única realidad lingüística, y el único objeto concordante con las preocupaciones de su filosofía.

5) He sugerido, además, que un interés lingüístico adicional de las propuestas de Austin consiste en su esfuerzo de investigar las condiciones de fortuna o infortunio de las emisiones realizativas a partir de la indagación de la estructura y el tipo de conexiones entre enunciados (es lo que llamo la consideración interna de esas condiciones), después de desechar por infructíferos los intentos de fundarlas en el contexto empírico de enunciación.

La noción de realizativo permitió, en primer término, borrar la distancia entre el enunciado lingüístico y el sujeto que lo enuncia: ello es lo que expresa propiamente la noción de acto de habla, la cual deja planteado el problema de identificar el punto en el cual irrumpe el sujeto hablante en el enunciado. Este es el proyecto de Benveniste y a ello responde la definición de la categoría de*persona,* la cual permite una transformación en cuanto a la definición del objeto de estudio de la lingüística o, más exactamente, la transformación de la lengua en *discurso.*

LUIS PIOVAN

SOBRE INTERPRETACIONES Y ESPACIOS DE VALUACIONES ASOCIADOS PARA UNA TEORIA DE PRIMER ORDEN

0. *Introducción*

Este trabajo ha surgido con motivo de dar una cierta caracterización topológica de la noción de isomorfismo de una teoría de primer orden.

Se elaborará una construcción, en que a cada interpretación (I,D) de una teoría K de primer orden, se asocia una sistema del cálculo proposicional elemental (c. prop. clásico) L_0, y sobre las relaciones entre estos sistemas y entre sus espacios de valuaciones, se hará la caracterización deseada.

En general seguiremos las notaciones dadas en los trabajos de Beth[2] y Mendelson;[3] no obstante, en el siguiente parágrafo, daremos algunas propias y rescataremos las definiciones necesarias.

1. *Notaciones y definiciones preliminares*

(i) Con K designaremos nuestra teoría de primer orden.

Exp (K) indicará el conjunto de fórmulas bien formadas de la teoría K (ver 5. pp. 46-47), y Exp (L_0) será el conjunto de fórmulas bien formadas del cálculo proposicional (5. pp. 30-31).

Una teoría de primer orden tiene los axiomas lógicos (5. p. 57):

Si A, B, C, son f.b.f. (fórmulas bien formadas) de K, entonces los siguientes son axiomas lógicos de K:

(Ax. 1) $A \supset (B \supset A)$

(Ax. 2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(Ax. 3) $(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim B \supset A) \supset B))$

(Ax. 4) $(x_i)\, A\, (x_i) \supset A\, (t)$, si $A(x_i)$ es una f.b.f. de K y ninguna ocurrencia libre de x_i en $A(x_i)$ está dentro del alcance de algún cuantificador (x_j), donde x_j es una variable en t.

(Ax. 5) $(x_i)\, (A \supset B) \supset (A \supset (x_i)\, B)$ si A es una f.b.f. de K sin ocurrencias libres de x_i.

K posee las reglas de inferencia:

(1) Modus ponens: B sigue de A y $A \supset B$.

(2) Generalización: (x_i) A sigue de A; y un número a lo sumo numerable de axiomas propios.

Nuestra teoría de primer orden deberá tener axiomas propios que sean fórmulas cerradas. (Las razones de esta condición se explicarán más adelante).

(ii) Por una interpretación (I, D) de K, entenderemos una aplicación de los símbolos de K, en los símbolos de una teoría de conjuntos I (K), tal que asocia:

cada conectivo primitivo (,), $\supset$, $\sim$, en si mismo; a cada predicado p_i^n de K, un predicado o *relación* n-aria $I(p_i^n)$ sobre D; a cada funtor f_i^n de K, un funtor u *operación* n-aria $I(f_i^n)$ sobre D; a cada variable individual, una variable individual; y a cada constante individual a_i, un elemento $I(a_i)$ perteneciente a D.

Naturalmente, con ExpI(K) se indicará el conjunto de fbf. de I(K).

Nosotros trabajamos con interpretaciones (I, D) cuyo dominio D tiene cardinalidad a lo sumo numerable. No obstante, los resultados que aquí aparecen, pueden extenderse para interpretaciones cuyo dominio tiene cardinalidad mayor que la de los números naturales.

