EPISTEME NS, VOL. 37, N° 1, 2017, pp. 25-43

Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez

SOBRE LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO Y LOS AXIOMAS DE SIMETRÍA[1]

Resumen: En 1986, Chris Freiling publicó un artículo en el que pretendía dar una prueba filosófica de la negación de la hipótesis del continuo de Cantor (además ofrece refutaciones de otras proposiciones de la teoría de conjuntos como el axioma de elección). La prueba consistía en un experimento mental en el que se lanzan dardos al intervalo [0,1], esto con el fin de mostrar que si la HC es cierta, entonces se violaban algunos principios de simetría que él consideraba evidentes. James Robert Brown recuperó el experimento y le dio una presentación más intuitiva para un no-matemático, la diferencia es que se pretende mostrar que si la hipótesis del continuo fuese cierta, entonces un evento con probabilidad 0 sucedería con toda certeza sin importar cuantas veces se repitiese el experimento. Sin embargo, el argumento no ha sido muy influyente en la literatura. La reacción más común ante dicho argumento ha sido simplemente ignorarlo. Algunos filósofos de las matemáticas como Paul Bartha han tratado de mostrar que el experimento mental está mal construido. En lo que sigue trataré de mostrar que en realidad el experimento está bien planteado, pero no logra mostrar la negación de la hipótesis del continuo.

Palabras clave: Hipótesis del Continuo (HC), Axioma de Elección (AC), Axiomas de Simetría, conjuntos medibles.

1 Presenté una versión previa de este artículo en el Segundo Taller de Estudiantes Asociados al Instituto de Investigaciones Filosóficas de las UNAM, celebrado en 2014. Agradezco los valiosos comentarios de Alessandro Torza a dicha versión. También agradezco los comentarios de Moisés Macías Bustos, Samuel Lomelí Gómez, Fernando Flores Galicia y Pedro A. Ramos Villegas a la última versión de este texto; la cual se elaboró como parte del Proyecto PAPIIT IA401717 "Pluralismo y normatividad en lógica y matemáticas".

Recibido 12-01-17 ☼ Aceptado 27-02-17

ON THE CONTINUUM-HYPOTHESIS AND THE AXIOMS OF SYMMETRY

Abstract: In 1986, Chris Freiling published an article in which he intended to give a philosophical proof of the negation of Cantor's Continuum Hypothesis (in addition he offers refutations of other propositions of set theory such as the axiom of choice). The proof started with a thought experiment in which someone throws a dart into the interval [0,1], this in order to show that if the CH is true, then some principles of symmetry that he considered obvious were violated. James Robert Brown recovered the experiment and gave a more intuitive presentation for a non-mathematician, the main difference is that he intended to show that if CH was true, then an event with probability 0 occurs with certainty no matter how many times the experiment is repeated. However, the argument has not been very influential in the literature. The most common reaction to that argument has been simply to ignore it. Some philosophers of mathematics such as Paul Bartha have tried to show that the thought experiment is poorly constructed. Next, I will try to show that in fact the experiment is coherent and insightful, but it fails to prove the negation of CH.

Keywords: Continuum Hypothesis (CH), Axiom of Choice (AC), Axioms of Symmetry, Measurable Sets.

Introducción

Muchos consideran que el nacimiento de teoría de la conjuntos como una disciplina matemática se debe a un resultado sorprendente de Georg Cantor, quien mostró que, a pesar de que el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) son ambos infinitos, no son del mismo tamaño, no son biyectables.[2] Es decir, existen conjuntos infinitos de dife-

2 La comparación entre los tamaños de dos conjuntos infinitos se establece mediante funciones definidas entre ellos. Dos conjuntos infinitos son del mismo tamaño si y sólo si existe una función biyectiva entre ellos. Un conjunto A es de menor tamaño que otro B si y sólo si existe una función inyectiva de A a B, pero

rentes tamaños. Sin importar si esta historia del surgimiento de la teoría de conjuntos se debe más a una reconstrucción romántica que a la realidad, este resultado y resultados posteriores nos han legado una visión más que sorprendente del infinito matemático. Una vez que Cantor mostró que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ son dos conjuntos infinitos de diferente tamaño, mostró que existen una cantidad infinita de infinitos de diferentes tamaños (Teorema de Cantor).[3] El resultado por sí mismo sólo muestra que existen una cantidad enorme de conjuntos infinitos,[4] pero no establece que todos ellos deban estar ordenados de alguna forma particular.

Cantor desarrolló una teoría de los números infinitos, construyó como parte de su teoría a los números ordinales y a los números cardinales transfinitos. Los números ordinales tienen propiedades de orden muy interesantes, todos ellos son conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de pertenencia (que funge como la relación de orden entre ordinales).[5] Los números cardinales transfinitos son un subconjunto de los números ordinales transfinitos, son aquellos que no son biyectables con los números ordinales anteriores a ellos.[6] Estos números son llamados alephs y generan una estructura bien ordenada. Esto permite

no hay una función biyectiva entre ellos. La prueba de Cantor muestra que entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ no existe una biyección, pero si una inyección del primero al segundo.

