Docencia Universitaria, Vol. VII, Nº 1, Año 2006
SADPRO - UCV
Universidad Central de Venezuela
Recibido: 09/12/2005
Aprobado: 17/03/2006

Pensamiento Lógico en Estudiantes Universitarios de Alto y Bajo Rendimiento en Matemáticas

Pilar Ruesga Ramos
Universidad de Burgos - España
pruesga@ubu.es
Mariela Orozco Hormaza
Universidad del Valle - Colombia
morozco@mafalda.univalle.edu.co

Resumen

En este trabajo se analizan, de forma comparativa, el razonamiento lógico que emplean, sobre contextos matemáticos, estudiantes universitarios de primer curso diferenciados por su competencia matemática. Para ello se elabora una prueba constituida por ítems de inferencia, de negación con cuantificadores y de equivalencia proposicional. Se encuentra que existe diferencia significativa entre ambos grupos en las cuestiones de inferencia y equivalencia, pero no en las relativas a negaciones con cuantificadores. Estos resultados permiten poner de relieve la mejor adecuación de la lógica que los estudiantes exitosos emplean y, con ello, llamar la atención de los profesionales docentes en relación al desarrollo de esta herramienta básica para el aprendizaje.
Palabras clave: *razonamiento lógico; razonamiento matemático; aprendizaje matemático; pensamiento lógico; razonamiento deductivo.*

Logical Thought in University Students with High and Low Performance in Mathematics

Abstract

An analysis of logical thought in two groups of university students, differentiated according to their high and low performance in response to a questionnaire on basic pre-university Mathematics reveals that: 1) the high performance group is significantly different from the low performance group in processes of inference and in equivalence questions; 2) no significant differences are found in the use of expressions with quantifiers. Analysis of the errors allows us to assume a relation between performance in Mathematics and the use of logical common sense.
Key words: *Logical thought; logical reasoning; mathematical thinking; mathematical logic.*

Introducción

El análisis de las formas relacionales que utilizamos en la vida cotidiana y se expresan a través de la lengua natural, constituye lógica cotidiana o lógica del sentido común. Todos los lenguajes naturales usan operadores lógicos, es decir, formas de expresar conjunción, disyunción, condicional y negación que se corresponden con las palabras *"y", "ó", "si"* y *"no"*. Estas partículas que el ser humano comienza a usar tempranamente, se aplican a una gran variedad de situaciones y contenidos y conforman el armazón de la lógica de nuestro pensamiento.

La lógica que empleamos en la vida corriente, también llamada sentido común, y la lógica propia del pensamiento científico comparten un mismo lenguaje, sin embargo, ambas tienen objetivos diferentes pues mientras la lógica del sentido común persigue convencer, la lógica científica persigue demostrar (Duval 1999).

Esta diferencia conduce a concepciones y usos de las leyes de inferencia y de los operadores lógicos que, siendo válidas para la vida cotidiana, no lo son para el razonamiento científico y, por tanto para el aprendizaje de la Matemática.

A menudo se define el pensamiento matemático como un pensamiento deductivo que, desde proposiciones verdaderas, genera nuevas proposiciones a cuya veracidad confiere una especial sensación de seguridad y confianza. Es el efecto de las leyes de inferencia lógica, ya introducidas por los pensadores griegos, que en el ámbito del razonamiento matemático tienen una aplicación válida más restringida que en el ámbito del sentido común. Por ejemplo, cuando la mamá le dice al niño "si no comes, no juegas", el niño inmediatamente entiende que si come podrá jugar; sin embargo, este comportamiento, que podríamos parafrasear a expresiones de la lógica formal, no tiene consistencia en términos de las leyes de inferencia válidas para el razonamiento matemático. Cosmides (1989 p. 191 citado por O´Brien D.P y otros, 1998) afirma que la gente raramente razona "de acuerdo con los cánones de la lógica" sino guiados por razones de interés social y sus asociados costos y beneficios.

La lógica que es preciso poner en práctica en matemáticas es menos flexible que la lógica común, por eso nos preguntamos si aquellos alumnos universitarios que resultan más exitosos en matemáticas han adaptado esta estrategia de razonamiento, sobre proposiciones matemáticas conocidas, de forma más ajustada que aquellos que son menos exitosos.

Antecedentes

El bien conocido test de Wason (Braine y O'Brien 1998) pone de relieve la interpretación y uso que escolares adolescentes hacen de una proposición condicional. También para estudiantes universitarios la implicación es fuente de importantes dificultades y tienden a considerarla sin sentido cuando su antecedente es falso (Jonson-Laird 1969, Durand-Guerrier 2003).