(iii) Con Σ_D denotaremos el conjunto de todas las sucesiones con elementos de D : $s = (b_1, b_2, \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots)$ $b_i \in D\ \forall i = 1, \ldots\ldots, n, \ldots$

Si D′ es la unión de D y todas las variables individuales, $\Sigma_{D'}$ denotará el conjunto de las sucesiones con elementos de D′. Por ejemplo:

$$(x_1, b_1, b_2, x_3, \ldots\ldots) \in \Sigma_{D'}.$$

(iv) Se convendrá en designar por e_I la función evaluadora: $e_I : \Sigma_D \rightarrow H_I = \{$funciones $f : Exp(K) \rightarrow ExpI(K)$, tal que para todas $A,B \in Exp(K)$ $f(A \supset B) = f(A) \supset f(B)$ y $f(\sim A) = \sim f(A)\}$

donde $\forall s \in \Sigma_{D'}$ e_I (s) está definida como sigue:

1°) $e(s)\,(a) = I(a)\ \forall$ constante individual a.

2°) $e(s)\,(x_i) = \pi_i\,(s)$, si x_i es una variable individual. Aquí π_i designa la función de proyección sobre la i-ésima coordenada.

3°) $e(s)\,(f_i^n) = I\,(f_i^n)$, $e(s)\,(p_i^n) = I\,(p_i^n)$, para símbolos funtoriales y predicativos.

4°) $e(s)\,(\sigma) = \sigma \forall$ conectivo primitivo σ.

5º) Si X es una fórmula atómica constituída por la ristra de símbolos $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$, e(s) (x) estará formada por la ristra de símbolos e(s) (u_1) e(s) (u_2) ..... e(s) (u_n).

6º) e(s) $((x_i)A) = (x_i)\, e(\mu_i(s))(A)$, donde $\mu_i : \Sigma_{D'} \to \Sigma_{D'}$ es la función, que a cada sucesión $s \in \Sigma_{D'}$, cambia su coordinada i-ésima por la variable x_i.

7º) e(s) $(A \supset B) =$ e(s) $(A) \supset$ e(s) (B) y e(s) $(\sim A) = \sim$e(s) (A), para todas A, B, $\in$ Exp(K).

Es claro, que cualquiera sea el término calculable t, la evaluación e(s) (t) pertenece a D.

Dada una fórmula $A \in$ Exp(K), entendemos por $e_I(s)(A)$, la ristra de símbolos que resulta de aplicar las reglas 1º) al 8º) calculando todos los términos que sea posible.

(v) A cada fbf. $Y \in$ ExpI(K), puede asociársele un número natural como sigue:

Para símbolos se toma la convención:

$g(() = 3$, $g()) = 5$, $g(,) = 7$, $g(\sim) = 9$, $g(\supset) = 11$,

$g(x_k) = 5 + 8k$ $g(s_k) = 7 + 8k$, $g(I(f_k^n)) = 9 + 8(2^n 3^k)$,

$g(I(p_k^n)) = 11 + 8(2^n 3^k)$; ($\{s_k\}$ designa una enumeración para los elementos de D).

Si Y está formada por la ristra de símbolos $u_1\, u_2 \ldots\ldots u_n$ entonces $g(Y) = 2^{g(u_1)}\, 3^{g(u_2)} \ldots\ldots p_n^{g(u_n)}$, donde $\{p_n\}$ es la sucesión ordenada de números primos.

(vi) Sea H = {funciones f: Exp(K) $\to$ Exp(L_o), tal que $f(A \supset B) = f(A) \supset f(B)$ y $f(\sim A) = \sim f(A)$}; definiremos la

aplicación $E_I : \Sigma_D \to H$, como sigue: si X es una fórmula atómica o de la forma $(x_i)A$, $E_I(s)$ (X) es la letra cuyo subíndice es $g(e_I(s)(X))$.

Se tiene, de esta manera, un sistema $K_{I,D}$ de L_o que viene definido conjuntísticamente por:

$$K_{I,D} = (E_I(\Sigma_D) \quad (\quad Exp(K)\ ) \subset Exp(L_o).$$

La prueba de que $K_{I,D}$ es un sistema del cálculo proposicional es trivial; y por esto será omitida.

