EPISTEME NS, VOL. 34, N° 1, 2014, pp. 19-40

Ricardo Da Silva

LOS TEOREMAS DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL, TEORÍA DE CONJUNTOS Y EL PROGRAMA DE DAVID HILBERT[1]

Resumen: Kurt Gödel demostró en 1931, que para todo sistema formal Z recursivo lo suficientemente potente como para derivar los axiomas de Peano y que además se suponga como consistente, se tiene que en el sistema hay proposiciones indecidibles, es decir, el sistema no es completo. Por otra parte, Gödel probó que si el sistema Z es consistente entonces no se puede derivar en Z una proposición que afirme la consistencia de Z. Estos resultados son los que se conocen como *Primer Teorema de Incompletitud Gödel* y *Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel*. Dichos resultados tienen un gran impacto sobre la investigación de los fundamentos de la matemática que venía gestándose en los primeros treinta años del siglo pasado, y tiene además consecuencias sobre la filosofía de la matemática de dicha época. Este artículo se encuentra estructurado en tres partes: En una primera parte nos ocupamos de la formulación de los *Teoremas de incompletitud* y las ideas principales de su demostración en cada caso. Seguidamente mostraremos una aplicación del *Segundo Teorema de Incompletitud* en la teoría de conjuntos referente a los cardinales inaccesibles. Por último, desarrollaremos las consecuencias filosóficas que los *Teoremas de incompletitud de Gödel* tienen sobre el proyecto meta-matemático de David Hilbert.

Palabras clave: Incompletitud, cardinales inaccesibles, Hilbert.

[1] Agradecemos al profesor Franklin Galindo por todas las conversaciones y sugerencias. Dichas sugerencias se ven reflejadas a lo largo del presente artículo.

Recibido 14-06-13 ☼ Aceptado 27-06-13

THE GÖDEL INCOMPLETENESS THEOREMS, SET THEORY AND THE PROGRAMME OF DAVID HILBERT

Abstract: Kurt Gödel proved in 1931 that for any formal recursive system Z powerful enough to derive the Peano axioms and also supposed to be consistent, we have that in the System there are undecidable propositions, i.e., the system is not complete. Moreover, Gödel proved that if the Z system is consistent then it can not derive in Z a proposition asserting the consistency of Z. These results are known as Gödel's First Incompleteness Theorem and Gödel's Second Incompleteness Theorem. Such results have a great impact on the investigation of the foundations of mathematics that had been developing in the first thirty years of the last century, and it, furthermore, has implications for philosophy of mathematics of that time. This article is structured in three parts: In the first part we deal with the formulation of the incompleteness theorems and the main ideas of its proof in each case. Then, we will show an application of the Second Incompleteness Theorem in set theory concerning inaccessible cardinal. Finally, we will develop the philosophical consequences that Gödel's incompleteness theorems have on the meta-mathematical project that David Hilbert proposed.

Palabras clave: Incompleteness, inaccessible cardinal, Hilbert.

1. *Introducción*

Hacia el año de 1930 el programa metamatemático de Hilbert estaba a la cabeza de las investigaciones sobre los fundamentos de la matemática. Ese mismo año, Gödel había demostrado como tema de tesis doctoral[2] la consistencia y completitud del cálculo lógico de primer orden, con lo que "el programa de Hilbert obtenía un primer y esperanzador éxito",[3] pues en este caso se verificaban tres de los requerimientos que Hilbert exigía en su programa metamatemático, es decir, una teoría que fuese formalizada, consistente y completa (aunque

2 Cf. Gödel, K., "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden" (1930), en Mosterín, J. (ed.), *Obras completas,* Madrid, Alianza Editorial, 2006 (2da edición).

3 Mosterín, J., "Introducción a: La Suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden" en *Obras completas*, cit., p. 19.

como sabemos por Church (1936),[4] el cálculo lógico de primer orden no es decidible).

Luego de ese gran éxito que suponía el *Teorema de Completitud* de Gödel para la lógica de primer orden, se buscaba imitar lo mismo pero con la matemática. Tal labor era ardua y complicada, por lo que se empezaría por probar algo más sencillo, es decir, probar la consistencia y completitud de los sistemas formales para la aritmética. Por tanto, lo que se tenía que hacer era probar la consistencia y completitud de sistemas como los expuestos en *Principia Mathematica*, la axiomática de Zermelo-Franenkel o los sistemas formales creados por la escuela hilbertiana.

El 7 de septiembre de 1930 el panorama parecía lucir aún mejor para la escuela de Hilbert, pues en un congreso sobre los fundamentos de la matemática que tuvo lugar en Königsberg, el representante de la escuela intuicionista, Arend Heyting, anunciaba que cuando se probase de forma finitista la consistencia de la matemática clásica, entonces la disputa entre intuicionistas y formalistas podría llegar a su fin y de hecho los primeros podrían aceptar sin ningún temor el manejo de conjuntos infinitos.[5]

Pero luego de tales palabras, el lógico Kurt Gödel anunciaría que el programa metamatemático de Hilbert era irrealizable pues se podía probar, como lo haría un año más tarde, que para todo sistema formal Z recursivo lo suficientemente potente como para derivar los axiomas de Peano y que además se suponga como consistente, se tiene que en el sistema hay proposiciones indecidibles, es decir, el sistema no es completo, y por otra parte probó que no se puede ofrecer una prueba absoluta de consistencia para dicho sistema Z, es decir, del sistema Z no se puede derivar una proposición que afirme la propia consistencia de Z. Estos resultados son los que se conocen como *Primer Teorema de*

---

4 Cf. Church, A., "A Note on the Entscheidungs problem", en *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. I, (1936), No. 1, pp. 40-41.

5 "Heyting anuncia su satisfacción por el encuentro; para él, la relación entre el formalismo y el intuicionismo ha sido clarificada y no es necesario que continúe la guerra entre intuicionistas y formalistas. Una vez que los formalistas hayan completado exitosamente el programa de Hilbert (…) incluso los intuicionistas abrazarán cordialmente el infinito", en Smorynski, C., *Sef-Reference and Modal Logic, Sringer-Verlag*, New York, 1985 (citado en Martínez, G. y Piñeiro, G., *Gödel* ∀ (*para todos*)*,* Barcelona, Ediciones Destino, 2010, pp. 284-285).

