EPISTEME NS, Vol. 24, Nº 1, 2004, pp. 33–51

JORGE NIKOLIC

LA INVARIANCIA COMO CRITERIO DE SIGNIFICATIVIDAD EN LOS LENGUAJES FORMALES*

Resumen: En este trabajo se muestra la relación entre particiones, relaciones de equivalencia e *invariancia* mediante un sencillo teorema, gracias al cual se argumenta que en un discurso formal la *invariancia* establece criterios objetivos para saber de qué se está hablando, impone limitaciones sobre lo que podemos decir y además establece cuáles son las propiedades y conceptos significativos. Con lo anterior se justifica la presentación grupológica de Klein de las geometrías y de las teorías físicas.

Palabras clave: Grupo, invariancia, significado.

INVARIANCE AS A CRITERION FOR MEANINGFULNESS IN A FORMAL LENGUAGES

Abstract: In this work we show the relationship between partitions in terms of equivalence and invariance by means of a simple theorem which helps to argue that in a formal discourse the invariance establishes objective criteria to know what is being talked about, imposes constraints in what we can say and establishes what are the properties and meaningful concepts. In this way we justify the Klein's grupological performance of geometry and physics theory

Key words: Group, invariance, meaning.

*Recibido: 24 –10 –2003 ☼ Aceptado: 11 –11 –2003

1. Clasificación, relaciones de equivalencia e invariancia

A continuación se tratarán los siguientes conceptos: clasificación, relación de equivalencia, e *invariancia*, y las relaciones entre ellos. Clasificar un conjunto dado es dar una partición del conjunto, es decir, es dar una colección de subconjuntos disjuntos del conjunto dado, cuya unión es el conjunto dado. De manera equivalente, sea I un conjunto de índices, no necesariamente numerable; P = $\{A_i | i$ está en I$\}$ es una partición del conjunto *A* si se cumple:

P1. – Si i = j, índices de I, entonces la intersección de A_i y A_j es $A_i = A_j$

P2. – Si i ≠ j, índices de I, entonces la intersección de A_i y A_j es el conjunto vacío.

P3. – La unión de todos los A_i en P es *A*.

Los índices que pertenecen a la misma clase de una partición son *indistinguibles*, es decir, que la relación binaria que los define, digamos R, ha de tener las mismas propiedades que la identidad: reflexiva, simétrica y transitiva. A dicha relación la denominamos relación de equivalencia en *A*. Formalmente, una relación de equivalencia R en un conjunto *A*, es una relación binaria en *A* que cumple con:

E1. – R es reflexiva en *A* $\stackrel{\text{def}}{=}$ para todo x de *A*, xRx.

E2. – R es simétrica en *A* $\stackrel{\text{def}}{=}$ para todo x, y de *A*, si xRy, entonces yRx.

E3. – R es transitiva en *A* $\stackrel{\text{def}}{=}$ para todo x, y, z de *A*, si xRy, yRz, entonces xRz.

La relación fundamental entre particiones y relaciones de equivalencia la da el siguiente teorema – elemental y conocido–.

Toda partición de un conjunto define en él una única relación de equivalencia, y recíprocamente, toda relación de equivalencia en un conjunto, define en él una única partición.

Si R es una relación de equivalencia en *A*, la familia de conjuntos

$$B(a) = \{x \mid xRa, \text{ a está en } A\},$$

es una partición de *A*. Al conjunto de las clases de equivalencia B(a) se le denomina conjunto cociente, y se le denota por A/R, es decir, $A/R = \{B(a) \mid \text{a está en } A\}$.