Observemos, que para nuestra teoría K, E_I (s)(A) es una letra en caso de ser A un axioma propio.

2. *Espacios de valuaciones asociados a sistemas de L_o*

Def 1: Un sistema M del cálculo proposicional, es un subconjunto de Exp(L_0), que contiene todos los teoremas de L_0 deducidos a partir de ciertas letras hipótesis, y es cerrado por Modus ponens.

Con Z_2 se indicará el álgebra de Boole de dos elementos 0, 1, topologizada con la topología discreta. Con esta topología, Z_2 se vuelve un espacio compacto. Z_2^M será el espacio producto; es decir, el conjunto de todas las funciones de dominio M y rango Z_2.

Seguidamente, enunciaremos sin demostrar, la siguiente proposición de carácter elemental:

Prop 1: Sean M,N sistemas de L_0, tal que $M \subset N$, entonces la inclusión canónica $Z_2^M \subset Z_2^N$ es continua y cerrada; es decir, envía conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. (La inclusión canónica viene definida por i(f) = F, donde F/M = f y F(X) = 0 si $X \notin M$).

Def 2: Dado un sistema M, una $f \in Z_2^M$ se llamará valuación o función de verdad, si verifican las condiciones:

$$\text{(i) } f(\sim X) = 1 \quad \text{sii } f(X) = 0$$
$$\text{(ii) } f(X \vee Y) = 0 \quad \text{sii } f(X) = f(Y) = 0$$

Se suele abreviar

$$f(X \vee Y) := f(\sim X \supset Y)\ (\sim X \supset Y),$$
$$f(X \wedge Y) := f(\sim(\sim X \vee \sim Y)),$$
$$f(X \equiv Y) := f((X \supset Y) \wedge (Y \supset X)).$$

Obviamente, no toda $g \in Z_2^M$ es una valuación. Una valuación queda unívocamente determinada cuando es dado su valor sobre cada letra sentencial de M.

Se indicará por ValM $\subsetneq Z_2^M$ el espacio de todas las valuaciones de M.

Las siguientes propiedades constituyen una breve enumeración de resultados conocidos relativos a Z_2^M y ValM. Tales pueden ser ampliadas con las que enumera Beth (1, § 5-7).

i) * Z_2^M con la topología producto es un espacio de Hausdorff compacto.

* Dando una enumeración conveniente $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de los elementos de M, la aplicación $\varphi : Z_2^M \to$ Can, definida por $\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} f(X_n)$, es un homeomorfismo entre Z_2^M y el conjunto ternario de Cantor "Can".

ii) ValM es un subespacio cerrado de Z_2^M, y por tanto, un espacio Hausdorff compacto.

El sistema de conjuntos $\{H(X) : X \in M\}$ es una base para la topología de ValM, donde $H(X) = \{f \in \text{ValM}: f(X) = 1\}$

Cada H(X) es simultáneamente abierto y cerrado en ValM; luego compacto. Esto hace de ValM un espacio de Boole (3, cap. V, ej. S).

$$H(\sim X) = \text{ValM} \setminus H(X)$$
$$H(X \vee Y) = H(X) \cup H(Y)$$
$$H(X \wedge Y) = H(X) \cap H(Y)$$

Dada la familia de sistemas $K_{I,D} \subset \text{Exp}(L_0)$, se tiene la familia de espacios de valuaciones $\text{Val}K_{I,D} \subset Z_2^{K_{I,D}}$ que en virtud de la proposición 1, puede considerarse como una familia de subespacios cerrados de $Z_2^{\text{Exp}(L_0)}$.

Permitámonos dar ahora, por el siguiente lema, algunas propiedades de relación entre sistemas y espacios de valuaciones.

Lema 1: Si $\phi: M \to N$ es un homomorfismo de sistemas, entonces la función $\phi_1 : \text{ValN} \to \text{ValM}$ definida por $\phi_1(f) = f \bullet \phi$ está bien definida, es continua, y además se verifica:

(i) ϕ es suprayectiva sii ϕ_1 es inyectiva.

