



CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MANIFESTADO POR UNA PROFESORA DE MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

SPECIALIZED KNOWLEDGE MANIFESTED BY A MATHEMATICS TEACHER'S IN THE TEACHING OF STANDARD DEVIATION

NEFTALÍ REYES YAÑEZ  

UNIVERSIDAD CENTRAL DE CHILE, SANTIAGO, CHILE

NICOLÁS SÁNCHEZ ACEVEDO  

UNIVERSIDAD CENTRAL DE CHILE, SANTIAGO, CHILE

DANIELA ARAYA BASTÍAS  

UNIVERSIDAD CENTRAL DE CHILE, SANTIAGO, CHILE

FELIPE HUERTA MOLINA  

UNIVERSIDAD CENTRAL DE CHILE, SANTIAGO, CHILE

YAROD BUSTAMANTE SILVA  

UNIVERSIDAD CENTRAL DE CHILE, SANTIAGO, CHILE

Fecha de recepción: 14 septiembre 2024

Fecha de aceptación: 16 diciembre 2024

RESUMEN

El objetivo principal de esta investigación es caracterizar los conocimientos de una profesora de matemática de educación media en la enseñanza de la desviación estándar, a partir del modelo teórico analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Para ello, nos posicionamos desde un paradigma interpretativo, bajo un diseño de caso único e instrumental. Se han categorizado los conocimientos a partir de las transcripciones de las grabaciones de cinco clases y una entrevista de profundización, identificando evidencias e indicios de conocimiento en los diferentes subdominios de conocimiento (KoT, KSM, KPM, KMT y KFLM). Se evidencian algunas estrategias relevantes en la enseñanza de la desviación estándar que dan cuenta de una comprensión conceptual, por sobre la procedimental. El trabajo concluye con la caracterización de conocimiento, tanto en el dominio matemático, como en el didáctico matemático de la enseñanza sobre la desviación estándar, dejando entrever una matización en el modelo MTSK para la enseñanza de la estadística, considerando los aportes del pensamiento estadístico en la enseñanza, como también profundizar en las relaciones de conocimientos del profesor de matemática en contexto escolar.

PALABRAS CLAVE: Conocimiento especializado del profesor de matemáticas; desviación estándar; estadística; estudio de caso instrumental.



ABSTRACT

The main objective of this research is to characterize the knowledge of a secondary school mathematics teacher in teaching standard deviation, based on the analytical theoretical model of the Specialized Knowledge of Mathematics Teachers (MTSK). To do so, we position ourselves from an interpretive paradigm, under a single case and instrumental design. Knowledge has been categorized from the transcriptions of the recordings of five classes and an in-depth interview, identifying evidence and clues of knowledge in the different subdomains of knowledge (KoT, KSM, KPM, KMT and KFLM). Some relevant strategies in teaching standard deviation are evident, which account for a conceptual understanding, over a procedural one. The work concludes with the characterization of knowledge, both in the mathematical domain, as well as in the mathematical didactics of teaching about standard deviation, revealing a nuance in the MTSK model for teaching statistics, considering the contributions of statistical thinking in teaching, as well as deepening the knowledge relationships of the mathematics teacher in a school context.

KEYWORDS: Mathematics teacher's specialized knowledge; standard deviation; statistics; instrumental case study.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Sobre el conocimiento del profesor de matemáticas

El conocimiento del profesor de matemáticas está sujeto a la intencionalidad con la que se enseña, ya que caracteriza y define su conocimiento profesional (Escudero, 2012), develando la acción de educar, poniendo en juego el saber del profesor. Este conocimiento debe dotar al profesor de la capacidad para abordar problemas que él mismo se plantea y poder dar respuesta a ellos (errores, dificultades, obstáculos, procedimientos habituales correctos e incorrectos). Esto hace emerger un amplio bagaje de conocimientos, tanto matemáticos, como didácticos, que marcan sus prácticas en el aula, como también, la influencia hacia sus estudiantes (Jiménez et al., 2016).

Sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas debe estudiarse con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza a la luz de la identificación de carencias y atributos (Monteiro et al., 2010). Las prácticas del docente en el aula deben ser compartidas con sus pares, ya que estos pueden reflexionar sobre las mismas, generando así prácticas que pueda utilizar para su futuro desempeño en el aula, con el fin de que los docentes puedan responder con conocimiento a todas las situaciones que se les puedan presentar (Monteiro et al., 2010).

1.2. Antecedentes en el contexto de la estadística

Algunos estudios han dado cuenta del conocimiento del profesor de matemáticas en la enseñanza de la estadística (González et al., 2015; Pinto, 2009), considerando modelos de conocimiento matemático (e.g. MKT, Quartet Knowledge), mencionando que la enseñanza de la estadística requiere una forma de diseñarse y pensar diferente al matemático (Franklin et al, 2007). Estrella et al. (2015), utilizando el marco de Shulman (1986), buscó indagar en



tres elementos de la educación estadística: la comprensión gráfica, la diferenciación de niveles cognitivos, y la comprensión generada al cambiar de sistemas de representación. A una muestra de 85 profesores se les aplicó un cuestionario diseñado para medir la comprensión gráfica de los docentes. Los resultados evidenciaron que los profesores mostraban carencias, tanto en su conocimiento pedagógico del contenido (PCK) como en su conocimiento del contenido (CK), lo que corrobora algunas de las dificultades que los educadores enfrentan en estos dominios del conocimiento.