Las formas inferenciales "Modus Ponens" (de *p* y de *"si p entonces q"* se deduce *q*) y "Modus Tollens" (de *no q* y de *"si p entonces q"* se deduce *no p*) se presentan en el ser humano en un estadio muy temprano de la vida. Sabemos que niños de 4 y 5 años son capaces de llevar a cabo razonamientos verbales de tipo, "Modus Ponens", correctamente (Hawkins y Pea 1984, Dias y Harris 1988, Días 1990).

Además, los operadores proposicionales *"y"*, *"ó"* no se comprenden en la vida corriente en el mismo sentido que tienen en el álgebra Booleana (Ruesga 2001). Expresiones como: "O hay un cortocircuito o bien la batería está averiada" (Braine y O´Brien 1998), es entendida comúnmente como una disyunción exclusiva, es decir, ocurre una cosa o bien la otra pero no las dos, aunque, como en este caso, esta posibilidad exista. También la semántica de la conjunción genera concepciones diferentes no siempre en el sentido de su definición booleana.

Piaget (1975) otorga un importante papel al operador negación en la construcción del conocimiento pero, además los modos lingüísticos afirmativo y negativo influyen en la evaluación y comprensión de proposiciones simples, que resulta más difícil cuando se presentan en modo negativo, y en el razonamiento inferencial y así Tollendo Ponens es más fácil que Ponendo Tollens (Jonson-Laird 1972, Ruesga 2001).

Estos antecedentes nos llevan a interesarnos por la influencia que las formas propias del razonamiento cotidiano tienen en el razonamiento matemático, y si existe alguna diferencia en función de la competencia matemática de alumnos universitarios.

Pretendemos analizar cómo se aplican las leyes de inferencia, cómo se entienden y aplican las equivalencias proposicionales y la negación de expresiones con cuantificadores en estudiantes universitarios de distinto éxito en matemáticas.

Metodología

Diseño cuasiexperimental, con dos grupos de alumnos universitarios diferenciados por su desempeño en matemáticas que se toma como variable independiente, siendo la variable dependiente el éxito o fracaso en las preguntas de lógica planteadas en un cuestionario elaborado para la ocasión.

Descripción de los grupos

Los primeros exámenes universitarios del grupo seleccionado como de alto rendimiento, sorprendieron a sus profesores de matemáticas por sus excelentes resultados. Se trata de un grupo de alumnos que cursan unos prestigiosos estudios técnicos con fuerte componente de materias en matemáticas a los que se accede tras un bachillerato[1] específico también con materias de matemáticas de importante peso en el currículo. El grupo de bajo rendimiento fue seleccionado entre alumnos que eligieron estudios de componente mayoritariamente humanística, con pocas asignaturas de matemáticas de contenido generalista, a los que se accede, sobre todo desde bachilleratos sin materias de matemáticas o con una de estas materias de carácter también generalista.

Como indicador de sus competencias respectivas en matemáticas se toman las calificaciones medias de cada grupo en la última asignatura de matemáticas cursada ya en la universidad y en sus respectivos estudios.[2]

Estos antecedentes hacen presuponer un desempeño matemático mejor en el caso de los alumnos de estudios técnicos y considerar ambos grupos como de alto y bajo rendimiento en matemáticas.

Desarrollo de la prueba

La prueba se realiza en dos días diferentes en el transcurso de dos sesiones ordinarias de clase, sin límite de tiempo. Fue realizada por todos los alumnos de ambos grupos aunque con carácter voluntario.

La separación en sesiones permite evitar la fatiga por la excesiva extensión del cuestionario y el efecto halo entre preguntas.

Consiste en cumplimentar un formulario, de forma anónima, solicitando a cada alumno una marca particular que deberían recordar para la siguiente sesión.

En el encabezado de ambos formularios se aclara:

> Las siguientes preguntas no constituyen un examen. Sus respuestas servirán para realizar una investigación. Le pedimos que las lea con atención y conteste lo que le parezca procedente en el lugar destinado a la respuesta. No es necesario que ponga su nombre pero sí algún tipo de marca en el lugar indicado que pueda recordar e identificar en otro momento.

El cuestionario

Las preguntas formuladas en ambas sesiones se muestran en el Anexo. Los contenidos de matemática utilizados en el cuestionario son conocidos por ambos grupos ya que forman parte del currículo en matemáticas básicas común a todos los escolares.

Los modos lingüísticos afirmativo y negativo se limitan sólo al afirmativo, en algunas de las cuestiones, para no hacer la prueba excesivamente larga.

Las preguntas se distribuyen en tres apartados: inferencia, equivalencia y formación de negaciones con cuantificadores.