(ii) ϕ es inyectiva sii ϕ_1 es suprayectiva.

(iii) ϕ es biyectiva sii ϕ_1 es un homomorfismo.

(Nota: por un homomorfismo de sistemas se entenderá una función tal que $\phi(A \supset B) = \phi(A) \supset \phi(B)$ y $\phi(\sim A) = \sim \phi(A)$, $\phi(A) = B$ A y B axiomas).

Dem: $f \bullet \phi$ es efectivamente una valuación de M, pues:

$$1 = f \bullet \phi\ (\sim A) = f(\sim \phi\ (A)) \text{ sii } 0 = f(\phi\ (A)),$$

$$\text{y } 0 = f \bullet \phi(A \vee B) = f \bullet \phi(\sim A \supset B) = f(\phi(A)) \vee \phi\ (B)$$

$$\text{sii } f \bullet \phi(A) = f \bullet \phi\ (B) = 0.$$

ϕ_1 continua se deduce de que

$$\phi_1^{-1}(H(B) = \{f \in \text{ValN}: f \bullet \phi\ (B) = 1\} = H\ (\phi(B)).$$

(i) si ϕ es suprayectiva y ϕ_1 (f) = ϕ_1 (g), se tiene $f \bullet \phi(A) = g \bullet \phi(A)\ \forall A \in M$; y de aquí f = g. Supongamos que ϕ no es suprayectiva; es claro que ϕ (M) es un subsistema propiamente contenido en N. Hay en consecuencia una letra sentencial $B \notin \phi$ (M). Sean f,g ValN tal que se anulan sobre todas las letras sentenciales de ϕ (M) y f(B) = 1, g(B) = 0. Es evidente que

$$\forall A \in M\ \phi_1\ (f)(A) = f \bullet \phi\ (A) = g \bullet \phi(A) = \phi_1\ (g)\ (A),$$

pues f y g son idénticas sobre ϕ (M); luego, por ser inyectiva f = g, y esto es absurdo.

(ii) Si ϕ es inyectiva y $g \in$ ValM, entonces la función f definida como sigue:

$$f(B) = \begin{cases} g(A), \text{ si } B = \phi(A) \\ 0 \text{ si B es una letra } B \notin \phi\ (M);\ ); \end{cases}$$

está bien definida y es una valuación de N. De aquí, si $A \in M$, ϕ_1 (f) (A) = $f \bullet \phi(A)$ = g(A) c.q.d.

Sea ahora $\phi(A)=\phi(B)$, donde A es una letra; entonces $\forall f \in$ ValN $f \bullet \phi(A) = f \bullet \phi(B)$; y puesto que ϕ_1 se supone es suprayectiva, g(A) = g(B) $\forall g \in$ ValM. Luego B debe ser una letra y A = B: en efecto, si B es tautología, elíjase g(A) = 0; si B no es tautología, y no contiene A en su expresión, defínase g en las letras de B de manera que se tenga g(A) = 1 y g(B) = 0; si B contiene A en su expresión, no es posible que $\phi(A) = \phi(B)$, pues si este es el caso, estaría mal definida.

Hagamos la siguiente asignación numérica a símbolos:

$$h(()=3,\ h())=5,\ h(.)=7,\ h(\sim)=9,\ h(\supset)=11,$$

Si cada letra de una expresión A es reemplazada por un punto '.', se tiene una sucesión tomada de entre los símbolos '(', ')', '.', '$\sim$', '$\supset$', $s_1 s_2 \ldots . s_n$, asociada a A. Se llamará longitud de A al número

$$L\ (A) = 2^{h(s_1)}\ 3^{h(s_2)} \ldots .\ p_n^{h(s_n)}$$

Supongamos ahora que A, B son expresiones de M tal que $A \neq B$. Si $L(A) \neq L(B)$, es claro que $L(\phi(A) \neq L(\phi(B))$, y de aquí debe ser $\phi\ (A) \neq \phi\ (B)$. Si L(A) = L(B), es obvio que hay letras distintas en A y B, más como es inyectiva sobre letras, también aquí $\phi\ (A) \neq \phi\ (B)$, c.q.d.