Incompletitud y *Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel*, respectivamente.[6] De esta manera tenemos que hablar de Kurt Gödel y su *Teorema de Incompletitud* es hablar del sujeto que derrumbo el sueño formalista de Hilbert y la reducción de la matemática a la lógica por parte de los logicistas, es hablar del matemático que probó que no se puede encerrar la aritmética en un sistema axiomático y es también hablar del pensador que introdujo nuevas técnicas a la lógica matemática y la teoría de conjuntos, técnicas que fortalecieron campos como la teoría de modelos y la teoría de las funciones recursivas.[7]

2. *Un ejemplo de una teoría del tipo formalista: el sistema $\mathcal{N}$*[8]

Consideremos a la aritmética como todas las sentencias que son verdad en la siguiente estructura $<\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0>$, donde "$\mathbb{N}$" representa el universo de los números naturales, el signo "+" es la suma entre

---

6 Cuando el interés no sea destacar a los teoremas por separado nos referiremos a ellos como *El Teorema de Incompletitud* de Gödel.

7 Cf. Hamilton, A., *Lógica para matemáticos,* Madrid, Editorial Paraninfo, 1981, p. 151 (Definición 6.15). Siguiendo a Hamilton tenemos que una función sobre $\mathbb{N}$ es recursiva si se puede obtener a partir de las funciones básicas mediante un número finito de aplicaciones de las reglas I, II, III. Las funciones básicas son las siguientes:
La función cero z: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $z(n)= 0$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$
La función sucesor s: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $s(n)= n+1$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.
Las funciones de proyección p_i^k: $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $p_i^k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$, para todo $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$
Las reglas básicas son las siguientes:
I) Composición: Si g: $\mathbb{N}^j \rightarrow \mathbb{N}$ y h_i: $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ para $1\leq i \leq j$, entonces f: $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ se obtiene mediante composición de g y $h_{1,} \ldots, h_{i,}$ definiéndose así:
$f(n_{1,} \ldots, n_k) = g\,(h_1(n_{1,} \ldots, n_k) \ldots, h_j(n_{1,} \ldots, n_k))$.
II) Recursión: Si g: $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ y h: $\mathbb{N}^{k+2} \rightarrow$N, entonces la función f: $\mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:
$f\ (n_{1,} \ldots, n_k,0) = g(n_1 \ldots,n_k)$
$f\ (n_{1,} \ldots, n_k,n+1) = h(n_{1,} \ldots, n_k, n, f(n_{1,} \ldots, n_k,n))$
Se dice que fue obtenida por recursión a partir de las funciones g y h.
III) Operador de minimización: sea g: $\mathbb{N}^{k+1} \rightarrow$N cualquier función que tenga la propiedad de que para todo $n_1 \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ existe al menos un n $\in \mathbb{N}$ tal que $g(n_{1,} \ldots, n_k, n) = 0$. Entonces la función f: $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definida por: $f(n_{1,} \ldots, n_k)=$ mínimo número n $\in \mathbb{N}$ tal que $g(n_{1,} \ldots, n_k, n) = 0$ (Se dice que se obtuvo a partir de g mediante uso del operador de minimización).

8 El sistema formal $\mathcal{N}$ está inspirado en Hamilton, *Lógica para matemáticos*, cit., Cap. 5 y 6.

naturales, el signo "·" es el producto entre naturales, el signo "S" es la función sucesor, es decir, la función que a cada natural n le asigna n+1, y por último tenemos un individuo destacado que es el cero. Podemos ver a la aritmética como el siguiente conjunto $\{\varphi \mid \varphi$ es verdad en $<\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0>\}$.

Lo que haremos a continuación es definir y construir un sistema formal para la aritmética en primer orden. A este sistema formal lo llamaremos $\mathcal{N}$.

(A) Lenguaje de $\mathcal{N}$

(A.1) Símbolos lógicos

a) Conectivas: $\neg$, $\rightarrow$
b) Símbolos auxiliares: (,), ,
c) Cuantificadores: $\forall$
d) Variables:[9] $x, y, z,\ldots$
f) Identidad: =

(A.2) Símbolos no-lógicos

a) Una constantes para el cero, que en nuestro caso será el símbolo $\underline{\mathbf{0}}$.
b) Dos símbolos funcionales binarios, uno para la suma y otro para el producto, que en nuestro caso serán los símbolos $\underline{+}$ (para la suma) y $\underline{\cdot}$ (para el producto).
c) Un símbolo funcional para la función sucesor, que en nuestro caso será $\underline{\mathbf{S}}$.

(B) Axiomas lógicos de $\mathcal{N}$

Los axiomas lógicos que proponemos para el sistema $\mathcal{N}$ son los ofrecidos por H. Enderton en el apartado de lógica de primer orden de su libro *Una introducción matemática a la lógica*. Los axiomas (esquemas de axiomas[10]) lógicos son todas aquellas generalizaciones de las siguientes fórmulas:[11]

9 Es importante señalar que tenemos una cantidad numerable de variables.
10 Hay una cantidad infinita de axiomas lógicos.
11 Cf. Enderton, H., *Una Introducción matemática a la lógica*, México D.F., UNAM,

Ax. Lógico 1:[12] Toda instancia de una tautología de la lógica proposicional.

Ax. Lógico 2:[13] $\forall x\alpha \rightarrow \alpha^{x}_{t}$, donde t se puede sustituir por x en α.

Ax. Lógico 3:[14] $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \forall x\ \beta)$.

Ax. Lógico 4:[15] $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, Donde x no ocurre libre en α, es decir, donde x no está bajo el alcance de un cuantificador.

Ax. Lógico 5:[16] $x = x$.

Ax. Lógico 6:[17] $x = y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$, donde α es una fórmula atómica y α' se obtiene de α al remplazar x por y en cero o más lugares (aunque no es necesario que sea remplazado en todos).

(C) Axiomas propios de $\mathcal{N}$

Los axiomas propios (esquemas de axiomas[18]) del sistema $\mathcal{N}$ son los siguientes:

Ax.1:[19] $\forall x\ (\underline{\mathbf{0}} \neq \underline{\mathbf{S}}\ (x))$

Ax.2:[20] $\forall x$ "$y\ (\underline{\mathbf{S}}(x) = \underline{\mathbf{S}}\ (y) \rightarrow x = y)$

Ax.3:[21] $\forall x\ (x \underline{\pm}\ \underline{\mathbf{0}} = x)$

2004, p. 167.

12 Aquí están comprendidas las fórmulas que se puede obtener a partir de tautologías de la lógica proposicional al reemplazar las letras proposicionales por fórmulas del lenguaje de la lógica de primer orden. Por ejemplo $\forall x\ Px \rightarrow \forall x\ Px$ se obtiene de $A \rightarrow A$, sustituyendo A por $\forall x\ Px$. En síntesis, este axioma introduce todas las leyes de la lógica proposicional.

13 Define el comportamiento del generalizador. Este esquema de axioma expresa lo que se conoce como eliminación del generalizador por un término.