Burgess (2009), con el fin de explorar y analizar los diferentes tipos de conocimientos que los maestros utilizan en el aula de primaria al enseñar estadística, indagó en el conocimiento (Ball et al., 2008) de cuatro profesores de primaria sin experiencia en estadística. Según los resultados, se resalta la importancia de proporcionar una formación en estadística a los profesores que sea especializada de acuerdo con los contextos de enseñanza, dirigiendo la formación del profesorado hacia la aplicación de la estadística en la investigación (Wild y Pfannkuch, 1999).

Harradine et al. (2011) examinaron la comprensión de estudiantes y profesores sobre los principios de la inferencia estadística, identificando dificultades en el razonamiento, conceptos y cálculos estadísticos. Concluyeron que la falta de formación específica en estadística entre los profesores podría llevar a compartir sesgos o concepciones erróneas sobre la inferencia. La consideración de estos elementos, y su profundización, aportarían insumos para la formación de profesores de matemática en la enseñanza de la estadística.

Groth (2017), con la intención de caracterizar el conocimiento estadístico durante una investigación basada en el diseño, plantea que los modelos de conocimiento pueden ayudar a los profesores a describir los objetivos de aprendizaje, pero no permite incidir en cómo ayudarlos a seguir la enseñanza. Es por ello, que plantea la necesidad de seguir reformulando, afinando y probando modelos para los formadores de profesores, los cuales deben resaltar el trabajo colaborativo a partir de investigaciones propias del aula escolar. En consecuencia, establece como necesario seguir trabajando, con base en oportunidades de aprendizaje, tanto para los formadores de profesores, como para los profesores en formación en la enseñanza de la estadística.

Aun cuando algunas de estas investigaciones, en diferentes contextos, han aportado con aproximaciones al conocimiento del profesor de matemáticas en la enseñanza de la estadística, se han planteado dos aristas: (i) el conocimiento en el contexto del profesor de primaria (e.g. Peñaherrera et al., 2021), y (ii) el conocimiento de profesor de Matemáticas en diferentes tópicos o contextos profesionales (Pinto, 2010; Sosa, 2015). En el caso de la estadística, las investigaciones que dan cuenta del conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria son insuficientes (Estrella, Olfos y Mena-Lorca, 2015; Vidal-Szabó y Estrella, 2021). Esto plantea la necesidad de profundizar en dicho campo, y con este objetivo, este trabajo aborda el campo del conocimiento de los profesores de matemática en ejercicio en la enseñanza de la estadística.



Con base en los antecedentes presentados, esta investigación pretende ahondar en la comprensión del conocimiento matemático y didáctico matemático movilizado por una profesora de educación media en la enseñanza de la desviación estándar, planteándonos como objetivo: Caracterizar el conocimiento especializado que moviliza una profesora en la enseñanza de media la desviación estándar en un aula de clases.

1.3. Aspectos teóricos

1.3.1. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El MTSK se organiza en dos dominios centrales: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Cada dominio está integrado de tres subdominios (Figura 1), con categorías específicas, facilitando el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas.

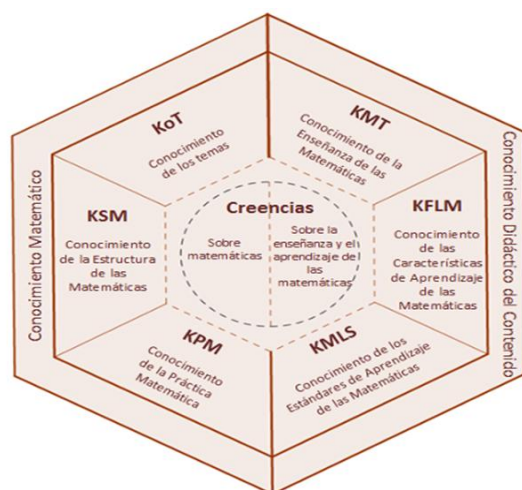


Figura 1. Dominios y subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 6).

El conocimiento matemático (MK - Mathematical Knowledge) constituye el saber matemático puro con el cual el profesor trabaja en sus clases. Este puede abarcar desde demostraciones matemáticas, hasta el uso de propiedades y conexiones sobre los contenidos matemáticos, que puede surgir a través de la enseñanza, o en el aprovechamiento de los conocimientos previos. Este dominio se divide en tres subdominios para categorizar el conocimiento (Carrillo et al., 2018).

- *El Conocimiento de los Temas (KoT - Knowledge of Topics)*, que se refiere al conocimiento que el profesor presenta sobre fenómenos, propiedades, registros de representación, definiciones o procedimientos matemáticos trabajados en el aula.
- *El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM - Knowledge of the Structure of Mathematics)*, que engloba las conexiones que el profesor establece en el aula con temas anteriores y posteriores.



- *El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM - Knowledge of the Practice of Mathematics)*, que abarca el conocimiento sobre cómo se define en matemáticas, así como la distinción entre una demostración, una prueba y una comprobación.

El Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK - Pedagogical Content Knowledge), aborda el saber que el profesor posee sobre el aprendizaje de las matemáticas, como también, las estrategias para fomentar la enseñanza de diferentes contenidos, y la comprensión de los estándares curriculares que rigen el conocimiento matemático de los estudiantes. Este dominio se divide en tres subdominios para categorizar el conocimiento (Carrillo et al., 2018).