3 El teorema de Cantor afirma que dado cualquier conjunto, su conjunto potencia es de mayor cardinalidad. $\forall X\, |X| < |\wp(X)|$. Esto permite garantizar que la operación de potencia aplicada a un conjunto siempre da como resultado un conjunto de mayor tamaño, incluso si el conjunto es infinito. Así, el resultado de Cantor nos garantiza la existencia de una cantidad infinita de conjuntos infinitos unos más grandes que otros.

4 La cantidad de conjuntos infinitos en la teoría de conjuntos es enorme, tanto que no corresponde con ningún conjunto infinito de la teoría de conjuntos. En sentido estricto la cantidad de conjuntos infinitos es la misma que la cantidad total de conjuntos; es decir, que la colección de todos los conjuntos infinitos es del mismo tamaño que el universo conjuntista completo. Esto implica que no existe el conjunto de todos los conjuntos infinitos, tal como no existe un conjuntos de todo los conjuntos.

5 Se dice que un conjunto A es bien ordenado por una relación R sii se cumplen: 1) R es antirreflexiva y transitiva y 2) para todo B subconjunto de A existe x un elemento de B tal que es R-mínimo respecto a B.

6 Para una reconstrucción detallada de los números ordinales, véase Jech, T., *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*, Berlín, Springer-Verlag, 2006, capítulos 2 y 3.

que los números ordinales sean ordenados respecto a su tamaño usando a los números cardinales como escala de comparación. Así, para cualesquiera dos números ordinales se les puede comparar en términos de tamaño comparándolos con los números cardinales. Sin embargo, este método de comparación entre el tamaño de conjuntos no es aplicable a cualesquiera dos conjuntos si no tenemos primero la garantía de que a esos conjuntos se les puede bien ordenar y comparar con números ordinales.

Usando el Axioma de Elección (AC) se puede mostrar que todo conjunto infinito tiene como cardinalidad a un aleph. Así, los números cardinales se convierten en la norma de comparación entre el tamaño de cualesquiera conjuntos, cualquier conjunto infinito es biyectable con algún aleph. Este resultado se obtiene mostrando que una consecuencia del AC es que todo conjunto puede ser bien ordenado (Teorema del Buen Orden) y esto permite garantizar que dicho conjunto es biyectable con un aleph, es decir, que su cardinalidad es un aleph.

Sobre los conjuntos infinitos podemos saber muchas cosas, pero muchas otras son (y probablemente serán) un misterio.[7] Esto no parece ser muy problemático para la mayoría de las matemáticos, puesto que la mayoría de estos conjuntos infinitos no son muy relevantes en la práctica del matemático común. Sin embargo, algunos de los conjuntos infinitos sí son de gran importancia para las matemáticas más usuales (aquella en la que trabajan la mayoría de los matemáticos profesionales). Algunos de estos conjuntos son el conjuntos de los números naturales, el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales, el conjunto de los números reales, el conjunto de los números complejos, etc.. Sobre ellos podemos conocer muchas de sus propiedades, pero no todas. En particular, nuestro conocimiento sobre la cardinalidad del conjunto $\mathbb{R}$ es muy limitado. Sabemos que el infinito más pequeño es el infinito de los núme-

7 En teoría de conjuntos existen una gran cantidad de proposiciones indecidibles desde la teoría. Algunos consideramos que existen proposiciones absolutamente indecidibles. Para un estudio detallado de la indecidibilidad absoluta, véase Gutiérrez Ramírez, C., *¿Es la hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico*, México D.F., Tesis de doctorado – UNAM, 2015, 293 p.

ros naturales, cuya cardinalidad es el primer aleph, $\aleph_0$, y sabemos que el cardinal de $\mathbb{R}$ es mayor. Una pregunta que queda abierta es dado que $\mathbb{R}$ es más grande que $\mathbb{N}$, ¿de qué tamaño es?, es decir, ¿cuál es su cardinalidad?, ¿cuál es el aleph que le corresponde?

Cantor conjeturó que el cardinal del continuo era el siguiente aleph, $\aleph_1$, a esto se le conoce como la Hipótesis del Continuo de Cantor.[8] Cantor nunca pudo demostrarla. La razón de esto es que desde la teoría de conjuntos Zermelo Fraekel + Axioma de elección (ZFC)[9] no se puede demostrar ni HC ni su negación; es decir, la HC es indecidible en la teoría de conjuntos tradicional (el resultado se debe a Gödel y Cohen).[10] Esto implica que no hay ningún método puramente matemático para decidir sobre la HC desde ZFC (aunque queda abierta la posibilidad de decidir la HC desde una teoría matemática más fuerte).[11]

8 Existen tres versiones de la HC, todas ellas equivalentes desde el punto de vista de la teoría de conjuntos ZFC. Pero la equivalencia no se mantiene si la teoría cambia.

Versión interpolante: Esta versión afirma que no existe un subconjunto de los números reales de cardinalidad infinita, tal que su cardinalidad sea intermedia entre el cardinal de los números reales y el cardinal de los números naturales.

