EPISTEME NS, VOL. 44, N° 1, 2024, pp. 61-92

Francisco Blanco y Ricardo Da Silva

LA IDEA DE FORMALIZACIÓN EN PRIMER ORDEN. UN ESTUDIO CRÍTICO DE LA «*TESIS DE HILBERT*»

Resumen: A día de hoy, la Lógica de primer orden (*L*1) ocupa un lugar especial en las investigaciones sobre los fundamentos de las matemáticas. Esto se debe, entre otras cosas, a ciertas virtudes que esta posee, entre las cuales destaca el que sea semánticamente completa y que satisfaga las propiedades de compacidad y de Löwenheim-Skolem; todo esto, aunado al hecho de que posea una teoría de modelos manejable, que sea simple y fructífera, que haya sido usada desde 1930 en adelante para escribir los axiomas de la teoría de conjuntos, entre otras razones, hace que algunos afirmen de manera categórica que cualquier demostración informal en la matemática se pudiese expresar en un lenguaje de primer orden. A esta última propuesta, se le conoce, entre ciertos académicos, como «Tesis de Hilbert». Valdrá la pena, pues, brindar un detallado análisis de las diversas posturas que ha habido con respecto a la llamada «Tesis de Hilbert», con el fin de observar y comprender el estatus que tiene esta *tesis* en la actualidad, así como sus implicaciones filosóficas.

Palabras clave: Lógica de primer orden, Tesis de Hilbert, formalización, prueba, brechas.

Recibido 06-10-23 ☼ Aceptado 17-10-23

THE IDEA OF FORMALIZATION IN THE FIRST ORDER. A «HILBERT'S THESIS» CRITICAL STUDY

Abstract: Nowadays, First Order Logic (*L*1) has a special place in research on the foundations of mathematics. This is due, among other things, to certain virtues that it has, among which stands out the fact that it is semantically complete and satisfies the properties of compactness and Löwenheim-Skolem; All this, added to the fact that it has a manageable theory of models, that is simple and fruitful, that has been used from 1930 onwards to write the axioms of set theory, among other reasons, makes some people categorically claim that any informal demonstration in mathematics could be expressed in a first-order language. This last proposal is known, among certain academics, as "Hilbert's Thesis." It will be worth it, therefore, to provide a detailed analysis of the various positions that have existed with respect to the so-called "Hilbert Thesis", in order to observe and understand the status that this thesis has at present, as well as its philosophical implications

Keywords: First order logic, Hilbert's Thesis, fromalization, proof, gaps.

1. Introducción

La «Tesis de Hilbert» refiere a la idea de que existiendo cualquier demostración (informal) en matemáticas, esta pueda formalizarse con la Lógica de primer orden (*L*1). En el presente artículo asumiremos como hipótesis las conclusiones a las que llega Reinhard Kahle sobre dichas *tesis*[1], en donde, más allá de aceptarla o refutarla se sugiere que su análisis, y la revisión de sus implicaciones, puede resultar de mucho valor para el desarrollo de la filosofía de la lógica[2] y la matemática. Por ello será necesario evaluar las diversas concepciones que ciertos autores han tenido respecto al tema y su relación con otras propuestas lógico-filosóficas.

El primero que la relacionará con el nombre de David Hilbert será Jon Barwise en su artículo "An Introduction to First-Order Logic" del *Handbook of mathematical logic* de 1977[3], en donde, a pesar de no ocupar-

1 Kahle, R., "Is There a Hilbert Thesis?", *Stud Logica 107* (2018).
2 Principalmente la filosofía de la Lógica de primer orden.
3 Barwise, J., *Handbook of mathematical logic*. Elsevier, Amsterdam, 1977.

se de este tema principalmente, ofrecerá argumentos para apoyarlo; su visión, dicho sea de paso, será un punto de partida para un estudio más detallado del asunto. Al revisar esta *tesis*, se deben destacar, particularmente, los aportes de Lon Berk, quien, dedica su tesis doctoral, titulada *Hilbert's thesis: Some Considerations about formalizations of mathematics*[4], a estudiar las bases e implicaciones de la misma. En este texto, Berk caracteriza a la llamada «Tesis de Hilbert» como una instancia subsecuente de las que llamará «Tesis de Leibniz»[5] y «Tesis de Frege»[6], en donde la primera afirmaría que todo argumento aceptable en las matemáticas es una prueba y que toda prueba puede formalizarse como una derivación[7], y la segunda, además de aceptar la llamada «Tesis de

4 Berk, L., *Hilbert's Thesis: Some Considerations about Formalizations of Mathematics*, 1982.

5 Esta *tesis* nos dice, en primer lugar, que cualquier argumento matemático informal, si pretende ser riguroso y preciso, deberá ser una prueba o entenderse como una prueba; en segundo lugar, afirma que toda prueba se puede formalizar a modo de derivación en un sistema lógico. Ahora bien es necesario recalcar que Leibniz, a lo largo de su vida o su obra, nunca defiende lo que aquí hemos expuesto como «Tesis de Leibniz». Si Berk le da este nombre, lo hará en función de que esta idea va en consonancia con ideas o escritos que sí tuvo el autor de Leipzig; entre estas ideas, indudablemente, se encuentran algunas de las reflexiones que hace en torno a la lógica aristotélica, la noción de *ars combinatoria*, la de un *lenguaje universal* y la de un *calculus ratiocinator*.

6 La «Tesis de Leibniz», como hemos visto, puede considerarse un pilar fundamental de la «Tesis de Hilbert» al presentar, en principio, la idea de formalización de las matemáticas. Esta, sin embargo, "no nos dice nada sobre qué reglas de inferencia y qué lenguajes formales se usarán para formalizar los argumentos de las matemáticas informales" en Berk, L., *op. cit.*, p. 18 (traducción propia). Tal desarrollo vendrá dado por lo que Berk llamará «Tesis de Frege», que expondrá inmediatamente después de exponer la «Tesis de Leibniz». Aceptando la verdad de esta última, esta *tesis* añade que "hay un lenguaje formal y un conjunto de reglas de inferencia que pueden ser usadas para formalizar adecuadamente toda prueba", o, más detalladamente, que "se necesita sólo un lenguaje formal y sólo un conjunto de reglas de inferencia para formalizar adecuadamente" (ambas citas tomadas de *Ibídem* (traducción propia)).

7 A pesar de que Leibniz no haya desarrollado un lenguaje formal de la manera en la que lo entenderíamos contemporáneamente, es justo pensar que hubiese defendido que aunque los argumentos presentados por los matemáticos no sean derivaciones *stricto sensu,* podrían serlo, formalizándose en un determinado sistema. De hecho, al revisar detalladamente los escritos del autor, puede verse que la idea de derivación y demostración formal se manifiesta casi explícitamente. Como ejemplo, vale la pena considerar el siguiente fragmento de sus *Nouveaux essais sur l'entendement humain*: "¿De qué principio precisan para probar que dos y dos son cuatro? Pues según él la verdad de este tipo de proposiciones es sabida

Leibniz», afirma que hay un lenguaje formal y un conjunto de reglas de inferencia que pueden usarse para formalizar adecuadamente toda fórmula presente en la prueba[8]. Las ideas de Barwise y Berk fueron luego

---

sin ninguna demostración. (…) Digo que en este punto os esperaba bien preparado. Supuesto que cuatro significa tres y uno, el que dos y dos son cuatro no constituye una verdad completamente e inmediata. Es posible demostrarla, y he aquí la manera:

Definiciones:
1/. Dos es uno y uno
2/. Tres es dos y uno.
3/. Cuatro es tres y uno.

Axioma: Poniendo cosas iguales una en lugar de la otra, la igualdad se mantiene.

Demostración:
2 y 2 es 2 y 1 y 1 (por la def. 1) .... 2 + 2
2 y 1 y 1 es 3 y 1 (por la def. 2) .... $\underline{2 + 1}$ + 1
3 y 1 es 4 (por la def. 3) .... $\underline{3 + 1}$
4

Luego en virtud del axioma, 2 y 2 es 4, como había que demostrar" en Leibniz, G., *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, traducción: Javier Echeverría Esponda (Madrid: Editora nacional, 1983), p. 496.

8 Dicho esto, debemos mencionar que, de manera similar a como sucede en el caso de Leibniz, Frege nunca defendió explícitamente la llamada «Tesis de Frege», aunque, al analizar su obra, pueden verse varias razones por las cuales no es descabellado pensar que la hubiese defendido. Para ilustrar, concretamente, esto último, destacamos el siguiente fragmento del prólogo a sus *Grundgensetze*: "Con que no haya lagunas en las cadenas deductivas se consigue poner de manifiesto cada axioma, presupuesto, hipótesis, o como se quiera llamar, sobre los que se base una demostración; y así obtenemos un fundamento para el enjuiciamiento de la naturaleza epistemológica de la ley demostrada. Ciertamente se ha afirmado repetidas veces que la aritmética no es más que lógica desarrollada; pero esto será discutible hasta tanto aparezcan en las pruebas pasos que no se den según las leyes lógicas reconocidas, sino que parezcan descansar en un conocimiento intuitivo. Sólo a partir del momento en que estos pasos se descompongan en pasos lógicos simples, podremos estar convencidos de que en la base no hay sino lógica" en Frege, G. "Prólogo a las leyes fundamentales de la aritmética" en Frege. G, *Estudios sobre semántica*, ediciones Folio, Barcelona, 2002, pp. 132-33.En el sistema fregeano se observa, claramente, un intento de formalizar la aritmética con un lenguaje específico, también se destaca la gran influencia de Leibniz y se aceptan muchas de las ideas que llevaron a Berk a postular también la «Tesis de Leibniz». Es, por tanto, muy plausible pensar que Frege hubiese defendido lo que Berk llamará «Tesis de Frege», y, quizá, así lo manifiesta el propio autor en la introducción de sus *Grundgensetze*, pues nos dice que: "En mis Fundamentos de

revisadas, así como profundizadas, por autores como Kripke, Boolos y Jeffrey, Berklemishev y Visser, Rav, entre otros.

