Esta Revista se publica bajo los auspicios del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela

ERNESTO H. BATTISTELLA

IMPLICACIONES CULTURALES DEL LOGICISMO PLURALISTA

En casi ya un par de décadas, Mehlberg propuso la doctrina denominada "logicismo pluralista", cuya tesis básica está expuesta en estos párrafos:

> The feature of mathematical knowledge which pluralistic logicism emphasizes is the fact that for every mathematical theory there exists *some* logic capable of providing the necesary tools for the derivation of all relevant theorems of this theory any recourse to extralogical "intuition". The circumstance that for every mathematical theory some logic can supply all the tools required by this theory is our main reason for regarding this conception of mathematical knowledge as a version of logicism. We have qualified this logicism as "pluralistic" because it does not confer a monopoly upon, or discriminate against any particular logic.[1]

La idea en la cual Mehlberg funda esta tesis es, como muchas buenas ideas, extraordinariamente simple, *viz.*, la suficiencia de la lógica pura para establecer pertinentes resultados matemáticos está garantizada por el teorema de la deducción, siempre que ésta sea aplicable.

El logicismo pluralista no tuvo, a despecho de su aparente plausibilidad, mayor acogida. Hasta donde nosotros sepamos, esta concepción no ha sido merecedora de análisis serio alguno; un registro de la literatura especializada nos fuerza a concluir que la propuesta de Mehlberg

1. *Vide*, Mehlberg, 1962, pp. 100-101.

cayó en saco roto. Cabría conjeturar, quizá, que para la época cuando se formuló la tesis esta no contaba con adecuado aval de resultados técnicos, lo cual la hizo ingresar en la categoría de un mero barrunto audaz. Consideramos admisible nuestra conjetura por cuanto Mehlberg da cuenta, de forma taxativa, sólo de la extensión del citado teorema a la matemática asociada con un sistema de lógica intuicionista. *Adhuc sub indice lis enst;* no es, empero, la finalidad de esta nota el brujulear los motivos por los cuales la tesis de Mehlberg fue sepultada prematuramente (y sin que lograra, siquiera, honores militares), nuestro intento va enderezado a demostrar, *comptetenu* de resultados hoy a la mano de cualquiera, que el logicismo pluralista es la solución *definitiva* de la controversia sostenida por largos —demasiados— años entre logicistas, formalistas e intuicionistas.

> Instuitionism, like other non-classical logics, has no practical application in mathematics. Nevertheless many authors devote their works to intuitionistic logic. On the other hand, the mathematical mechanism of intuitionistic logic is interesting: it is amazing that vaguely defined philosophical ideas concerning the notion of existence in mathematics have led to the creation of formalized logical systems which, from the mathematical point of view, proved to be equivalent to the theory of lattices of open subsets of topological spaces.[2]

Es hacedero parafrasear, *mutatis mutandis,* lo dicho por estos autores, trocando "lógica intuicionista" por "lógicas no clásicas" —lógica constructiva con negación estricta, lógica modal, lógicas polivalentes. . . Y una vez realizado el parafraseo, aquilataremos cabalmente el admirable *dictum* de Russell: "El progreso de la filosofía consiste en trasladar sus propias cuestiones a dominios técnicos". La función de parafraste —se sabe desde antiguo— no está muy bien vista: preferible es refugiarse —así lo aconseja la sindéresis filosófica— en el ocultamiento de las fuentes; de esta suerte suelen surgir pasajeras originalidades —que se esfuman una vez que un impenitente lector ubica el manual o el número preciso de la

2. *Vide,* Rasiowa & Sikorski, 1963, pp. 8-9.

revista "fusilada". A fuer de simplotes, no nos queda más remedio que abroquelarnos en el oficio de parafraste, maguer las conclusiones extraídas en el párrafo final desborden los límites de la módica tarea que nos hemos fijado. Buena parte, pues, de lo que hagamos en lo sucesivo no serán sino "Feststellugen von Fakton, an denen niemand gezweifelt hat, und die dem Bemerktwerden nur entgehem, weil sie sich ständing vor unsern Augen herumtreiben".[3]