Versión del buen orden: Esta versión afirma que todos los buenos ordenes que se pueden definir sobre subconjuntos de los números reales son estrictamente menores a ω_2 (la versión ordinal de $\aleph_2$).

Versión de la biyección: Esta versión afirma que existe una biyección entre el conjunto de los números reales y el cardinal $\aleph_1$.

9 ZFC es la versión más usual de la teoría de conjuntos, pero no es la única. Los resultados presentados a continuación no dependen esencialmente de la aceptación de ZFC, pues pueden reconstruirse en otras versiones de la teoría como NBG.

10 La prueba de la independencia de la HC respecto a ZFC es de corte semántico; es decir, se realiza mediante la construcción de modelos de la teoría de conjuntos. Gödel en 1938 construyó un modelo (interno) de ZFC + HC, lo que muestra que la negación de la HC no es demostrable en el sistema, suponiendo que el sistema es consistente. Cohen en 1963 construyó un modelo (externo) de ZFC + ¬HC, lo que completa la prueba. Véase Gödel, K., «The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis», Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 24 (1938), No. 12, pp. 556-557. Véase Cohen, P., «The Independence of the Continuum Hypothesis», Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 50 (1963), No. 6, pp. 1143-1148.

11 El problema que se abre ante este resultado es el de la justificación de las nuevas teoría de conjuntos más fuertes que ZFC y, en especial, de los nuevos axiomas que se propongan. Gödel en (1947) propuso un programa para la búsqueda de

Este resultado generó diferentes reacciones. Algunos (como Cohen [12] y Mostowski [13]) optaron por una posición relativista para la teoría de conjuntos; es decir, optaron por afirmar que había más de un modelo posible para ZFC, ninguno de ellos era privilegiado, en algunos la HC era cierta y en otros era falsa. Algunos otros (como Gödel[14]) lanzaron un programa para la búsqueda de nuevos axiomas que completasen la teoría y decidieran la HC. Estos últimos tenían, en general, una motivación filosófica, pues defendía el realismo matemático, así que la opción relativista les parecía del todo inapropiada. Ellos creían que existía un universo matemático independiente de ellos que pretendía ser descrito por la teoría de conjuntos, era necesario encontrar nuevos axiomas que hicieran la descripción más precisa. Hasta ahora, el programa sólo ha tenido un éxito parcial, pues si bien se han encontrado axiomas que deciden el problema del continuo, todavía no se ha logrado consenso sobre la aceptación de dichos axiomas.

En 1986, Chris Freiling presentó una alternativa para abordar el problema.[15] La estrategia de Freiling fue diseñar un experimento mental para mostrar que la HC del continuo es falsa, usando únicamente los recursos de ZFC y algunas intuiciones sobre procesos estocásticos y principios de simetría, que desde su punto de vista no se podían ponerse en duda. A continuación, presentaré el argumento en la versión de James Robert Brown, pues creo que es más accesible al público no especializado. [16]

---

nuevos axiomas de la teoría de conjuntos que decidan la HC. Los resultados encontrados han sido muy interesantes, pero el problema de la justificación todavía está presente. Para más detalles sobre esta discusión véase Maddy (2011).

12 Véase Cohen, «The Independence of the Continuum Hypothesis II», Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 51 (1964), No. 1, pp. 105-110.

13 Véase Mostowski, A., «Recent Results in Set Theory» en I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1967, pp. 84-96.

14 Véase Gödel, «What is Cantor's Continuum Problem?», The American Mathematical Monthly, Vol. 54 (1947), No. 9, pp. 515 – 525.

15 Véase Freiling, C., «Axioms of symmetry: Throwing darts at the real number line», The Journal of Symbolic Logic, Vol. 51 (1986), No. 1, pp. 190–200.

16 El argumento es presentado en capítulo 11 de Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics*, Segunda Edición, Nueva York, Routledge, 2008, 245 p.

Una vez hecho esto, en la segunda sección presentaré la versión de Chris Freiling. En la tercera sección presentaré algunas objeciones que se han presentado al experimento mental y al argumento de estos autores. En una cuarta y última sección trataré de mostrar que en realidad el argumento es correcto, pero que los presupuestos que se requieren para el experimento mental son tan costosos que dicho argumento no se puede usar para refutar de manera adecuada la HC.

1.El experimento mental de James Robert Brown.

El punto de partida del argumento de Brown en contra de la HC es un experimento mental que en apariencia es completamente inofensivo. Imaginemos que estamos jugando a tirar dardos, la peculiaridad de nuestro juego es que el blanco es el intervalo [0,1] y que nuestro dardo tiene una punta infinitamente fina, que logra atinar a un número real. Esto significa que cada uno de nuestros tiros selecciona un número real que pertenezca al intervalo [0,1]. [17] Puede parecer un poco antiintuitivo pensar en lanzar dardos a la línea de los reales, pero parece que podemos concederlo, después de todo parece que cuando hablamos de conjuntos infinitos nos permitimos hacer generalizaciones de procesos finitos al campo de lo infinito. El experimento consiste en tirar dos dardos a la línea de los reales pero garantizando que las tiradas sea 1) al azar, 2) independientes y 3) simétricas.