No obstante, hay también razones para no estar de acuerdo con esta tesis, entre las cuales destacamos, con Corcoran[9], sus limitaciones expresivas y el hecho de que algunos de los axiomas y métodos para derivar usados en *L*1 no son, en realidad, usados en la práctica matemática.

En lo que sigue dividiremos el artículo en secciones (2, 3, 4, y 5). Primero realizaremos una reconstrucción de la tesis a partir de los autores antes mencionados, para luego destacar los argumentos que se pueden ofrecer para respaldarla. Seguidamente ofreceremos una forma crítica de abordar la «Tesis de Hilbert» desde la lectura que nos puede proporcionar el artículo "Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice" de J. Corcoran. Finalizaremos con una conclusión mesurada sobre lo defendible que resulta la tesis y su importante en el estudio filosófico de *L*1.

---

la aritmética traté de hacer plausible la idea de que la aritmética es una rama de la lógica y que no necesita ser fundamentada ni en la experiencia ni en la intuición. En este libro se tratará de confirmar esta idea de que las leyes más simples de la aritmética pueden ser derivadas con la única ayuda de los medios lógicos. *Pero, para que esto sea convincente, hay que ser considerablemente más exigente con el desarrollo de las pruebas de lo que es usual en la aritmética. Hay que determinar previamente un conjunto de modos de deducción y de inferencia, y no hay que dar ni un paso que no siga esos modos*. Así, pues, al pasar de un juicio a otro nuevo, no hay que quedar satisfecho, como lo hacen los matemáticos casi siempre, con que el paso aparezca como correcto, sino que hay que descomponerlo en los pasos lógicos simples de que está compuesto, y a menudo éstos son no pocos. De este modo no puede pasar inadvertida ninguna presuposición; hay que descubrí cada axioma que nos sea preciso. (…) *Naturalmente, para que semejante empresa (el proyecto logicista) pueda tener éxito, los conceptos que se necesitan deben ser concebidos con rigor* (…) Pero incluso después de haber sido concebidos rigurosamente los conceptos, sería difícil, casi imposible, satisfacer sin ayudas especiales las exigencias que debemos hacer al desarrollo de las pruebas. *Una ayuda tal es mi ideografía…*" en Frege, G. "Introducción a las leyes fundamentales de la aritmética" en Frege. G, *Estudios sobre semántica*, ediciones Folio, Barcelona, 2002, pp. 167, 168 y 171 (Cursivas añadidas).

9 Corcoran, J., (1973) «Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice» en: Bunge, M. (eds) *The Methodological Unity of Science. Theory and Decision Library,* vol 3. Springer, Dordrecht, p. 38.

2. Apuntes para una reconstrucción de la «Tesis de Hilbert»

Nos dedicaremos en esta sección a revisar críticamente la «Tesis de Hilbert», la cual, como hemos visto, refiere a la idea de que existiendo cualquier demostración (informal) en matemáticas, esta pueda formalizarse en un lenguaje de primer orden. Si queremos, sin embargo, entender plenamente esta idea, necesitamos contextualizarla, por lo que nos dedicaremos a investigar las distintas interpretaciones que ha tenido la «Tesis de Hilbert» desde que Jon Barwise acuñase tal término en su *Handbook of Mathematical Logic* de 1977. También haremos ciertas consideraciones acerca de la relación entre ese rótulo para dicha *tesis* y el proyecto y las ideas del propio David Hilbert. Para esto, siguiendo el análisis que hace Reinhard Kahle en su artículo "Is there a Hilbert Thesis?", de 2018, le dedicaremos, una sección a cada uno de los comentarios que ofrecen de la «Tesis de Hilbert» los autores que cita Kahle, a saber: Jon Barwise, Lon Berk, Saul Kripke, George Boolos, Richard Jeffrey y John Burgess, Lev Berklemishev y Albert Visser, y Yehuda Rav[10].

2.1. Jon Barwise

Es fácil comprender que la base del llamado «Programa de Hilbert»[11] es, justamente, la idea de que una prueba formal pueda representar fielmente cualquier argumento matemático; con base en esto, y debido a lo que hemos comentado antes, Jon Barwise utiliza el término «Tesis de Hilbert», para referirse a la idea de que *L*1 pueda brindarle a la matemática un marco de formalización que permita cumplir, en cierta medida, con el programa de fundamentación hilbertiano.

---

10 Siendo esto así, en nuestro estudio consideraremos, específicamente, los textos *Handbook of mathematical Logic*, de Barwise, publicado en 1977; La tesis doctoral de Berk, titulada *Hilbert's thesis: Some considerations about Formalizations of Mathematics*, publicada en 1982; el artículo de Kripke "The Church-Turing "Thesis" as a special corollary of Gödel's completeness theorem", publicado en 2013; el libro *Computability and Logic* de Boolos, Jeffrey y Burgess publicado en 1989; el artículo "Problems in the logic of provability" de Berklemishev y Visser, publicado en 2005; el artículo "Why do we prove theorems?" de Rav, publicado en 1999.

11 Dicho programa refiere al intento de Hilbert de proporcionar una base firme y segura para la construcción de una matemática coherente y consistente.

Teniendo en consideración el teorema de completitud de la Lógica de primer orden, así como algunas consecuencias de los teoremas de incompletitud, Barwise presenta la «Tesis de Hilbert» de la siguiente manera:

> Muchos lógicos sostendrían que no hay lógica más allá de la lógica de primer orden, en el sentido de que cuando uno se ve obligado a hacer explícitos todos sus supuestos matemáticos (extralógicos), estos axiomas siempre pueden expresarse en Lógica de primer orden, y que la noción informal de demostrable utilizada en matemáticas se precisa mediante la noción formal demostrable en lógica de primer orden. Siguiendo una sugerencia de Martin Davis, nos referimos a esta visión como la Tesis de Hilbert.[12]

Como vemos la *tesis* se divide en dos partes: la primera, afirma que la matemática clásica se puede en principio formalizar en un lenguaje de primer orden[13] y la segunda, asevera que, en general, en la matemática, la noción informal de «prueba» o «demostración» se sustenta en la noción formal de «deducción» («demostración») de $L1$.

Barwise no sólo presenta esta *tesis*, sino que la defiende, afirmando, de hecho, que la primera parte es ampliamente respaldada por evidencia empírica[14], pues no se ha presentado, hasta el momento, un contraejemplo, es decir, todo argumento matemático presentado hasta el momento es expresable en un lenguaje de primer orden. Ahora bien, con respecto a la segunda parte, el autor nos comenta que se ve respaldada por el teorema de completitud de Gödel[15], por lo que no es extraño que muchos matemáticos acepten y defiendan esta *tesis*, tal y como lo veremos en las siguientes secciones.

Hay que destacar, no obstante, que, aunque se acepte la «Tesis de Hilbert», Barwise reconoce explícitamente que, en la práctica, puede ser contraproducente hacer, en cada caso, una representación formal en primer orden de una noción matemática o una prueba informal, a pesar de que, en teoría, esto sea posible[16]. La razón de esto es que, de

12 Barwise, J., "An Introduction to First-Order Logic" en *Handbook of mathematical logic.* (ed. Jon Barwise), Elsevier, Amsterdam, 1977, p. 41 (traducción propia).

13 Cfr., *ibídem* (traducción propia).

14 Cfr., *ibídem.*

15 Cfr., *ibídem.*

16 Cfr., *ibídem.*

hacerlo, se podría complicar innecesariamente una investigación específica.

Es importante señalar que, con esta exposición, nuestro autor propone una versión muy fuerte de la *tesis* pues no se limita a la formalización de las pruebas matemáticas, sino a la formalización en primer orden de las matemáticas en general. Esta idea, sin embargo, no la compartirán todos los autores que la defienden; por ejemplo, Berk, de quien hablaremos a continuación, propone una versión más restrictiva.

2.2. Lon Berk

La siguiente mención de la «Tesis de Hilbert» la hará Lon Berk en su ya citada tesis doctoral titulada: *Hilbert's thesis: Some considerations about Formalizations of Mathematics* y tutorada por George Boolos. A diferencia de Barwise, quien, a pesar de ser el primero en usar el término, sólo hace unas breves consideraciones, Berk le dedicará a esta la mayor parte de su investigación, tal y como lo indica el título de la misma. Para ello, entre otras cosas, hará un estudio crítico de los argumentos de otros autores para aceptar dicha *tesis*, estudiará los antecedentes de la misma y hará una caracterización abstracta de la lógica y la teoría de la prueba.