Cuestiones de inferencia

Se presentan dos proposiciones, asumidas como verdaderas, de las cuales se solicita extraer, si es posible, una conclusión. La estructura del cuestionario en este apartado (Tabla 1) responde a los siguientes tipos de inferencia y modos lingüísticos:

Tabla 1
Estructura del cuestionario

Tipo de inferencia	Simbolización	Modo lingüístico de la proposición p	Pregunta en el cuestionario
Falacia de afirmación del consecuente	Proposición 1: $p \rightarrow q$ Proposición 2: q Conclusión: No hay	Afirmativo	1.1.1
		Negativo	1.1.2
Modus Tollens (MT)	Proposición 1: $p \rightarrow q$ Proposición 2: no q Conclusión: no p	Afirmativo	1.2.1
		Negativo	1.2.2
Falacia de negación del antecedente	Proposición 1: $p \rightarrow q$ Proposición 2: no p Conclusión: No hay	Afirmativo	1.3.1
		Negativo	1.3.2
Modus Ponens (MP)	Proposición 1: $p \rightarrow q$ Proposición 2: p Conclusión: q	Afirmativo	1.4.1.
		Negativo	1.4.2
Ponendo Tollens	Proposición 1: p ó q pero no ambos Proposición 2: p Conclusión: no q		1.5.1
Tollendo Ponens	Proposición 1: p ó q pero no ambos Proposición 2: no p Conclusión: q		1.5.2
Silogismo hipotético	Proposición 1: $p \rightarrow q$ Proposición 2: $q \rightarrow r$ Conclusión: $p \rightarrow r$		1.6.2

Cuestiones de equivalencia

Se refieren a dos tipos de equivalencias: sobre condicionales y sobre operadores booleanos.

En las cuestiones de equivalencia sobre condicional se pide trasladar el sentido de una expresión por su equivalente condicional, en los siguientes casos (Tabla 2):

Tabla 2
Casos en los cuales se pide trasladar el sentido de una expresión por su equivalencia condicional

Equivalencia	Simbolización	Modo lingüístico de la proposición p	Pregunta en el cuestionario
Del condicional con su disyuntiva	(no p ó q) ↔ (p → q)	Negativo	2.1.1
		Afirmativo	2.1.2
Del condicional con su contrarreciproca	(p → q) ↔ (no q → no p)	Afirmativo	2.2.1
		Negativo	2.2.2

En el caso de los operadores booleanos, se trata de ver cómo los estudiantes comprenden los operadores *"y"*, *"ó"* y la equivalencia que expresan las Leyes de Morgan. La estructura del cuestionario es la que se observa en la Tabla 3:

Tabla 3
Estructura del cuestionario en el caso de los operadores booleanos

Equivalencia	Simbolización	Modo lingüístico	Pregunta en el cuestionario
Comprensión de la conjunción	p y q	Ambas afirmativas	2.3.1.1
		Ambas negativas	2.3.1.3
Comprensión de la disyunción	p ó q	Ambas afirmativas	2.3.1.2
		Ambas negativas	2.3.1.4
Negación de una conjunción	no(p y q) ≡ (no p) ó (no q)	Ambas afirmativas	2.3.2.2
		Ambas negativas	2.3.2.3
Negación de una disyunción	no(p ó q) ≡ (no p) y (no q)	Ambas afirmativas	2.3.2.1
		Ambas negativas	2.3.2.4

Cuestiones relativas a negaciones con cuantificadores

Consisten en la formación de dos expresiones[1] equivalentes a la negación de una, que se propone, con las siguientes variaciones:

- Una expresión formulada con el cuantificador "todos" (pregunta 3.1.1 del cuestionario).
- Una expresión formulada con el cuantificador "no todos" (pregunta 3.1.2 del cuestionario).
- Una expresión formulada con el cuantificador "existe" (pregunta 3.1.3 del cuestionario).

- Una expresión formulada con el cuantificador "no existe" (pregunta 3.1.4 del cuestionario).

Codificación y análisis de datos

Todas las cuestiones son valoradas como correcta (1) o incorrecta (0) de acuerdo con su adecuación o no a su formulación clásica. La valoración (0) incluye las cuestiones no respondidas.

Se realiza análisis de datos cuantitativo inter e intra grupos, mediante la aplicación estadística SPSS, para determinar diferencias entre los dos grupos (mediante $\div^2$) en cada cuestión individual y en cada grupo de cuestiones al nivel de confianza del 95%. El análisis intragupos, mediante preguntas pareadas de muestras relacionadas, permite establecer diferencias por efecto de la variable lenguaje.