(iii) En virtud de (i) y (ii) ϕ es biyectiva sii ϕ_1 es biyectiva. Como ϕ_1 es continua, basta ver que es abierta para probar que es un homeomorfismo; pero

$$\phi_1(H(A)) = \{\phi_1(f), f \in \text{ValN } f(A) = 1\} = \{\phi_1(f): f(\phi(B)) = 1\}$$
$$= \{\phi_1(f): \phi_1(f)\ (B) = 1\} = \{g \in \text{ValM}: g(B) = 1\} = H(B),$$

c.q.d.

3. *Valuación de satisfacibilidad*

Def 3: Dada una interpretación de nuestra teoría K, la función $f \in Z_2^{K_1,D}$ tal que $f(E_1(s)\ (X) = 1$ sii s $sat_1 X$, se llamará de satisfacibilidad. (Ver Mendelson 5, p. 51, para noción de "sat_1").

Prop 2: La función de satisfacibilidad es una valuación bien definida.

Dem: Sea E(u) (X) = E(v) (Y) una letra sentencial. Como g(e(u) (X)) = g(e(v) (Y)), e(u) (X) y e(v) (Y) tienen la misma ristra de símbolos; es decir, e(u) (X) = e(v) (Y).

Probaremos primeramente que si e(u) (X) = e(v) (Y), entonces u sat X sii v sat Y. Esto se hará por inducción.

* Sea X una fórmula atómica X $= p_k^n$ $(t_1 \ldots\ldots t_n)$. Obviamente, Y debe ser una fórmula atómica con el mismo símbolo de predicado, que difiera acaso de X por los términos que posee: Y $= p_k^n$ $(t'_1, \ldots\ldots, t'_n)$, pero con la condición de términos calculados: e(u) (t_i) = e(v) (t'_i). Ahora bien: u sat X sii (e(u) (t_1), ... e(u) (t_n)) $\in$ I(p_k^n) sii (e(v) (t'_1), ... e(v) (t'_n)) $\in$ I(p_k^n) sii v sat Y.

* Sea X = ~ A, entonces por la igualdad de expresiones y propiedad (iv) —(7°) de e(s), debe ser Y = ~B; donde obviamente e(u) (A) = e(v) (B). Ahora, por hipótesis inductiva, u sat A sii v sat B, que implica u sat X sii v sat Y.

* Si X =A $\supset$ B, un razonamiento análogo al anterior nos conduce a que Y = C $\supset$ D, con e(u) (A) =e(v) (C) y e(u) (B) = e(v) (D). Luego u sat X sii $\neg$u sat A ó u sat $\bar{B}$ sii $\neg$v sat C ó v sat D sii v sat Y.

* Sea ahora X = (x_i) A. Claro que Y =(x_i) B, donde e(u') (A) = e(v') (B) para todos u', v' tal que π_i(u') = π_i(v'); π_j(u') = π_j(u) y π_j(v') = π_j(v) si j $\neq$ i. Por hipótesis inductiva u' sat A sii v' sat B; pero u sat X sii $\forall$ u', u' sat A (u', v' definidos como antes) sii $\forall$ v', v' sat B sii v sat Y.

Ahora, si E(u) (X) = E(v) (Y) son expresiones cualesquiera de $K_{I,D'}$ entonces e(u) (X) = e(v) (Y), y esto implica por lo anterior u sat X sii v sat Y; es decir, f está bien definida.

Veamos que f es efectivamente una valuación: f(E(s) (X)) = 0 sii $\neg$ s sat X sii s sat ~ X sii f(~E(s) (X)) = 1 f(E(u) (X) $\vee$ E(v) (Y)) = 0 sii f(E(S) (X' $\vee$ Y')) = 0, donde E(u) (X) = E(s) (X') y E(v) (Y) = E(s) (Y') sii $\neg$ s sat X' $\vee$ Y' sii $\neg$ s sat X' y $\neg$ s sat Y' sii f(E(s) (X')) = f(E(s) (Y')) = 0.