El término *invariancia* está históricamente asociado al cambio y a la interacción. En general, en una determinada parcela del mundo donde hay cambios, o en un determinado contexto donde ellos se describen, se afirma la *invariancia* de algo o de una propiedad cuando ésta permanece, no varía, y se la denomina *invariante*. Luego, se es invariante con respecto, o relativamente a, algún(os) cambio(s). Los matemáticos y en especial los físicos –y todo el que trabaje con matemáticas aplicadas–, caracterizan los cambios mediante conjuntos de funciones (al menos una). Definen un sistema por un conjunto de funciones, y el estado del sistema para un(os) determinado(s) valor(es) de parámetro(s) *significativo(s)* (que pertenece(n) al dominio común de las funciones que definen al sistema), como la sucesión ordenada de las imágenes de dichas funciones que corresponden al respectivo parámetro. Ejemplos sobran, en la mecánica clásica euleriana (en tres dimensiones) el sistema está definido por seis funciones escalares, las tres primeras caracterizan a las coordenadas de un punto móvil, y las tres últimas son las componentes del momento lineal (o de la velocidad), todas ellas dependen de un parámetro unidimensional que los físicos interpretan como la metrización temporal. La condición matemática más simple de la existencia del cambio local es la no anulación de la derivada de alguna de las funciones del sistema para algún parámetro del dominio común. De allí la importancia en matemáticas aplicadas de la derivada y sus generalizaciones, por ejemplo: el gradiente, la divergencia, el rotor, el laplaciano, y la matriz jacobiana, por decir algunas. Evidentemente, una función es un conjunto de pares ordenados dados extensionalmente por una tabla, o intensionalmente por una expresión algorítmica; la función es una entidad platónica atemporal, es una clase. Pero los físicos interpretan –mejor sería decir: imaginan– que los valores del dominio y los del recorrido *cambian*, y cuando *cambian* los valores del dominio, entonces *cambian* los del recorrido, ya que éstos dependen de los valores de aquéllos. Volviendo al caso anterior de la mecánica euleriana, los físicos afirman que cuando *cambia* el parámetro *tiempo* del dominio, *cambian* las coordenadas de la posición y las componentes del momento lineal. Una *ficción* útil, una *imaginería* inocente con respecto a la definición de función, sintácticamente y semánticamente la misma función definida en matemáticas, a la cual se le agrega la *ficción* útil del cambio. Si se quiere, es una de las recetas que conectan su lenguaje con alguna(s) parcela(s) del mundo del que supuestamente tratan de dar cuenta, es una regla semántica adicional. Por ello, los físicos hablan de la velocidad del cambio de la masa con respecto al volumen, y los economistas de la rapidez del cambio de los ingresos con respecto a la producción; los ejemplos –repito–, están exhibidos en cualquier texto dedicado a una disciplina matematizada con el cálculo clásico. Lo anterior nos indica que una definición de *invariancia* o de propiedad invariante ha de estar relativizada a una función o a un conjunto de funciones. A continuación vamos por una primera definición de *invariancia* y su relación con las clasificaciones y relaciones de equivalencia en un conjunto *A*. Sean *A* un conjunto, R una relación n –aria definida en *A* (es decir, R es un subconjunto del producto cartesiano de A por sí mismo n veces, donde n es un número natural), f una función de *A* en *A*, y *F(A)* una colección de funciones de *A* en *A*.

i. – R es invariante respecto a f $\overset{\text{def}}{=}$ para todo $x_1, x_2, \ldots x_n$ de A

si $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $R(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$

ii. – R es invariante respecto a *F*(*A*) $\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ para todo $x_1,x_2,...,x_n$ de A y todo f de *F*, si $R(x_1,x_2,...,x_n)$, entonces $R(f(x_1), f(x_2),...,f(x_n))$

Si deseamos que en el *definiens* se dé el recíproco, tenemos que exigir que f tenga inversa, es decir, que sea biyectiva. Si imponemos esa condición a todas las funciones de *F(A)*, además de la propiedad de clausura respecto a la composición de funciones, *F(A)* es entonces un grupo, y las definiciones (i) y (ii) se reescriben:

iii. –R es invariante respecto a f $\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ para todo $x_1,x_2,...,x_n$ de A

$$R\ (x_1,x_2,...,x_n) \text{ si, y sólo si } R\ (f(x_1),f(x_2),...,f(x_n))$$

iv. –R es invariante respexto a *F(A)* $\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ para todo $x_1,x_2,...,x_n$ de *A* y todo f de *F*

$$R\ (x_1,x_2,...,x_n) \text{ si, y sólo si } R\ (f(x_1),f(x_2),...,f(x_n))$$

Si R es una relación binaria en *A*, por lo general escribimos xRy en vez de R(x,y); con esta notación parafraseamos (iii) y (iv) para relaciones binarias:

v. – R es invariante respecto a f $\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ para todo x, y de *A*

$$xRy \text{ si, y sólo si } f(x)Rf(y)$$

vi. –R es invariante respecto a *F(A)* $\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ para todo x, y de *A*, y todo f de *F*

$$xRy \text{ si, y sólo si } f(x)Rf(y)$$

Las definiciones (v) y (vi) valen para relaciones de equivalencia en *A* invariantes respecto a f o *F*. Veamos a continuación la relación existente entre relaciones de equivalencia e *invariancia*. Supongamos que R es una relación de equivalencia en *A*, la cual define una única partición de A mediante la familia de conjuntos:

$$B(a) = \{x|x\ Ra,\ a \text{ está en } A\},$$

recordando que si b está en B(a), entonces B(a) = B(b), para todo b de B(a).