14 También define el comportamiento del generalizador. Este esquema de axioma expresa lo que se conoce como distribución del generalizador.

15 También define el comportamiento del generalizador. En conclusión, los axiomas 2, 3 y 4 definen al cuantificador universal.

16 Define el comportamiento de la identidad. Este esquema de axioma expresa la propiedad de reflexividad de la identidad.

17 Define el comportamiento de la identidad. Este esquema de axioma expresa la sustitución en la identidad para fórmulas atómicas. En conclusión, los axiomas 5 y 6 definen la relación de identidad.

18 El sistema $\mathcal{N}$ tiene una cantidad infinita de axiomas propios.

19 Intuitivamente el axioma 1 nos dice que el 0 no es el sucesor de ningún otro número natural.

20 Intuitivamente el axioma 2 nos dice que la función sucesor es inyectiva, es decir, si el sucesor de un número *m* es igual al sucesor de un número *k*, entonces *m* y *k* son iguales.

21 Este axioma representa el caso base de la definición inductiva de la suma, lo que dice es que dado cualquier número, ese número sumado al cero siempre da el

Ax.4:[22] $\forall x\ \forall y\ (x\ \underline{+}\ \underline{\mathbf{S}}\ (y) = \underline{\mathbf{S}}\ (x\ \underline{+}\ y))$
Ax.5:[23] $\forall x\ (x\ \underline{\cdot}\ \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}})$
Ax.6:[24] $\forall x\ \forall y\ (x\ \underline{\cdot}\ \underline{\mathbf{S}}\ (y) = (x\ \underline{\cdot}\ y)\ \underline{+}\ x))$
Ax.7:[25] Para cada fórmula $\varphi(x)$, la siguiente fórmula es un axioma (o mejor dicho un esquema de axioma): $\{\varphi(\underline{\mathbf{0}}) \wedge \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(\underline{\mathbf{S}}\ (x)))\} \rightarrow \forall x \varphi(x)$.

(D) Reglas de inferencia en $\mathcal{N}$

La regla de *Modus Ponens:*
$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

3. La idea de representación en $\mathcal{N}$

Hay ciertas operaciones, propiedades y funciones que tienen su lugar en el universo de los números naturales, pero que también se pueden expresar en el cálculo formalizado $\mathcal{N}$.

Definición:[26] Una relación k-aría R sobre los números naturales es *expresable* $\mathcal{N}$ si existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ con k variables libres tal que, para todo $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

(i) Si $R(n_1, \ldots, n_k)$ ocurre en $\mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N} \vdash \varphi(\ \underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{n1})}\ (\underline{\mathbf{0}}), \ldots, \underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{nk})}\ (\underline{\mathbf{0}}))$.[27]

mismo número.

22 Este axioma representa el caso inductivo de la definición de la suma, lo que expresa el axioma es que la suma de un primer número más el sucesor de un segundo número es igual a el sucesor de la suma del primer número más el segundo.

23 Este axioma representa el caso base de la definición inductiva del producto, lo que nos dice es que cualquier número multiplicado por el cero siempre es igual a cero.

24 Este axioma representa el caso inductivo de la definición del producto, lo que dice es que el producto de un primer número por el sucesor de un segundo número, es igual al producto del primer número por el segundo, y a ese producto le sumamos el primer número.

25 Este esquema de axioma se parece al 5to postulado de Peano, sin embargo aunque los dos son versiones del principio de inducción matemática, el axioma 7 es más débil que el 5to postulado de Peano. El quinto axioma de Peano está escrito en segundo orden, mientras que nuestro axioma 7 está escrito en primer orden, Cf. Hamilton, *Lógica para matemáticos*, cit., p. 130.

26 Cf. *Ibid*., p. 144 (Definición 6.3).

27 $\underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{n1})}\ (\underline{\mathbf{0}})$, es el término del lenguaje que nombra al número n_1, y así con $\underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{nk})}(\underline{\mathbf{0}})$

(ii) Si $R(n_1, \ldots, n_k)$ no ocurre en $\mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N} \vdash \neg(\varphi(\underline{\mathbf{S}}^{(n1)}(\underline{\mathbf{0}}), \ldots, \underline{\mathbf{S}}^{(nk)}(\underline{\mathbf{0}})))$.

Ejemplo: La relación de identidad en los naturales es expresable en $\mathcal{N}$, es decir, $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si m es diferente n, entonces $\mathcal{N} \vdash \neg(\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}) = \underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$.

Si m es igual a n, entonces $\mathcal{N} \vdash (\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}) = \underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$.

Como 2 es diferente de 3, de $\mathcal{N}$ se deriva que el nombre para dos es diferente del nombre para 3: $\mathcal{N} \vdash \neg\ (\underline{\mathbf{S}}^{(2)}(\underline{\mathbf{0}}) = \underline{\mathbf{S}}^{(3)}(\underline{\mathbf{0}}))$.

De esta manera tenemos que una relación es expresable en el sistema si existe una fórmula en el lenguaje, de tal manera que si ocurre la relación, entonces la fórmula afirmada se deriva del sistema (es un teorema del sistema).

Ya dijimos cuando una relación es expresable en el sistema, ahora definiremos cuando una función es representable en el sistema.[28]

Definición:[29] una función de n argumentos es r*epresentable* en $\mathcal{N}$ si existe una fórmula con n+1 variables libres $\varphi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$, tal que para cada $k_1, \ldots, k_n, m \in \mathbb{N}$, lo siguiente ocurre:

(i) Si $f(k_1,\ldots,k_n)= m$, entonces $\mathcal{N} \vdash \varphi(\underline{\mathbf{S}}^{(k1)}(\underline{\mathbf{0}})), \ldots, \underline{\mathbf{S}}^{(kn)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}))$.

(ii) $\mathcal{N} \vdash \exists! x \varphi(\underline{\mathbf{S}}^{(k1)}(\underline{\mathbf{0}})), \ldots, \underline{\mathbf{S}}^{(kn)}(\underline{\mathbf{0}}), x)$, esta cláusula asegura la unicidad de la función.

Dos ejemplos de funciones representables en $\mathcal{N}$ son los siguientes:

a) La función de asignarle a cada número natural un número par es *representable* en el sistema $\mathcal{N}$.[30] Sea j una función que va de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, definida de la siguiente manera: $j(x)= 2 \cdot x$, y sea $\mathcal{A}(x_1, x_2)$ la fórmula $x_2 = x_1 \underline{\cdot} (\underline{\mathbf{S}}^{(2)}(\underline{\mathbf{0}}))$, es decir, x_2 es el par generado por x_1, entonces $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$:

   i) Si n = 2 m entonces $\mathcal{N} \vdash (\underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))= (\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}))\underline{\cdot}(\underline{\mathbf{S}}^{(2)}(\underline{\mathbf{0}}))$. (n es la imagen de m por j)

   ii) Si $n \neq 2$ m entonces $\mathcal{N} \vdash \neg((\underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))= (\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}))\underline{\cdot}(\underline{\mathbf{S}}^{(2)}(\underline{\mathbf{0}})))$.

nombra a n_k.

