EPISTEME NS, VOL. 44, Nº 1, 2024, pp. 109-114

RECENSIONES

Weber, Z. *Paradoxes and Inconsistent Mathematics*, Cambdridge University Press, Cambridge, 2021. 324 pp.

Paradoxes and Inconsistent Mathematics es una defensa de la existencia de ciertas contradicciones como objetos verdaderos; además ofrece un marco de trabajo lógico-matemático no-clásico apropiado para el estudio de las paradojas que comprende el desarrollo de una lógica y una teoría de conjuntos deliberadamente inconsistentes, así como el desarrollo de una aritmética, álgebra, análisis real y topología inconsistentes pero no triviales. En este libro, Weber presenta su lógica dialeteica *subDLQ* de primer orden con identidad, y sugiere su adopción, primero, como una herramienta útil para el estudio de argumentos válidos con conclusiones contradictorias (estos es, para analizar las instancias en que la lógica clásica parece fallar) y, luego, como candidata a una lógica universal que reemplace a la lógica clásica y sirva como base de un nuevo edificio matemático inconsistente.

La introducción y el primer capítulo del libro consisten en el planteamiento de la tesis central del dialeteismo, o bien, la creencia de que algunas contradicciones son verdaderas. Weber defiende esto presentando varias de las paradojas más reconocidas en filosofía, tales como la paradoja de Russell, la paradoja del mentiroso y la paradoja *sorites*, y señalando la gran dificultad que ha tenido la lógica clásica en resolver estas paradojas de manera satisfactoria. Para el autor, esto se debe a que tales paradojas no son problemas que resolver, sino demostraciones de conjunciones de proposiciones contradictorias: es verdadero que el conjunto *r* de Russell pertenece y no pertenece a sí mismo; es verdadero que el sujeto de la paradoja del mentiroso miente y no miente; y es verdadero que hay objetos que tienen y no tienen una propiedad al mismo tiempo; en el mismo sentido hay acumulaciones de arena que son un montón y no son un montón, seres humanos de cierta edad que son bebés y no son bebés, personas que están calvas y no están calvas. Insatisfecho con el examen clásico de las paradojas, Weber revisa algunos intentos no-clásicos por dar sentido a lo paradójico, pasando primero por las teorías que plantean brechas[1] en la verdad de algunas proposiciones (esto es, que algunas proposiciones no son ni verdaderas ni falsas), y, finalmente, arriba al dialeteismo, la posición que defenderá en el resto del libro. Además, Weber afirma

1 "*Gaps*" en el texto original.

que la teoría informal de conjuntos[2] es verdadera y se valdrá de ella en gran medida para complementar su lógica dialeteica.

Para el dialeteismo, de la inconsistencia de una lógica no necesariamente se sigue su trivialidad. Por ello, Weber rechaza el Principio de Explosión[3] y se compromete a que su lógica sea coherente, es decir, que de su inconsistencia no se siga la trivialidad. En el segundo capítulo, el autor plantea una distinción entre lo contradictorio y lo absurdo, donde lo contradictorio puede ser concebido al mismo tiempo que se permanece dentro de lo racional, mientras que lo absurdo va más allá de lo racional. Lo contradictorio, entonces, puede ser estudiado y explicado. Weber hace aquí un repaso de varios intentos de acercamiento a las paradojas desde un marco teórico que las intenta explicar en vez de resolver. En primer lugar, se ofrece el esquema de Lawvere, en el que es posible expresar varias paradojas de la teoría informal de conjuntos. En segundo lugar, se presenta el esquema de Priest dirigido a las paradojas de autoreferencia. Ambos acercamientos son rechazados por Weber, a cuenta de su limitada fuerza explicativa (Lawvere) y su naturaleza informal (Priest). Así, el autor establece la falta de un esquema con la suficiente fuerza explicativa y, a la vez, con el suficiente rigor formal para lidiar con las paradojas de manera satisfactoria.