Denotemos por *F(a)* al conjunto de todas las funciones biyectivas de B(a) en B(a); evidentemente si b$\in$ B(a), entonces F*(a)* = *F(b)*, para todo b de B(a). Y denotemos por F al conjunto de todas las funciones de *A* en *A* definidas de manera tal que la restricción de cualquiera de ellas B(x) (x está en *A)* es igual a alguna función de *F(x)*. Luego F forma grupo, y R es invariante respecto a *F.* Como aRb si, y sólo si B(a) = B (b), entonces g es una función biyectiva que está en *F(a)* = *F(b)* si, y sólo si, g(a) está en B(a) y g(b) está en B(b) = B(a), lo cual equivale a afirmar que g(a) Rg(b). Y como g es la restricción de alguna función de *F* al conjunto B(a), obtenemos que R es invariante respecto a *F.*

Acabamos de demostrar la relación más importante entre relaciones de equivalencia e *invariancia*:

Teorema 1. – Para toda relación de equivalencia en un conjunto dado *A*, *existe* un grupo de transformaciones *F(A)* de *A* en *A*, respecto al cual la relación de equivalencia es invariante.

Pero si una relación binaria en un conjunto *A* es invariante respecto a una función de *A* en *A*, o respecto a un grupo de funciones de *A* en *A*, la relación no tiene necesariamente que ser una relación de equivalencia.

Un contraejemplo sencillo es el siguiente: sea A el conjunto de los números naturales con la relación binaria *estrictamente menor* que denotamos por $<$, y sea f la función de A en A definida por: f(x) = 2x, para todo x de A. Evidentemente $<$ es invariante respecto a f, ya que,

$$x < y \text{ si, y sólo si } 2x < 2y,$$

pero $<$ no es una relación de equivalencia, ya que no es reflexiva ni simétrica, a pesar de ser transitiva.

Gracias a la equivalencia entre particiones y relaciones de equivalencia, podemos reescribir el teorema 1 de la siguiente manera:

Teorema 2. –Para toda partición de un conjunto A, *existe* un grupo de transformaciones *F(A)* de A en A, respecto al cual la partición es invariante.

Luego, la moraleja es evidente: los grupos de transformaciones definidos en un conjunto *ayudan* a encontrar clasificaciones, de allí la importancia de la teoría de grupos en las mal llamadas matemática *pura* y *aplicada*. Lo divertido del asunto radica no en su importancia matemática, sino en su importancia filosófica, no en balde Lagrange llamó –con poco tino– a la teoría de grupos "la metafísica del álgebra", quizás percibiendo lo que hemos discutido pero sin poderlo expresar[1]. De cualquier manera, lo anterior apunta a una jerarquía de niveles en la propia matemática, que posiblemente sea *modélica*, reconstruyendo la matemática desde las *estructuras* más generales a las más complejas, lo que hacen los bourbakistas.

Un procedimiento general para encontrar la partición del conjunto *A* a partir de un grupo de transformaciones *F(A)*, puede ser el siguiente: encontrar los subconjuntos invariantes de A con respecto a *F(A)*, los A_i incluidos en *A* tales que $f(A_i) = A_i$, para todo f de *F(A)*; entonces los A_i definirán la partición.

Podríamos con las ideas sugeridas anteriormente –relativas a la *invariancia*– reconstruir gran parte de la matemática –el proyecto de Felix Klein–, pero lo que nos interesa son los aspectos filosóficos atinentes a la *invariancia*.

La *invariancia* subsume las clasificaciones y las relaciones de equivalencia, no dándose en general lo recíproco.