Observación: Dados E(u) (X) y E(v) (Y), siempre puede encontrarse una sucesión *s* y expresiones X', Y', de manera que E(u) (X) = E(s) (X') y E(v) (Y) = E(S) (y'). En efecto, sea X = X $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, Y = Y $(x_{j_1} \ldots . x_{j_m})$, donde en ambos casos se han indicado las variables libres. Si u = $(\ldots, a_{i_1} \ldots a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_3} \ldots\ldots a_{i_n}, \ldots\ldots)$ y v = $(\ldots . b_{j_1}, \ldots . b_{j_m}, \ldots .)$tomamos s = $(a_{i_1}, a_{i_2} \ldots a_{i_n}, b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots b_{j_m} \ldots)$; X' = X $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$; Y' = Y $(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+m})$, y se tienen las igualdades buscadas.

4. *Teoremas principales*

Antes que nada tengamos presente la siguiente proposición de carácter trivial:

Prop 3: Sean D,D' dos conjuntos. Si existe $\varphi_0 : D \to D'$, se define $\varphi_1 : \Sigma_D \to \Sigma_{D'}$ por $\varphi_1 (b_1, \ldots\ldots b_n \ldots) = (\varphi_0 (b_1), \ldots,$ $\varphi_0(b_n), \ldots)$ entonces:

(i) φ_0 es suprayectiva sii φ_1 es suprayectiva.

(ii) φ_0 es inyectiva sii φ_1 es inyectiva.

(iii) φ_0 es biyectiva sii φ_1 es biyectiva.

(iv) $\pi_i\varphi_i = \varphi\pi_i \forall_i$; donde π_i es la proyección i-ésima.

Pasemos ahora a demostrar los teoremas.

Teorema 1: Sean (I, D), (I', D') dos interpretaciones de una teoría K, y $K_{I,D}$, $K_{I',D'}$ los respectivos sistemas asociados. Supongamos que existe una aplicación φ_0:D$\to$D', de manera que verifique la propiedad:

(1) $\forall$ término t φ_0 (e_I(s) (t) = $e_{I'}$ φ_1 (s)) (t) entonces la aplicación ϕ_0:$K_{I,D} \to K_{I',D'}$ definida por ϕ_0 (E_I (s) (X), = $E_{I'}$ (φ_1 (s)) (X), es un homomorfismo de sistemas.

Recíprocamente, si ϕ_0 es un homomorfismo de sistemas, se cumple la propiedad (1). Además se tiene:

(a) φ_0 es suprayectiva sii ϕ_0 es suprayectiva.

(b) φ_0 es inyectiva sii ϕ_0 es inyectiva.

(c) φ_0 es biyectiva sii ϕ_0 es biyectiva.

Dem: Veamos que ϕ_0 está bien definida. En efecto, sea E_I (u) (x) = E_I (v) (Y) y supongamos que X está formado por un cierto número de expresiones A_i ligadas sólo por conectivos '$\supset$' y '$\sim$' y tal que $E_I(\cup)$ (A_i) es una letra (en símbolos $X = (A_1, \ldots A_n)$). Es claro que $Y = (B_1, \ldots\ldots B_n)$. Con la misma ubicación de los conectivos, y $E_I(u)$ (A_i) = E_I (v) (B_i). Luego, basta ver que Ω_0 está bien definida para letras.

Sea E_I (u) (X) = E_I (v) (Y) una letra. X tendrá un cierto número de términos calculables, que se indicará simbólicamente por $X = X$ $(t_1, \ldots, t_n)$. Además e_I (u) (X) = e_I (v) (Y).

Por lo tanto, tenemos que $Y = Y$ $(t'_1, \ldots, t'_n)$; y la ristra de símbolos de X es, a menos de términos calculables, la misma que la de Y.

Si $u' = \varphi_1$ (u) y $v' = \varphi_1$ (v), se puede escribir:

$$e_{I'} (u') (X) = e_{I'} (u') (X) (e_{I'} (u') (t_1), \ldots, e_{I'}' (u') (t_n)).$$

$$e_{I'} (v') (Y) = e_{I'} (v') (Y) (e_{I'} (v') (t'_1), \ldots\ldots e_{I'} (v') (t'_n)).$$

Mas por las hipótesis hechas sobre los términos, resulta:

$$e_{I'} (u') (X) = e_{I'} (u') (X) (\varphi_0 (e_I u) (t_1)), \ldots \varphi_0 (e_I(u) (t_n))).$$

$$e_{I'} (v') (Y) = e_{I'} (v') (Y) (\varphi_0(e_I(v) (t'_1)), \ldots \varphi_0(e_I(v) (t'_n))).$$