- *El Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT - Knowledge of Mathematics Teaching)* abarca el conocimiento sobre teorías pedagógicas, tareas, ejemplos y recursos para promover la enseñanza de las matemáticas, así como los materiales didácticos necesarios para impartir el contenido.
- *El Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM - Knowledge of Features of Learning Mathematics)*, está centrado en el conocimiento acerca de los estilos de aprendizaje, las fortalezas y dificultades de aprendizaje, las interacciones con el contenido matemático y las concepciones que los estudiantes tienen sobre las matemáticas.
- *El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS - Knowledge of Mathematics Learning Standards)*, que incluye el conocimiento sobre los temas que deben enseñarse, el nivel de desarrollo conceptual esperado en los estudiantes y la secuencia de los temas específicos para el grado académico correspondiente.

En la conceptualización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, según Carrillo et al. (2018), las creencias permean todos los subdominios del conocimiento, siendo elementos analíticos esenciales junto a otros dominios. Esta permeabilidad se refleja visualmente en el centro del modelo, resaltando la influencia de las creencias en todos los aspectos analizados mediante líneas segmentadas.

Con base en los dominios y subdominios de conocimiento especializado, exploramos en la enseñanza de la desviación estándar, tratando de dotar las categorías de conocimiento en relación con algunas ideas y conceptos estadísticos fundamentales (Burrill y Biehler, 2011).

2. METODOLOGÍA

Con base en el objetivo que proponemos en esta investigación: *describir e interpretar el conocimiento especializado que moviliza una profesora de enseñanza de media sobre la desviación estándar* en un aula de clases, este trabajo tiene un enfoque cualitativo, bajo un paradigma interpretativo (Bassey, 1999), que permite al observador no participa directamente



en las acciones y decisiones de aula, sino que simplemente observa las acciones de la profesora para luego analizarlas.

El diseño de investigación es un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2007), ya que se busca obtener una comprensión más profunda de la labor de la profesora y, posiblemente, formular generalizaciones relevantes para el campo educativo a partir de este caso particular, que, en este contexto, es el MTSK de la profesora en la enseñanza de la desviación estándar. En lo que sigue, detallamos el caso de estudio, el proceso de recolección de datos y de análisis de datos utilizado.

2.1. Descripción del caso

La profesora participante posee el título de pedagoga en Matemáticas y es licenciada en educación por una Universidad privada de Chile. Contaba con una experiencia laboral de dos años en docencia en educación media, y al momento de recoger la información realizaba clases en 3° medio (estudiantes de 16 – 17 años) y 4° medio (estudiante de 17 – 18 años). Además, la profesora, de seudónimo Ely, realizaba clases en el electivo de profundización de Estadística y probabilidades en los mismos niveles escolares. En el mismo periodo que realizaba las clases en 3° y 4° medio, se encontraba cursando un máster en Didáctica de la Matemática. La posibilidad de trabajar con la profesora responde a criterios de conveniencia (Creswel, 2014) y accesibilidad al caso de estudio (Loughran et al., 2008).

Por ello, siendo una persona que buscaba seguir investigando y perfeccionándose sobre la educación se decidió la elección como nuestro caso de estudio en la investigación, además de su disposición y entusiasmo para participar en el proceso, fue un factor determinante en su selección.

2.2. Recolección y análisis de datos

Para la recolección de los datos, se grabaron tres clases sobre el contenido de desviación estándar, las que posteriormente fueron transcritas. Además, en el momento de la grabación de clases se tomaron notas de campo (Patton, 2001). Posterior al análisis de las clases se realizó una entrevista semiestructurada (Díaz-Bravo et al., 2013) con la finalidad de indagar en aquellos conocimientos que no se vieron totalmente evidenciados durante las clases, y así mismo, dar el espacio a la profesora para describir en detalle alguna de sus acciones en el aula (Brymann, 2016) en la enseñanza de la desviación estándar.

Se grabaron un total de tres clases, todas ellas enfocadas en el contenido de desviación estándar. Estas clases fueron implementadas en un curso de tercero medio (16 a 17 años). Durante las grabaciones, los investigadores adoptaron un papel de observadores no participantes, siguiendo el enfoque propuesto por Flick (2009), lo que implica limitarse a observar y registrar las acciones de la profesora (p.e. como lo que se desarrollaba en la pizarra y las interacciones de aula), sin intervenir en el proceso de enseñanza. El enfoque de observación no participante permitió obtener una visión detallada de cómo se abordaron los conceptos de la dispersión de datos y desviación estándar (como medida de la variabilidad) en el contexto de las clases de tercero medio.



El análisis de datos se basó en la revisión de las transcripciones de las clases, con la finalidad de identificar episodios que nos dieran cuenta de evidencias (**en negritas**) e indicios (*en cursiva*) (Flores-Medrano 2015) de conocimiento relacionados con los dominios, subdominios y categorías del MTSK (Carrillo et al., 2018). Una evidencia es la presencia de información que asegura que la profesora posee conocimiento en algún subdominio del MTSK, mientras que un indicio se refiere a la sospecha de un conocimiento especializado del profesor, que debe ser confirmado por otros indicios o evidencias. Se construyó una entrevista semiestructurada (como instrumento de recolección secundario), en consenso con los investigadores, para profundizar en aquellos conocimientos caracterizados como indicios, y confirmarlos como evidencia de MTSK. Dos investigadores expertos (autores de esta investigación) y, familiarizados con el modelo MTSK, analizaron independientemente las transcripciones de aula, para luego contrastar las evidencias e indicios y llegar a acuerdos en la identificación de conocimiento especializado de la profesora en relación con la desviación estándar (triangulación de investigadores, Flick, 2009). Se utilizó el análisis de contenido (Bardín, 1996), siendo las unidades [de análisis] (fragmento) cada intervención de la profesora en la enseñanza, o como una respuesta a alguna pregunta de los estudiantes; estas podían ser orales o escritas.