Hacer clasificaciones equivale a dar las propiedades definitorias de cada subclase de la partición que define a la clasificación. Siendo esas propiedades invariantes respecto a algún

1 En vez de usar la expresión *metafísica del álgebra* sería preferible usar *ontología del álgebra*, consistente en las entidades y *clases* de entidades que dice el álgebra que existen.

grupo de transformaciones, o de una función al menos. Por ello, cuando un especialista trabaja con los individuos de una determinada clase definida por ciertas propiedades, afirma que la propiedad es invariante para los individuos de esa clase. Veamos un ejemplo. Al equipo de especialistas que buscan una vacuna para un determinado tipo de virus, le es indiferente trabajar con una cepa u otra, siempre y cuando dichas cepas tengan las mismas características, dentro de ciertos límites, pudiéndose predicar lo mismo de todas ellas. Se presenta una regularidad o pauta, que se caracteriza en el lenguaje mediante predicados que llamamos leyes. Si las regularidades se preservan al transcurrir el tiempo, las propiedades asociadas a dichas regularidades serán invariantes respecto a ciertas transformaciones, y además de ser definitorias, caracterizan a una subclase en el conjunto de todos los tipos de virus.

Las propiedades que son invariantes respecto a determinadas transformaciones y que interpretan o están asociadas a regularidades de ciertas parcelas del mundo, son las *significativas*, las que toman en cuenta y estudian los científicos.

El estudio del *significado* de un término, o de un *item* de información, está asociado a la regularidad temporal de su uso, lo cual implica la permanencia o *invariancia* temporal de las propiedades definitorias de dicho término o *items* –en el lenguaje que las contiene–, respecto a ciertas transformaciones. Lo anterior nos induce a pensar que una manera de tratar el problema del significado es a través de la *invariancia*. Más aún, podríamos intentar mostrar que la noción semántica subyacente a los términos y a los items de información es la de *invariancia*, y no la de significado.

Pero los sistemas en los que está definida una sola relación, por ejemplo, la de equivalencia, son sistemas pobres, no hay mucho que decir de ellos, y es poco lo que podemos influir con su ayuda salvo, desde luego, clasificar. Por ello tenemos que ampliar el estudio de la *invariancia* a otros sistemas más complejos, con más relaciones y funciones. Lo cual es posible ya que la *invariancia* subsume la clasificación, tanto que gracias a ella es posible clasificar, es decir, ella induce un *metamétodo* para clasificar. Además, está asociada a criterios de objetividad, ya que la *invariancia* describe o enuncia propiedades de propiedades básicas de un discurso determinado, y norma acerca de las propiedades básicas a buscar en el discurso, es decir, las *significativas*. También norma acerca de las propiedades a ser introducidas en un discurso –teoría–, cuando se esté construyendo. Resumiendo, la invariancia es una metapropiedad semántica, asociada a criterios de objetividad tanto en contextos de justificación y explicación, como de descubrimiento. Luego tenemos tres conclusiones filosóficas relativas a la *invariancia*.

I1.– La *invariancia* es una propiedad semántica, predica acerca de propiedades.

I2.– La *invariancia* establece criterios objetivos para ponernos de acuerdo acerca de lo que estamos hablando, en dos aspectos: metateórico y normativo:
Metateórico debido a que la *invariancia* enuncia propiedades de propiedades básicas del discurso.
Normativo ya que la *invariancia* prescribe acerca de las propiedades deseables.

I3.– La *invariancia* induce un *metamétodo* para buscar las propiedades *significativas* dentro de un discurso ya construido, así como aquellas a ser introducidas en el discurso que se está construyendo.

I4.– La *invariancia* impone limitaciones a lo que podemos decir en un discurso –lenguaje, teoría–, es decir, de ella se derivan criterios de admisibilidad acerca de lo que podemos hablar en un discurso determinado.

Tenemos que acotar que no todas las propiedades de un discurso son invariantes respecto a un grupo de transformaciones: existen expresiones bien formadas en el discurso que no son invariantes, que sirven par *conectar* sintáctica y semánticamente las propiedades invariantes del discurso. Las propiedades invariantes en un discurso son las únicas *signifi-*

cativas del discurso, son las que definen lo que dice el discurso. Formalmente: no todas las fórmulas bien formadas en una demostración – en un modelo o teoría – son invariantes; sólo las invariantes caracterizan el discurso.

