EPISTEME NS, VOL. 41, 2021, pp. 1-6

Jesús Baceta

DE LOS SECUENTES A LA DEDUCCIÓN NATURAL

Resumen: Se proporciona una axiomática para el cálculo de secuentes y se muestra cómo se obtiene de ella un cálculo de deducción natural para la lógica proposicional.

Palabras Clave: Sequentes, deducción natural, axiomática, reglas, sustitución uniforme

FROM SEQUENTS TO NATURAL DEDUCTION

Abstrac: An axiomatic for the calculus of sequents is given and it is shown how a natural deduction calculus for propositional logic is obtained from it.

Keywords: Sequents, natural deduction, axiomatic, rules, uniform sustitution

Los cálculos de deducción natural se caracterizan por lo siguiente:

(1) Carecen de axiomas;

(2) Tienen dos clases generales de supuestos: las premisas y las hipótesis adicionales;

(3) Algunas reglas obligan a la introducción de hipótesis las cuales hay que cancelar, mientras que no es necesario cancelar las premisas;

(4) Los teoremas lógicos son definidos como deducciones a partir del conjunto vacío de premisas;

(5) Las reglas se dividen en reglas de Introducción y de Eliminación de las constates lógicas;

(6) Una demostración es una sucesión finita de fórmulas donde cada una es o una premisa, o una hipótesis o el resultado de la aplicación de una de las reglas de introducción o de eliminación.

Recibido 10-10-21 ☼ Aceptado 17-10-21

(7) Para que una fórmula sea un teorema, todas las hipótesis tienen que ser canceladas.

¿Qué justifica tales características del cálculo de deducción natural? En lo que sigue, se proporciona una axiomática para el cálculo de secuentes y se muestra cómo se genera de ella un cálculo de deducción natural para la lógica proposicional. Tal axiomática justifica las anteriores notas sobre la deducción natural.

Un sistema de **deducción natural** (=dn) **para el cálculo proposicional** es un sistema axiomático en que los axiomas y teoremas no son solo fbfs, son pares de la forma (Γ, A) en el que Γ es un conjunto de fbfs y A una fbf. Tales pares se llaman **secuentes**. Cuando un secuente (Γ, A) es un teorema que se obtiene de los axiomas del sistema de deducción natural de **LP**, se escribe |- (Γ, A). Γ es llamada *hipótesis* o *premisas* y A es la *tesis* o *conclusión*.

Definición N1: Un sistema o cálculo de deducción natural para lógica proposicional es una cuadrupla **M** = (**Aβ**, RF, Ax, RT) donde:

ALFABETO (Aβ):

Un alfabeto de dn es un conjunto numerable de símbolos que consta de los siguientes elementos:

- Variables proposicionales: {p, q, r, ..., p1, p2...} = PROP

(Alfabeto infinito numerable)

- Tres conectivas proposicionales primitivas::
  - "¬", llamado "negación",
  - "→", el "condicional"
- Paréntesis izquierdo y derecho: (,)

Reglas de formación (RF):

A::= p | ¬ A | (A → B) donde p es un elemento de PROP.

Axioma:

Ax_{dn}: {A} |–A para cualquier fbf A

= |– ({A}, A)

Reglas de transformación:

Sustitución uniforme (SU): |–B, entonces |–$B(A_1/A'_1, ..., A_n/A'_n)$ donde $B(A_1/A'_1, ..., A_n/A'_n)$, $1\leq i \leq n$, son las SU de A_i por A'_i en el **axioma** o **teorema** B.