3. RESULTADOS SOBRE EL CONOCIMIENTO MANIFESTADO DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

En este apartado realizamos el análisis del conocimiento especializado movilizado por la profesora en la enseñanza de la desviación estándar, a partir de los episodios¹ significativos del conocimiento de la profesora, tanto matemáticos (MK) como didácticos. Para el análisis del conocimiento especializado de la profesora, analizamos cada una de las clases (1, 2 y 3), junto con una breve descripción (objetivo) de la clase.

3.1. Análisis del conocimiento especializado de la profesora en la clase 1

En la primera clase, la profesora introduce la noción conceptual de dispersión utilizando algunas ideas introductorias sobre la idea de variabilidad. Esto lo hace con la intención de relacionar los conceptos de *homogeneidad* o *heterogeneidad*, y establecer relaciones entre estos dos conceptos y la idea de menor y mayor dispersión, a partir de una representación gráfica con diferentes dispersiones de puntos. En la siguiente unidad de información se presenta el gráfico de puntos con lo que explica Ely a los estudiantes:

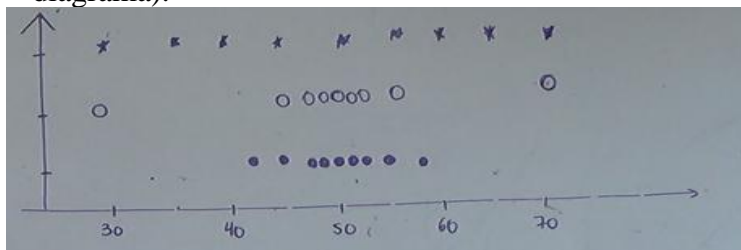
C1 - U1

La profesora comienza la clase mostrando a los estudiantes un gráfico que contiene tres muestras simbólicas (Lunas, estrellas y Soles) y explica lo siguiente.

¹ Los códigos que se presentan c, U indica la clase n-ésima (n=1, 2, 3 y 4) de la profesora Ely, donde U representa el fragmento de la unidad de análisis donde se observa evidencia o indicio de conocimiento. Sobre las entrevistas, PregX- Lxx, representa la pregunta X (secuencial en el orden de las clases) y la línea xx de transcripción.



Prof.: Chiquillos, chiquillas tengo que hacer un diagrama en la pizarra primero para ilustrar el concepto. Mientras tanto con su pareja piensen en lo que significa la palabra dispersión... Dispersión ... (La profesora dibuja el siguiente diagrama).



Extracto 1 de la representación pictórica de tres muestras realizado por la docente en la pizarra durante su clase

A partir de la distinción que hace sobre las dispersiones de los datos, Ely solicita a los estudiantes que elaboren conclusiones sobre las muestras (Extracto 1) sin tener valores ni realizar cálculos, con el propósito de explicar a los estudiantes el concepto de dispersión desde el punto de vista de la interpretación, más que del cálculo. Mostramos

El uso de la gráfica del extracto 1 muestra evidencias de conocimiento **registros de representación (KoT)**, dado que conoce y es consciente de la representación pictográfica para mostrar, conceptualmente, la noción de dispersión, y promover en los estudiantes la comprensión del concepto. Asimismo, Ely podría conocer que una *estrategia de enseñanza (KMT)* del concepto de dispersión, sería iniciar con la representación gráfica del Extracto 1, antes de solamente usar la fórmula de desviación estándar. Luego de realizar la lluvia de ideas bajo la pregunta *¿Qué es la dispersión?*, Ely comenta a los estudiantes que cuando se habla de dispersión no necesariamente se habla de datos muy alejados o juntos, enfatizando que la dispersión es la forma en cómo están los datos distribuidos en un conjunto de datos, tomando como referencia un punto central (media aritmética).

C1 - U2

Prof.: Muy bien chiquillos, me sorprendieron ..., acá ustedes me dieron elementos súper importantes en lo que nos referimos con la dispersión. Cuando hablamos de dispersión no necesariamente hablamos de datos muy alejados o que estén muy juntos ¿Sí? ... Acá da lo mismo, la dispersión es como están distribuidos los datos en un conjunto y ya está ... En base a eso, después yo identifico si algo tiene mayor dispersión o menor dispersión, dependiendo de cómo se encuentren los puntitos en el gráfico ... Por ejemplo, acá (señalando el gráfico) [Extracto 1] tengo la primera muestra que va a ser de estrellita, la segunda muestra que ... ¿Cómo le llamamos a esa pelotita? ... La luna y la muestra tres el sol. Si ustedes lo miran ¿Que me dirían de las estrellas?

Lo dicho por la profesora evidencia su conocimiento sobre la noción contextual que representa la idea de dispersión (**KoT – Fenomenología**), es decir, conoce que el fenómeno



que subyace al concepto de dispersión asociado a la variabilidad de un conjunto de datos (homogeneidad y heterogeneidad) de una muestra. Del mismo modo, comenta a los estudiantes, que, de acuerdo con lo mencionado anteriormente, se puede identificar si algo tiene mayor dispersión o menor dispersión, dependiendo de cómo se encuentren los objetos en el gráfico.