Resultados y Discusión

Cuestiones de inferencia

La Tabla 4 muestra los resultados obtenidos por ambos grupos y la significación de la diferencia de medias.

Ambos grupos muestran aplicar las leyes de inferencia MP y MT de forma correcta en porcentajes importantes.

El grupo de bajo rendimiento obtiene resultados porcentualmente menores que el de alto rendimiento en todas las preguntas.

Dentro de cada grupo las diferencias de acierto por causa de los modos lingüísticos son significativas resultando, generalmente más complicados los enunciados negativos.

Sin embargo, ambos grupos muestran un comportamiento muy distinto ante las restantes formas inferenciales.

En cuanto a las inferencias de tipo "Tollendo Ponens" y "Ponendo Tollens", ambos grupos muestran porcentajes de acierto significativamente distintos y más bajos en el grupo de bajo rendimiento. El modo lingüístico resulta ser significativo: la forma negada de la proposición en "Tollendo Ponens" resulta ser mucho más elocuente que la afirmación presente en el caso de "Ponendo Tollens". Se presenta una gran cantidad de resultados que afirman no poder añadir nada más acerca del número lo que nos lleva a afirmar con Braine y O´Brien (1998, p. 51) que no se comprende el operador *"ó"* cuando no se comprende que ante sólo dos alternativas y una de ellas no se da, entonces debe darse la otra; lo que ocurre con frecuencia y notoriamente en el grupo de bajo rendimiento.

La mayor diferencia entre ambos grupos se encuentra en los razonamientos falaces que el grupo de bajo rendimiento comete de forma casi generalizada.

En el caso de la afirmación del consecuente se encuentra que de:

"Si un número N es potencia de 6, entonces su última cifra es un 6" y*"Un número N, tiene por última cifra un 6".*

Se puede concluir: "El número N es potencia de 6".

En el caso de la negación del antecedente, se encuentra que de:

"Si un número N es potencia de 6, entonces su última cifra es un 6" y "Un número N no es potencia de 6".

Se puede concluir: "La última cifra no es un 6".

Esta puede ser consecuencia de la aparición de lo que O'Brien (1998, p. 31) llama inferencias invitadas, no obstante, para comprobar esta conjetura hubiera sido necesario algún tipo de entrevista personal con los participantes que, en este caso no se hizo. De acuerdo con esta idea, de la implicación "Si p, entonces q", el individuo asume espontáneamente su errónea equivalencia con su recíproca "Si q, entonces p" y con su contraria "Si no p, entonces no q", desde las cuales las inferencias "Modus Ponens", como sabemos muy naturales, conducen a conclusiones falsas. Esta asunción representa la preponderancia del razonamiento cotidiano sobre los modos inferenciales válidos para la matemática. La presencia de los modos lingüísticos negativos en la proposición condicional, no modifica de forma especial sus respuestas.

De acuerdo con la clasificación de Braine (Braine, Reiser y Rumian, 1998, p.93), los errores en "Ponendo Tollens" y "Tollendo Ponens" son errores de comprensión originados por la falta de comprensión de una de las premisas que origina una información previa insuficiente; en el caso de las inferencias falaces, los errores son heurísticos ya que suceden cuando el que razona trata de buscar un hilo de razonamiento que resuelva el problema, es decir, la situación es demasiado difícil.

Tabla 4
Acierto y significación de las diferencias de medias de estudiantes con alto y bajo rendimiento a preguntas de inferencia

Inferencia	Antecedente	% Acierto		Alto vs. Bajo rendimiento	
		Alto	Bajo	χ^2_1	P≤
Modus ponens	Afirmativo	68,4	63,0	0,266	,606
	Negativo	84,2	60,9	**5,555**	**0,018**
Modus tollen	Afirmativo	71,1	54,3	2,462	,117
	Negativo	55,3	47,8	,461	,497
Ponendo tollens		34,2	13,0	**5,327**	**0,021**
Tollendo ponens		52,6	19,6	**10,065**	**0,002**
Silogismo hipotético		71,1	47,8	**4,619**	**0,032**
Falacia afirmación consecuente	Afirmativo	73,7	6,5	**40,312**	**0,000**
	Negativo	60,5	8,7	**25,630**	**0,000**
Falacia negación antecedente	Afirmativo	57,9	10,9	**21,098**	**0,000**
	Negativo	65,8	8,7	**30,008**	**0,000**

Cuestiones de equivalencia

Los resultados de estas cuestiones se encuentran en la Tabla 5. La equivalencia con la forma contrarrecíproca presenta porcentajes de acierto sustancialmente distintos en relación con los de la forma disyuntiva. Esto ocurre especialmente en el grupo de bajo rendimiento, que además encontró significativamente más difícil la pregunta cuando el antecedente toma la forma negativa.