Como la única diferencia entre X e Y está en los términos calculables y para estos se tiene e_I (u) $(t_i) = e_I$ (v) (t'_i), se deduce que $e_{I'}$ (u') (X) = e_I' (v') (Y); de donde:

$$E_{I'} (\varphi_1 (u)) (X) = E_{I'}(\varphi_1 (v)) (Y)$$

Recíprocamente, supongamos que ϕ_0 es un homomorfismo de sistemas, y X un predicado monádico $X = p^1_i$ (x_1). Sea t un término cualquiera y consideremos $Y = p^1_i$ (t).

Si $b = e_I$ (s) (t) y construimos una sucesión s' cuyo primer término es b, se tiene e_I (s') (X) = e_I (s) (Y); luego, E_I (s') (X) = E_I (s) (Y); y de aquí, por la buena definición de ϕ_0:

$$E_{I'} (\varphi_1 (s')) (X) = E_{I'} (\varphi_1 (s)) (Y)$$

Como consecuencia, la ristra de símbolos

$$I' (p^1_i) (\varphi_0 (b))$$

es la misma que I' (p^1_i) $(e_{I'}$ $(\varphi$ (s)) (t); de donde:

$$\varphi_0 (e_I (s) (t)) = e_{I'} (\varphi_1 (s)) (t)$$

(a) Supongamos que ϕ_0 es suprayectiva. Si $b \notin \varphi_0$ (D) y $X = p^1_i$ (x_1), se puede ver que $E_{I'}$ ((b, ...)) (X) no es imagen de ningún E_I (s) (Y). Esto sucede porque Y debería ser de la forma p^1_i (x_n), para algún $e_{I'}$ (s') (Y) sea igual a $E_{I'}$ (b, ...)) (X).

(b) Sea ϕ_0 inyectiva y supongamos que s,s' son sucesiones de Σ_D tal que $s \neq s'$ y φ_1 (s) = φ_1 (s'). Si s y s' difieren en la i-ésima componente, tomamos en consideración la fórmula $X = p^1_i$ (x_i). Entonces, E_I (s) (X) $\neq$ E_I (s') (X), pero $E_{I'}$ $(\varphi_1$ (s)) (X) = $E_{I'}$ $(\varphi_1$ (s')) (X).

Supongamos, por otro lado, que φ_0 es inyectiva. Entonces, φ_1, también lo es. Para probar que ϕ_0 es inyectiva, basta probarlo para letras.

Si $E_{I'}$ $(\varphi_1 (s)) (X) = E_{I'} (\varphi_1 (s')) (Y)$ es una letra, entonces

$$e_{I'} (\varphi_1 (s)) (X) = e_{I'} (\varphi_1 (s')) (Y)$$

Por ser $\varphi_1 : \Sigma_D \to \varphi_1 (\Sigma_D)$ biyectiva, un razonamiento análogo al hecho para demostrar la buena definición de ϕ_0 nos da $e_I (s) (X) = e_I (s') (Y)$, y de aquí $E_I (s) (X) = E_I (s') (Y)$. C.q.d.

Teorema 2: Sean (I, D), (I' , D') dos interpretaciones de una teoría K, y $K_{I,D}$, $K_{I',D'}$ los respectivos sistemas asociados, de manera que existe una aplicación $\varphi_0 : D \to D'$, y la función $\phi_0 : K_{I,D} \to K_{I',D'}$ definida como en el teorema 1, es un homomorfismo de sistemas.

Si se verifica la propiedad:

(a) s sat$_I$ X sii φ_1 (s) sat$_{I'}$ X; entonces, $\phi_1 : \mathrm{Val}K_{I',D'} \to \mathrm{Val}K_{I,D}$ definida como en Lema 1, envía a la función de satisfacibilidad de $K_{I',D'}$ en la función de satisfacibilidad de $K_{I,D}$

La recíproca también es cierta.