Aclaremos qué se quiere decir con cada uno de esos requisitos.[18]

1) Al azar: Cualesquiera dos intervalos del mismo tamaño tiene la misma posibilidad de ser alcanzados por un dardo. Es decir, que dado un subconjunto A del intervalo

17 El experimento recurre al intervalo [0,1] por simplicidad, pero de ser correctas las conclusiones aplicarían al conjunto de los números reales. Esto se debe a que el intervalo [0,1] es biyectable con $\mathbb{R}$.

18 Está reconstrucción de los requisitos la tomo de Bartha, pues a mi juicio es muy precisa. Cf. Bartha, P., «Symmetry and the Brown-Freiling refutation of the Continuum Hypothesis», Symmetry, vol. 3 (2011), No. 3, p. 638.

[0,1] la $Pr(x \in A) = \mu(A)$, donde μ es una medida Lebesgue.[19]

2) Independencia: Si dos tiradas son independientes ninguna afecta a la otra. Es decir, si A y B son subconjuntos de [0,1], entonces $Pr(x \in A \mid y \in B) = Pr(x \in A)$ y $Pr(y \in B \mid x \in A) = Pr(y \in B)$.
3) Simetría: Dado que las dos tiradas son al azar e independientes, se puede suponer sin problemas que cualquiera de ellas fue la primera.

Asumamos que estas condiciones se cumplen y que la primera tirada pego en el punto p y la segunda en el punto q. La probabilidad de que hayan pegado justo en esos puntos es muy baja, de hecho la probabilidad es 0. Esto en principio puede ser confuso, pero en realidad no lo es tanto. La idea detrás de esto es que hay tantos puntos en el intervalo [0,1] que si a cada uno le asignamos la misma probabilidad, esta tiene que ser cero.[20] Ahora bien, una idea un poco más complicada de aceptar es que la probabilidad de que el punto seleccionado corresponda con un número racional es de nuevo 0, pues aunque hay una gran cantidad de números racionales (son infinitos) en realidad son una cantidad muy pequeña de números comparados con todos los números reales que están en el intervalo. De hecho, la probabili-

19 Una medida Lebesgue sobre un conjunto infinito es una función $\mu : \wp(s) \to [0,1]$ tal que:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(S) = 1$,
(ii) si $X \subseteq Y$, entonces $\mu(X) \leq \mu(Y)$,
(iii) para todo $a \in S$ sucede que $\mu(\{a\}) = 0$,
(iv) si los conjuntos $X_n \subset S$, con $n \in \mathbb{N}$, son disjuntos dos a dos, entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$$

(v) μ es una función invariante bajo transformaciones rígidas (transformaciones que preserven distancia).
Es importante hacer notar que no todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ tiene medida Lebesgue; por ejemplo, el conjunto de Vitali. Cfr. Jech, *Set Theory* ..., pp. 125 y ss. Esto será importante para comprender el argumento de Bartha.

20 Esto se sigue de inmediato de la condición (iii) dada en la definición de la nota anterior.

dad de seleccionar algún elemento de un conjunto infinito pero numerable (del tamaño de los naturales) es cero.

Ahora supongamos que la HC es verdadera. Por el teorema del buen orden, podemos bien ordenar todos los números reales en el intervalo [0,1] con un orden $<_{\aleph_1}$, aunque el orden que usemos no sea el usual.[21] Usando este nuevo orden podemos definir los segmentos iniciales de la secuencia determinados por un punto *p* del intervalo de la siguiente forma, $S_p = \{x \in [0,1] \mid x \leq_{\aleph_1} p\}$. Ahora bien, como hemos aceptado la HC, el intervalo [0,1] tiene $\aleph_1$ elementos, así que todos los segmentos iniciales tienen $\aleph_0$ elementos pues son de una longitud menor que $\aleph_1$, aunque son infinitos. [22]

Argumento de Brown

1. Asumamos ZFC y por hipótesis para reducción al absurdo supongamos que HC es verdadera.
2. Se lanzan dos dardos al intervalo [0,1], se da en los puntos *p* y *q*.
3. Los segmentos iniciales S_p y S_q tienen cardinalidad $\aleph_0$.
4. Dado que los lanzamientos de los dardos son independientes, la definición de un segmento inicial no tiene relación con la definición del otro segmento inicial.
5. Dado 3, la medida de cada conjunto es 0 $(\mu(S_p) = 0 = \mu(S_q))$, así que la probabilidad de que se elija un elemen-

21 El orden usual sobre los números reales, $<_{\mathbb{R}}$, genera una estructura densa, completa y sin extremos. Dado que $<_{\aleph_1}$ genera una estructura bien ordenada, se sigue que estas dos relaciones no son la misma.