2. *La invariancia, significatividad y el programa de Felix Klein*

Según los registros históricos, el primer texto *formal* de matemáticas es el conocido por el nombre *Los Elementos de Euclídes* (h. 300 a.C.). En los *Elementos* se presentó la geometría de manera axiomática con todos sus defectos conocidos, la mayoría de los cuales han sido superados a finales del siglo XIX y en el siglo XX. Dicho texto fue y sigue siendo el gran canon de racionalidad de la cultura occidental, no sólo en matemática sino también en filosofía, lógica, física y en cualquier disciplina académica considerada como un conjunto de *creencias racionales*. Recordemos algunos problemas clásicos. En filosofía, los problemas relativos a los *universales*, las formas eternas platónicas. En lógica, lo concerniente a los sistemas deductivos, sus alcances y, en especial, sus limitaciones. En la física, todos los lenguajes que dan cuenta de *cambios* reposan sobre algún tipo de geometría. Piense el lector por un momento cuál habría sido el destino de Occidente y del mundo si el canon de racionalidad filosófico y científico hubiera sido la *Biblia*. En los *Elementos* se privilegió tanto la geometría que la *Aritmética* fue presentada mediante modelos geométricos. La fundamentación geométrica de los números reales de Dedekind (1858) es de Eudoxo (360 a.C.), y la fundamentación de los números reales vía sucesiones de Cauchy está contenida en los trabajos de Arquímedes (300 a.C.). Lo mismo podemos decir de todos los algoritmos elementales de la *Aritmética*, en especial el de la división. Todo ello a pesar de que al griego le faltó una representación numérica adecuada de los números que trabajó geométricamente, por ejemplo la fracción decimal.

Quizás el más divulgado de los problemas planteados y resueltos en los *Elementos*, es el relativo a la *congruencia* de figuras planas, en especial de triángulos. Recordemos que las *figuras congruentes* son *indistinguibles* con respecto a sus propiedades geométricas. Lo cual equivale a afirmar que la *congruencia* es una *relación de equivalencia* y, por lo tanto, induce una *clasificación*. La *congruencia* puede introducirse en un sistema axiomático con o sin una función denominada *métrica* o *distancia*. A la presentación axiomática de la geometría euclídea en la cual se introduce la *congruencia* sin la *distancia* se la denomina geometría euclídea en presentación *sintética*; la congruencia se introduce mediante axiomas donde uno de ellos afirma que la *congruencia* es una *relación de equivalencia*. A la presentación axiomática de la geometría euclídea donde se introduce la *congruencia* mediante la *distancia* la llaman geometría euclídea en presentación *métrica*; en esta presentación la *congruencia* se introduce vía definición, donde la *congruencia* de dos segmentos se da si son iguales sus longitudes, las cuales se definen mediante la función *distancia* o *métrica*; luego, con la definición métrica de *congruencia* se demuestra que ésta es una *relación de equivalencia*. En ambas presentaciones axiomáticas la *congruencia* es una *relación de equivalencia*, y en cualquier otra presentación axiomática también será una relación de equivalencia.

Hemos llegado al punto que nos interesa, ya que el teorema 1 (o el 2) nos dice que existe un grupo de transformaciones que dejan invariantes a las propiedades que definen la *relación de equivalencia*, que en nuestro caso es la *congruencia*.

Y si dicho grupo de transformaciones deja invariante a la relación de congruencia, también la distancia será invariante respecto al mismo grupo y recíprocamente. Históricamente, lo que acabamos de decir motivó otra presentación equivalente de la geometría euclídea, la relativa al grupo de transformaciones que se denominan indistintamente movimientos rígidos o isometrías; la designación, a pesar del lastre físico, tiene sentido, y su introducción discurriría genéticamente más o menos así: al *mover* un segmento, éste no varía su longitud: el segmento *antes* de *moverse* y *después* de hacerlo mantiene su longitud, es decir, la distancia entre los puntos extremos del segmento es invariante, ya que el segmento ni se *estiró* ni se *encogió*. Salta a la vista que en tal descripción usamos los adverbios temporales *antes, después*, y los verbos *mover, estirar, encoger*, aunque la geometría no trata con estos vocablos. Tal procedimiento nos permite asociar aplicaciones exitosas e intuitivas a las transformaciones buscadas, siendo también de mucho provecho en el contexto genético de la formación de conceptos. Dicha presentación de la geometría euclídea se denomina grupológica de los movimientos rígidos o isometrías. Este tipo de presentación se inició con el trabajo clásico de Felix Klein: *El Programa de Erlangen* (1872). El problema que se presenta ahora es el de encontrar o caracterizar las isometrías. Se demuestra que las únicas posibles son: las rotaciones, las reflexiones, las traslaciones y la composición de las anteriores. Con el advenimiento de la representación decimal y las contribuciones de Vieta a la notación algebraica, el desarrollo y aplicación de los algoritmos tuvo un auge extraordinario, tanto que la corriente matemática se movió en la dirección de la aritmetización, hasta culminar en el programa de Weierstrass.