Nuevamente la conjetura de las inferencias invitadas podría explicar el igual comportamiento de ambos grupos ante la equivalente contrarrecíproca que, en este caso favorece una equivalencia válida.

Sin embargo, la forma disyuntiva resulta mucho más compleja para ambos grupos, de forma especial para el de bajo rendimiento que mayoritariamente considera que no es posible expresar la condicional en esta forma. No reconocen la misma significación en la expresión disyuntiva cuando se solicita bajo la forma condicional. Esto requiere una buena comprensión del condicional, que representa una dificultad como sabemos. La forma negativa del antecedente favorece los resultados de acierto en ambos grupos, de forma significativa en el de alto rendimiento.

Tabla 5
Diferencias entre medias de acierto para preguntas sobre equivalentes al condicional

Equivalencia del condicional	Antecedente	% Acierto		Alto vs. Bajo rendimiento	
		Alto	Bajo	χ^2_1	P≤
Con su disyuntiva	Afirmativo	26,3	8,7	4,652	**0,031**
	Negativo	52,6	10,9	17,362	**0,000**
Con su contrarrecíproca	Afirmativo	76,3	76,1	0,001	0,980
	Negativo	60,5	58,7	0,029	0,865

Las equivalencias que expresan las leyes de Morgan presentan porcentajes de acierto por debajo del 40% en el caso más favorable, que son significativamente distintos en ambos grupos, siendo estos espectacularmente bajos en el grupo de bajo rendimiento son. En la Tabla 6 se muestran los resultados.

Tabla 6
Diferencias entre medias de aciertos para preguntas de equivalencias definidas por las Leyes de Morgan

Equivalencia que expresan las Leyes de Morgan	Lenguaje de ambas proposiciones	% Acierto		Alto vrs. Bajo rendimiento	
		Alto	Bajo	χ^2_1	P≤
De una conjunción	Afirmativo	18,4	2,2	**6,375**	**0,012**
	Negativo	28,9	2,2	**12,182**	**0,000**
De una disyunción	Afirmativo	39,5	15,2	**6,334**	**0,012**
	Negativo	18,4	2,2	**6,375**	**0,012**

Los errores más frecuentes tienen que ver con la aplicación de la negación a las proposiciones integrantes sin transformar el operador *"y"* por el *"ó"* o recíprocamente. Es decir, la negación de:

"Un número "x" es par o es primo"

se entiende como:

"Un número "x" no es par o no es primo"

Y recíprocamente.

Y de forma equivalente, la negación de:

"Un número "x" es par y primo"

se entiende como:

"Un número "x" no es par y no es primo"

Y recíprocamente.

Esta tendencia tiene lugar también cuando las proposiciones son de contenido no matemático (Ruesga 2001) y tienen que ver nuevamente con la forma de estas expresiones en la lógica común. Hemos podido comprobar cómo, una llamada de atención al alumnado sobre las formas equivalentes que expresan las Leyes de Morgan, produce sorpresa y resultan poco comprensibles si no hay una explicación. Es decir, hay una tendencia a entender las equivalencias falsas:

no (p ó q) ≡ (no p) ó (no q)

y,

no (p y q) ≡ (no p) y (no q).

Por otra parte, a este error puede coadyuvar la comprensión de los propios operadores *"y"* y *"ó"*. La Tabla 7 muestra los resultados encontrados respecto a la compresión de ambos operadores.

Los casos de error en la conjunción responden a la confusión con el operador disyunción. Por ejemplo a:

"Escriba los que sean cuadrados perfectos y pares"

se responde con la lista siguiente: "25, 49, 64, 100".

Esta confusión con la partícula *"ó"* puede deberse a la aplicación de la conectiva al universo de elementos y no a cada uno de los elementos en particular, es decir, aparece un error debido a la concepción semántica de la partícula.

Por otra parte, tendemos a comprender la disyunción en su forma exclusiva y resulta poco frecuente en la lógica común una expresión disyuntiva inclusiva. Por ejemplo a:

"Escriba los que no sean cuadrado perfecto o no sean pares"

Se da por respuesta la lista: "32, 15, 28, 73" que corresponde a una sola de las proposiciones. Desde luego no parece, por tanto, que el alumno encuentre relación alguna con respecto a la complementariedad de los elementos que responden a una y otra preguntas, es decir, la equivalencia que expresan las leyes de Morgan no tiene en estos casos ninguna significación.