28 Cuando hablamos de relaciones decimos que estas son expresables en $\mathcal{N}$, con las funciones diremos que ellas son representables.

29 Cf. Hamilton, A., *Ob. Cit,* p. 145, (Definición 6.5).

30 Cf. Ibíd., p. 147.

(n no es la imagen de m por *j*)

iii) $\mathcal{N} \vdash \exists! x_2 \, (x_2 = (\underline{\mathbf{S}}^{(m)} (\underline{\mathbf{0}})) \underline{\cdot} (\underline{\mathbf{S}}^{(2)} (\underline{\mathbf{0}})))$

(La imagen de m por *j* es única)

b) La función de asignarle a cada par de números naturales su suma es *representable* en el sistema $\mathcal{N}$.[31] Sea *h* una función que va de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, tal que $h((n, m)) = n + m$, y sea $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3)$ la fórmula $x_3 = x_1 + x_2, \forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ (es decir, x_3 es el resultado de sumar $x_1 + x_2$):

i) Si $p = m + n$ entonces $\mathcal{N} \vdash (\underline{\mathbf{S}}^{(p)} (\underline{\mathbf{0}})) = (\underline{\mathbf{S}}^{(m)} (\underline{\mathbf{0}})) \underline{+} (\underline{\mathbf{S}}^{(n)} (\underline{\mathbf{0}}))$.

(p es la imagen del par (m, n) por *h*)

ii) Si $p \neq m + n$ entonces $\mathcal{N} \vdash \neg((\underline{\mathbf{S}}^{(p)} (\underline{\mathbf{0}})) = (\underline{\mathbf{S}}^{(m)} (\underline{\mathbf{0}})) \underline{+} (\underline{\mathbf{S}}^{(n)} (\underline{\mathbf{0}})))$.

(p no es la imagen del par (m, n) por *h*)

iii) $\mathcal{N} \vdash \exists! x_3 (x_3 = (\underline{\mathbf{S}}^{(m)} (\underline{\mathbf{0}})) \underline{+} (\underline{\mathbf{S}}^{(n)} (\underline{\mathbf{0}})))$

(La imagen del par (m, n) por *h* es única)

4. ¿Son todas las relaciones (funciones) expresables (representables) en $\mathcal{N}$?

Claramente hay relaciones que no se pueden expresar pues el lenguaje es numerable, mientras que el conjunto de las relaciones monádicas no es numerables (es mayor que el cardinal de los naturales). Es por esta razón que Hilbert se oponía a la propuesta de Skolem de colocar la lógica de primer orden como base adecuada para la matemática,[32] pues dentro de lógica de primer orden la cantidad de fórmulas no es suficiente para representar las relaciones monádicas. Ahora bien, dentro de las que se pueden caracterizar en primer orden sólo son expresables en los sistemas aquellas que son recursivas:

---

31 Cf. *Ibid.*, p. 146.

32 Cf. Moore, G.H., "A House divide against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics" en Aspray , W. y Kitcher, P. (eds.), *History and philosophy of moderns mathematics*, Minneapolis, The Universe of Minnesota Press, 1988, p. 25. Siguiendo las observaciones del profesor G. Moore al final de su artículo, tenemos que una primera propuesta que el matemático Skolem presentó en 1923, ante la comunidad de lógicos y matemáticos, fue que la *Lógica de primer orden* se considerara como toda la lógica, la segunda propuesta fue que se escribiera (se trabajará) la teoría de conjuntos en primer orden.

Teorema:[33] Una relación es expresable en $\mathcal{N}$ si y sólo si es recursiva.

Para poder entender el concepto de recursividad haremos uso de la "tesis de Church" de 1936:

Tesis de Church:[34] Una función es efectivamente calculable si y sólo si es recursiva.

Esta tesis lo que trata de hacer es emparentar un concepto científico como lo es el concepto de recursividad, con un concepto precientífico e intuitivo que es el de"ser efectivamente calculable". Así pues, toda función que sea efectivamente calculable, es decir, que podamos realizar en un número finito de pasos bien definidos, es una función recursiva. De esta manera una función es representable si aplicándola a un número natural podemos obtener su imagen en un numero finito de pasos.

5. La numeración de Gödel

Ya dimos cuenta en el punto pasado de uno de los conceptos que recorre todo el *Teorema de incompletitud* de Gödel, que es el concepto de *representación*. Ahora daremos lugar a la explicación de otro de los factores importantes y decisivos para el *Teorema de incompletitud*, que es la codificación del lenguaje formal mediante la numeración de Gödel (o aritmetización de la sintaxis).

Gödel lo que hizo fue definir una función g sobre el conjunto de los símbolos primitivos del sistema, tal que a cada símbolo le asigna un número natural, y mediante ciertos procedimientos se extiende la función g para asignarle un número gödeliano a toda fórmula del sistema (sucesión de símbolos) y a toda prueba del sistema (sucesión finita de fórmulas). La función g se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:[35]

---

33 Para una demostración del teorema véase Hamilton, *Lógica para matemáticos*, cit., p. 149.

34 Copeland, B. J., "The Church-Turing Thesis", en Zalta, Edward N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/church-turing/>.

35 Úbeda, J., "Numeración de Gödel", en Vega, L. y Olmos, P. (ed.), *Compendio de lógica, argumentación y retórica*, Madrid, Editorial Trotta, 2012 (2da edición), p. 429.

1) La función *g* es inyectiva, es decir, a diferentes símbolos, le corresponden diferentes números de Gödel.
2) Sea *w* un elemento del dominio de *g*, entonces el número de Gödel de *w* puede ser computado de forma efectiva por una algoritmo.
3) La función inversa g^{-1} es efectivamente computable, esto es, si *n* es un número de Gödel, entonces existe un algoritmo que permite construir la hilera de símbolos cuyo número de Gödel es *n*.

Existen varias maneras de definir la numeración de Gödel, nosotros seguiremos la que ofrece Hamilton en *Lógica para matemáticos*. Así pues, siguiendo al autor definiremos una función *g* sobre un conjunto de símbolos de un lenguaje de primer orden. Nuestra función tendrá como dominio tal conjunto de símbolos y como conjunto de llegada alos números naturales.