En el tercer capítulo, el autor profundiza sobre cuestiones metodológicas respecto a las lógicas dialeteicas y defiende la premisa de que, si su lógica resulta necesaria en alguna parte (por ejemplo, en la explicación de las paradojas), entonces esta lógica debe usarse en todas partes, sustituyendo por completo a la lógica clásica, y sirviendo como base para una aritmética, álgebra, análisis real y topología no-clásicos. Además de plantear abiertamente su postura revisionista respecto a la lógica y las matemáticas, Weber discute lo que según él es el problema más importante que enfrenta su proyecto: la crítica respecto al limitado poder demostrativo de las lógicas no-clásicas, puesto que gran parte de las demostraciones clásicas resultan sumamente complicadas o, incluso, imposibles en un contexto no-clásico. Esta crítica impulsa al autor, al menos parcialmente, a intentar desarrollar un marco de trabajo lógico-matemático *paraconsistente* (es decir, que no asuma que todas las contradicciones son absurdas) en el que se recupere la mayor cantidad posible de teoremas y resultados clásicos. Así, Weber pretende dar con una lógica y unas matemáticas inconsistentes lo suficientemente potentes como para demostrar que gran parte del edificio matemático clásico no estaría perdido, o bien, sería recuperable, si decidiésemos dar el salto al razonamiento paraconsistente.

El cuarto capítulo del libro presenta una serie de paradojas relacionadas con el axioma de extensionalidad de la teoría informal de conjuntos. En un marco clásico, la

2 "*Naive set theory*" en el texto original.

3 Este principio sostiene que a partir de una contradicción puede derivarse cualquier cosa, haciendo así que cualquier fórmula del lenguaje de un sistema inconsistente sea trivialmente verdadera.

aparición de estas paradojas resulta un problema, en tanto que de la contradicción se sigue la trivialidad. En el proyecto de Weber, sin embargo, es crucial que dichas paradojas sean reproducibles (o en palabras del autor, demostrables), sin que los métodos y herramientas utilizados en su reproducción permitan también la demostración trivial de toda fórmula. La intención del autor al exponer todas estas paradojas, entonces, responde a dos propósitos. Primero, tomar en cuenta varias de las paradojas que su lógica debe poder explicar; y, segundo, identificar las reglas estructurales y reglas de inferencia que conllevarían a la trivialidad en una lógica dialeteica. La persecución de este segundo objetivo ocupa a Weber el resto del capítulo, en el que define las reglas que deberán obedecer las conectivas de implicación y conjunción en su lógica dialeteica, así como la relación de consecuencia lógica. Además, es en este capítulo donde Weber presenta formalmente la *lógica dialeteica subestructural subDLQ de primer orden con cuantificadores e identidad*, que consiste de treinta axiomas y cuatro reglas de inferencia[4]. Algunas de las restricciones más notorias de *subDLQ* con respecto a la lógica clásica de primer orden son:

- A partir de $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$ no es lícito derivar $\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi$.
- A partir de $\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \chi$ no es lícito derivar $\Gamma, \varphi \vdash \chi$.
- A menos que φ sea un teorema, a partir de φ no es lícito derivar $\varphi \,\&\, \varphi$.
- Se prohíbe el principio de explosión: a partir de $\varphi \,\&\, \neg\varphi$ no es lícito derivar ψ.
- Se prohíbe el silogismo disyuntivo: a partir de $(\varphi \vee \psi) \,\&\, \neg\varphi$ no es lícito derivar ψ.

Entendemos 'φ', 'ψ' y 'χ' como fórmulas del lenguaje, 'Γ' como una secuencia finita de fórmulas, '&' como la conectiva para la conjunción, '$\vee$' como la conectiva para la disyunción, y '$\vdash$' como la relación de consecuencia. Además de las restricciones anteriores, Weber introduce dos conectivas distintas para la implicación, '$\rightarrow$' y '$\Rightarrow$', tal que cada una de ellas opera bajo distintas reglas, y ninguna es reducible a la otra, ni tampoco a una combinación de las demás conectivas. Algunas particularidades sobre estos condicionales son:

- '$\rightarrow$' no permite debilitamiento: De $\varphi \rightarrow \psi$ no es lícito derivar $(\varphi \,\&\, \chi) \rightarrow \psi$.
- '$\Rightarrow$' no permite contraposición: De $\varphi \Rightarrow \psi$ no es lícito derivar $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$.
- Si $\varphi \rightarrow \psi$, entonces $\varphi \Rightarrow \psi$.
- Si $\varphi \Rightarrow \psi$ y además $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$, entonces $\varphi \rightarrow \psi$.