En alguna de sus formas, concretamente el caso de la disyunción con ambas proposiciones en forma negativa, hemos encontrado grados de acierto que cabría considerar bajos, en ambos grupos, teniendo en cuenta lo habitual de estas expresiones.

Tabla 7
Comprensión de los operadores "y" y "ó"

	Modo lingüístico	%Acierto		Alto vs. Bajo rendimiento	
		Alto	Bajo	χ^2_1	P≤
Comprensión de la conjunción	Ambas afirmativas	86,8	87,0	0,988	0,618
	Ambas negativas	94,7	91,3	0,543	0,433
Comprensión de la disyunción	Ambas afirmativas	73,7	69,6	0,677	0,433
	Ambas negativas	55,3	34,8	**0,060**	**0,048**

Cuestiones de negaciones con cuantificadores

La obtención de expresiones equivalentes a la negación de otras que se formulan con cuantificadores resulta realmente compleja para ambos grupos. Los resultados de acierto están en la Tabla 8. El grupo de bajo rendimiento obtiene porcentajes de acierto siempre inferiores aunque las diferencias entre ambos grupos sólo son significativas en el caso de la negación de "existe".

La necesidad de invertir el cuantificador y transformar la proposición a su forma negada es un proceso (Suppes 1986) que requiere parafrasear manteniendo continuamente el sentido de la proposición y, este proceso, es complejo.

Es en la fase de parafraseo donde se observa la dificultad. Por ejemplo ante:

"*No todos los números naturales "X", verifican la igualdad* $2x + 10 = 0$

Y, a pesar de haber escrito previamente:

"*Todos los números naturales "X", verifican la igualdad* $2x + 10 = 0$

La mayor parte de los estudiantes, o bien no encuentran ninguna otra expresión equivalente o aportan expresiones que no conservan el sentido de la anterior, como:

"*No todos los números naturales "X", no verifican la igualdad* $2x + 10 = 0$

Es prácticamente una constante entre los errores, la negación de "todos" por "ninguno" adoptando nuevamente la forma que suele ser habitual en el razonamiento cotidiano. Es decir la negación de:

"*Todos los números naturales "x", verifican la igualdad* $2x + 10 = 0$"

se da como:

"*Ningún número natural "x", verifica la igualdad* $2x + 10 = 0$"

Tabla 8
Diferencias en medias de acierto de estudiantes con alto y bajo rendimiento a preguntas de cuantificadores

Negación con cuantificadores	%Acierto		Alto vs. Bajo rendimiento	
	Alto	Bajo	χ^2_1	P≤
"todos"	36,8	34,8	0,038	0,845
"no todos"	23,7	10,9	2,460	0,117
"existe"	31,6	13,0	4,246	0,039
"no existe"	15,8	15,2	0,005	0,942

Conclusiones

De acuerdo con los tres tipos de cuestiones que hemos planteado, ambos grupos de estudiantes muestran emplear una lógica diferente tanto en inferencia como en equivalencia. El grupo de alto rendimiento muestra un razonamiento lógico más acorde con el necesario para el razonamiento matemático que el grupo de bajo rendimiento y alcanza siempre porcentajes de acierto superiores. Los modos lingüísticos afirmativo y negativo muestran su influencia aunque, de los resultados no podemos afirmar que uno de ellos resulte más significativo o más fácil en general.

Las cuestiones relativas a negaciones con cuantificadores se revelan sumamente complejas para ambos grupos.

En cuanto a las cuestiones de inferencia es de destacar la profunda diferencia entre ambos grupos en el uso de razonamientos falaces que ocurren en mucha menor medida en el grupo de alto rendimiento. Ello puede deberse a la presencia de las inferencias invitadas (O'Brien, 1998) propias del razonamiento cotidiano que operan en mucho menor porcentaje en el grupo de alto rendimiento.

De igual forma, las preguntas de equivalencia, además de mostrar diferencia entre los grupos, revelan que operaciones lógicas básicas como disyunción y conjunción, no siempre son comprendidas en la forma que simboliza el álgebra booleana, especialmente las equivalencias relativas a las Leyes de Morgan.

Los errores observados muestran la influencia del razonamiento cotidiano que se hace más acusada en el grupo de bajo rendimiento. Es decir, los alumnos más exitosos en matemáticas han adaptado su forma de razonar en la vida cotidiana a los requerimientos que la matemática demanda, de forma significativamente distinta que aquellos otros menos exitosos.