En las primeras páginas de su trabajo, Berk ofrece su caracterización de la «Tesis de Hilbert», a la cual entenderá como la idea de que es posible formalizar cualqu ier argumento (informal) de las matemáticas con un lenguaje de primer orden y no necesariamente con un lenguaje con mayor capacidad expresiva. En sus palabras:

> En esta disertación analizo la tesis de Hilbert, la tesis de que todos los argumentos matemáticos aceptables pueden formalizarse utilizando lógicas no más fuertes que la lógica de primer orden[17].

Esta idea será, precisamente, la que enmarque la investigación del autor; pues se dedicará a hacer un análisis exhaustivo de la misma, no sólo desde el punto de vista de sus implicaciones en la matemática, sino también desde las implicaciones filosóficas que tiene aceptar o no esta *tesis*. Siguiendo a Kahle, no obstante, en la presente investigación nos limitaremos a exponer dos de los aspectos más importantes de la obra

17 Berk, L., *op. cit.*, p. 2 (traducción propia).

de Berk, a saber, la crítica a la idea de que para afirmar que la « Tesis de Hilbert» es verdadera sólo baste con señalar "el hecho empírico de que esencialmente todos los argumentos matemáticos se pueden codificar en ZFC"[18], y la idea de que dicha *tesis* se enmarca en un contexto más amplio, incluyendo en su formulación a las, por él llamadas, «Tesis de Leibniz» y «Tesis de Frege». Con respecto a la primera idea, nos comenta:

> (…) presento y critico un argumento a favor de la tesis de Hilbert que se encuentra a menudo en la literatura. El argumento concluye que la tesis de Hilbert es cierta ya que todas las matemáticas son reducibles a la teoría de conjuntos y la teoría de conjuntos es una teoría de primer orden. Sostengo que la reducción mencionada no es suficiente para establecer la tesis de Hilbert, a menos que presupongamos que la tesis de Hilbert es verdadera. [19]

Para Berk el hecho de que actualmente la teoría de conjuntos se presente en primer orden no es, *per se*, garantía de la verdad de la «Tesis de Hilbert». Esta idea, en particular, guiará gran parte de su investigación, pues lo llevará a analizar dicho argumento, sus implicaciones y las alternativas que puedan darse. Todo esto, de hecho, lo llevará a formular las *tesis* de Leibniz y de Frege, a fin de entender cuáles son los orígenes de la «Tesis de Hilbert» y qué ha llevado a distintos matemáticos a aceptarla. Sólo después de exponer ambas *tesis*, Berk presenta, propiamente, su caracterización de la «Tesis de Hilbert» como un momento subsecuente de ellas. Concretamente, nos dice:

> Estaré especialmente interesado en una versión de la tesis de Frege llamada tesis de Hilbert. Es, aproximadamente, la opinión de que todos los argumentos de las matemáticas informales pueden formalizarse adecuadamente utilizando sólo el cálculo de predicados de primer orden.[20]

Dicho esto, es preciso recordar, con Berk, que el hecho de atribuirle nombres personales a dichas *tesis* puede resultar problemático ya que, como sabemos, ninguna de ellas fue explícitamente defendida por

18 Kahle, R., *op. cit.*, p. 3 (traducción propia).
19 Berk, L., *op. cit.*, p. 2 (traducción propia).
20 Berk, L., *op. cit.*, p, 19 (traducción propia).

los autores a las cuales hace referencia, aunque pueda decirse que hay fuertes razones para que pensar que sí lo hubiesen hecho.

2.3. Saul Kripke

La «Tesis de Hilbert» será también tema de discusión por parte de Saul Kripke, en un artículo titulado "The Church-Turing "Thesis" as a special corollary of Gödel's completeness theorem", publicado en 2013[21]. Según el autor, dicha *tesis* afirma que "los pasos de cualquier argumento matemático pueden darse en un lenguaje basado en la lógica de primer orden (con identidad)"[22], siendo, así, mucho más parecida a la versión que expone Berk que a la de Barwise. De hecho, nuestro autor, explícitamente "destaca un cierto debilitamiento en comparación con Barwise"[23], pues en vez de hablar sobre la «demostrabilidad», habla sobre la «enunciabilidad»[24], pues: "En lugar de referirse a la demostrabilidad, se trata simplemente de que cualquier enunciado matemático puede formularse en un lenguaje de primer orden"[25]. Esta distinción entre «enunciabilidad» y «demostrabilidad», sin embargo, será necesaria sólo para poder cumplir con los propósitos que Kripke tiene con su artículo, en donde no necesita que la «Tesis de Hilbert» tenga más fuerza que la que él propone. Más allá de eso, en la posterior discusión sobre dicha *tesis*, tal distinción carecerá de relevancia.

Ahora bien, Kripke no sólo tratará este tema en el citado artículo, sino también en su conferencia "From Church's Thesis to the First Order Algorithm Theorem", del año 2006 y en un manuscrito de 1996 (no publicado oficialmente) titulado "Elementary recursion theory and its applications to formal systems". En cada caso, su idea será la de reducir a esta versión de la «Tesis de Hilbert», la «Tesis de Church» (También llamada «Tesis de Church-Turing»), según la cual toda fun-

21 Específicamente, la idea de que "un cálculo es una forma especial de argumento matemático" en Kripke, S., "The Church-Turing "Thesis" as a special corollary of Gödel's completeness theorem", en B.J. Copeland, C.J. Posy, y O. Shagrir, (ed.), *Computability*, MIT Press, Cambridge, 2013, p. 80 (traducción propia).

22 Kripke, S., *op. cit.*, p. 81 (traducción propia).

23 Kahle, R., *op. cit.,* p. 5 (traducción propia).

24 En inglés, el autor utiliza el término «Statability» el cual no tiene traducción al español.

25 Kripke, S., *op. cit.,* p. 97 (traducción propia).

ción computable, (o algoritmo), puede calcularse con una máquina de Turing que es un dispositivo que puede manipular símbolos en una cinta de acuerdo con un conjunto de instrucciones.

Más allá de esto, Kripke también "reflexiona brevemente sobre la atribución de tal tesis (la «Tesis de Hilbert») al propio Hilbert"[26]. Aunque no llega a reconocer explícitamente que es, o no, adecuado usar tal nombre, sí menciona algunas de las razones por las cuales puede ser adecuado hacerlo, así como unas por las que no lo sería. Concretamente, dirá que:

> Es muy posible que originalmente se hubiera pretendido la tesis más débil sobre la estabilidad. Ciertamente, el famoso libro de texto de Hilbert y Ackermann[27] todavía considera la integridad de la lógica de predicados convencional como un problema abierto, sin ser consciente de la importancia del trabajo ya realizado en esa dirección. Si Gödel no hubiera resuelto el problema afirmativamente, habría sido necesario un formalismo más fuerte, o posiblemente ningún sistema completo hubiera sido posible.
>
> Es cierto, sin embargo, que, para interpretar demostraciones con símbolos ε, el programa de Hilbert presuponía un cálculo de predicados de la forma habitual. Por supuesto, había pruebas "heurísticas" de que tal sistema era adecuado, dada la experiencia desde Frege, Whitehead y Russell y otros.[28]

2.4. George Boolos, John Burgess y Richard Jeffrey

En el libro *Computability and logic* de 1989 Boolos, Burgess y Jeffrey también harán mención de la «Tesis de Hilbert», texto que haría este término mucho más conocido para un público más amplio[29]. En dicho texto, definirán a esta tesis como "la afirmación de que, si hay una prueba en el sentido ordinario, entonces habrá una deducción en (su) formato restrictivo"[30], teniendo presente que, por tal formato, se refieren a *L*1.

26 *Ibídem* (traducción propia).
27 Con esto, el autor se refiere a los *Grundzüge der Theoretischen Logik*.
28 Kripke, S., *op. cit.*, p. 97 (traducción propia).
29 Cfr. Kahle, R., *op. cit.*, p. 7.
30 Boolos, G. & Jeffrey, R. & Burgess, J. *Computability and Logic,* Cambridge university Press, Cambridge, 1989, p. 185 (traducción propia).