La aritmetización de la geometría consiste en traducir los objetos geométricos y sus propiedades a conjuntos de números y ecuaciones, de manera tal que las representaciones no dependan de los sistemas referenciales; por ejemplo: un punto en el plano se representa numéricamente por un par ordenado de números reales, una circunferencia se representa por medio de un conjunto de pares ordenados de números reales, cuyas primeras y segundas coordenadas están relacionadas entre sí por medio de un algoritmo algebraico en forma de ecuación. Encontrar el punto de corte de dos rectas en un plano equivale a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este tipo de presentación de la geometría es conocida como *Geometría Analítica*, y las razones de su existencia son:

a.– *Topológica* : los números reales y los puntos de la recta son *homeomorfos* (*biyectividad*, *ordenación* y *bicontinuidad*).

b.– *Algebraica:* los números reales y los puntos de la recta con respecto a las operaciones de: suma, resta, multiplicación y división son *isomorfos*.

c.– El *isomorfismo* coincide con el *homeomorfismo*.

Pero asignar coordenadas a un punto equivale a postular un *sistema referencial*, no hay otra manera de hacerlo; además, el punto lo podemos representar en infinitos sistemas referenciales; dicho de otro modo, el mismo punto admite infinitas representaciones, una para cada referencial. Un segmento queda definido por sus dos puntos extremos que también admitirán infinitas representaciones, una para cada referencial. Luego, al tratar la congruencia, se nos presentan dos problemas:

i.– ¿Que relación hay entre todos los referenciales para los cuales la distancia entre los dos puntos extremos de un segmento permanece igual?; de modo equivalente: ¿qué relación existe entre los referenciales en que se puede expresar la congruencia?

ii.– ¿Cuál es la representación numérica de las transformaciones relativas a un referencial que transforman un segmento en otro congruente a él ?; de otro modo, ¿cuál es la representación numérica de las isometrías?

La asociación física en ambos casos es sencilla: en (a) se *mueven* los referenciales, pero los puntos, segmentos y figuras, están quietos; en (b) se *mueven* los puntos, los segmentos y las figuras, y el referencial está *quieto*.

Lo anterior, en especial (a), nos dice que las definiciones y propiedades que introducimos en el lenguaje de la *geometría* han de ser invariantes bajo cambios de referenciales, es decir, no puedo introducir ni las definiciones ni las propiedades que se me antojen. A las transformaciones que *cambian* referenciales se les llama *pasivas* o *alias*, y a las que *actúan* en un referencial dado *activas* o *alibi*.

Elijamos un sistema referencial ortonormal **S** en un plano, y dos puntos del plano, con representaciones relativas a *S:* (x_1,y_1), (x_2,y_2); y representamos – gracias al teorema de Pitágoras –, la distancia entre esos dos puntos mediante la expresión:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Veamos, de acuerdo a lo que acabamos de decir, la relación entre las transformaciones activas y pasivas.

Interpretación pasiva: Sean $(x_1`,y_1`)$, $(x_2`,y_2`)$ las representaciones de los mismos dos puntos dados anteriormente con respecto a otro sistema ortonormal $S`$. Esperamos que

$$\text{(P)}\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2}$$

Interpretación activa: Tomemos otra vez los mismos dos puntos con representaciones relativas a **S**, y les aplicamos una isometría, obteniendo las representaciones relativas a **S** de los puntos transformados (x''_1, y''_1), (x''_2, y''_2). Esperamos obtener

$$\text{(A)}\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x''_2-x''_1)^2+(y''_2-y''_1)^2}$$

De (P) y de (A) obtenemos:

$$\sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2}=\sqrt{(x''_2-x''_1)^2+(y''_2-y''_1)^2}$$