En el siguiente comentario, Ely explica con frases como “*supongamos que estos dos datos se enojaron*” o “*¿Siguen estando juntos dándose calorcito?*” la idea de que los datos están más alejados o están más juntos.

C1 – U3

Prof.: Ya, y acá (muestra dos) supongamos que estos dos datos se enojaron (los datos que están más alejados de los demás) ... Si estos dos datos se alejan ¿Cómo están los datos en general? ¿Siguen estando juntos dándose calorcito? o ¿Se fueron todos? ... Si solo se enojaron esos dos datos.

A partir del fragmento vemos que la profesora utiliza un lenguaje informal para dar más sentido al concepto de dispersión, y los estudiantes comprendan la noción de variabilidad. Esta forma de utilizar el lenguaje puede ser un indicio de conocimiento sobre *formas de interacción con el contenido estadístico (KFLM)*, al conocer la forma en cómo los estudiantes se aproximan a la comprensión de la noción de dispersión.

3.2. Análisis del conocimiento especializado de la profesora en la clase 2

Con la intención de establecer relaciones entre el concepto de dispersión y la métrica para medir esta dispersión, es que, al iniciar la clase, la profesora muestra a los estudiantes dos fórmulas para el análisis de la dispersión de datos. Una de las fórmulas es la desviación media ($DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n-1}$), y la otra es la que corresponde a la desviación estándar general de la muestra ($s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N}}$). La profesora explica a los estudiantes cómo estas fórmulas son sensibles a los datos atípicos y cuál es posible utilizar en diferentes casos, pero siempre alrededor de una medida central. Ely decide realizar una tabla para calcular paso a paso los elementos de la desviación estándar, ella la llama la “Tabla para el cálculo” y contenía los siguientes elementos: x_i , $x_i - \bar{x}$, $(x_i - \bar{x})^2$, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N}$, y finalmente $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N}}$ (Extracto 2), los que además, define verbalmente en cada caso. La finalidad de esta tabla, según la profesora, es para guiar a los estudiantes en el paso a paso del cálculo de la desviación estándar.

C2 – U1

Prof.: Entonces... entonces hay algunas técnicas para poder eliminar los datos atípicos y centrarnos quizás en aquellos que tienen datos que tienen una introducción, quizás, un poquito más similar, pero acá



(muestra la fórmula en la pizarra) yo tengo que la desviación estándar, tanto la normal como la que tengo acá o la general le vamos a decir la mamá de todas y la desviación estándar absoluta... nos van a decir algún resumen sobre este tipo de distribución. Por lo tanto, es súper importante mantener estos datos atípicos dentro de lo ... como del conjunto de datos, por lo tanto, yo tengo que la desviación estándar absoluta va a ser menos sensible a los datos atípicos ¿ok?

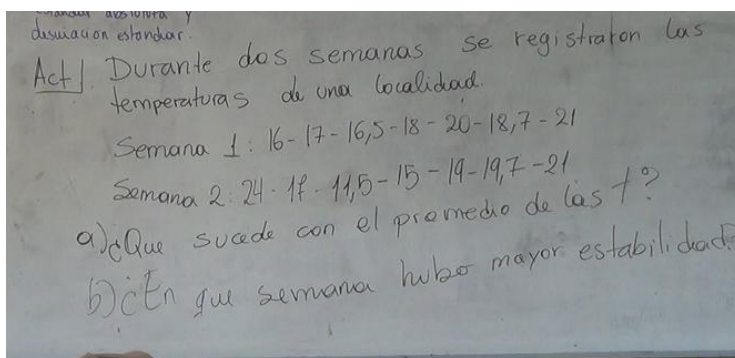
La explicación de Ely [del fragmento] nos aporta evidencia de conocimiento sobre **estrategias de enseñanza (KMT)**, dado que conoce que proponer una tabla disgregada [Extracto 2] es un elemento para que los estudiantes, de manera secuenciada, vayan realizando los cálculos de la desviación estándar. El uso de una tabla particionada por parte de Ely podría estar sustentada en el conocimiento de la profesora sobre las dificultades de aprendizaje de los estudiantes (KFLM) al usar la fórmula de la desviación estándar directamente. Sumado a esto, vemos que conoce diferentes ideas de medidas de dispersión, como la estándar y la media, pero que ambas se usan en contextos diferentes (KoT-definiciones).

X_i	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N}$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N}}$
En esta columna van los datos uno por uno.	En esta columna va la diferencia del dato con el promedio. Uno por uno.	En esta columna va el resultado anterior elevado a 2.	En esta columna va el resultado de la suma de todos los datos anteriores.	En esta columna va la suma anterior dividida entre el total de datos.	En esta columna va la raíz cuadrada de la división anterior.

Extracto 2 de la Tabla para el cálculo de la desviación estándar general realizado por la docente en la pizarra durante su clase

A partir de la definición de la desviación estándar, y la tabla para secuenciar los cálculos por parte de los estudiantes, Ely escribe en la pizarra dos conjuntos de datos (no tabulados) correspondientes a muestras de temperaturas en dos semanas diferentes para comparar su dispersión (Extracto 3). A partir de esto se da la siguiente interacción:

- Prof.: Tengo una propuesta, ¿qué dicen ustedes? hagamos un ejercicio
Est: ¡No!
Prof.: Recuerde que la desviación estándar nos permite comparar; por lo tanto, tenemos que calcular dos desviaciones estándar, ¿hacemos todos una conmigo, y la otra la hacen solos, o de a dos. “Durante dos semanas se registraron las temperaturas de una localidad: Semana 1: 16-17-16,5-18-20-18,7-21



Extracto 3 de las muestras de las temperaturas de dos ciudades diferentes

Prof.: En su cuaderno, debajo de las preguntas van a copiar la primera fila. Recuerden que la fila es así (realiza un gesto moviendo la mano de derecha a izquierda) copian solo la primera fila en su cuaderno solo la parte de arriba.