22 Después de analizar el argumento de Brown, puede observarse que la HC es rechazada en tanto se permite establecer un buen orden de longitud $\aleph_1$ sobre el conjunto $\mathbb{R}$. Recordemos que existen tres versiones de la HC (véase la nota 8). Este rechazo sólo afecta a la versión del buen orden y a la versión de la biyección; pero es posible que la versión de la interpolación sea aceptable desde el punto de vista de Brown. Esto es posible sólo si se rechaza algún axioma de ZFC, por ejemplo, el AC. Llamo la atención sobre este punto, pues a mi parecer la crítica central tanto de Brown como de Freiling se concentra en las propiedades de orden del conjunto dadas por la HC y por el AC. No seguiré está línea argumental, pero creo que se hacerlo se puede fortalecer el argumento principal del artículo.

to de cualquiera de los dos segmentos iniciales es 0 $(Pr(x \in S_p) = 0 = Pr(x \in S_q))$.

6. Dado que la probabilidad de que se elija un elemento de cualquiera de los dos conjuntos es 0, la probabilidad de que uno de los dos tiros seleccione un punto del segmento inicial determinado por el otro tiro es 0 ($Pr(p \in S_q) = 0$ y $Pr(q \in S_p) = 0$). Esto no quiere decir que sea imposible obtener este resultado, sólo que es muy probable que no suceda.[23]
7. Pero, dado que $<_{\aleph_1}$ bien ordena a los elementos del intervalo [0,1], o bien $p <_{\aleph_1} q$ o bien $q <_{\aleph_1} p$ lo que quiere decir que uno de los dos tiros siempre caerá en el segmento inicial determinado por el otro tiro ($p \in S_q$ o $q \in S_p$).[24]
8. 6 y 7 generan un absurdo.
   ∴La HC del continuo es falsa.

Usando una generalización de este argumento se puede mostrar que el cardinal del conjunto de los números reales no puede ser ni $\aleph_2$, ni $\aleph_3$, ni $\aleph_4$, etc.[25] De hecho, con técnicas similares se puede mostrar que no puede ser ningún aleph. Pero habíamos visto que si aceptamos el AC el cardinal del continuo debe ser algún aleph, así que si aceptamos el uso de estas técnicas terminaremos rechazando no sólo la HC, sino que también

23 Esto puede parece muy contraintuitivo, pero es una consecuencia de asignar medidas a conjuntos infinitos. Consideremos el experimento mental, de acuerdo a él siempre seleccionamos un $x \in [0,1]$. Supongamos que hemos seleccionado el número a, así que ha sucedido el evento $(x \in \{a\})$, pero la definición implica que $\mu(x \in \{a\})$ =0. Así que ha sucedido un evento con probabilidad 0. Además, esto sucede cada vez que lanzamos un dardo, siempre sucede un evento con probabilidad 0.

24 Esto se sigue de la definición de los segmentos iniciales S_p y S_q, pues son buenos ordenes, lo que implica que están línealmente ordenados.

25 Las pruebas en cada caso son muy similares, con la única diferencia de que se apelara a ordenes dados por diferentes alephs. Por ejemplo, para probar que el cardinal de continuo no es $\aleph_4$ se usará en la prueba un orden $<_{\aleph_4}$.

rechazaremos el AC. Esto se vera con un poco más de claridad en la reconstrucción de Freiling.

2.La versión de Chris Freiling.

La versión de Freiling es un poco menos accesible, pero en mi opinión presenta las cosas de una forma que facilita el análisis correcto del argumento. Ambos argumentos parten del experimento mental de los dardos y asumen que los dardos pueden ser lanzados 1) al azar, 2) de forma independiente y 3) que los resultados son simétricos. La diferencia fundamental está en que la versión de Freiling no recurre a que sucederá un evento con probabilidad 0. En su lugar, Freiling formula una serie de axiomas de simetría y la justificación para la aceptación de dichos axiomas es el experimento mental. El primer axioma relevante es el siguiente.

Axioma $A\aleph_0$: $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\aleph_0 \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \, (x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1))$

Es decir, para cualquier función *f* del conjunto de los números reales al conjunto de todos los subconjuntos numerables de los reales, existen un par de números reales x_1 y x_2 tales que ninguno cae en la imagen del otro bajo la función *f*. Freiling muestra que es un teorema de ZFC que $A\aleph_0 \leftrightarrow \neg HC$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $A\aleph_0$ se cumple. Hipótesis por reducción al absurdo, asumamos que HC es verdadera. Sea $<_{\aleph_1}$ un buen orden sobre $\mathbb{R}$ de longitud $\aleph_1$. Sea además *f* una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}\aleph_0$ definida como sigue $f(x) = \{y \mid y <_{\aleph_1} x\}$. Ahora bien, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \, (x_1 \in f(x_2) \vee x_2 \in f(x_1))$, pues $x_1 <_{\aleph_1} x_2$ o $x_2 <_{\aleph_1} x_1$. Esto contradice $A\aleph_0$. Por lo tanto, HC es falsa. Por lo tanto, $A\aleph_0 \leftrightarrow \neg HC$.