Considérese un lenguaje formalizado L = (A, F), donde A es un alfabeto y F el conjunto de fórmulas sobre A. Un sistema formalizado S —de cero o primer orden— es un par ordenado S = (L, C_L), donde L es un lenguaje formalizado —de cero o primer orden— y C_L una operación de consecuencia en L. Se dispone de varias formulaciones de enfoques algebráicos generales que permiten un tratamiento unificado de una amplia clase de lógicas; tales formulaciones ya han ingresado en los manuales,[4] lo cual nos exime de mayores comentarios.

En los lenguajes formalizados para el cálculo proposicional modal aparece, además de los conectivos que ocurren en los lenguajes formalizados clásicos, el signo I de necesidad. Sea $S_m = (L, C_L)$ un cálculo proposicional modal con los siguientes axiomas propios (a, b, c representan fórmulas arbitrarias del conjunto F):

$$(M_1) \quad ((\mathrm{I}a \cap \mathrm{I}b) = \mathrm{I}\,(a \cap b)),$$

$$(M_2) \quad (\mathrm{I}a \Rightarrow a),$$

$$(M_3) \quad (\mathrm{I}a \Rightarrow \mathrm{II}A).$$

$$(M_4) \quad \mathrm{I}\,(a \cup \neg a)$$

La operación de consecuencia C_L en L está determinada por el conjunto de axiomas y las siguientes reglas de inferencia: *modus ponens* y

3. Cfr. Wittgenstein, 1956, I-141.
4. *Vide*, Rasiowa, 1974, *etiam,* Rieger, 1967.

$$\frac{(a \Rightarrow b)}{(Ia \Rightarrow Ib)}$$

para cualquiera $a, b \,\varepsilon\, F$.

Entenderemos por *lógica modal* L_m la clase de todos los sistemas canónicos coherentes de cálculo proposicional implicativo extensional lógicamente equivalentes a S_m. (La clase de todas las S-álgebras, con $S = L_m$, es la clase de todas las álgebras booleanas topológicas).

El teorema de la deducción se formula del siguiente modo:

Para toda fórmula a en el lenguaje formalizado L de cualquier sistema $S = (L, C_L)$ en L_m y para cada conjunto no vacío J de fórmulas de L, la condición $a \,\varepsilon\, C_L\,(J)$ es equivalente a la condición que existen fórmulas $a_1, \ldots, a_n$ en J tal que

$$((Ia_1 \cap \ldots \cap (Ia_{n-1} \cap Ia_n) \ldots\ldots) \Rightarrow a) \,\varepsilon\, C_L\,(\phi).$$

Sería harto tedioso efectuar el inventario de análogos resultados que están (potencialmente) frente a nuestros ojos. Basta con añadir que para la lógica polivalente L_p existe también un teorema de la deducción formulable con el auxilio del concepto de D-filtro[5].

Digamos, *en passant,* que numerosas lógicas no clásicas —en particular, la modal y la intuicionista— se inspiraron en motivos filosóficos; el desarrollo ulterior las trasladó a dominios técnicos: ¿no es factible ver en ello un progreso de la filosofía, si nos acogemos al *dictum* russelliano?

El breve *excursus* por regiones técnicas nos pone en condiciones de afirmar que una porción nada desdeñable de lógicas no clásicas tienen en su haber el teorema de la deducción, con versiones que, *esentialiter,* son un reflejo del teorema de Herbrand-Tarski. *Ceci dit,* la "posición filosófica" que profese cualquier tendencia con respecto

5. *Vide,* Rasiowa, 1974, p. 344.

a la matemática, carece en absoluto de importancia, al menos en lo atañedero a un punto: si dicha tendencia admite el teorema de la deducción, entonces admite también que la matemática es lógica en un sentido muy preciso: una vez establecida la operación de consecuencia en un sistema, es hacedero derivar la conclusión de un conjunto de premisas sin otros recursos que los proporcionados por la lógica de ese sistema.