La profesora explica “a la general [se refiere a la desviación estándar] le vamos a decir la mamá de todas para no confundirla con la desviación estándar absoluta” (C3 - L88)

haciendo la referencia con la fórmula escrita en la pizarra $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, dando entender a los estudiantes que existen diferencias entre las fórmulas de desviación estándar y la desviación media, mostrando que conoce la diferencia entre la **definición (KoT)** de la desviación media y la desviación estándar de una muestra. En esta misma explicación menciona “yo tengo que la desviación estándar absoluta va a ser menos sensible a los datos atípicos”, evidenciando que conoce aspectos contextuales de la desviación estándar que devienen de la influencia de cierto tipo de datos (atípicos) en la medida de la desviación estándar (**KoT-fenomenología**).

A partir del comentario de Ely: “la desviación estándar es la mamá de todas” en relación con la desviación media, profundizamos en la entrevista, preguntando porqué llama de esta forma a la desviación estándar. Al respecto nos respondió:

Prof.: “(...) Con casi nada de lenguaje ... Lenguaje formal de la matemática es super lógico y relevante en lo matemático o estadístico. Se entiende, sin embargo, hay al menos en el contexto donde trabajo no hay mucho vocabulario. Y ese y esa limitante influye mucho el momento de la enseñanza en verdad (...) (Preg3- L52)

En la respuesta de la profesora encontramos evidencia de la profesora en relación con **KPM (papel de los símbolos y lenguaje formal)**, pues conoce la relevancia que tienen los símbolos y los mecanismos de comunicación (uso de lenguaje formal) para comunicar ideas estadísticas. No obstante, su utilización en el aula, de acuerdo con su contexto y el escaso vocabulario de los estudiantes limita el aprendizaje. En este sentido, y dado que conoce las **dificultades de los estudiantes en el aprendizaje (KFLM)** relacionadas con el lenguaje formal, es que utiliza un vocabulario estadístico más informal para profundizar en la



comprensión de algunas ideas estadísticas, apoyados en algunas de estas metáforas para el aprendizaje de los estudiantes.

Continuando con la explicación de la desviación estándar, la profesora hace hincapié en la utilización de la desviación estándar para comparar dos muestras. Para ello presenta a los estudiantes una tarea de comparación de muestras, mostrando que conoce tipos de tareas (**KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**) para explicar, por medio de la comparación de muestras, la dispersión de dos distribuciones.

Luego de presentar la tarea de la comparación de muestras, deja un tiempo libre a los estudiantes para resolver la tarea propuesta. Con las respuestas de los estudiantes, utiliza la tabla, realizando los procedimientos, de manera secuenciados, junto con los estudiantes explicitando cada uno de los elementos de la fórmula, con lo que evidenciamos que conoce los **procedimientos (KoT-¿cómo se hace?)** necesarios para calcular la desviación estándar. Termina la clase, realizando una síntesis de lo trabajado en la clase.

3.3. Análisis del conocimiento especializado de la profesora en la clase 3

La profesora inicia su clase, retomando la actividad de la clase dos sobre la comparación de las muestras de las temperaturas [Extracto 3 de la clase 2]. A partir de la actividad plantea a los estudiantes la siguiente pregunta “¿Cuál de las dos muestras de datos (semana 1 y 2) [Extracto 3 clase 2] presenta una mayor variabilidad?”. En seguida, la profesora realiza una explicación de los conceptos de promedio y desviación, comentando: “la desviación estándar pretende medir la variabilidad de los datos con respecto a la media, es decir, cuánto se separan o se dispersan [...] y vean que debe ser en relación con una medida de centro, en este caso es la media aritmética, que en el fondo es como aquel valor que se ubica en el centro de una distribución, funcionando cuando ésta es más menos simétrica”. A partir de lo que comenta la profesora evidenciamos que Ely conoce los aspectos conceptuales que subyacen al cálculo de la media y la desviación estándar (**KoT-fenomenología**), es decir, el fenómeno de dispersión, asociado a la desviación estándar, y el de centralidad, asociado a la media aritmética.

Posteriormente, la profesora establece y explica que las dos muestras de datos (semana 1 y 2) no pueden compararse de manera directa, solo a partir de la desviación estándar o sólo a partir de la varianza, pues no tienen un punto común, es decir “cuando se tienen dos muestras de datos, uno pensaría que a mayor desviación estándar la muestra es más dispersa [...] pero esto no es tan así, sólo se puede (de manera informal) cuando tiene una media que es más menos aproximada”. De lo que plantea Ely, vemos que conoce que la comparación de dos muestras no sólo depende de la desviación estándar, es decir, conoce que la media aritmética (\bar{x}) es una **conexión auxiliar (KSM)** de la desviación estándar (s).

C3 – U1

Seguidamente, en una tabla (Extracto 5) muestra las estadísticas de la media y la desviación estándar.