$\Leftarrow$) Supongamos que HC es falsa, es decir, que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$. Demostremos que $A\aleph_0$ se cumple. Sea $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle$ una $\aleph_1$-secuencia de reales diferentes. Sea *f* una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \aleph_0$. Consideremos el conjunto $A = \{X \mid (\exists \alpha < \aleph_1) x \in f(x_\alpha)\}$ que es la unión de $\aleph_1$ conjuntos numerables y por ello tiene cardinalidad $\aleph_1$. Como $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, tenemos que $(\exists y \in \mathbb{R}) y \notin A$. Pero entonces tenemos que $(\forall \alpha < \aleph_1)$

$y \notin f(x_\alpha)$. Además, como $f(y)$ es numerable, $(\exists \alpha \in \aleph_1) x_\alpha \notin f(y)$. Por lo tanto, $y \notin f(x_\alpha) \wedge x_\alpha \notin f(y)$. Por lo tanto, $A\aleph_0$ se cumple.

Ahora bien, con este análisis podemos dejar en claro que lo que realmente juega un papel fundamental en el argumento son los principios de simetría y que el experimento mental sólo pretende dar evidencia a favor de dichos principios. Para ir en contra del axioma de elección lo que se tiene que hacer es formular un axioma de simetría más fuerte.

Axioma $A_{<2^{\aleph_0}}: \forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{<2^{\aleph_0}}$

Este axioma implica que no puede haber un buen orden sobre el conjunto de los reales, lo que implica la negación del teorema de buen orden y por ello mismo del axioma de elección.[26] Esto tiene como consecuencia que la teoría ZFC + $A_{<2^{\aleph_0}}$ es inconsistente. Ante este escenario tenemos por lo menos dos opciones. La primera es rechazar la propuesta de Freiling, pues aceptar $A_{<2^{\aleph_0}}$ como un nuevo axioma para la teoría de conjuntos genera un teoría contradictoria. A mi parecer esta es la estrategia de Bartha, como espero mostrar a continuación. La segunda opción es rechazar algunos de los axiomas de la teoría ZFC, tomar un reducto de esta teoría y agregar como axioma $A_{<2^{\aleph_0}}$. Un resultado posible sería la teoría ZF + $A_{<2^{\aleph_0}}$. ¿Cuál es la opción adecuada? ¿Cuál de ellas es la que se pretende sostener a partir del argumento de Freiling-Brown? En mi opinión, lo que se pretende es generar una nueva teoría de conjuntos, que muy probablemente no incluya el AC.

3.Argumento de Paul Bartha en contra del experimento mental.

En 2011, Paul Bartha ofreció un argumento en contra del experimento mental de Freiling-Brown. La idea central de Bartha es mostrar que el análisis de las probabilidades asignadas a las secuencias iniciales S_p y S_q son incorrectas. En sus palabras, “el

26 Esto se debe a que si asumimos el axioma $A_{<2^{\aleph_0}}$, podemos mostrar que sin importar cual sea el cardinal del continuo, mientras sea un aleph llegaremos a una contradicción. Pero si el cardinal del continuo no es un aleph, entonces $\mathbb{R}$ no puede ser bien ordenado. Lo que implica que el AC es falso.

problema básico con el argumento de Brown es simple: ¿por qué deberíamos identificar la $Pr(p <_{\aleph_1} q)$ con $\mu(S_q)$?"[27]

El argumento de Bartha se centra en la versión de Brown del argumento, pues según él, si logra mostrar que el argumento de Brown está equivocado, también lo está el de Freiling. Esto se debe a que si las secuencias iniciales tales como las definió Brown fallan en lograr el absurdo, se muestra que el principio $A\aleph_0$ de Freiling es falso. Esto dado que este principio afirma que toda función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}\aleph_0$ debe cumplir el principio y las secuencias iniciales definen una de esas funciones.

En el experimento, a cada conjunto se le asigna una probabilidad, dicha probabilidad es asignada usando la medida del conjunto. Es decir, dado un conjunto A, decimos que $Pr(A) = \mu(A)$. Para Bartha, el problema central es que esta forma de asignar las probabilidades impide que se cumplan los tres requisitos impuestos por el experimento.

Para lograr mostrar su punto, Bartha nos pide que consideremos que de acuerdo a la reconstrucción de Brown del argumento, $Pr(p \leq_{\aleph_1} q) = Pr(p \in S_q) = \mu(S_q) = 0$, pero esto implica que $Pr(q <_{\aleph_1} p) = \mu((S_q)^C) = 1$. Es decir, que dado que la probabilidad de que p sea menor que q es 0, entonces la probabilidad de que p sea mayor o igual que q es 1. Según Bartha esto es un error, pues la probabilidad correcta debería ser ½. Veamos como justifica esto.

El principio de simetría que está detrás del argumento de Brown nos pide que la probabilidad asignada a un evento debe ser invariante respecto a cuál de los dos tiros fue realizado primero. Bartha se concentra entonces en la $Pr(p <_{\aleph_1} q)$. Nos dice que si en lugar de asignar el orden que forzamos con el axioma de elección usamos el orden usual para los reales, la conceptualización del evento tal como la presenta Brown daría como resultado $Pr(p < q) = \mu([0, q))$, pero esto es un error. La idea central es que si queremos saber la probabilidad de que p sea menor que q, debemos más bien considerar el conjunto $S = \{(p, q) \mid p, q \in [0,1] \wedge p <_{\aleph_1} q\}$.En este sentido debemos considerar ahora no la línea recta sino el plano como marco de referencia; es decir, ya no estamos

27 Bartha, «*Symmetry and the* ...», p. 640.

tratando con [0,1] sino con [0,1] × [0,1]. Así, que la probabilidad del evento $p <_{\aleph_1} q$ se determina de otra forma a saber, $Pr(p <_{\aleph_1} q) = ½$.