En este libro, los autores defenderán dicha *tesis* apelando a tres argumentos: el primero, ya señalado por Barwise, referirá a la evidencia empírica de que, a lo largo de la historia moderna, "los lógicos han producido vastos compendios de formalizaciones de pruebas ordinarias"[31], el segundo, por el contrario, será más extenso, pero original; nos dice que:

> (…) Se ha demostrado que varios sistemas de deducibilidad formal propuestos independientemente (cada uno de ellos destinado a capturar formalmente la noción ordinaria de demostrabilidad) son equivalentes entre sí, al mostrar, directamente, cómo se puede pasar de deducciones formales en un formato a deducciones formales en otro formato; y tal equivalencia de propuestas originalmente presentadas independientemente una de otra, si bien no equivale a una prueba rigurosa de que cualquiera de ellas haya logrado captar la noción ordinaria de demostrabilidad, es sin duda una evidencia importante a favor de ambas.[32]

Este argumento, sin embargo, será rechazado por Kahle, quien no aceptará la supuesta independencia de los sistemas formales que mencionan Boolos, Jeffrey y Burgess y lo tachará de débil, debido a que:

> En el caso de la computabilidad, las diferentes formalizaciones se desarrollaron de forma independiente y en gran medida sin relación, pero sólo más tarde resultaron ser equivalentes. En el caso de los cálculos para la lógica de primer orden, es decir, los cálculos de estilo Hilbert (basados en las axiomatizaciones de Frege y Whitehead-Russell), los cálculos secuenciales de estilo Gentzen y la deducción natural, el desarrollo no se basó en enfoques independientes sino más bien en una reflexión explícita sobre deficiencias de uno u otro, especialmente en el trabajo del propio Gentzen.[33]

Además de esto, Kahle añadirá (en un pie de página) que incluso en el caso en el que con tal independencia los autores excluyan a Gentzen al referirse a desarrollos anteriores al descubrimiento del teorema de completitud de Gödel, resulta manifiesto que las investigaciones de Frege, Russel-Whitehead y Hilbert se basan, en cierto grado, las unas en las otras.[34]

---

31 *Ibídem* (traducción propia).
32 *Ibídem* (traducción propia).
33 Kahle, R., *op. cit.*, p. 14 (traducción propia).
34 Cfr., *ibídem*.

El tercer argumento que presentan los autores será el mismo que presenta Barwise con respecto a la que, según su exposición, será la segunda parte de la «Tesis de Hilbert». Nos comenta, pues, que el teorema de completitud de Gödel le da fuerza a dicha *tesis*.[35]

2.5. Lev Berklemishev y Albert Visser

La «Tesis de Hilbert» también será brevemente mencionada por Beklemishev y Visser en un extenso artículo titulado "Problems in the Logic of Provability" publicado en el 2005. En dicho texto, al igual que Kripke, nuestros autores se ocuparán de la *tesis* relacionándola con la «Tesis de Church». Definirán, pues, dos versiones de esta *tesis*, a saber:

> (…) la versión no uniforme de la tesis de Hilbert (que afirma que toda prueba puede representarse en un sistema axiomático adecuado) en contraposición a una versión uniforme relacionada, por ejemplo, con un sistema fijo de teoría de conjuntos ZFC.[36]

Como puede verse, hacen una distinción entre una versión «uniforme» y una versión «no uniforme» de la «Tesis de Hilbert», lo cual resulta relevante en su exposición, dado que la «Tesis de Church» se refiere a un solo modelo concreto de computación, por lo que podría relacionarse sólo con una versión uniforme de esta *tesis* [37]; no así con su versión no uniforme, pues esta refiere, específicamente, a *L*1, la cual estaría abierta a añadir axiomas no lógicos como la aritmética de Peano o los axiomas de ZFC. Sobre esto, Kahle añadirá que una versión uniforme de la «Tesis de Hilbert» sí sería difícilmente relacionable con Hilbert, por lo que en este caso sería mejor llamarle «Tesis de la formalizabilidad de la teoría de conjuntos».[38]

2.6. Yehuda Rav

35 Boolos, G. & Jeffrey, R. & Burgess, J., *op. cit.*, p. 185 (traducción propia).
36 Berklemishev, L. & Visser, A. "Problems in the Logic of Provability" en: Gabbay, D.M., Goncharov, S.S., Zakharyaschev, M. (eds) *Mathematical Problems from Applied Logic I. International Mathematical Series,* vol 4. Springer, Nueva York, 2006, p. 7. (traducción propia).
37 Cfr. Kahle, R., *op. cit.*, p. 13
38 Cfr., *ibíd.* p. 8

Para finalizar con esta sección, señalamos los argumentos de Rav, quien, en 1999, publica un artículo llamado «Why do we prove theorems?» en donde discute la «Tesis de Hilbert» en un contexto predominantemente filosófico, ya que "su objetivo es argumentar que las demostraciones matemáticas normales contienen información importante que supuestamente se pierde al pasar a las derivaciones formales"[39]; allí, hará una exposición de la versión «no uniforme» de dicha *tesis*, (en el sentido en que lo exponen Berklemishev y Visser), sin referirse, directamente, a $L1$. La definirá, entonces, como "la hipótesis de que toda prueba conceptual puede convertirse en una derivación formal en un sistema formal adecuado"[40].

Para ilustrar esta idea, el autor, a modo de alegoría, asemeja la «Tesis de Hilbert» con un puente en el que, de un lado se encuentren las pruebas informales y, del otro, las derivaciones formales.[41] En dicho puente, sin embargo, según Rav, sólo se podría cruzar para un lado, dejando, en el otro, elementos irrecuperables. Esto, debido a que "a partir de una versión formalizada de una prueba dada, no hay forma de restaurar la prueba original con todos sus elementos semánticos, relaciones contextuales y significados técnicos"[42].

Otra alegoría que usará nuestro autor para expresar esta idea será la de una foto a cuerpo completo de una persona y una radiografía de su esqueleto, caracterizando a la foto como la prueba informal y a la radiografía como la derivación formal. Sobre esto, nos comenta que, a pesar de que una radiografía pueda brindarnos información muy útil para ciertos propósitos, a partir de esta no se pueden recuperar todos los detalles de la persona que sí se encuentran en la foto de cuerpo completo[43]. Con respecto a esto, sin embargo, es necesario señalar que "Rav advierte explícitamente al lector de su artículo que no descarte la teoría de la prueba, que se reconoce como una rama importante de

39 *Ibídem* (traducción propia).
40 Rav, Y., "Why do we prove theorems?", *Philosophia Mathematica*, Vol 7, N°1, 1999, p. 11 (traducción propia).
41 Cfr., *ibídem*.
42 *Ibídem* (traducción propia).
43 Cfr., *ibíd.* p. 12.

la lógica matemática"[44], pero que hay que tener en cuenta todas estas consideraciones al hablar de la «Tesis de Hilbert».

Debemos comentar que estas últimas reflexiones nos dan pie a recordar el problema de usar el nombre de Hilbert para referirnos a esta *tesis*, ya que "el uso un tanto descuidado de su nombre en esta discusión podría colocarlo en un bando al que realmente no pertenece"[45]. Siguiendo la alegoría del puente, Kahle considera incluso peligroso pensar que Hilbert alentaría a los transeúntes a cruzar dicho puente con los ojos cerrados o, peor aún, pensar que Hilbert se ubicaría en lado de las derivaciones formales[46]. A pesar de que Hilbert sea considerado un formalista, pensar de esta manera sería pensar en él como un sintacticista ingenuo, cosa que se aleja de su realidad.

3. Revisitando la «Tesis de Hilbert»

A diferencia de un teorema, que, como ya hemos adelantado, es una proposición cuya verdad puede demostrarse dentro de un sistema formal, las *tesis* matemáticas no son demostradas, son, más bien, afirmaciones con cierto nivel de plausibilidad. A pesar de esto, suelen tener fuertes razones para ser defendidas o criticadas por algunos autores. En la sección anterior, al evaluar algunas de las menciones explícitas de la «Tesis de Hilbert» que ha habido en la literatura especializada, mostramos algunas de las razones para defender dicha *tesis*, pero hasta el momento no hemos presentado, o al menos no de manera explícita, las razones para criticarla, es decir, sus posibles debilidades.

En vista de esto, en la presente sección, y la siguiente, nos dedicaremos, en gran medida, a evaluar tales debilidades, principalmente a la luz del artículo "Gaps between logical theory and mathematical practice" de John Corcoran, publicado en 1973, en donde dicho autor, sin hablar propiamente de la «Tesis de Hilbert», hará consideraciones acerca de $L1$ y su uso en la práctica matemática, lo cual nos guiará a relacionar sus ideas con nuestro caso de estudio, haciendo así posible cumplir con nuestros intereses.

44 Kahle, R., *op. cit.*, p. 9 (traducción propia).
45 *Ibídem* (traducción propia).
46 Cfr., *ibídem*.

Para esta tarea, sin embargo, nos será necesario volver a revisar el artículo "Is there a Hilbert Thesis" de Reinhard Kahle, sólo que, esta vez, nos enfocaremos en la tercera, cuarta y quinta sección, donde el autor también presenta ciertos argumentos a favor de la «Tesis de Hilbert», que vale la pena contrastar con las ideas de Corcoran, además de esbozar otra dirección en las cual pudiese desacreditarse.

Nuestra línea a seguir será, entonces, estudiar, con mayor detalle, los argumentos que pueden ofrecerse para defender la «Tesis de Hilbert», enfocándonos, particularmente, en el primero que menciona Barwise en su ya citado artículo "An Introduction to First-Order Logic". Luego de eso, y tomando en consideración el citado artículo de Corcoran, señalaremos algunos de los motivos por los cuales resultaría problemático aceptar dicha *tesis* de la manera en la que la hemos expuesto a lo largo de esta investigación.

Para finalizar, a partir de ambas posturas y a la luz de las diversas investigaciones matemáticas contemporáneas, evaluaremos si la «Tesis de Hilbert» es, o no, sustentable, y cuáles serían las implicaciones de su rechazo o aceptación, todo esto a modo de conclusiones generales para esta investigación.