Ad: Adición a la hipótesis:

Si Δ |- A y Δ ⊆ Γ entonces Γ |- A

= Si |- (Δ, A) y Δ⊆ Γ entonces |- (Γ, A)

MP: Si $\Gamma \mid\!- A$ y $\Gamma \mid\!- A\rightarrow B$, entonces $\Gamma \mid\!- A$
= $\mid\!- (\Gamma, A)$ y $\mid\!- (\Gamma, A\rightarrow B)$, entonces $\mid\!- (\Gamma, B)$

TD: Si $\Gamma\cup\{A\} \mid\!- B$, entonces $\Gamma \mid\!- A\rightarrow B$
= Si $\mid\!- (\Gamma\cup\{A\}, B)$, entonces $\mid\!- (\Gamma, A\rightarrow B)$

EDN: Si $\Gamma \mid\!- \neg\neg A$, entonces $\Gamma \mid\!- A$
= Si $\mid\!- (\Gamma, \neg\neg A)$, entonces $\mid\!- (\Gamma, B)$

Definición N2: Conectivas derivadas

i	$\perp = \neg(A \rightarrow A)$	ii	$T = \neg\perp$
iii	$\neg A = A \rightarrow \perp$	iv	$A\wedge B = \neg(A\rightarrow\neg B)$
v	$A\leftrightarrow B = (A\rightarrow B) \wedge (B\rightarrow A)$	vi	$A\vee B = \neg A\rightarrow B$

Definición N3: Un **teorema** LP_{dn} es cualquier fbf A tal que $\varnothing \mid\!- A$, denotado simplemente por $\mid\!-dn\ A$.

Por ejemplo:

Teorema N1:

Tdn1: $\mid\!- (B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

1	$\{A\} \mid\!- A$	Axdn	
2	$\{A\rightarrow B\} \mid\!- A\rightarrow B$	SU, 1, $A/A\rightarrow B$	
3	$\{A\rightarrow B, A\} \mid\!- A\rightarrow B$	Ad, 2	$[\Delta=\{A\}\subseteq\{A\rightarrow B, A\}=\Gamma]$
4	$\{A\rightarrow B, A\} \mid\!- A$	Ad, 1	$[\Delta=\{A\}\subseteq\{A\rightarrow B, A\}=\Gamma]$
5	$\{A\rightarrow B, A\} \mid\!- B$	MP, 3, 4	
6	$\{B\rightarrow C\} \mid\!- B\rightarrow C$	SU, 1, $A/B\rightarrow C$	
7	$\{B\rightarrow C, A\rightarrow B, A\} \mid\!- B\rightarrow C$	Ad, 6	$[\Delta=\{B\rightarrow C\}\subseteq\{B\rightarrow C, A\rightarrow B, A\}=\Gamma]$
8	$\{B\rightarrow C, A\rightarrow B, A\} \mid\!- B$	Ad, 5	$[\Delta=\{B\rightarrow C\}\subseteq\{B\rightarrow C, A\rightarrow B, A\}=\Gamma]$
9	$\{B\rightarrow C, A\rightarrow B, A\} \mid\!- C$	MP, 7, 8	
10	$\{B\rightarrow C, A\rightarrow B\} \mid\!- A\rightarrow C$	TD, 9	
11	$\{B\rightarrow C\} \mid\!- ((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	TD, 10	
12	$\varnothing \mid\!- \{B\rightarrow C\}\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	TD, 11. QED.	

Se puede abreviar la anterior prueba de la siguiente familiar manera (es una modificación de la forma abreviada de Lemmon, 1965, y de la Hughes-Cresswell, 1996):

Tdn1': $\mid\!- (B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

1	---	B→C			Ax_{dn}, SU', A/B→C
2	|	---	A→B		Ax_{dn}, SU', A/A→B
3	|	|	---	A	Ax_{dn}
4	|	|	|	B	MP', 2, 3
5	|	|	|___	C	MP', 1, 4
6	|	|__	A→C		TD', 3-5
7	|___	(A→B)→(A→C)			TD', 2-6
8	(B→C)→((A→B)→(A→C))				TD', 1-7. QED.

De esta forma, los secuentes quedan resumidos así: cada hipótesis es una aplicación de SU al axioma, cada línea n obtenida por MP tiene como premisas las premisas que aparecen en las líneas de los números de la justificación y los números de justificación de las líneas de los TD indican la eliminación de la premisa repetida en esas dos líneas, proceso que se llama "cancelación de la hipótesis". En fin, se eliminan de Tdn1 las líneas de Ad, porque tales adiciones son las que indican los números de las líneas de los MP. Nótese que según esto, **podemos asumir como hipótesis lo que nos venga en gana** mientras nos ayude a completar la demostración, esto quiere decir que podemos agregar premisas de acuerdo a adición, sin modificar la propiedad de ser un teorema de LP_{dn}.