Dem: Supongamos que f es la función de satisfacibilidad $K_{I',D'}$. Probaremos que $\phi_1 (f) = f \bullet \phi_0$ es la función de satisfacibilidad de $K_{I,D}$. Pero teniendo presente la cadena de igualdades: $1 = f (E_{I'} (\varphi_1 (s)) (X)) = f \bullet \phi_0 (E_I (s) (X) = \phi_1 (f) (E_I (s) (X))$ y la propiedad (2), aquello se deduce inmediatamente.

Por otro lado, si ϕ_1 envía la función de sat de $K_{I',D'}$ en la función de sat, de $K_{I,D}$, podemos seguir: s sat$_I$ X sii ϕ_1 (f) $(E(s) (X)) = 1$ sii $f(E_{I'}(\varphi_1 (s)) (X)) = 1$ sii φ_1 (s) sat$_{I'}$ X.

De los dos teoremas anteriores y lema 1, se deducen las siguientes consecuencias:

Corolario 1: Dos interpretaciones (I,D), (I',D') son isomorfas, si y sólo si, existe una función $f_0 : D \to D'$

biyectiva; tal que ϕ_0 (definida como en el teorema 1) es un homomorfismo de sistemas, y f_1 es un homomorfismo que envía función de satisfacibilidad en satisfacibilidad.

Recuérdese que dos interpretaciones se dicen isomorfas sii existe φ_0 biyectiva, y se verifican las propiedades (1) y (2) de los teoremas (ver 5, Cap. II, 11).

(I,D) se dirá una subinterpretación de (I', D'), si y sólo si φ_0 es inyectiva y se verifican las propiedades (1) y (2). De aquí se deduce el

Corolario 2: (I, D) es una subinterpretación de (I', D') sii $\varphi_0 : D \to D'$ es inyectiva, ϕ_0 un homomorfismo y ϕ_1 una función continua y suprayectiva que envía f. de sat. en f. de sat.

5. *Una caracterización para modelos*

Recordemos que una interpretación (I,D) es un modelo, si y sólo si, para toda fbf. de la teoría K que es un teorema de K, toda sucesión $s \in \Sigma_D$ la satisface; en símbolos, $\forall X \in \mathrm{Exp}(K)$ tal que $\vdash_K x$ y $\forall s \in \Sigma_D$, s sat$_I$ X. Esto es, todo teorema de K es verdadero bajo tal interpretación.

Una valuación $f \in \mathrm{Val}K_{I,D}$ se llamará normal sii se verifica $f(E(s) ((x_i) A (x_i))) = 1$ sii para toda $s' \in \Sigma_D$ que difiera de s a lo sumo en la i-ésima coordenada $f(E(s))(A(x_i))) = 1$

Es fácil ver que la función de satisfacibilidad siempre es normal. También es posible probar el siguiente resultado (compare 2, 9-1):

Lema 2: Si $f \in 0$ $\mathrm{Val}K_{I,D}$ es una valuación normal, entonces $f(A) = 1$, para toda $A = E(s) (X)$ tal que X es un teorema de I_1 (la lógica elemental del cálculo de predicados de primer orden).

De estos hechos, sigue inmediatamente el principal resultado de esta sección:

Teorema 3: Una interpretación (I,D) es un modelo, si y sólo si, la función de satisfacibilidad verifica:

$f(E(s)(A)) = 1 \forall s \in \Sigma_D$ y $\forall$ A que sea un axioma propio de la teoría K.

REFERENCIAS

1. Barwise, Jon, ed., *Handbook of mathematical logic,* North-Holland Pub. Co., 2nd printing, 1978.
2. Beth, E. W., "A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel", *Ind. Math.* 13, 436-444, 1951.
3. Kelley, J., *General Topology,* Van Nostrand Co., New York, 1955.
4. Kuratowski, C. *Topologie I,* 2a edición, Varsovia, 1948.
5. Mendelson, E. *Introduction to mathematical logic,* Princeton, 1964.
6. Rasiowa, H.; Sikorski, R., "A proof of the completeness theorem of Gödel", *Fund. Math,* 37, 193-200, 1950.
7. ———, "A proof of the Skolem-Löwenheim theorem", *Fund. Math,* 38, 230-232, 1951.
8. ———, *The mathematics of metamathematics,* 3rd edition, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971.