Definición de la función g:[36]

Símbolo	Descripción del símbolo	Número de Gödel según la función g
(	Paréntesis abierto	g (()= 3
)	Paréntesis cerrado	g ())= 5
,	coma	g (,)= 7
$\neg$	negación	$g(\neg)= 9$
$\rightarrow$	Implicación	$g(\rightarrow)= 11$
$\forall$	Cuantificador universal	$g(\forall)= 13$
x_k	Variable	$g(x_k) = 7+8 \cdot k$, para $k \in \mathbb{N}$
a_k	Constante	$g(a_k) = 9+8 \cdot k$, para $k \in \mathbb{N}$
f_k^n	Letras para funciones, donde el n indica la aridad, y el k la posición.	$g(f_k^n) = 11 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$, para $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$
A_k^n	Letras para predicado, donde el n indica la aridad, y el k la posición.	$g(A_k^n) = 13 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$, para $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$

36 Cf. Hamilton, *Lógica para matemáticos*, cit., p. 159.

Como dijimos anteriormente, dado un número podemos saber si él es o no el número de Gödel de un símbolo del lenguaje, ejemplo: el número 578 es el número de Gödel de un símbolo del lenguaje, lo que hacemos es dividir 587 entre 8, esto nos da como resultado $(8 \cdot 73) + 3$, que es igual a $(8 \cdot 72) + 11$, y esto es igual a$(8 \cdot (2^3 \cdot 3^2)) + 11$, este número es la imagen que la función g le da al símbolo para función f^3_2. Pero no todo número natural representa un número de Gödel, por ejemplo: el número impar 333 dividido entre 8 es igual a $(8 \cdot 41) + 5$, esto es igual a $(8 \cdot 40) + 13$, pero si descomponemos 40, esto nos da $(8 \cdot (2^3 \cdot 5)) + 13$, y este número no es imagen de ningún símbolo del sistema.

Extensión de la función g para asignarle un número de Gödel a cualquier término y fórmula (fbf) del sistema:

Lo más apropiado es darle un único número de Gödel a una fórmula, en vez de una serie de números. Ahora bien, es importante señalar que el número de Gödel de un símbolo del sistema siempre será un número impar (el resultado de la suma de un numero par con un número impar es siempre un número impar), mientras que el número de Gödel de una cadena de símbolos del sistema (fbf) es un número par.[37] Procedemos a mostrar cómo se le asigna un número gödeliano a una cadena o sucesión de símbolos del sistema:[38]

Si $U_1, \ldots, U_k$ son símbolos primitivos del lenguaje, definimos:

$g(U_1, \ldots, U_k)= 2^{g(U_1)} \cdot 3^{g(U_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{g(U_k)}$, donde para cada i, $1\geq i \leq k$, P_i es el i-ésimo número primo.

Consideremos los siguientes ejemplos:

(a) Calculemos el número de Gödel de la siguiente término $f^1_1(x_1)$

$$g (f^1_1(x_1))= 2^{g(f1_1)} \cdot 3^{g(()} \cdot 5^{g(x1)} \cdot 7^{g())}$$
$$g (f^1_1(x_1))= 2^{11+8 \cdot (2 \cdot 3)} \cdot 3^3 \cdot 5^{7 + 8 \cdot 1} \cdot 7^5$$
$$g(f^1_1(x_1))= 2^{59} \cdot 3^3 \cdot 5^{15} \cdot 7^5$$

37 Cf. *Ibid.*, p. 160.

38 Cf. *Ibidem.*

(b) Un número par que no resulta ser un número de Gödel es 1008, pues $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, y este número no es imagen ni de un término, ni de una fórmula y mucho menos de un símbolo primitivo.

Extensión de la función *g* para asignarle un número de Gödel a las sucesiones finitas de fórmulas del sistema:

A las sucesiones finitas de fórmulas también se le puede asignar mediante la función *g* un número de Gödel, es decir, las derivaciones (pruebas) también tienen un número gödeliano. La extensión de *g* es la siguiente:[39]

Sea $S_1, S_2, \ldots, S_r$ una sucesión finita de fórmulas entonces:

$g(S_1, S_2, \ldots, S_r) = 2^{g(S_1)} \cdot 3^{g(S_2)} \cdot 5^{g(S_3)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(S_r)}$, donde para cada i, $1 \geq i \leq r$, P_i es el i-ésimo número primo.

Ahora bien, ¿Cómo sabemos cuándo hablamos del número de Gödel de una prueba? Púes cuando tengamos un producto de primos elevados a números pares tendremos una fuerte candidata de ser una sucesión finita de fórmulas o términos. Así pues, la diferencia entre los números de Gödel de un símbolo, una fórmula y una secuencia de fórmulas puede resumirse perfectamente de la siguiente manera:

> "…se puede ver fácilmente que el número correspondiente a un símbolo no es nunca el correspondiente a una palabra,[40] ya que el primero es impar y el segundo es par. Además, el número de una palabra no es nunca el número de una sucesión de palabras[41] (el primero es tal que el exponente de 2 es impar, mientras que el exponente de 2 en el segundo es par)"[42]

Por último es importante señalar que la propiedad inyectiva de la función *g* se preserva bajo sus dos extensiones, es decir, a diferentes fórmulas le corresponde diferentes números de Gödel (lo mismo para el caso de secuencias de fórmulas), esto se debe al *teorema fundamental de*

---

39 Cf. *Ibid.*, p. 161.

40 En este contexto "palabra" es sinónimo de "fórmula".

41 En este contexto "sucesión de palabras" es sinónimo de "sucesión de fórmulas".

42 Úbeda, "Numeración de Gödel", en Vega, L. y Olmos, P. (eds.), *Compendio de lógica...*, cit., p. 429.

la aritmética según el cual la factorización de cualquier número entero en términos de potencias de factores primos es única.[43]

7. *Algunas relaciones expresables en $\mathcal{N}$*

Con la ayuda de la noción de número de Gödel, ofreceremos una lista de relaciones sobre ℕ que son recursivas y por ende son expresables en $\mathcal{N}$, la lista es la siguiente:[44]

Teorema:[45]

a. Fbf(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de una fórmula de $\mathcal{N}$.
b. Prax(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de un axioma propio de $\mathcal{N}$.
c. Demt(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de una demostración en $\mathcal{N}$.
d. Dm(m, n) se verifica si y sólo si m es el número de Gödel de una demostración de la fórmula cuyo número de Gödel n.
e. W(m, n) se verifica si y sólo si m es el número de Gödel de una fórmula $\mathcal{A}(x_1)$, en la que aparece libre x_1, y n es el número de Gödel de una demostración de $\mathcal{A}(\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}))$ en $\mathcal{N}$.