Quodam modo, Heyting, una de las más egregias cifras del intuicionismo —la posición más reluctante a admitir que la matemática es lógica—, había antevisto la idea arriba expuesta; estos párrafos así lo trasuntan:

> The good habit of distinguishing between results on recursive functions obtained by intuitionistic logic and those which for their proof need classical logic is abandoned in many recent papers and books. I regret this, because thereby the connection of the theory with the notion of effective calculability is obscured.[6]

Toda exégesis resultaría superflua, ya que lo expresado por Heyting constituye el *hard core* del logicismo pluralista, *ac.,* que cualquiera se halla presto a cobijar las conclusiones que fluyen de su propia operación de consecuencia.

Menester es convenir, *pro inde,* que el logicismo pluralista posee sobrados títulos para conformar un *gentlemen's agreement* que desate el nudo gordiano de una estéril disputa. Los encariñados con las tesis primigenias del logicismo, formalismo e intuicionismo seguirán allegando razones para apuntalarlas; con ello, empero, no hacen sino cambiar de tema; he aquí un ejemplo:

> La lógica intuicionista no tiene la familiaridad, ni la conveniencia, ni la sencillez, ni la belleza de nuestra lógica clásica. Al igual que la de Birkhoff y von Neumann, la lógica intuicionista carece incluso de la transparencia de una lógica funcional multivalorada.[7]

6. *Vide,* Heyting, 1962, p. 196.
7. *Vide,* Quine, 1973, p. 149.

Si esta apología a la lógica clásica se viera como un argumento en pro del logicismo, se estaría cambiando de tema: no es la familiaridad, conveniencia, sencillez o belleza de determinada lógica lo que se discute. El logicismo pluralista, al no otorgar franquicias a lógica alguna, revela el incurable achaque de no pertinencia al tema que padecen los razonamientos basados en la exaltación de cierta lógica.

Paucis verbis: la matemática es lógica, con la lógica que a cada cual le plazca —la complacencia, según se desprende de la cita de Quine, puede fincar en variopintas razones de prosapia, belleza o *sancta simplicitas*—, a condición que la metateoría de esa lógica albergue en su seno una réplica del teorema de Herbrand-Tarski.

Varios problemas filosóficos encuentran así solución técnica definitiva, lo cual viene a patentizar "cuán poco se logra una vez resueltos esos problemas".

Quizá fuimos injustos al catalogar de "estéril" la disputa sostenida entre logicistas, formalistas e intuicionistas; si bien el debate fue infructífero por inconcluyente, ya que ninguna corriente logró aducir argumentos definitivos a su favor, la polémica tuvo una enorme incidencia cultural. Las implicaciones que producirá el logicismo pluralista en el destino de la cultura son aún impredecibles; con todo, nos atrevemos a sugerir algunas.

i) Secado el manantial en el cual abrevó buena parte de la filosofía matemática en lo que va del siglo, es de barruntar que dicha filosofía acudirá a otras fuentes. Algunas de ellas comienzan a avizorarse; citamos, *inter alia,* la "lógica del descubrimiento matemático", desarrollada por Lakatos, y la nueva aproximación a Peano que impulsa Verdiglione y su escuela.

ii) Por más de dos milenios, la lógica bivalente reinó omnímoda; los tímidos intentos por desplazarla de su sitial no lograron ingresar nunca al campo de la cultura. Con el advenimiento del logicismo pluralista, las lógicas "heterodoxas" irrumpirán en la arena cultural

munidas de los mismos títulos —al menos desde una perspectiva teórica— que la lógica tradicional.

iii) Asistimos a los últimos estertores de la tradición aristotélica, la cual estaba ya sólo relegada a la primacía de la lógica bivalente. El logicismo de Russell puede considerarse el postrímero intento por salvaguardar un vestigio de dicha tradición.

iv) La era postaristotélica —cuyo alumbramiento hemos presenciado, quizás inadvertidamente— estará signada, esencialmente, por el relativismo lógico. Hay filosofías por espuertas que impugnan *la* lógica: en rigor, lo que impugnan es la lógica bivalente; muchas de ellas se nos antojan toscos modelos de lógicas multivaloradas (al igual que M. Jourdain, ciertos filósofos hablan en prosa sin saberlo).