3.1. Argumentos a favor de la «Tesis de Hilbert»

Aunque parezca un argumento muy sencillo, la evidencia empírica es, realmente, uno de los puntos más fuertes que tiene la «Tesis de Hilbert». El hecho de que la axiomática de ZFC para la teoría de conjuntos se suela presentar en un lenguaje de primer orden y que, hasta el momento, no se haya encontrado ningún contraejemplo concluyente de la aplicabilidad de esta *tesis*, dota a esta de mucha solidez, a pesar de que autores como Berk consideren que este argumento es muy pobre para ello; hay que considerar que, a día de hoy, se sabe que "todo argumento matemático puede codificarse en ZFC"[47], y que $L1$ se presenta como la lógica estándar para estudiar los fundamentos de las matemáticas, relegando a un segundo plano a otros sistemas lógicos[48], por lo que el hecho de que, después de tanto tiempo, no se hayan encontrado evidencia contraria a esta *tesis* no debería considerarse una nimiedad.

47 Kahle, R., *op. cit,* p. 3. (traducción propia).

48 Cfr. Ewald, W., *op. cit.*

No debe pensarse, claro está, que la evidencia empírica sea suficiente para afirmar, tajantemente, la verdad de esta *tesis*, pero es innegable que esto, por lo menos, da señales a favor de que sea verdadera (resultaría una razón necesaria de su justificación). Aún así, hay que recordar que, al tratarse de una *tesis*, en cualquier momento pudiese aparecer algún contraejemplo que la debilite o le reste solidez, aunque, con base en lo que hemos comentado, puede decirse que esto parece poco probable. De darse el caso, no obstante, esto pudiera ayudar a aclarar definiciones y revelar nuevas direcciones para la investigación, sin necesidad de rechazar la *tesis* por completo.

Con esto en mente, y fuera ya del estudio histórico de la «Tesis de Hilbert», Kahle nos comenta que uno de los motivos para que Kleene apoye la «Tesis de Church» será el hecho de que, según su concepción, en ésta no se puede aplicar el método de la diagonal de Cantor[49] para encontrar un contraejemplo, esto es, un algoritmo (procedimiento efectivamente calculable) que no pueda ser caracterizado mediante funciones recursivas (o por alguna otra caracterización formal, por ejemplo: Máquinas de Turing[50]). Resultaría clave para debilitar, o defender, la «Tesis de Hilbert» el saber si se puede construir, o no, una diagonalización que encuentre una prueba matemática (informal) que no pueda ser formalizada y derivada en un sistema de primer orden.

Una propuesta como la anterior, sin embargo, también puede conducirnos a un peligroso dilema. Pensemos, por un lado, en lo siguiente: Muchas extensiones de la teoría de conjuntos, que presuponen principios y supuestos, así como formas de inferencias, en órdenes superiores, no-extensionales, modales o incluso no-bivalentes, no poseen una formalización en sistemas clásicos de primer orden, inclusive, si asumiésemos una versión uniforme de la «Tesis de Hilbert», no contaríamos tampoco con una formalización de dichas extensiones pues aún

49 También conocido como «método de diagonalización». Quizás resultaría conveniente hablar de un «análogo de tal método» (o «un método inspirado en la diagonalización») por los niveles de abstracción que requeriría para lo que sugiere Kleene (alejándose a la aplicación "concreta" en teorías matemáticas "concretas" que tiene el método original).

50 "para mostrar la ilimitación de las nociones formales, pasando cualquier límite propuesto por un elemento diagonal apropiadamente construido". (Kahle, R., *op. cit,* p. 16. (traducción propia)).

se encuentra en debate el “estatus lógico, conjuntista y epistemológico” de los axiomas formales que regularían a las mismas[51].

Por otro lado, dichas extensiones van ganando popularidad, desde la segunda mitad del siglo pasado[52], dentro de la comunidad lógico-matemática (específicamente los conjuntistas), pues es propio del espíritu creativo e innovador de los matemáticos el revisar los distintos derroteros a los que se llega tras negar, suprimir, expandir o modificar los principios y supuestos de su disciplina. Pero los cuernos del dilema se presentan de inmediato: O asumimos que dichas extensiones son un contra-ejemplo a la «Tesis de Hilbert» (aún cuando no forman parte de lo que podríamos llamar “el paradigma canónico”) o negamos la relevancia matemática de dichas extensiones (y por ende, coaccionamos la creatividad del trabajo matemático).

Dada la complejidad que supone aplicar el «método de diagonalización» a problemas de naturaleza no formal (como es el caso de las *tesis*), esta no será la dirección que tomaremos, en la presente investigación, aunque vale la pena considerarla para estudios futuros, sobre todo ver si es posible optar por alguno de los cuernos del dilema antes enunciado. Nuestro camino será enfocaremos en evaluar los argumentos que se pueden reconstruir a partir del artículo “Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice” de J. Corcoran.

4. Una lectura desde John Corcoran

El título de una obra, por lo general, dice mucho sobre la misma; éste, en pocas palabras, suele resumir o compendiar su contenido; es por esto que, para estudiar las ideas que Corcoran presenta en su artículo, empezaremos por analizar su título, el cual, traducido al español, expresaría algo como lo siguiente: “Brechas entre la teoría lógica y la práctica matemática”.

Con esto, vemos que el autor presupone, de antemano, la existencia de «brechas» entre la lógica y la matemática, lo que implica, a su vez,

51 Cfr. Bagaria, J., "Set Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (edición de primavera de 2023), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), Edward N. Zalta; Holmes, M. Randall, "Alternative axiomatic set theories", T*he Stanford Encyclopedia of Philosophy* (edición de invierno de 2021), Edward N. Zalta (ed.)

52 Cfr. Koellner, Peter., "Large Cardinals and Determinacy", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (edición de primavera de 2014)

una clara separación entre ambas disciplinas. La plena conciencia de tal separación nos pudiera llevar a reevaluar la idea de una total formalización de las matemáticas (tal como lo pretendían, por ejemplo, Frege o Barwise) o, por lo menos, invitarnos a pensar en qué sentido y bajo qué condiciones pudiera hacerse tal formalización.

Esta idea la manifiesta, de forma explícita, en las primeras páginas de su artículo, donde nos dice que su intención es, justamente, la de hacer un examen crítico de la idea comúnmente aceptada de que la práctica matemática tiene como fundamento una «lógica subyacente», destacando las dificultades de entender la cuestión de esta manera. En sus palabras:

> La práctica matemática parece presuponer lo que Church ha llamado una lógica subyacente. La lógica matemática procede en estricta analogía con la física matemática, donde se construyen y estudian modelos matemáticos de sistemas físicos. La lógica matemática construye modelos de lógicas subyacentes. Este artículo se centra en la discrepancia entre los modelos actualmente aceptados y la lógicas subyacentes.[53]

Hacer esto, sin embargo, no será una tarea sencilla. Para poder cumplir con sus propósitos, a nuestro autor le será necesario estudiar "las respectivas naturalezas de la lógica y las matemáticas y delimitar la frontera entre ellas"[54], evaluando, así, si existen las «brechas» de las que habla en su título, cuáles serían y qué implicaciones tendrían en el estudio de la lógica como fundamento de la matemática.

Al iniciar propiamente con su artículo, Corcoran se dedica a evaluar el *platonismo matemático*, a fin de explicar que su investigación se enmarca en un «platonismo neutral», categoría introducida por el propio autor y que será fundamental tenerla presente para cumplir con los objetivos propuestos. Empieza, pues, por definir al *platonismo* como una postura que entiende a las matemáticas como un conjunto de ciencias que versan (descriptivamente) sobre distintos objetos, por ejemplo, la teoría de conjuntos cuyo objeto de estudio son los conjuntos o la geometría, cuyo objeto de estudio son los puntos, las líneas y los

53 Corcoran, J., "Gaps between logical theory and mathematical practice", en *The methodological unity of science* (ed. Mario Bunge), Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973, p. 23. (traducción propia).

54 *Ibídem* (traducción propia).

planos. Siendo la premisa (onto-epistémica) que articula la postura del platonismo la siguiente: "estos objetos existen y son independientes de la mente humana"[55].

De acuerdo con esta postura, los problemas matemáticos no resueltos, tales como el *problema de Goldbach*, la *hipótesis del continuo* o la *hipótesis de Riemann* son, o bien completamente verdaderos, o bien completamente falsos, pues dependen de una realidad objetiva, aunque esta se encuentre más allá de nuestra comprensión. De tal manera que si se resuelven estos problemas, el resultado al que se llegue sería un descubrimiento, no un invento o una convención.

La importancia de mencionar esto radica en que para estudiar los fundamentos de las matemáticas se suele utilizar un metalenguaje que permita estudiar sus propiedades y características esenciales, sin estar propiamente en su práctica. Así, puede decirse que el platonismo "hace, en el metalenguaje, las presuposiciones que los matemáticos hacen en sus lenguajes objeto"[56].

Esta idea, precisamente, le permite a Corcoran introducir la categoría de «platonismo neutral», ya que, mientras el «platonismo simple» se ocupa de tratar los fundamentos de las matemáticas de la manera en la que lo hemos expuesto, el «platonismo neutral» se ocupa de tratar, además, los fundamentos de los fundamentos de las matemáticas, siendo esta la única diferencia entre ambas posturas[57], más concretamente:

---

55 *Ibíd.,* p. 24 (traducción propia).