8. *Ideas principales que articulan la prueba del primer y segundo teorema de incompletitud de Gödel*

Antes de introducir el esquema de prueba del *Teorema de Incompletitud de Gödel*, es necesario dar una definición previa:

Definición:[46] Un sistema de primer orden S con el mismo lenguaje que $\mathcal{N}$ es ω-consistente, si ninguna fórmula $\mathcal{A}(x_1)$, en la que aparece li-

---

43 El profesor Enrique Alonso nos dice como Gödel llega a dicho resultado: "… Gödel se sirve de los conocimientos de teoría de números adquiridos en las clases impartidas por Furtwängler en Viena –Según él mismo declara– y en particular del conocido teorema chino del resto." En Alonso, E., *Sócrates en Viena: Una biografía intelectual de Kurt Gödel*, Montesinos, 2007, p. 78.

44 Cf. Hamilton, *Lógica para matemáticos*, cit., p.162.

45 Una prueba de estos teoremas se puede encontrar en Mendelson, E., *Introduction to the matemathical lógica*, New York, Chapman and Hall, 1997, pp. 193-199.

46 Cf. Hamilton, A., *Lógica para matemáticos*, cit., p.164.

bre x_1, se tiene que $\neg\forall x_1\ \mathcal{A}(x_1)$ es un teorema de S, supuesto que $\mathcal{A}(\underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$ sea un teorema de S para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir:

Si $S \vdash \mathcal{A}(\underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $S \nvdash \neg\forall\ x_1 \mathcal{A}(x_1)$

De la definición de ω-consistencia se sigue lo siguiente:

Teorema:[47] Sea **S** un sistema de primer orden con el mismo lenguaje que $\mathcal{N}$, si **S** es ω-consistente, entonces **S** es consistente.

Debemos señalar que la propiedad de consistencia no implica la propiedad de ω-consistencia.[48]

8.1. Un acercamiento a la prueba del *primer teorema de incompletitud de Gödel*

Enunciado del *Primer Teorema de incompletitud* (1931):

Si $\mathcal{N}$ es ω-consistente, entonces $\mathcal{N}$ es incompleto, es decir, existe una fórmula φ tal que $\mathcal{N} \nvdash \varphi$ y $\mathcal{N} \nvdash \neg\varphi$.

Demostración:[49]

W(m, n) es expresable en $\mathcal{N}$, de tal modo que existe una fórmula $\mathcal{W}(x_1, x_2)$, en donde sólo x_1 y x_2 figuran como variables libres, de tal forma que:

(i) Si W(m, n) se verifica, entonces $\mathcal{N} \vdash \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$

(ii) Si W(m, n) no se verifica, entonces $\mathcal{N} \vdash \neg\mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$

Consideremos ahora la siguiente fórmula $\forall x_2 \neg\mathcal{W}(x_1, x_2)$, sea *p* el número de Gödel de dicha fórmula y consideremos finalmente la fórmula obtenida al sustituir $\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}})$ por x_1, es decir, $\forall x_2 \neg\mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$, denotaremos a esta última fórmula φ.

Nos preguntamos entonces, qué dice φ, bueno φ lo que dice es que "$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{W}(p, n)$ no se verifica". Si desarrollamos lo último tenemos que: $\forall n \in \mathbb{N}$, no es cierto que p sea el número gödeliano de una fór-

---

47 Este resultado se debe a Rosser, J.B., "Extensions of some theorems of Gödel and Church", en *The Journal of symbolic Logic*, Vol. I. (1936), Una prueba de dicho resultado puede encontrarse en Mendelson, *Introduction to the matemathical...*, cit., pp. 205-206.

48 Cf. *Ibid.*, p. 206.

49 Cf. Hamilton, *Lógica para matemáticos*, cit., Cap. 6, (sección 6.5).

mula $\mathcal{A}(x_1)$ en la que la variable x_1 aparece libre, y que n sea el número gödeliano de una demostración de $\mathcal{A}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}))$ en $\mathcal{N}$. Ahora bien, p es el número de Gödel de una fórmula en la que aparece libre x_1, esto es, la fórmula $\forall x_2 \neg \mathcal{W}(x_1, x_2)$, y si denotamos a dicha fórmula por $\mathcal{A}(x_1)$, entonces $\mathcal{A}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}))$es la fórmula φ. De tal manera tenemos que la interpretación de φ es equivalente a: $\forall n \in \mathbb{N}$, n no es el número de Gödel de una demostración de la fórmula φ en $\mathcal{N}$". En un cierto sentido puede considerarse que φ afirma su propia indemostrabilidad.[50]

Supongamos por un momento que $\mathcal{N} \vdash \varphi$, es decir, que lo siguiente ocurre $\mathcal{N} \vdash \forall x_2 \neg \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$, sea q el número de Gödel de dicha demostración, entonces tenemos que W(p, q) se verifica. Entonces como tenemos que la relación **W** es recursiva y por tanto representable en $\mathcal{N}$, se cumple entonces que $\mathcal{N} \vdash \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(q)}(\underline{\mathbf{0}}))$. Ahora bien, si aplicamos una eliminación del generalizador en $\forall x_2 \neg \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$, eliminando x_2 por q, obtenemos que $\mathcal{N} \vdash \neg \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(q)}(\underline{\mathbf{0}}))$, pero esto hace que $\mathcal{N}$ sea inconsistente, pues se está derivando una fórmula y su negación. Pero este hecho contradice la hipótesis de que $\mathcal{N}$ es ω-consistente y por tanto consistente, así pues nuestra suposición inicial es falsa y tenemos que $\mathcal{N} \nvdash \varphi$.

Tenemos así que W(p, q) no se verifica para ningún número natural *q*. Así pues, lo siguiente ocurre $\mathcal{N} \vdash \neg \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(q)}(\underline{\mathbf{0}}))$, para todo $q \in \mathbb{N}$. De esta manera por la ω-consistenci a del sistema $\mathcal{N}$ se tiene que $\mathcal{N} \nvdash \neg \forall x_2 \neg \mathcal{W}(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$ y por lo tanto tenemos que $\mathcal{N} \nvdash \neg\varphi$. Hemos probado así que partiendo de la hipótesis de que $\mathcal{N}$ es ω-consistente (y por ende consistente), se sigue que $\mathcal{N}$ es incompleto.

8.2. Un acercamiento a la prueba del *segundo teorema de incompletitud de Gödel*

Enunciado del *Segundo Teorema de Incompletitud*:

Si $\mathcal{N}$ es consistente, entonces no se puede derivar de $\mathcal{N}$ una fórmula (fbf) que afirme la consistencia de $\mathcal{N}$, es decir, de $\mathcal{N} \nvdash$ Con($\mathcal{N}$).[51]

Nos podemos preguntar quién puede ser esa fórmula Con($\mathcal{N}$), podemos citar dos ejemplos, uno ofrecido por Nagel y Newman en su li-

[50] Cf. *Ibid*., p. 164.