Lo anterior sugiere que el grupo que transforma referenciales ortonormales en referenciales ortonormales en los cuales se preserva la manera de calcular la distancia entre dos puntos no es distinguible sintácticamente del grupo de isometrías relativas a un referencial ortonormal – lo cual es cierto; por ello a cada transformación de este tipo hay que agregarle la etiqueta de *pasiva* o *activa* para saber a qué atenernos. Ya que tanto las representaciones *pasivas* como las *activas* dependen de las bases de los referenciales asociados a sus dominios y recorridos, es importante elegir referenciales adecuados, que definan representaciones *simples*, con los cuales los cálculos a realizar sean pocos y no complicados. Luego, de la invariancia se derivan criterios de sencillez y de economía. Ésta es una de las razones que induce a los matemáticos y físicos a estudiar las relaciones entre los sistemas referenciales – el objetivo del cálculo tensorial. Los operadores clásicos del cálculo diferencial, que han sido usados en la física de modo prolífico y sin los cuales su desarrollo no hubiera alcanzado los niveles hoy conocidos, son el gradiente, la divergencia, el laplaciano y el rotor. Sin ellos no existirían las ecuaciones de Maxwell. Antes de continuar, recordemos las definiciones de esos operadores.

Si $f(x_1,x_2,...,x_n)$ es una función escalar, denotamos con $D_k f$ la derivada parcial de f con respecto a la coordenada k –ésima donde k puede tomar cualquier valor natural entre 1 y n inclusive. Con $D_{kk} f$ denotamos la derivada parcial segunda respecto a la coordenada k –ésima. Con estas notaciones definimos los operadores antes mencionados:

Gradiente.– Sea $f(x, y, z)$ una función escalar diferenciable.

gradiente (f)= $(D_1 f, D_2 f, D_3 f)$, un vector.

Divergencia.– Sea *f* $(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x,y,z))$ una función vectorial definida por tres funciones escalares componentes, diferenciables.

divergencia *(f)*= $D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3$, un escalar.

Laplaciano.– Sea f (x,y,z) una función escalar dos veces diferenciable.

laplaciano (f) = divergencia (gradiente (f)) = $D_{11}f+D_{22}f+D_{33}f$, un escalar.

Rotor:– Sea f(x, y, z) = (f_1 (x, y, z), f_2 (x, y, z), f_3(x, y, z)) una función vectorial definida por tres funciones escalares componentes f1,f2,f3, diferenciables.

rotor (f) = (D_2f_3 –D_3f_2 , D_3f_1 –D_1f_3 , D_1f_2 – D_2f_1), un pseudovector, ya que cambia su sentido cuando cambia la orientación del espacio.

Recordemos que la derivada de una función es para un matemático la mejor aproximación lineal local de la función; para un físico también, pero con ella éste interpreta el *cambio local*, el cual caracteriza mediante invariantes. La respuesta a la pregunta ¿por qué esos operadores y no otros?, la dan los siguientes teoremas.

a.– Como combinación lineal con coeficientes constantes (los mismos en cualquier sistema de coordenadas cartesianas ortogonales) de los componentes u_i de un vector cualquiera, no se pueden formar más vectores que los de componentes λu_i (λ escalar) , i = 1, 2. 3.

b.– Sea f(x, y, z) una función escalar diferenciable. Los únicos vectores cuyas componentes son combinaciones lineales con coeficientes constantes (los mismos en cualquier sistema de coordenadas cartesianas ortogonales) de las derivadas parciales de un escalar f, son los múltiplos del gradiente.

c.– Sea f = (f_1, f_2, f_3) una función vectorial diferenciable. Como combinación lineal con coeficientes constantes (los mismos en cualquier sistema de coordenadas cartesianas ortogonales) de las derivadas parciales Djfi de las componentes fi de un vector f, el *único invariante* que se puede formar, salvo un factor constante, es la divergencia.

d.– Sea f(x, y, z) una función escalar dos veces diferenciable. Como combinación lineal con coeficientes constantes (los mismos en cualquier sistema de coordenadas cartesianas ortogonales) de las derivadas segundas de una función escalar f, el *único invariante* que se puede formar, salvo un factor constante, es el laplaciano.

e.– No existe ningún vector cuyas componentes estén formadas por combinaciones lineales con coeficientes constantes (las mismas en cualquier sistema de coordenadas cartesianas ortogonales) de las primeras derivadas parciales de las componentes f_i de un vector $f = (f_1, f_2, f_3)$.