56 *Ibídem* (traducción propia).

57 Da Silva comenta en su tesis de maestría lo siguiente, siguiendo a Hilbert: "Surgen inmediatamente la percepción de varias capas o niveles en el quehacer matemático (tal vez estamos hablando de al menos tres niveles: pre-teórico, teórico formal y metamatemático). En un primer nivel tenemos la teoría intuitiva y concreta donde los números resultan ser el objeto de estudio. Como en este nivel, en la matemática clásica, se usan tesis transfinitas y principios no-constructivista surge inmediatamente la duda de si se trata de una teoría consistente, es por ello que se procede a la formalización de toda la teoría como ya se explicó (segundo nivel). Tras la formalización se hace evidente de que ahora se trabaja con un número finito de objetos (símbolos, fórmulas y sucesiones de fórmulas) y, en tal sentido, se puede redirigir las dudas sobre la consistencia en términos finitistas, es aquí donde aparece el (tercer) nivel de la Metamatemática" (Tesis de Maestría: *El problema de la decidibilidad de la Lógica de primer orden y el Programa de David Hilbert* (Tutor: Dr. Franklin Galindo), UCV, Caracas, 2014, pp. 126-127.). Corcoran se estaría refiriendo a una posible cuarta capa o nivel, en el que se estarían revisando los presupuestos filosóficos a la base de nuestras revisiones metamatemáticas,

> Utilizando el metalenguaje, el platonista neutral está de acuerdo en que los números existen, pero añade, utilizando el metametalenguaje[58], que no sabe cómo deben entenderse en última instancia tales afirmaciones.[59]

Relacionando esto con las ideas que comentábamos al inicio de esta sección, podríamos pensar en el «platonista neutral» como aquel que, desde el mismo *platonismo*, se ocupa de estudiar si las teorías que actualmente consideramos que fundamentan la práctica matemática, son adecuadas para ello.

Todas estas reflexiones, vale decir, le permitirán a nuestro autor expresar, en las siguientes páginas, la noción de inferencia lógica, la cual, a pesar de que se presente como uno de los fundamentos de las distintas áreas de la matemática y de la actividad axiomática en general, se suele presuponer su naturaleza[60]. Siguiendo con esta idea, Corcoran nos comenta, a modo de ejemplo, que el hecho de que la corrección de las deducciones en un sistema formal pueda entenderse como totalmente independiente de la interpretación que se le pueda dar a estas, según un determinado lenguaje, fue también presupuesto por muchos autores hasta antes de Hilbert. Esta presuposición, sin embargo, le dio sentido a la búsqueda de pruebas o demostraciones matemáticas.

Recordar esto le permitirá a nuestro autor comentar que, si pensamos que las verdades matemáticas que no se deducen de otras son producto de la intuición, entonces "el proceso de axiomatización puede verse como un intento de factorizar una ciencia matemática en su componente intuitivo y su componente lógico"[61], siendo los axiomas aquellos que representan tal componente intuitivo y el proceso de deducción el que representa el componente lógico, usado para reconstruir toda la ciencia a partir de tales axiomas.

Pensar de esta manera, sin embargo, puede traer complicaciones; de manera similar a la postura de Rav con respecto a la idea de una

---

por lo que resultaría atractivo pensar desde este enfoque en cuál (si es posible) es la lógica adecuada para formalizar a las (pruebas) matemáticas.

58 Este metametalenguaje sería el cuarto nivel o capa al que hicimos referencia en el píe de página anterior.

59 *Ibídem* (traducción propia).

60 Cfr., *ibíd*., p. 25.

61 *Ibíd*., p. 26.

formalización de las matemáticas, Corcoran nos dice que "puede ser un dogma de las matemáticas tradicionales (en gran medida, no examinado) el pensar que una ciencia siempre puede dividirse en componentes intuitivos y lógicos y luego reconstituirse por recombinación sin pérdida alguna"[62].

Esto será, precisamente, lo que lleva al filósofo norteamericano a evaluar dónde está el límite entre las intuiciones matemáticas y la lógica; con respecto a esto, nos comenta que un logicista defendería que dicha frontera no existe ya que, según esta postura, todas las matemáticas son, en última instancia, reducibles a la lógica, por otra parte un intuicionista negaría, igualmente, tal borde, pero su justificación sería que ninguna parte de la matemática es reducible a la lógica, ya que sólo existe el llamado componente intuitivo; ahora bien, para un platonista, algunas partes de la matemática son reducibles a la lógica y algunas no lo son, adoptando, así, una postura intermedia entre el intuicionismo y el logicismo[63].

Corcoran comentará que esta última postura será la más defendida y aceptada por la comunidad matemática (a pesar de que no todos los que la defiendan se consideren a sí mismos «platonistas»), lo cual permite, ahora sí, hablar propiamente de una brecha o escisión entre la lógica y la matemática; misma que se hace manifiesta al considerar algunas discrepancias entre ambas disciplinas que, evidentemente, no se darían en un caso en el que hubiese una total correspondencia entre ellas. Concretamente, destacará:

> El hecho de que las oraciones lógicamente verdaderas no estén escritas como axiomas propios de las teorías matemáticas es una prueba de ello. Una evidencia similar se deriva del hecho de que un conjunto de axiomas no independientes se considere redundante; un axioma deducible de los demás sólo es redundante si se presupone que lo que se obtiene mediante la lógica se obtiene de alguna manera de forma gratuita.[64]

Sabiendo ya que sí existe tal *brecha*, el siguiente paso, será definir dónde se encuentra la misma, para lo cual, como hemos adelantado,

62 *Ibídem*. (traducción propia).
63 Cfr., *ibídem*
64 *Ibídem* (traducción propia).

será necesario evaluar detalladamente la naturaleza de la lógica y la naturaleza de las matemáticas viendo cuáles elementos le pertenecen a cada una y cuáles no; esto le permitirá luego al autor revisar las limitaciones que se derivan de la idea de formalización, en el sentido en el que lo hemos expuesto.

4.1. Sobre la naturaleza de la lógica

En la segunda sección de su artículo, el lógico de Baltimore nos comenta que para que una ciencia se desarrolle de manera axiomática, esta debe tener de fondo la «lógica subyacente» de la cual hablaba Church[65], es decir, debe fundamentarse en un lenguaje formal, un sistema deductivo y una semántica. Con base en esto, dirá que la *Lógica*, en sí, tiene como objetivo "la comprensión tanto de las lógicas subyacentes como de las teorías que las presuponen"[66], siendo, así, considerada una ciencia para las demás ciencias o, al menos, para las ciencias axiomáticas.

De esta manera, para que la *Lógica* (tal como la entiende el autor) pueda cumplir con su tarea y brindarles a las ciencias axiomáticas una base segura, debe:

> (…) producir teorías de las 'formas proposicionales' para dar cuenta de los fenómenos "lingüísticos". Debe producir teorías de la deducción para explicar el fenómeno de la deducción y debe producir teorías de la semántica para explicar el fenómeno de reinterpretar lenguajes y satisfacer o falsificar oraciones.[67]

Para ilustrar de mejor manera cómo es la naturaleza de la *Lógica* y explicar cómo funcionan las teorías mencionadas, el lógico estadounidense la comparará con la *Física*, pues opina que ambas disciplinas proceden del mismo modo con respecto a las matemáticas; se amparará, especialmente, en la noción de *modelo*, la cual, aunque tenga diferentes usos[68], es una noción que ambas comparten. A continuación, estudiaremos este punto más detalladamente.

65 Término acuñado originalmente por Church en: Church, A. *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Nueva Jersey, 1956, p. 328.

66 Corcoran, J., *op. cit.* p. 27 (traducción propia).

67 *Ibídem* (traducción propia).

68 Esta es precisamente la posición que mantiene Patrick Suppes en su artículo

Nos comenta que, en la física experimental, se evalúan y estudian fenómenos físicos del mundo, pero que será en la física matemática, en donde estos fenómenos se podrán representar con ciertas estructuras formalizadas que capturen la naturaleza de estos fenómenos, de manera que los hechos que constata el físico experimental, puedan expresarse con mayor rigor y precisión atendiendo a ciertos rasgos; para ello creará, entonces, un *modelo* matemático del fenómeno físico en cuestión que será estudiado ya no en el campo propio de los fenómenos físicos sino en el de las matemáticas (usando las estructuras o modelos antes mencionados en un lenguaje formal que sea ideal para la investigación científica), en donde "sus propiedades se obtienen de la misma manera que las propiedades de cualquier otro objeto matemático"[69].