[51] Donde Con($\mathcal{N}$) dice que "$\mathcal{N}$ es consistente".

bro *El teorema de Gödel*, donde Con($\mathcal{N}$) es la siguiente proposición: $\exists y \forall x \neg D(x, y)$,[52] es decir que existe una fórmula de la aritmética para la cual no hay ninguna sucesión de fórmulas que constituya una prueba en $\mathcal{N}$. En otras palabras no hay una prueba para la fórmula cuyo número de Gödel es *y*.

El otro ejemplo de cómo puede expresarse Con($\mathcal{N}$), lo ofrece Mendelson en su libro *Introducción a la lógica matemática*, allí Con($\mathcal{N}$) es la siguiente proposición:

$$\neg\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (D(x_1, x_2) \wedge D(x_3, x_4) \wedge Neg\,(x_2, x_4))$$

Donde Neg (m, n) se verifica si y sólo si n y m son números de Gödel de fórmulas contradictorias.[53]

Tenemos así, que en cualquiera de los dos casos, si Con($\mathcal{N}$) se obtuviese como teorema de $\mathcal{N}$, entonces se probaría que $\mathcal{N}$ es consistente.

Presentaremos ahora un esbozo de la prueba del *Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel*.

Demostración:[54]

Debemos partir del siguiente Teorema: $\mathcal{N} \vdash \mathrm{Con}(\mathcal{N}) \rightarrow \varphi$,[55] donde φ es la proposición indemostrable que figura en el *primer Teorema de Incompletitud*. Entonces, si esto ocurre $\mathcal{N} \vdash \mathrm{Con}(\mathcal{N})$, entonces aplicando la regla de *Modus Ponens* obtenemos que $\mathcal{N} \vdash \varphi$, pero esto contradice el *Primer Teorema de Incompletitud de Gödel*, por lo tanto tenemos que $\mathcal{N} \nvdash \mathrm{Con}(\mathcal{N})$.

9. Una consecuencia del Teorema de incompletitud de Gödel sobre los cardinales inaccesibles

A continuación presentaremos la idea de una demostración con respecto a cardinales inaccesibles en donde se usa el *Teorema de Incompletitud de Gödel*. Antes ofreceremos una serie de definiciones:

52 Cf. Nagel, E. y Newman, J., *El teorema de Gödel,* Madrid, Tecnos, 1994, p. 114.
53 Cf. Mendelson, *Introduction to the matemathical...*, cit., p. 212.
54 Cf. *Ibid.*, p. 212-213.
55 Cf. *Ibid.*, p. 212.

Definición de ordinal:[56] Un conjunto a es un ordinal si es transitivo y está estrictamente bien ordenado por $\in$.

Los números ordinales se puede construir informalmente de la siguiente manera usando las operaciones de "paso sucesor" y "paso al límite":

$$
\begin{gathered}
0 = \emptyset \\
1 = \{0\} \\
2 = \{0, 1\} \\
\vdots \\
n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \\
\vdots \\
\omega = \{0, 1, 2, \ldots\} \\
\omega+1 = \{0, 1, 2, \ldots; \omega\} \\
\omega+2 = \{0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1\} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Definición de cardinal:[57] Un ordinal α es un cardinal si no es equipotente a ningún ordinal menor (es decir, no es equipotente a ninguno de sus elementos).

Ejemplo de cardinales son: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$

Definición de cofinalidad:[58] Sea α un ordinal límite, decimos que $\beta < \alpha$ es cofinal con α si existe una función creciente $f: \beta \rightarrow \alpha$, tal que para todo $\xi<\alpha$, existe $\delta<\beta$ tal que $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α). Dado α. Cof(α), la cofinalidad de α, es el menor ordinal cofinal con α.

Definición de cardinal regular:[59] un cardinal infinito es un cardinal regular si es igual a su cofinalidad. Decimos que κ es un cardinal singular en caso contrario.

Tenemos que ω es un cardinal regular, mientras que $\aleph_\omega$ es singular.

---

56 Cf. Di Prisco, C., *Teoría de conjuntos*, Caracas, UCV-CDCH, 2009, p. 55.
57 Cf. *Ibid*., p. 75.
58 Cf. *Ibid*., p. 91.
59 Cf. *Ibid*., p. 92.

Definición de cardinal inaccesible:[60] α es un cardinal inaccesible si y solo si

a) $\alpha > \omega$
b) α es un cardinal regular
c) $\kappa < \alpha \rightarrow 2^{\kappa} < \alpha$ (o, equivalentemente $|A| = \kappa \wedge \kappa < \alpha \rightarrow |\mathcal{P}(A)| < \alpha$), para cualquier cardinal κ.

El punto central aquí es que desde la axiomática de Zermelo-Fraenkel no puede demostrarse la existencia de cardinales inaccesibles. Pasemos a explicar las ideas que articulan tal demostración.

Teorema:[61] Si ZFC es consistente, entonces $ZFC \nvdash I$ (Donde I es "existe un cardinal inaccesible")

Para probar dicho teorema necesitamos de un lema previo.

Lema:[62] Si κ es un cardinal inaccesible entonces $V\kappa$ es un modelo de ZFC.

Procedamos ahora a mostrar un esquema de cómo sería la demostración del teorema.

Demostración: (Por absurdo)

Hipótesis: ZFC es consistente y $ZFC \vdash I$

Por la hipótesis y usando el lema tenemos que de $ZFC \vdash V\kappa \vDash ZFC$, es decir, que de ZFC se deriva que $V\kappa$ es un modelo para ZFC. Pero entonces por el teorema de corrección para la lógica de primer orden (Gödel 1930) tenemos que de $ZFC \vdash$ ZFC es consistente, lo cual es una contradicción por el *segundo teorema de incompletitud de Gödel*. Por lo tanto, si ZFC es consistente entonces $ZFC \nvdash I$.