Entonces, lo anterior es lo mismo que escribir:

Tdn1": |- (B→C)→((A→B)→(A→C))

1 {B→C} |- B→C Ax_{dn}, SU, A/B→C

2 {A→B} |- A→B Ax_{dn}, SU, A/A→B

3 {A} |- A Ax_{dn}

4 {A→B, A} |- B MP', 2, 3 refiere la hip 2∪3: {A→B, A}

5 {B→C, A→B, A} |- C MP', 1, 4 refiere la hip 1∪4: {B→C, A→B, A}

6 {A→B, B→C} |- A→C TD', 3-5 refiere (3∩5)': {A→B, B→C}; se cancela 3∩5

7 {B→C} |- (A→B)→(A→C) TD', 2-6 refiere (2∩6)': {B→C}; se cancela 2∩6

8 |- (B→C)→((A→B)→(A→C)) TD', 1-7 refiere (1∩7)': ⊘; se cancela 1∩7

Así, según Tdn", es claro que en Tdn' las líneas tienen las mismas premisas y conclusiones que en Tdn pero de una manera más económica.

Ahora se pueden demostrar, como ejercicio, las reglas de introducción y las reglas de eliminación consignadas en la siguiente tabla:

Introducción	Eliminación
TD: — A |_ B ---------- $A \rightarrow B$ Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$	EC: MP $A \rightarrow B$ A ---------- B MT $A \rightarrow B$ $\neg B$ ---------- $\neg A$ Si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, entonces $\Gamma \vdash A$ Si $\Gamma \vdash \neg B$ y $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, entonces $\Gamma \vdash \neg A$
IN: — A |__ $\bot$ ---------- $\neg A$ Si $\Gamma \vdash \neg A$ y $\Gamma \vdash \bot$, entonces $\Gamma \vdash A$	EN: — $\neg A$ |__ $\bot$ ---------- A Si $\Gamma \vdash \neg A$ y $\Gamma \vdash \bot$, entonces $\Gamma \vdash A$
I$\bot$: A $\neg A$ ---------- $\bot$ Si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$, entonces $\Gamma \vdash \bot$	E$\bot$: — $\neg A$ | B |__ $\neg B$ ---------- A Si $\Gamma \vdash \neg A$ y $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \vdash \neg B$, entonces $\Gamma \vdash A$
EDN: A ---------- $\neg\neg A$ Si $\Gamma \vdash A$, entonces $\Gamma \vdash \neg\neg A$	EDN: $\neg\neg A$ ---------- A Si $\Gamma \vdash \neg\neg A$, entonces $\Gamma \vdash A$
IC: A B ---------- $A \wedge B$ Si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash A \wedge B$	EC: $A \wedge B$ ---------- A B Si $\Gamma \vdash A \wedge B$, entonces $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash B$
ID: A ---------- $A \vee B$ Si $\Gamma \vdash A$, entonces $\Gamma \vdash A \vee B$	ED: $A \vee B$ — A |__ C — B |__ C ---------- C Si $\Gamma \vdash A \vee B$, $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ y $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$, ent. $\Gamma \vdash C$
IB: $A \rightarrow B$ $B \rightarrow A$ ---------- $A \leftrightarrow B$ Si $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ y $\Gamma \vdash B \rightarrow A$, entonces $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$	EB: $A \leftrightarrow B$ ---------- $A \rightarrow B$ $B \leftrightarrow A$ ---------- $A \rightarrow B$ Si $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$, entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

Instituto de Filosofía
Universidad Central de Venezuela
jbaceta@gmail.com

Bibliografía

Chagrov y Zakharyaschev: Modal Logic. Oxford Science Publications, 1997

Lemmon, E J: Beginning Logic. London, England. Thomas Nelson and Sons, 1965.

Hughes Cresswell: New Introduction to Modal Logic. London y New York, Routledge, 1996.