4 Estas reglas corresponden a *Modus Ponens*, generalización universal, y dos reglas de sustitución.

La lógica *subDLQ* de Weber cuenta con un aparato teórico de pruebas suficiente para demostrar (positivamente) teoremas y derivar conclusiones a partir de premisas, pero no suficiente como para probar, desde la misma *subDLQ*, la *indemostrabilidad* de alguna proposición.

El capítulo cinco del libro consiste en una exposición de la teoría de conjuntos que Weber utilizará, junto con *subDLQ*, para desarrollar las matemáticas de los capítulos subsiguientes. Esta teoría de conjuntos, si bien se inspira profundamente en la teoría informal de conjuntos, alberga ciertas particularidades que la distinguen de ésta. Por ejemplo, Weber sostiene que la equivalencia extensional entre dos conjuntos no implica igualdad entre éstos, pero que la diferencia extensional sí implica desigualdad. La equivalencia extensional, distinta de la relación de identidad, se reflejará con el símbolo '≡'[5]. Además, no se asumirá que conjuntos ≡-equivalentes sean intercambiables.

Para el desarrollo de una aritmética que sirva a las matemáticas paraconsistentes, Weber se vale de los axiomas clásicos de Peano y los toma como punto de partida en el sexto capítulo del libro. A diferencia de los capítulos anteriores, el capítulo dedicado a la aritmética resulta consistente respecto a su contraparte clásica, y el mismo Weber aclara que no se ocupará de demostrar contradicciones en el conjunto de los números naturales y que se mantendrá neutral sobre si dicho conjunto alberga inconsistencias o no. Así, en vez de centrarse en paradojas, el objetivo principal de este capítulo será definir las operaciones y relaciones aritméticas básicas que el autor necesitará de allí en adelante para realizar demostraciones y obtener resultados. Define la suma, multiplicación, dos relaciones de orden[6] y demuestra varias propiedades de los números naturales y las operaciones aritméticas básicas. Además, dada la gran cantidad de restricciones aplicadas sobre su lógica *subDLQ*, el autor reconoce que en esta aritmética no ha podido demostrar el teorema fundamental de la aritmética, ni la infinitud de los números primos, sin incluir ciertas hipótesis de inducción adicionales a la teoría.

El séptimo capítulo del libro esboza las nociones principales del álgebra paraconsistente de Weber, un álgebra que incorpora los resultados de la teoría de conjuntos expuesta en el quinto capítulo. Por ejemplo, partiendo de su teoría de conjuntos, donde se había demostrado la desigualdad de conjuntos inconsistentes respecto de sí mismos (tales como *r*, el conjunto de Russell[7]), Weber propone incorporar en su álgebra la

---

5 Weber define formalmente la equivalencia extensional como $X \equiv Y \overset{\text{def}}{=} \forall z\,(z \in X \Leftrightarrow z \in Y)$. Por otro lado, la igualdad entre conjuntos obedece el principio de los indiscernibles de Leibniz: $X = Y \leftrightarrow \forall Z\,(X \in Z \leftrightarrow Y \in Z)$.

6 La relación de orden "menor o igual que", simbolizada con '≤', será un orden parcial en $\mathbb{N}$, mientras que la relación de orden "menor que", simbolizada con '<', será un orden parcial estricto en $\mathbb{N}$.

7 Dado que $r \in r$ y $r \in r$, tenemos que r y r no son extensionalmente equivalentes. Y, puesto que la diferencia extensional entre dos conjuntos implica la desigualdad entre ellos, tenemos que $r \neq r$.

posibilidad de que $x \neq x$ se cumpla para algunos x. Sin embargo, para tales x inconsistentes, se tiene que $x - x \neq 0$, o bien, que al sustraer x de sí mismo queda un resto. Este resultado es problemático, puesto que a partir de él podría probarse que 0=1, lo cual Weber rechaza y tacha de absurdo. Para evitar esto, el autor incorpora en su álgebra la noción de ceros relativos y unidades relativas, los cuales define como:

- $0x \overset{\text{def}}{=} x - x$, y
- $1x \overset{\text{def}}{=} x / x$

Estos objetos los describirá como "partes inconsistentes o el 'residuo' de cantidades inconsistentes" (p. 230), no necesariamente intercambiables con el 0 y el 1 de los números naturales. También en este capítulo, Weber definirá las nociones algebraicas de vectores, grupos, anillos y campos de manera similar a sus contrapartes clásicas. Las diferencias entre estas definiciones de Weber y las definiciones clásicas radicarán principalmente en que, donde las definiciones clásicas incorporan el cero y la unidad, Weber hace uso del cero relativo, $0x$, y de la unidad relativa, $1x$, respectivamente.