Esta lógica inadecuada puede representar un obstáculo (Brousseau 1993) para el aprendizaje. La alternativa que representa una formación específica en lógica formal no proporciona una solución al problema como lo muestran las experiencias de Nisbett (1987) y Almstrum (1999). Las situaciones de aprendizaje en matemáticas están inmersas en una realidad de la que no es posible aislar las formas de razonamiento que son propias de la vida cotidiana. Sin embargo, el profesorado de matemáticas debe tener presente que ciertos usos del lenguaje provocan concepciones y modos inferenciales que no son válidos para la matemática y puede suponer un freno en la comprensión y el aprendizaje.

Anexo

Primera parte

"Las siguientes preguntas no constituyen un examen. Sus respuestas servirán para realizar una investigación. Le pedimos que las lea con atención y conteste lo que le parezca procedente en el lugar destinado a la respuesta. No es necesario que ponga su nombre pero sí algún tipo de marca en el lugar indicado que pueda recordar e identificar en otro momento"

Marca ☐

Pregunta 1.1.- Conteste las siguientes preguntas.
Tenga en cuenta que en las cuatro primeras, se dan dos proposiciones que se suponen verdaderas. Vea si puede concluir algo en cada uno de los casos y escriba su conclusión, si la encuentra, en el lugar indicado. Si no encuentra conclusión, indíquelo así.

1.1.1.- Proposición 1: "*Si un número N es potencia de 6, entonces su última cifra es un 6*"

Proposición 2: "*Un número N, tiene por última cifra un 6*"

Conclusión:____

1.2.1.- Proposición 1: "Si *un número N es potencia de 6, entonces su última cifra es un 6*"

Proposición 2: "*Un número N, no termina en 6*"

Conclusión:____

1.3.1- Proposición 1: "*Si un número N es potencia de 6, entonces termina en 6*"

Proposición 2:"*Un número N no es potencia de 6*"

Conclusión:____

1.4.1- Proposición 1: "*Si un número N es potencia de 6, entonces termina en 6*"

Proposición 2: "*Un número N es potencia de 6*"

Conclusión: ____

1.5.1.- Los números reales pueden ser racionales o irracionales.
Se toma un número al azar y resulta ser racional. ¿Se puede decir algo más sobre este número? Escriba su respuesta en la línea:

____

Pregunta 2.1.
2.1.1- Dada la proposición: "*Un número N no es potencia de 6 o termina en 6*"
¿Cree posible expresarla en la forma "si......., entonces.....?". Conteste Sí ó No: __________

En caso afirmativo escriba la expresión:

____

2.2.1-Dada la proposición: "*Si un número N es potencia de 6, entonces termina en 6*"
¿Cree posible expresarla en la forma: "*Si un número N no termina en 6, entonces...*"?
Complete la frase si lo cree posible.

______________________________"

2.3.1-: Sobre la siguiente lista de números:

25	64	15	73
49	32	28	100

2.3.1.1- Escriba los que sean cuadrados perfectos y pares: ____________________

2.3.1.2- Escriba los que sean cuadrados perfectos o pares: ____________________

2.3.1.3.- Escriba los que no sean ni cuadrado perfecto ni par: __________________

2.3.1.4.-Escriba los que no sean cuadrado perfecto o no sean pares: _____________

Pregunta 3.1- Escriba la negación de las siguientes proposiciones de dos formas distintas

3.1.1-"*Todos los números naturales "x", verifican la igualdad 2x + 10 = 0*

____

____

3.1.2-"*No todos los números naturales "X", verifican la igualdad 2x + 10 = 0*

____

____

3.2.1- "*Existe un número natural que verifica la igualdad 2x + 10 = 0*

____

____

3.2.2-"*No existe ningún número natural que verifiquen la igualdad 2x + 10 = 0*

____

____

Segunda parte

"Como en la sesión anterior, le recordamos que las siguientes preguntas no constituyen un examen. Sus respuestas servirán para realizar una investigación. Le pedimos que las lea con atención y conteste lo que le parezca procedente en el lugar destinado a la respuesta. No es necesario que ponga su nombre pero sí la misma marca que hizo en la ocasión anterior"

Marca [ ]

Pregunta 1.2.- Conteste las siguientes preguntas.
Tenga en cuenta que en las cuatro primeras, se dan dos proposiciones que se suponen verdaderas. Vea si puede concluir algo en cada uno de los casos y escriba su conclusión, si la encuentra, en el lugar indicado. Si no encuentra conclusión, indíquelo así.

1.1.2- Proposición 1: *"Si un número N, mayor que 2, no es compuesto, entonces es impar"*

Proposición 2: *"Un número N, mayor que 2, es impar*

Conclusión:____

1.2.2- - Proposición 1: *"Si un número N, mayor que 2, no es compuesto, entonces es impar"*.