Prof.:

	estatura	peso
\bar{x}	160	70
σ	16	14

Extracto 5 de la tabla con las estadísticas para dos conjuntos de datos

Bien, la desviación estándar me indica qué tanto se alejan nuestros datos del promedio, [...] pero la medida era super importante. Haber ¿y que es la media? ¿Cómo se entiende?

Est: Profe, la media saca sumando todos los datos que aparecen ahí [refiriéndose a la muestra], y despues se dividién por el total

Prof: y cómo yo voy a saber que justamente este es (señala a la desviación estándar de la estatura) mayor que el de acá (señala a la desviación estándar del peso) si lo que estoy viendo son variables distintas. Nosotros anteriormente comparábamos las mismas unidades de medidas, por ejemplo, cuando hacíamos la desviación estándar de notas [...] Acá por ejemplo como voy a comparar la estatura con el peso, a pesar de que tengo las desviaciones estándar, pero la desviación estándar del peso es menor, si, la profe me dijo si es menor entonces tiene mayor desviación, esta perfecto, pero es lo que llevamos hasta el momento pero que pasa acá porque ahora esto ya como que no nos sirve. Por lo tanto, la relevancia que cobra el coeficiente de variación es relevante, pues permite comparar las dos muestras (en porcentaje) relativamente de la siguiente manera $CV_1 = \frac{16}{160} = 0,1$ y $CV_2 = \frac{14}{70} = 0,2$. ¡¡¡Ven!!! Y si los multiplican por 100 sabrán que mientras mayor el cv, mayor es la dispersión.

A partir de la idea sobre la precisión que se debe tener al comparar la variabilidad de los datos sólo a partir de la desviación estándar, Ely introduce y explica el concepto y el cálculo del coeficiente de variación ($CV = \frac{s}{|x|}$), y poder comparar la variabilidad de ambas muestras de manera relativa. Inician la aplicación de este concepto mediante cálculos, y finalmente, logran interpretar y llevar a cabo la comparación para muestras de variables diferentes (peso y estatura) en relación con la homogeneidad.

C3 – U2

Después de abordar estos aspectos en la comparación de la homogeneidad de dos muestras, la profesora procede a realizar una recapitulación de todo el contenido tratado en las clases anteriores, generando la reflexión al plantear la siguiente pregunta “Si las muestras



tienen la misma media y mediana ¿Significa que las muestras son idénticas?”, abarcando temas como la media, mediana, desviación estándar absoluta y general, así como la presencia de datos atípicos y la comparación de las estadísticas resultantes.

A partir de las respuestas de algunos estudiantes, la profesora se percató que la respuesta de los estudiantes alude al procedimiento del promedio, más que a su significado, pero no era lo que ella estaba preguntando y lo enfatiza con la siguiente pregunta “*Qué es, no cómo se calcula*”, lo que podría ser un indicio de conocimiento sobre las dificultades que tienen los estudiantes para diferenciar los aspectos procedimentales de los conceptuales (*KFLM-dificultades y debilidades*). La profesora más bien hizo mención de que su pregunta se orientaba más a la utilidad del promedio, queriendo priorizar el análisis del promedio por sobre el cálculo de éste.

Finalizando, la profesora explica sobre las muestras de las semanas (del extracto 5), comparando la desviación estándar de ambas variables, comentando “*nosotros anteriormente comparábamos las mismas unidades de medida, (...) pero en ningún momento vimos como lo deberíamos hacer cuando teníamos dos unidades distintas*”. El énfasis que hace Ely nos muestra que conoce que dos variables con diferentes unidades de medida no pueden ser comparadas, por su naturaleza contextual (**KoT-fenomenología**).

Y así mismo, la profesora dice “*yo puedo decir a ya, pero la desviación estándar del peso es menor, si, la profe me dijo si es menor entonces tiene mayor desviación, (...) pero que pasa acá porque ahora esto ya como que no nos sirve*”. Al mencionar la consideración en la comparación de la desviación estándar y las unidades de medida, puede ser indicio de que conoce que los estudiantes pueden tener dificultades de aprendizaje en la diferenciación unidades de medida y comparación con medidas de variabilidad (**KFLM-fortalezas y dificultades**). En la misma explicación que hace Ely, termina mostrando (de manera rápida) el procedimiento para el cálculo del coeficiente de variación, lo que da cuenta que conoce los mecanismos de cálculo para esta medida (**KoT-procedimientos**).

Se muestran, en la Tabla 1, las evidencias e indicios de conocimiento especializado movilizado por la profesora en la enseñanza de la desviación estándar.

Tabla 1. Conocimiento especializado movilizado en la enseñanza de la desviación estándar

Conocimiento Matemático (MK)	
Evidencia/indicio	
Subdominio KoT	<ul style="list-style-type: none">- Conoce la forma de calcular la desviación estándar.- Conoce los mecanismos de cálculo del coeficiente de variación, con la media y la desviación (procedimientos).- Conoce las características de los resultados que emanan de la desviación estándar (procedimientos).
	<ul style="list-style-type: none">- Conoce las definiciones de la desviación media y la desviación estándar, mostrando sus diferencias (Definiciones, propiedades y sus fundamentos).