Los capítulos ocho y nueve del libro, altamente técnicos en naturaleza, consisten en un desarrollo del análisis real paraconsistente, demostraciones de teoremas y propiedades del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, y consideraciones sobre las características que debe tener una topología paraconsistente que permita reproducir y explicar paradojas relacionadas a las nociones de bordes o límites[8], como la paradoja de *sorites*. En estos capítulos, Weber presta especial atención a las nociones de continuidad en R y a la propiedad de densidad de la recta real (entre dos números reales a y b distintos tales que $a < b$, siempre hay un tercer número c tal que $a < c < b$), puesto que estas nociones han mostrado ser problemáticas en muchos intentos por resolver paradojas desde un acercamiento clásico. En cuanto a topología, el autor se enfoca en la noción de conexión entre espacios y, específicamente, en lo que ocurre justo en el borde o la división entre dos espacios: se intenta responder la pregunta '¿un punto ubicado en el borde entre dos espacios pertenece a un espacio, al otro, o a ninguno, o a ambos?' y se ofrece una demostración de cómo un punto -sin partes- podría dividirse en dos partes, cada una perteneciente a un espacio distinto, y seguir siendo un punto. Weber consigue esto haciendo uso de resultados inconsistentes de la teoría de conjuntos. Más generalmente, el autor dedica estos capítulos a incorporar muchos de los resultados de los capítulos anteriores y crear un marco conceptual matemático paraconsistente lo más sofisticado posible, intentando así demostrar que a partir de *subDLQ* y la teoría de conjuntos informal es posible desarrollar matemáticas útiles y fecundas, en las que se pueda demostrar gran cantidad de teoremas que recojan resultados clásicos, así como teoremas nuevos paraconsistentes imposibles de obtener clásicamente.

8 "*Boundaries*" en el texto original.

El décimo capítulo del libro vuelve sobre las ideas planteadas en el primer capítulo respecto a las paradojas y profundiza sobre ellas, valiéndose ahora de conceptos matemáticos obtenidos entre los capítulos 5 y 9. Durante esta mirada retrospectiva a las ideas centrales del libro (es decir, la existencia de contradicciones verdaderas y la importancia de contar con una lógica y matemáticas capaces de explicarlas), el autor hace un especial énfasis sobre la cotidianidad de las paradojas, tanto en el mundo real y nuestra vida diaria como en las matemáticas. Para Weber, las paradojas no solo son anomalías exóticas ubicadas en los bordes del universo, sino que también están en la cotidianidad más banal. En un momento es de día, horas después es de noche, y en algún instante entre ambos momentos es de día y de noche al mismo tiempo: es de día y no es de día, es de noche y no es de noche, todo a la vez. Ante semejante postura de aceptación respecto a las paradojas que permean el universo, cobra mayor sentido el afán revisionista de Weber por sustituir la lógica y las matemáticas clásicas por una alternativa más adecuada. En una realidad inconsistente, ¿por qué habríamos de usar herramientas clásicas incapaces de reflejar fielmente la naturaleza del mundo? Lo más apropiado sería cambiarnos al razonamiento paraconsistente.

En *Paradoxes and Inconsistent Mathematics*, la concepción de un mundo inconsistente invita al lector a revisitar las paradojas, problemas de cientos e incluso miles de años de antigüedad, y a mirarlas bajo otra luz. Zach Weber desarrolla sus argumentos cuidadosamente, los acompaña con ejemplos, responde a posibles críticas, y produce una obra donde retórica, lógica y matemáticas se entretejen de una manera profundamente interesante.

Víctor Valderrama
Escuela de Filosofía-UCV
victorraul1612@gmail.com