Ahora bien, aquí no acaba el problema, pues esto todavía no considera que no debemos saber cual de los dos tiros se realizo primero. Esto implica que los conjuntos $S = \{\langle p,q\rangle \mid p,q \in [0,1] \wedge p <_{\aleph_1} q\}$ y $T = \{\langle p,q\rangle \mid p,q \in [0,1] \wedge p <_{\aleph_1} p\}$ deben tener la misma probabilidad de suceder o bien ninguno de ello tiene medida. En cualquier caso, el experimento de Brown no funciona. Lo que es más, recurriendo a resultados de teoría de la medida se puede probar que S no tiene medida, los detalles pueden verse en el artículo de Bartha. Lo único que quiero resaltar es que las pruebas que presenta Bartha hace uso del AC. Esto nos deja con el siguiente escenario.

> La dura realidad matemática aquí es que las siguientes afirmaciones no puede ser todas verdaderas de nuestra medida de probabilidad sobre [0,1] × [0,1]:
>
> (i) Cada una de las secciones transversales S_q y S_p tiene una medida unidimensional bien definida igual a 0.
>
> (ii) La distribución de probabilidad para el par de tiros está dada por la medida del producto.
>
> (iii) S tiene una medida bidimensional bien definida (e.g., $\mu(S) = Pr(p < q) = ½$).[28]

Esto parece mostrar que el argumento de Brown está equivocado, pues las condiciones (i), (ii) y (iii) corresponden a las tres condiciones dadas por Brown para el experimento,[29] mostrando que el escenario propuesto por él es imposible. Nos muestra que el escenario en el que aceptamos el experimento mental (o los

28 Bartha, *Ibidem*, p. 641.

29 (i) es al azar, pues justo se pide que la probabilidad corresponda con la medida. (ii) es independencia, pues la medida producto se obtiene a partir de dos medidas independientes para el intervalo [0,1]. (iii) es simetría pues se pide que ambos eventos tengan la misma probabilidad.

axiomas de simetría) y ZFC es inconsistente. Esto sería evidencia suficiente en contra del argumento Freiling-Brown si el objetivo del experimento no es rechazar parte de la teoría ZFC, a saber, el AC y reemplazarlo por axiomas de simetría. Pero, en caso de que justo el objetivo del argumento es mostrar que es posible proponer una nueva teoría de conjuntos, los resultados de Bartha no sería contundentes en contra de la propuesta.

4.Presupuesto del experimento: medidas sobre el conjunto de los números reales.

El contraargumento de Bartha nos ha mostrado varias lecciones importantes, pero creo que no muestran que el argumento de Brown-Freiling está equivocado. Lo que si nos muestran es que el argumento de Freiling-Brown tiene supuestos fuertes. Veamos cuáles son.

En primer lugar es claro que el argumento de Bartha muestra que no se pueden cumplir las 3 condiciones que piden Brown y Freiling en su argumento, no por lo menos si aceptamos ZFC.

Pero, ¿Brown y Freiling realmente quieren mostrar que esto es posible? Me parece que la respuesta es que no. Una parte importante del argumento de Bartha contra la propuesta de estos autores es que se pueden establecer buenos ordenes para los números reales. Si los ordenes pueden establecerse, se puede mostrar que no es posible cumplir con los 3 requerimientos del experimento al mismo tiempo; pues o bien el conjunto *S* definido arriba no tiene media o bien tiene medida y se viola el requisito de independencia. Ahora bien, recordemos que el Axioma $A\aleph_0$ dice que $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{<}{}_{2}\aleph_0 \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,(x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1))$, si aceptamos este principio entonces el buen orden que se define a partir del supuesto de la hipótesis del continuo no es posible. Esto no inválida la objeción de Bartha, pues si $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, para algún ordinal, el argumento se puede reconstruir. Bajo este nuevo supuesto se puede establecer un buen orden sobre $\mathbb{R}$ de longitud $\aleph_\alpha$, y con ese nuevo buen orden podemos mostrar que el conjunto $S = \{\langle p,q \rangle \mid p,q \in [0,1] \wedge p < q\}$ no tiene medida o bien tiene medida y se viola el requisito de independencia. Sin embargo, debemos recordar que Freiling no sólo propone un axioma de simetría, sino muchos. En particular, el axioma $A_{<2^{\aleph_0}}$ implica que el conjunto de los reales no es bien ordenable. Esto implica, entre otras cosas, que no se puede generar el conjunto *S* que es el sirve para mostrar que no se pueden cumplir los tres requisitos del experimento al mismo tiempo.

