustivas y mutuamente excluyentes. Esos hitos de la poesía y de la lógica contemporánea son las conexiones de Galois, un mundo no-maniqueista, un mundo con gradaciones donde no todo es blanco o negro.

Instituto de Filosofía
Universidad Central de Venezuela
jbaceta@gmail.com
Jesús F. Baceta V.

11 Aristóteles., *Poética*, 9, 2.