Ahora bien, aunque estos *modelos* traigan muchas ventajas a la hora de comprender cómo se dan (o pueden darse) los fenómenos físicos, es evidente, como señalamos antes, que no capturan la totalidad de los mismos y, usualmente, hay una sobresimplificación de estos para que puedan adaptarse al rigor de la matemática. De esta misma manera, en la llamada, por el autor, «realidad lógica», no hay "lógicas proposicionales, ni sistemas deductivos axiomáticos ni sistemas semánticos de teoría de conjuntos"[70], estos serían sólo *modelos* que, aplicadas a ciertas áreas de la matemática, nos permiten entender algunas de sus propiedades y características esenciales, más no la reconstruyen perfecta e inequívocamente, cosa que ilustrará, por comparación, con el siguiente ejemplo:

> Así como uno construye un modelo matemático de un sistema solar para dar cuenta de qué eventos pueden ocurrir y qué no, así también se construyen modelos matemáticos de una lógica subyacente para dar cuenta de qué fenómenos lógicos pueden ocurrir y no.[71]

Esto último resulta esencial para nuestra investigación, ya que esto puede entenderse como una crítica a la «Tesis de Frege». Nuevamente,

"Una comparación del significado y los usos de los modelos en las matemáticas y las ciencias empíricas" (1960), disponible en Suppes P. *Estudios de filosofía y metodología de la ciencia*, Alianza Universidad, Madrid, 1988.

69 *Ibídem*. (traducción propia).

70 *Ibíd*., p. 28. (traducción propia).

71 *Ibídem*. (traducción propia).

de manera similar a Rav, Corcoran parecería aceptar que, si se pretenden formalizar las demostraciones matemáticas con un sistema lógico, entendiéndolas como *derivaciones*, no puede esperarse que se preserve toda la información que hay en las primeras.

Esto, de igual manera, no significa que los *modelos* no tengan valor o no sean adecuados para hacer una formalización, sólo se está recalcando el hecho de que tal formalización no podría capturar toda la esencia de la demostración matemática. Con base en esto, Corcoran dedicará las siguientes páginas a evaluar cómo se construyen los modelos en los sistemas lógicos, explicando que estos, por lo general, cuentan con una gramática (sintaxis), un sistema deductivo y una semántica.

De este análisis vale la pena destacar que cada uno de estos elementos pueden estudiarse por separado y dan lugar a distintas teorías lógicas, pero que también hay teorías que dependen del estudio de más de uno de estos elementos, en reciprocidad; particularmente, Corcoran se referirá a la completitud y consistencia de un sistema, lo cual depende tanto de los resultados de un sistema deductivo como de una semántica adecuada para el mismo. Para cerrar esta sección, nuestro autor vuelve a recalcar la importancia de estos *modelos*, ya que su uso representó un gran avance en la disciplina con respecto, por ejemplo, a la lógica aristotélica-booleana. Nos comenta que: "en lugar de intentar caracterizar las propiedades de la lógica subyacente directamente como lo hicieron los lógicos anteriores, la lógica moderna construye modelos matemáticos como un paso intermedio para ello"[72], lo que la dota de mucho más rigor y precisión.

4.2. Las brechas

Con estas reflexiones, obtenemos mayor claridad sobre la diferencia que nuestro autor considera que existe entre la lógica y las matemáticas, sin embargo, no ha mostrado explícitamente cuáles son las *brechas* que separan a la una de la otra, por lo que dedicará la siguiente sección de su artículo a dicha labor. Para hacer esto, sin embargo, es necesario volver a las consideraciones de la sección anterior, recordando que la tarea de la lógica, en relación a la práctica matemática, es comprender

72 *Ibíd.*, p. 30 (traducción propia).

la «lógica subyacente» de esta, construyendo modelos que permitan el avance de la disciplina[73], pero, añadiendo que:

> Tal vez sea preferible ampliar este punto de vista a costa de multiplicar las actividades. Aquí imaginamos tres tipos de actividades: la actividad del lenguaje objeto del matemático como tal, la actividad metalingüística del lógico que intenta desarrollar teorías de la lógica presupuesta por el matemático, y la actividad metalingüística del 'metalógico' que construye teorías matemáticas. (Modelos, no sólo de la lógica subyacente real del matemático sino también de las supuestas lógicas subyacentes incorporadas en la teoría del lógico).[74]

Lo anterior nos permite ampliar nuestro panorama y (todavía desde un «platonismo neutral»), en lugar de dedicarnos a estudiar, únicamente, las «lógicas subyacentes» reales de una disciplina, dedicarle tiempo a la investigación de otras teorías lógicas que, aunque no necesariamente *subyazcan* a la disciplina, puedan ayudar a entenderla mejor o complementar su «lógica subyacente». Sólo a partir de estas consideraciones el autor podrá enunciar los que él considera son los tipos de *brechas* que pueden existir entre la práctica matemática y las teorías lógicas, lo que, a su vez, nos permite hablar de algunas de las dificultades para pensar en una formalización de la matemática.

Como primera «brecha» mencionará el hecho de que hay «lógicas subyacentes» que, hasta la fecha, no han sido modeladas. Siguiendo esta misma línea, la segunda «brecha» referirá al hecho de que hay «lógicas subyacentes» que han sido modeladas, pero sólo de manera inadecuada, aunque, sobre estas, nos dirá que hay "deficiencias que pueden superarse realizando sólo modificaciones menores a los modelos existentes"[75], y la tercera «brecha» referirá a ciertas ideas o conceptos que son relevantes en las «lógicas subyacentes» pero que no pueden expresarse adecuadamente dentro de la lógica matemática.[76]

En la presente investigación nos enfocaremos, particularmente, en la segunda «brecha», pues esta será las que nos permitirá ver, en Corcoran, un esbozo de crítica a lo que hemos descrito como la «Tesis de Hilbert», a pesar de que el autor no lo mencione explícitamente.

73 Cfr., *ibíd.*, p. 31.
74 *Ibídem.* (traducción propia).
75 *Ibíd.* p. 32 (traducción propia).
76 Cfr., *ibídem*

4.3. Posibles argumentos en contra de la «Tesis de Hilbert»

Si bien, como dijimos, Corcoran no se referirá directamente a la «Tesis de Hilbert»[77], sí que evaluará la situación de la Lógica de primer orden (a la que llamará «Lógica estándar») como «lógica subyacente» de la práctica matemática, enfocándose, precisamente, en la «brecha» que hay entre la una y la otra. Todo esto lo hará con el fin de ejemplificar la segunda «brecha» comentada en la sección anterior, pues considerará que la manera en la que la Lógica de primer orden *modela* la matemática no está libre de defectos o deficiencias.

Siguiendo a Kleene[78], Corcoran mencionará que "la adopción generalizada de la Lógica estándar de primer orden indica una voluntad de aceptar ciertas presuposiciones semánticas básicas"[79], que pueden no reflejar adecuadamente a los objetos de los que trata el matemático en su práctica. Como ejemplo de esto, nuestro autor mencionará algunas de las principales complicaciones que tiene aceptar la semántica clásica, empezando por nombrar ciertos defectos gramaticales (sintácticos).

Entre estos defectos se pueden mencionar algunos relativos a las constantes lógicas, entre los cuales señalará, por ejemplo, el hecho de que la noción de identidad en la Lógica de primer orden se entienda como una relación binaria, mientras que en la práctica matemática pueda entenderse como una relación «multiaria» y también mencionará algunos relativos a los símbolos no lógicos, señalando que "además de las constantes individuales, los símbolos funcionales y los símbolos relacionales que se encuentran en la lógica estándar, la práctica matemática usa varios otros tipos de constantes descriptivas"[80] no presentes en la Lógica de primer orden. Entre ellas, por ejemplo, está la minimi-

77 De hecho, para el momento Barwise aún no había acuñado tal término.
78 Cfr. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics,* Princeton, Nueva York, 1952.
79 Corcoran, J., *op. cit.*, p. 35. (traducción propia).
80 *Ibíd.* p. 36. (traducción propia).

zación[81] en la aritmética o la abstracción (principio de comprehensión intuitivo)[82] en teoría de conjuntos[83].

Estos defectos, en efecto, "pueden considerarse, con cierta seguridad, fallos genuinos de la Lógica estándar a la hora de representar fielmente las formas lógicas de los enunciados matemáticos"[84], pero no son los únicos que señalará nuestro autor; destacará, también, que la Lógica de primer orden tiene excesos sintácticos, pues incluye ciertos mecanismos de formalización que no tienen correlato en la práctica matemática, como, por ejemplo, los llamados «cuantificadores vacuos»; muestra de esto último sería la siguiente expresión: $\exists x \exists y \exists z\ (0=0)$[85], misma que está perfectamente construida dentro del sistema de la Lógica de primer orden, pero no se ve recogida en la práctica del matemático. La presuposición semántica, además de esto, también traerá, entre otras cosas, defectos y excesos deductivos, los cuales trataremos a continuación.

En cuanto a los defectos deductivos, Corcoran señala, en primer lugar, las limitaciones expresivas para representar fielmente los objetos de la matemática, defecto que, cabe destacar, no tienen los sistemas lógicos de orden superior. Esta, particularmente, será, sin lugar a dudas, uno de los argumentos más fuertes a la hora de criticar a la Lógica de primer orden como lógica base de las matemáticas, así como también debilita, en cierta medida, la «Tesis de Hilbert», ya que hace menos

81 "Operador de minimización: Sea g: Nk+1 →N cualquier función que tenga la propiedad de que para todo n1,…,nk ∈ N, existe al menos un n ∈ N tal que g(n1,…,nk,n)= 0. Entonces la función f: Nk →N, definida por: f:(n1,…, nk)= mínimo número n ∈ N tal que g(n1,…, nk, n)= 0, se dice que se obtuvo a partir de g mediante uso del operador de minimización." (Hamilton., *op. cit.,* p. 134. y Da Silva, R., *op. cit.*, p.58),

82 Principio según el cual toda propiedad determina un conjunto. Se trata de un principio problemático por estar a la base de las paradojas conjuntistas, pero aceptado, sin problema, por Quine en sus axiomatizaciones de la teoría de conjuntos. Una descripción de este principio y su implicación en la matemática puede revisarse en: Jané, I., "¿De qué trata la teoría de conjuntos?, *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía,* Vol. 27 Filosofía de la lógica, Editorial Trotta, 2004.