v) "Ogni scolastica ama la verita", nos dice Verdiglione (*La peste,* p. 208); el logicismo pluralista representa la antiescolástica, pues no autoriza a lógica alguna a hablar siquiera de *la* verdad (y mucho menos, *va sans dire,* a amarla).

vi) El psicoanálisis —indagación cultural *par excellence*— había anticipado conclusiones análogas a las explicitadas *supra,* bien que sin vincularlas a la coyuntura teórica en la cual nos hemos basado. Tal vez la noción de "logicismo pluralista" ayudará a formalizar algunos valiosos atisbos heurísticos que, hasta el presente, no se han atrevido a romper con el peso desmedido que supone la opinión del tribunal lógico *ad usum (delphini?).*

vii) Cabría argüir que la matemática —el más riguroso *corpus* del razonamiento humano— es bivalente, pues cualquier teoría axiomática es, de suyo, bivalente, ya que en tal teoría un enunciado dado es un teorema o bien no lo es. Análoga situación es válida para una lógica multivalorada con tratamiento axiomático, donde una fórmula dada es tautológica o bien no lo es. Esta presunta objeción carece de sostén: Rescher ha mostrado que toda teoría axiomática es susceptible de ser considerada desde un escorzo multivalorado.[8] Por lo demás, la mera existencia de un metateorema de la deducción asegura a cada lógica la legitimidad de sus conclusiones.

viii) Hemos demostrado en otra oportunidad[9] que con una concepción formalizada del inconsciente —*ex. gr.*, con la (muy vaga) formalización sugerida por Lacan o con la (en extremo precisa) adelantada por Verdiglione y sus discípulos— es factible desarrollar una réplica (por ahora un tanto metafórica) del teorema de Löwenheim-Skolem y formular, por tanto, un símil de la paradoja de Skolem aplicable al inconsciente. En dichas formalizaciones del inconsciente —y otras análogas— no existen obstáculos de bulto para la formulación de una réplica del teorema de Herbrand-Tarski; las ventajas de este instrumental para el desenvolvimiento de una metateoría del inconsciente son palmarias (bastaría con reproducir, *mutatis mutandis*, la incidencia metateórica del resultado de Herbrand-Tarski en las lógicas "heterodoxas").

ix) Aun cuando la idea central que subyace al logicismo pluralista no fuera aplicable *in toto* como concepto regulador formalizado, su carga heurística la convertiría en utilísima herramienta de indagación, bien que por el momento no de validación. (Lo último no constituye objeción mayor: no se ha de poner *rigor* donde lo que se requiere es *vigor*).

x) *Seamos cautelosos al hacer aserciones y críticos al analizarlas. Pero seamos también tolerantes en la admisión de toda lógica cuya metateoría consienta (al menos en principio) una réplica del teorema de Herbrand-Tarski.* Esta es, *sinpliciter*, la versión del "principio de tolerancia" carnapiano en términos de logicismo pluralista.

BIBLIOGRAFIA

Bar-Hillel, Yehoshua, *et al. Logic and Language*, 1962, Dordrecht, D. Reidel

8. *Vide*, Rescher, 1969, pp. 229-231.
9. *Vide*, Battistella, 1980.

Battistella, Ernesto H.: "Un símil de la paradoja de Skolem en la concepción lacaniana del inconsciente", 1980, *Symposium Internacional de Psicoanálisis*, Caracas, noviembre de 1980.

Heyting, Arend: *"After thirty years"*, en Nagel, *et al.*, 1962.

Mehlberg, Henryk: "The present situation in the philosophy of mathematic", en Bar-Hillel, *et al.*, 1962.

Nagel, Ernest, *et al.*: *Logic, methodology and philosophy of science*, Standford, Standford University Press. 1962.

Rasiowa, Helena & Sikorski, Reinan: *The mathematics of metamathematics*, Varsovia, PWN. 1963.