En este sentido, el argumento en la versión de Freiling es más claro. Muestra que si aceptamos sus axiomas de simetría la HC es falsa; lo que es más, muestra que el cardinal del continuo no es ningún aleph. En este sentido, el experimento mental sólo sirve como una justificación intuitiva de sus axiomas de simetría y no involucra directamente problemas relacionados con la medida de los conjuntos. Por supuesto, el costo de la aceptación de estos principios de simetrías es el rechazo del axioma de elección.[30] Al parecer en el fondo lo que tenemos es una disputa sobre la naturaleza de los conjuntos infinitos. Bartha y los defensores de la teoría clásica ZFC defienden una naturaleza de los conjuntos infinitos tales que son bien ordenables. Freiling y Brown defiende una visión de los conjuntos infinitos que les atribuyen propiedades estocásticas, que permiten que existan escenarios como el planteado en el experimento mental. Cada una de estas visiones tiene asociada una teoría conjuntos diferentes; a saber, ZFC y ZF + Axiomas de Simetría. Esto quiere decir que nos enfrentamos a un caso de teorías rivales para explicar los mismos fenómenos; a saber, ambas se proponen como teorías que pretender dar cuenta de los fenómenos relacionados con conjuntos infinitos. Una teoría trata de generalizar procesos que tienen que ver con procesos de elección y la otra teoría trata de generalizar procesos que tiene que ver con el azar. Chris Freiling parece tener la misma opinión,

30 Existe otra opción para evitar la contradicción; a saber, rechazar o debilitar el axioma de conjunto potencia. La idea de detrás de esta estrategia es evitar que la colección de los números reales sea de hecho un conjunto. Si la colección de los números reales es una clase propia, las pruebas antes planteadas se perderían.

pues después de mostrar que un principio de Simetría es incompatible con el AC. Hace la siguiente observación:

> El AC es una extensión a conjuntos arbitrarios de lo que todo el mundo sabe que es verdadero acerca de conjuntos contables, mientras que $A_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ es una extensión de nuestra intuición sobre el lanzamiento de un número finito de dardos a el lanzamiento de un número contable de dardos. Dejamos al lector decidir qué extensión es más natural. Por otro lado, uno puede estar tentado a mantener tanto AC como $A_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ y debilitar el axioma de potencia, quizás más dudoso. Por ejemplo, no sé si la contradicción se mantendría si el conjunto potencia de los reales fuese una clase apropiada. [31]

5. Conclusiones

De acuerdo con el análisis ofrecido, el argumento Freiling-Brown es correcto, pero supone el rechazo del AC. Si bien el experimento mental y el argumento no demuestran que la HC es falsa, se obtuvieron por lo menos dos cosas de su análisis.

1) Se muestra la relación que existen entre la naturaleza que la teoría supone de los conjuntos infinitos, los axiomas de la teoría y los resultados que se pueden obtener. Esto se cumple tanto en el caso del axioma de elección como en el caso de los axiomas de simetría.

2) Se da pie a la creación de una teoría de conjuntos alternativa que puede ser una digna competidora de la teoría estándar; a saber, la que resulta de la aceptación de los axiomas de simetría y el rechazo del AC.

Ahora bien, queda abierta la cuestión de cómo decidir entre estas dos teorías alternativas. En mi opinión, eso sólo puede ser respondido desde la práctica matemática y apelando a los resultados que cada una de las teorías obtenga. Es muy probable que dado que ZFC es una teoría casi universalmente aceptada por la

---

31 Freiling, «A*xioms of symmetry* ...», p. 196.

comunidad matemática, la nueva teoría tendría que ofrecer resultados impresionantes para imponerse. Pero, esta discusión la pospondré para otro trabajo.

Bibliografía

- Bartha, P., «Symmetry and the Brown-Freiling refutation of the Continuum Hypothesis», Symmetry, vol. 3 (2011), No. 3, pp. 636-652.
- Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics*, Segunda Edición, Nueva York, Routledge, 2008, 245 p.
- Cohen, P., «The Independence of the Continuum Hypothesis», Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 50 (1963), No. 6, pp. 1143-1148.
- ________, «The Independence of the Continuum Hypothesis II», Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 51 (1964), No. 1, pp. 105-110.
- Freiling, C., «Axioms of symmetry: Throwing darts at the real number line», The Journal of Symbolic Logic, Vol. 51 (1986), No. 1, pp. 190–200.
- Gödel, K., «The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis», Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 24 (1938), No. 12, pp. 556-557.
- ________, «What is Cantor's Continuum Problem?», The American Mathematical Monthly, Vol. 54 (1947), No. 9, pp. 515 – 525.
- Gutiérrez Ramírez, C., *¿Es la hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico*, México D.F., Tesis de doctorado – UNAM, 2015, 293 p.

- Jech, T., *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*, Berlín, Springer-Verlag, 2006, 769 p.
- Maddy, P., *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford, Oxford University Press, 2011, 150 p.
- Mostowski, A., «Recent Results in Set Theory» en I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1967, pp. 84-96.

Facultad de Filosofía y Letras - UNAM
cristian.mate@gmail.com