83 Aunque esta crítica de Corcoran se cae para el primer caso si incluimos en la lógica a la teoría de las funciones recursivas, donde el operador de minimización se presenta como una función recursiva básica. (Véase: Da Silva., *op. cit.* p. 58).

84 *Ibíd.* p. 37. (traducción propia).

85 Cfr., *ibíd.* p. 38.

probable que cualquier demostración matemática se pueda formalizar, como una derivación, en un lenguaje de primer orden[86]. De tales limitaciones se generará, según Corcoran, el siguiente problema:

> "Una deducción transmite información de un tipo radicalmente diferente de la que transmite un enunciado matemático. En términos generales, una deducción da instrucciones para trazar un camino lógico desde los axiomas hasta sus consecuencias, y tales instrucciones no pueden darse en un enunciado matemático declarativo. El mito de que una prueba es simplemente una secuencia de fórmulas (declarativas) tiene su utilidad, pero no se puede afirmar que sea verdad"[87].

En segundo lugar, nuestro autor expondrá que la Lógica de primer orden también tiene defectos inferenciales. Al considerar el sistema de primer orden que presenta Kleene[88] de doce axiomas lógicos, tres reglas de inferencia y doce reglas derivadas (al que Corcoran considera, el sistema «estándar»), se dará cuenta de que "sucede que las doce reglas derivadas corresponden a reglas primitivas en la práctica matemática real"[89], cosa que resultaría problemático si se trata de hacer una formalización rigurosa que rescate, con rigor, tales detalles; haciendo, incluso, que pueda pensarse en la Lógica de primer orden como la actividad matemática "puesta patas arriba"[90]. Con todo esto, cabe destacar, el lógico de Baltimore no está insinuando que haya *implicaciones* propias de las derivaciones matemáticas, que no puedan derivarse en el sistema de la Lógica de primer orden, pero sí nos indica que, para su tiempo, los métodos con los cuáles se hacen derivaciones en la Lógica de primer orden no se corresponden, inequívocamente, con los métodos usados en la práctica matemática[91].

Ahora bien, en cuanto a los excesos deductivos, sólo nos mencionará que, en muchas de las formulaciones estándar de la Lógica de pri-

---

86 Pero para ser justos con el estado de cosas, el hecho de que se puedan formalizar con lenguajes de orden superiores no garantiza su derivación y el motivo de ello son los Teoremas de incompletitud de Gödel.

87 *Ibíd.* p. 39 (traducción propia).

88 Cfr. Klene, S., *op. cit.*

89 Corcoran, J., *op. cit.* p. 39 (traducción propia).

90 *Ibídem.* p. 41 (traducción propia).

91 Cfr., *ibídem.*

mer orden, puede encontrarse una gran cantidad de axiomas y reglas de inferencia sin aplicabilidad o correlato en la práctica matemática. Esta última, de hecho, "aparentemente (…) admite sólo dos esquemas de axiomas, las llamadas leyes de identidad y del tercero excluso"[92], por lo que el resto de los axiomas y reglas de inferencia, pueden considerarse superfluos si, con ellos, se busca *modelar* la práctica matemática.

Luego de exponer detalladamente estos argumentos[93], Corcoran le dedicará unas páginas de su artículo a revisar, muy brevemente, otros sistemas lógicos tales como la lógica libre o las lógicas multivariadas con el fin de comparar estos sistemas con la Lógica «estándar», es decir, la Lógica de primer orden, y ver si se pudiera pensar en ellas como alternativas de esta última[94].

5. A modo de conclusión: ¿Es sostenible la «Tesis de Hilbert»?

Más allá de todas estas «brechas» y de las dificultades que pudieran derivarse del uso de la *L*1 para formalizar la matemática, la intención de Corcoran no es simplemente atacar este sistema. Con las consideraciones que hace, puede notarse que su intención es, más bien, la de evaluar ciertos presupuestos de la disciplina y examinarlos desde una postura crítica que permita reevaluarlos a fin de, como el mismo menciona, "minimizar los motivos de desacuerdo filosófico"[95] que puede haber actualmente sobre el tema.

A partir de esto, justamente, será que podrá proponerse un nuevo tratamiento de la cuestión; dado que, según su postura, las brechas que hay entre la Lógica de primer orden y la práctica matemática vienen dadas a partir de problemas inherentes a la semántica de la primera. Su propuesta, a la que se le podría llamar «Tesis de Corcoran», sería, entonces, que, al modificar la semántica de la *L*1, esta puede llegar a ser capaz de manejar los mecanismos de prueba, y de teoría de modelos,

92 *Ibídem*, (Traducción propia).

93 Además de los mencionados, también nos habla de una «brecha postulacional», que se manifiesta, por ejemplo, en "el hecho de que la lógica estándar admita infinitos conjuntos de axiomas" para intentar capturar la idea de inducción matemática dentro del sistema. La cita se captura de *Ibídem* (traducción propia).

94 Por razones de tiempo, espacio y estudio no seguiremos acá las reflexiones de Corcoran respecto a estos sistemas lógicos.

95 *Ibídem*. (traducción propia).

necesarios para que sea posible una formalización de las matemáticas más 'adecuada'. Más específicamente, nos dirá lo siguiente:

> Para construir una lógica capaz de manejar definiciones, los vocabularios no lógicos deben dividirse en dos partes: términos descriptivos y términos auxiliares. Aunque los términos descriptivos deben ser finitos en número (para ser realistas), debe haber un número contable de términos auxiliares de cada tipo gramatical. Entonces se deben formular reglas: (1) que prohíban la introducción de un término auxiliar por definición más de una vez en una deducción, (2) que limiten las formas de definiciones relativas a los contextos de modo que se eviten las "definiciones creativas" y (3) que consideren las definiciones como suposiciones que inician pruebas subordinadas a partir de las cuales se puede inferir la última línea siempre que carezca del término definido. [96]

Así, pues, no es descabellado pensar en la posibilidad de hacer estas modificaciones, no sólo con el fin de cerrar las mencionadas «brechas», sino también con el de facilitar las deducciones para que pueda haber mayor claridad a la hora de estudiar una «lógica subyacente» para las matemáticas[97]. Hay que tomar en cuenta, no obstante, que el artículo de Corcoran fue publicado en 1973 por lo que algunas de sus ideas, a día de hoy, pudieran desacreditarse, contrastarse o apoyarse con otras investigaciones. A pesar de esto, la mayoría de las ideas que menciona siguen teniendo vigencia y vale la pena, por lo menos, considerarlas.

Expuesto este punto, y considerando todo lo que hemos visto en este capítulo y en capítulos anteriores, podemos afirmar que la Lógica de primer orden es una herramienta muy esencial para el estudio de los fundamentos de la matemática; de ahí que la idea de la formalización de la matemática con este sistema sea tan plausible. Tanto el estudio de Kahle como el de Corcoran, sin embargo, nos muestran, justamente, por qué es relevante preguntarse por esta cuestión en nuestros días y no dar por sentada su verdad o falsedad. A partir de estos mismos artículos, y de todas las reflexiones que hemos hecho a lo largo de esta investigación puede decirse, con bases, que la «Tesis de Hilbert» puede respaldarse y tiene, en efecto, una gran fuerza en la actualidad. No obs-

96 *Ibíd.* p. 40. (traducción propia).
97 Cfr., *ibíd.* p. 41.

tante, no debe aceptarse sin un análisis previo; estudiar esta cuestión requiere de una reflexión consciente y exhaustiva.

Deseamos concluir con la siguiente comparación: Así como un examen atento de la «Tesis de Church-Turing» conduce al estudio de las distintas formas de caracterizar matemáticamente la noción de algoritmo, lo que a su vez conlleva a ampliar esas caracterizaciones en distintos marcos y bajo diferentes consideraciones (funcionalidad vs aplicabilidad, clases de complejidad, etc.), un estudio crítico de la «Tesis de Hilbert» nos puede ayudar en la apreciación de los alcances y límites de la misma, así como motivarnos a pensar 'fuera de la caja': ¿Qué significaría, en términos lógicos, encontrar una prueba que no pueda formalizarse?, ¿debemos negarnos a considerar pruebas infinitas?, ¿qué tanto perdemos en la formalización?, ¿la heurística se pudiese recuperar mediante sistemas lógicos no-clásicos o indagaciones informales?, ¿cuál es el núcleo semántico de conceptos relacionados como prueba, demostración y derivación? Esas, y otras inquietudes, iluminan nuevos caminos para lo que pudiese pensarse como una «filosofía de la Lógica de primer orden».