EPISTEME NS, Vol. 16, N^{os} 1-3, 1996, pp. 127-128

NOTAS Y DISCUSIONES

ERNESTO BATTISTELLA

APOSTILLA SOBRE EL AXIOMA DE ELECCIÓN

Multitud de teoremas fundamentales del análisis, el álgebra y la topología tornan inevitable el empleo del axioma de elección. El propósito de este papel de trabajo es presentar un ejemplo detallado de esta situación. El ejemplo está extraído de la topología elemental. Se utilizará la siguiente forma del axioma precitado:

Para cualquier familia A de conjuntos no vacíos, existe una función F de dominio A tal que $F(x) \in x$ para todo $x \in A$.

Examinemos ahora la siguiente equivalencia: sea f: $(X, d_x) \to (Y, d_y)$; $\{x_n\}$ una sucesión de X y $x_o \in X$. Entonces

$$f \in \mathbb{C}\,(x_o) \leftrightarrow [x_n \to x_o \Rightarrow f(x_n) \to f(x_o)]$$

donde '$f \in \mathbb{C}\,(x_o)$'es una abreviatura de 'f es continua en el punto x_o'.

Con al notación $S(a, r) = \{x \in X \mid d_x\,(x, a) < r\}$ para las esferas abiertas de centro a y radio r de (X, d_x) –y, *mutatis mutandis*, para las esferas de (Y, d_y)–, la definición de continuidad discurre en estos términos

$$f \in \mathbb{C}\,(x_o) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall S(f(x_o), q))(\exists S(x_o, p))[\, f(S(x_o, p) \subset S(f(x_o), q)]$$

La demostración en el sentido $\Rightarrow$ es una aplicación directa de la definición anterior y del concepto de convergencia. Esta demostración no requiere del axioma de elección. No acontece lo propio, empero, con el recíproco, i. e., con

$$[x_n \to x_o \Rightarrow f(x_n) \to f\,(x_o)] \Rightarrow f \in \mathbb{C}(x_o).$$

Este enunciado es lógicamente equivalente a

$$f \notin \mathbb{C}\,(x_o) \Rightarrow x_n \to x_O \wedge \sim[f(x_n) \to f(x_o)].$$

Ex hypothesi, hay una esfera $S(x_o, \frac{1}{n})$ con la propiedad de que la imagen de toda esfera centrada en x_o no está incluida en aquélla. Considérese la sucesión de esferas $\{S(x_o, \frac{1}{n})\}$. Fórmese una sucesión $\{x_n\}$ tal que

$x_n \in S(x_o, \frac{1}{n})$ y $f(x_n) \notin S(f(x_o), q)$ Adviértese que $x_n \rightarrow x_o$ y $\sim(f(x_n) \rightarrow f(x_o))$, Q.E.D.

El axioma de elección intervino de modo palmario al considerar la familia no vacía de esferas no vacías —toda esfera abierta es no vacía pues contiene, al menos, su centro— y asignar a cada una de éstas un punto de $\{x_n\}$. En la topología elemental de espacios métricos el teorema analizado es de importancia básica: establece la conexión entre convergencia y continuidad. No parece, pues, que en el estado actual de la matemática sea dable prescindir del axioma de elección, a despecho de recalcitrantes constructivistas firmes en la tarea de impugnarlo.

El ejemplo presentado es uno entre centenares; el escogerlo obedeció a un suerte de meta-axioma de elección propugnado por Wittgenstein, *viz.*, que hay cosas que tenemos delante de los ojos y vale la pena mirarlas antes de desbarrar sobre lo que hay "detrás" de tales cosas. El mundo matemático se compone de hechos –teoremas–; sus cosas —conceptos— están desplegadas en las inscripciones de una demostración; al contemplar las ristras de inscripciones, advertimos que muchas no serían admisibles de no contar con la ingenua idea de que en cada conjunto podemos elegir un punto, lo cual despojado de ropajes de etiqueta es, a la postre, lo que nos dice el axioma de elección. Lo expresado no repugnaría, desde luego, a un nominalista: si admitimos sólo un mundo de individuos, éstos pueden ser situados en cualquier *ens rationis* —esferas abiertas, sociedades, mundos posibles...—; un platonista no diría que los conjuntos, familias de conjuntos, ...conforman *entis rationis*, pero se mostraría dispuesto a controlar las ristras de inscripciones acorde con los criterios nominalistas. La (presunta) oposición entre nominalistas y platonistas es, *pro inde*, en el terreno de la filosofía de la matemática, una mera *façon de parler* –Gauss redivivo– que en nada afecta la *práctica* matemática —ni mucho menos la "matemática práctica"—. En cuanto a lo que respecta a los constructivistas estrictos, poco o nada hay que decir de ellos: son los que siguen sosteniendo —claro está, con lenguaje alambicado, pues de lo contrario hasta el último estulto los mandaría a paseo (a veces es conveniente echar mano del eufemismo)— que constar con los dedos es el *desideratum* de la matemática.

ERNESTO BATTISTELLA

Universidad Central de Venezuela