10. *Consecuencias filosóficas de Los Teoremas de incompletitud de Gödel sobre el programa meta-matemático de David Hilbert.*

Existen muchas consecuencias filosóficas que pueden salir a relucir sobre los *Teoremas de incompletitud de Gödel*, dichas consecuencias van

60 Mosterín, J. y Torretti, R., *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*, Madrid, Alianza, 2002, p. 72. (Entrada: Cardinales inaccesibles).
61 Cf. Jech, T., *Set Theory*, Academic Press, 1978, pp. 85-86 (Teorema 27).
62 Cf. *Ibid.* p. 85 (Lema 10.2).

desde el uso del teorema como recurso para debatir el mecanicismo en filosofía de la mente, hasta el uso del teorema para defender una posición realista en la filosofía de la matemática. Dentro de esta última existe incluso aún un abanico más grande de consecuencias e interpretaciones filosóficas sobre el teorema, pero nosotros nos encargaremos en el presente artículo de reflejar las implicaciones filosóficas que tuvo el *Teorema de Incompletitud* sobre el programa metamatemático de Hilbert. Siguiendo interpretaciones como las de J. von Neumann,[63] el método metamatemático de Hilbert exigía tres pasos para su total ejecución, el primero suponía la completa formalización de la matemática clásica, el segundo era emplear razonamientos finitarios para probar la completitud del sistema y el último paso suponía de igual forma el uso de métodos finitarios para probar la consistencia de la teoría. La primera exigencia había sido exitosamente realizada por Frege y Russell, pero las otras dos exigencias se encontraron con la imposibilidad de ser llevadas a cabo.

Al decir que la completitud falla para el cálculo aritmético, lo que queremos decir es que hay un sinfín de proposiciones que siendo verdaderas no se pueden derivar mediante reglas de inferencia del conjunto de axiomas. Con respecto a lo anterior, lo primero que debemos decir es que para Gödel la incompletitud de los sistemas formales es algo ya esperado, pues para nuestro autor ningún sistema axiomático, por potente que sea, puede abarcar toda la matemática. En la "Conferencia de Gibbs" nuestro autor llama "matemática objetiva" a lo equivaldría a una realidad al estilo platónico donde se encuentra los objetos matemáticos con independencia del sujeto, ahora bien, ninguno de nuestros sistemas axiomáticos puede abarcar en su seno esta matemática objetiva lo que significa que los métodos finitistas y constructivistas no logran dar cuenta del objeto matemático. Al igual que Cantor, Gödel creía que el problema era inherente a los sistemas formales y no a la aritmética, es decir, la aritmética no se puede atrapar en un sistema. De esta manera Gödel demostró que el método axiomático tiene fuertes limitaciones, pues "un

[63] Cf. von Neumann, J., "The formalist foundations of mathematics" (1930), en Benacerraf, P. y Putnam, H., *Philosophy of mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

tratamiento axiomático de la teoría de los números (…) no puede agotar el campo de la verdad aritmética."[64]

Ahora bien, la última cita nos introduce en una problemática bastante interesante y que define de hecho el talante platonista de Gödel. Para Gödel los formalistas confundían la noción de verdad con la de demostrabilidad y de hecho interpretaban la primera en función de la segunda. En 1930 el mismo Gödel demostró que, en principio, en el cálculo de lógica de primer orden se tiene que una fórmula es lógicamente verdadera si y sólo si es demostrable,[65] pero este resultado no se extrapola a los sistemas formales recursivos para la aritmética, porque de hecho, como ya sabemos, existen proposiciones que siendo verdadera no son demostrables a partir del sistema lo que supone que el conjunto de las verdades aritméticas es mayor al conjunto de las fórmulas aritméticas demostrables. Se derrumba así el ideal de axiomatización griego, en donde todo lo que era verdad era demostrable (inclusive en donde se creaba una identidad entre verdad y demostrabilidad) y se vuelve más a la idea aristotélica de que no todo es demostrable y no por ello deja de ser verdad.

Otro aspecto que se ve cuestionado por los resultados gödelianos es el del paralelismo entre la prueba matemática y el mecanismo formalista. El *formalismo* resulta ser muy rico a la hora de ser preciso y meticuloso, pero resulta de poca aplicación y de gran deficiencia cuando se busca caracterizar la "creación matemática". Es decir, el formalismo no da cuenta de la inventiva matemática ni de los recursos heurísticos de los que hace uso un matemático para demostrar un teorema. Las siguientes palabras de Nagel y Newman iluminan lo que hemos tratado de defender:

> "Lo que entendemos por proceso de prueba matemática no coincide con la explotación de un método axiomático formalizado. Un procedimiento axiomático formalizado se basa en un conjunto, inicialmente fijo y determinado, de axiomas y reglas de transformación. Como la propia argumentación de Gödel señala, no es posible trazar ningún límite previo a la inventiva de los matemáticos en la ideación de nuevas reglas de prueba. Por consiguiente, no puede

[64] Nagel y Newman*, El teorema de Gödel*, cit., p. 117.

[65] Cf. Gödel, K., "El realismo, la metamatemática y los inéditos", en Consuegra, F. (ed.), *Ensayos inéditos*, Barcelona, Mondadori, 1994, p. 27.

> darse ninguna descripción definitiva de la forma lógica precisa de las demostraciones matemáticas válidas."[66]

Con respecto al tema de la consistencia, Gödel siguiendo a Bernays sugiere que debe realizarse una ampliación de los métodos finitistas para poder probarse así la consistencia de un sistema formal.[67] Lo que proponía Gödel era la necesidad de introducir principios de inferencia más abstractos para que pudiese probarse la consistencia, de igual forma debía introducirse conceptos abstractos que diesen cuenta no de objetos concretos sino de construcciones del pensamiento (es decir, ofrecer definiciones rigurosas de conceptos como los de demostración, sentencia significativa, verdad, etc.)[68]

Sin embargo el *Teorema de Incompletitud de Gödel* no supone el deterioro general de la metodología formalista, ni tampoco un abandono completo de la filosofía de la matemática propuesta por Hilbert. La metamatemática del matemático de los 23 problemas ha permitido formular con gran claridad los problemas de fundamentación en matemática.[69] Esta precisión metodológica y estructural permite al matemático precisar las dificultades y plantear posibles soluciones. De hecho, el mismo Gödel cumple con los requisitos de la escuela de Hilbert al demostrar que los objetivos de este último no podrían llevarse a cabo, así pues "…la demostración dada por Gödel para su teorema si es perfectamente finitista, "segura", y cumple todos los requisitos formales."[70]

Ricardo Da Silva
Escuela de filosofía-UCV
Ricardo6337@gmail.com

66 Nagel y Newman*, El teorema de Gödel*, cit., p. 118.

67 Cf, Gödel, "Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario", en Mosterín (ed.), *Kurt Gödel. Obras...,* cit*.,* p. 411.

68 *Ibidem*.

69 Cf. Toranzos, F., "El panorama actual de la filosofía de la matemática y la influencia en él de D. Hilbert", en *Actas del Primer Congreso Nacional de Filosofía*, Mendoza, Argentina, marzo-abril 1949, t. 3, p. 1636.

70 Martínez y Piñeiro, *Gödel* ∀ (*para todos*), cit., p. 64.