Proposición 2: *"Un número N, mayor que 2, no es impar"*

Conclusión: ____

1.3.2- Proposición 1: *"Si un número N, mayor que 2, no es compuesto, entonces es impar"*

Proposición 2: *"Un número N, mayor que 2, es compuesto"*

Conclusión: ____

1.4.2- Proposición 1: *"Si un número N, mayor que 2, no es compuesto, entonces es impar"*

Proposición 2: *"Un número N, mayor que 2, no es compuesto"*

Conclusión: ____

1.5.2.- Los números reales pueden ser racionales o irracionales.
Se toma un número al azar y resulta ser no racional. ¿Se puede decir algo más sobre este número? Escriba su respuesta en la línea:

____

1.6.2- De las proposiciones 1 y 2 siguientes obtenga otra, si le es posible y escríbala en conclusión

Proposición 1: *"Si un número natural es primo y mayor que 2, entonces es impar"*

Proposición 2: *"Si un número natural es impar, entonces su cuadrado es impar"*

Conclusión: ____

Pregunta 2.2

2.1.2 – Dada la proposición: "*Un número N, mayor que 2, es compuesto o es impar*"

¿Cree posible expresarla en la forma "si......., entonces.....?" Conteste Sí ó No: __________

En caso afirmativo escriba la expresión:

____

2.2.2- Dada la proposición: "*Si un número N, mayor que 2, no es compuesto, entonces es impar*"

¿Cree posible expresarla en la forma: "*Si un número N, mayor que 2, no es impar, entonces...*"? Complete la frase si lo cree posible.

______________________________"

2.3.2.- Escriba la negación de las expresiones siguientes:

2.3.2.1.-"Un número "x" es par o es primo":

____

2.3.2.2.-"Un número "x" es par y primo":

____

2.3.2.3.-"Un número "x" no es par o no es primo"

____

2.3.2.4.-"Un número "x" no es par y no es primo"

____

Notas

[1] *El Bachillerato son los dos años previos a la Universidad.*

[2] *Estas asignaturas fueron Álgebra Lineal para el caso del grupo de tomado como de alto rendimiento en la que la calificación media fue superior a 7 (sobre 10) y Matemáticas Generales en el grupo tomado como de bajo rendimiento en el que la calificación media fue inferior a 5 (sobre 10).*

[3] *Una de ellas es obvia anticipando "No".*

Referencias

Almstrum V., L. (1999). The propositional logical test as a diagnostic. *JNL of Computers in Mathematics and Science*, 18 (3).

Braine M., D. S. & O'Brien, D. (1998). How to investigate mental logic and the syntax of thought. In Braine. *Mental Logic*, 45-63.

Braine M. D. S., O'Brien D., Noveck, A., Samuels M. C., Lea B. R., Yang Y, et al. (1998). Further evidence for the Theory: Predicting intermediate and multiple conclusions in propositional logic inference problems. *Mental Logic*, 145- 199.

Braine M. D. S., Reiser, B. J. & Rumain, B. (1998). Evidence for the theory: Predicting the difficulty of Propositional Logic Inference Problems. *Mental Logic*, 91-145.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique de les Mathématiques*, 4 (2), 165-198.

Días, M. G. (1990). The influence of the imagination on reasoning by young children. *British Journal of Developmental Psychology*, 9, 305-318.

Días, M. G. & Harris, P. L. (1988). The effect of make-believe play on deductive reasoning. *British Journal of Developmental Psychology*, 6, 207-221.

Durand- Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 5-34.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Peter Lang-Universidad del Valle.

Hawkins, J. Y. & Pea, R. D. (1984). Merds that laugh don't like mushrooms: Evidence for deductive reasoning by preeschoolers. *Developmental Psychology*, 20 (4), 584-594.

Johnson- Laird, P. N. (1969). How implication is understood. *Journals of Psychology*. (82), 367-373.

Johnson- Laird, P. N. & Tridgell, J. M. (1972). When negation is easier than affirmation. *Quarterly JNL of Experimental Psychology*, 24, 87-91.

Nisbett, R. E. (1987). Teaching reasoning. *Science*, 238, 625-631.

O' Brien, D. P. (1998). Mental Logic and Irrationality: We can put a men in the Moon, so why can't we solve those logical reasoning problems? (cap. 3). *Mental Logic*, 23-45.

Piaget, J. (1975). *L'equilibration des structures cognitives*. Paris : Presses Universitaires de France.

Ruesga, P. (2001). Influencia del lenguaje afirmativo-negativo en el razonamiento lógico matemático, *UNO*, 28, pp. 8-20.

Suppes, P. & Hill, S. (1986). *Introducción a la lógica matemática*. Barcelona: Reverté.