En cambio, existe, en las mismas condiciones, un pseudovector, que es el rotor *(f)*, el cual es único salvo un factor constante.

Con ello, la respuesta a la última pregunta es evidente: porque tales operadores son invariantes con respecto a diferentes sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales. Luego, las operaciones y los operadores que se introduzcan no pueden depender de algún sistema referencial ortogonal, ya que han de ser *invariantes*. Lo cual nos dice que no se puede introducir *lo que se quiera*.

Algún matemático *original* puede proponer, partiendo de las derivadas parciales D_1f, D_2f y D_3f calculadas a partir de una función escalar f, definir un nuevo operador, al cual llamará *banana*, de la siguiente manera:

$$\text{banana}(f) = (D_3f - D_1f,\ 2D_1f - 3D_2f + D_3f,\ D_1f + D_2f)$$

y puede argüir que es un vector de tres componentes bien definidos. Pero lo que acaba de definir nuestro *genial* matemático no es un vector, ya que no es invariante con respecto a diferentes sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales. Por ello tampoco dicha definición es *significativa*, por no ser invariante, y no será tomada en cuenta por los matemáticos. La conclusión filosófica es evidente: la invariancia no sólo impone limitaciones al lenguaje, sino que también nos dice acerca de qué hablar en dicho lenguaje, de lo único que es *significativo* para ese lenguaje –al menos en la matemática y en la física–, además de funcionar como guía en dos contextos: el de descubrimiento y el de justificación. Dos preguntas y una respuesta guía: ¿qué buscar? –invariantes–, ¿qué propiedades justificar? –las invariantes–.

Lo anterior motivó al matemático alemán Felix Klein (1849 –1925) a dar una definición de geometría, lo cual hizo en su publicación de 1872 conocida como *"El programa de Erlangen"*. Una geometría según Klein es un sistema <S,T> compuesto por un espacio S y un grupo de transformaciones T del espacio S sobre sí mismo. La geometría de Klein <S,T> estudia sólo aquellas propiedades de una *figura* que son *invariantes* bajo cualquier transformación del grupo T (donde *figura* denota cualquier subconjunto de S). Klein extendió la aplicabilidad de la invariancia a las teorías físicas. En 1912 escribió "lo que los físicos modernos denominan *teoría de la relatividad* es la teoría de los invariantes de un continuo espaciotemporal de cuatro dimensiones (el espacio de Minkowski) con respecto a un grupo dado de colineaciones (el grupo de Lorentz) y, por lo tanto, es una geometría".

Hoy día la definición de geometría de Klein no es aceptada por algunos matemáticos por ser demasiado restrictiva, y por otros demasiado general, a pesar de que todos ellos usen profusamente la noción de *invariancia*. Que la propuesta de Klein no defina *geometría* es obvio, ya que el problema de encontrar tal definición –en caso de existir– pertenece al campo de la filosofía de la matemática y no a la matemática. Pero la propuesta de Klein fue y sigue siendo exitosa en los siguientes aspectos:

i.– Permite clasificar de manera objetiva los diferentes tipos particulares de geometría o las diferentes estructuras matemáticas, sin apelar a juicios de autoridad o a costumbres curriculares. Por ejemplo, si deseamos saber si determinada propiedad pertenece a la geometría *proyectiva* o a la geometría *métrica*, investigamos si dicha propiedad es invariante bajo el grupo de las transformaciones proyectivas o el grupo de las transformaciones métricas. Si la propiedad es invariante bajo ambos grupos, entonces una de las dos geometrías subsume a la otra, o se solapan; en nuestro caso la geométrica proyectiva subsume a la geometría métrica. El que podamos clasificar las geometrías particulares no debe asombrarnos, basta recordar el teorema 1 (ó 2).

ii.– Nos dice qué buscar en los discursos y cómo construirlos mediante las propiedades invariantes y las transformaciones asociadas. Todas las teorías físicas relativistas fueron construidas de esta manera.

iii.– Nos dice qué definir y axiomatizar en un discurso: propiedades invariantes y sus transformaciones asociadas.

iv.– Lo *significativo* de un discurso es *invariante* y recíprocamente.

Instituto de Filosofía
Universidad Central de Venezuela
e-mail: georgenikolic@hotmail.com