	<ul style="list-style-type: none"> - Conoce diferentes representaciones algebraicas para calcular la desviación de los datos (Registros de representación).
	<ul style="list-style-type: none"> - Conoce el fenómeno de la dispersión que subyace al concepto de dispersión y su relación con los valores atípicos y los sesgamientos (Fenomenología). - Conoce que las variables con unidades de medida diferentes no se pueden comparar dado el contexto desde donde se miden (Fenomenología). - Conoce nociones conceptuales y de contexto relacionados con la media (centralidad) y la desviación estándar (dispersión) (Fenomenología).
Subdominio KPM	<ul style="list-style-type: none"> - Conoce el papel de los símbolos y su relevancia en los mecanismos de comunicación (uso de lenguaje formal) para comunicar ideas estadísticas (Papel de los símbolos y el lenguaje formal).
Subdominio KSM	<ul style="list-style-type: none"> - Conoce que la media aritmética (\bar{x}) se conecta con la de la desviación estándar (s) (de manera auxiliar) en el análisis de la variabilidad de los datos (Conexiones auxiliares).
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	
Evidencia/indicio	
Subdominio KMT	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Conoce que una estrategia de enseñanza para la dispersión sería iniciar con representación gráfica y tabulares, y no solo la fórmula</i> (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). - Conoce tipos de tareas de la desviación estándar (de baja demanda), centradas en el cálculo, que apoyan la interpretación. - Conoce ejemplos específicos para ilustrar la noción de datos atípicos y su influencia en la variabilidad (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).
Subdominio KFLM	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Conoce las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje relacionadas con el lenguaje estadístico formal</i> Fortalezas y dificultades). - Conoce las dificultades de los estudiantes en relación con los aspectos procedimentales y conceptuales Fortalezas y dificultades). - Conoce las dificultades de aprendizaje de los estudiantes al diferenciar las unidades de medida y la comparación con medidas de variabilidad.
	<ul style="list-style-type: none"> - Conoce la forma en como los estudiantes interactúan con el contenido estadístico, en relación con el uso del lenguaje de la profesora al enfatizar la noción de dispersión (Formas de interacción con un contenido matemático).

4. DISCUSIÓN

A partir de todo el proceso de aula que involucró la enseñanza de la desviación estándar, evidenciamos la conformación de prácticas específicas al enseñar (Llinares, 1999), no solo los aspectos procedimentales de la desviación estándar, sino que algunos elementos conceptuales que la hacen distintiva de un objeto matemático per sé, como es el caso de



diferenciar los fundamentos fenomenológicos de la desviación estándar (como sus significados). En este sentido, tanto las evidencias, como los indicios permiten establecer un acercamiento preliminar en los conocimientos especializados del profesor de Matemáticas en el contexto de la enseñanza de la estadística.

El uso del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) ha sido una herramienta analítica para acercarnos y explorar el conocimiento de una profesora en esta primera idea de construir y proponer una matización del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas en la enseñanza de la estadística en enseñanza media, lo que se ha explorado escasamente. Esto forma parte del aporte de la presente investigación, dado que el conocimiento de la profesora es movilizado en situaciones complejas (Zakaryan et al., 2018), lo que involucra poner en juego diferentes conocimientos. En el caso de la estadística y su enseñanza cobra mayor relevancia, dado que diversos lineamientos curriculares proponen desarrollar y movilizar, en el aula, la resolución de problemas bajo un ciclo investigativo estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999, MINEDUC, 2019), dejando abierta la idea de explorar en las diversas relaciones de este conocimiento.

En este contexto, la investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas se ha remitido al contexto de la educación básica (De Vetten et al., 2017; Estrella et al., 2015; Vidal y Estrella, 2021), en las que se ha evidenciado un deficitario conocimiento del profesor en la enseñanza de la estadística en el aula escolar, aflorando, mayoritariamente, conocimientos relacionados con los procedimientos (algoritmización), y mostrando un foco mecanizado de la estadística y su enseñanza.

Es así, que, de acuerdo con lo reportado en investigaciones precedentes, nos propusimos extender estos trabajos, centrándonos en el profesor de Matemática que enseña estadística en educación media. A partir del análisis de las cuatro clases y la entrevista semiestructurada, es que identificamos evidencias e indicios de conocimientos especializados que moviliza una profesora cuando enseña desviación estándar. A partir de estos conocimientos identificados, evidenciamos, tanto Conocimientos Matemático [estadístico] del Contenido (MK), como Conocimientos Didáctico [estadísticos] del Contenido (PCK); en los subdominios KoT, KSM y KPM y en el KMT y KFLM respectivamente.

En relación con el Conocimiento Matemático [estadístico] del Contenido (MK), en el subdominio de los Conocimientos de los temas (KoT) se identifica la movilización de conocimientos en relación con los registros de representaciones (según su saber en el uso de gráficos comparativo de diferentes muestras y al conocer las fórmulas de desviación estándar y sus diferencias), en la fenomenología (al conocer y usar en sus clases el fenómeno de la dispersión de datos, como también, sobre la noción de sesgo a partir de los datos atípicos al analizar muestras) y, en procedimientos (ya que conoce procedimientos para comparar distintas muestras según un gráfico).

Además, se evidencia el conocimiento de la estructura matemática (KSM) en la categoría de conexiones auxiliares, la que se devela en la movilización que relaciona las medidas de dispersión y el origen de los datos sobre una misma unidad de medida, es decir,



conecta la noción de unidad de medida (de primaria) con la necesidad que la desviación estándar considera diversas unidades de medida para su interpretación en contexto estadístico. Además, la profesora moviliza conocimiento de la práctica matemática (KPM) (subdominios escasamente evidenciados en las investigaciones en contexto estadístico), específicamente sobre la relevancia del uso de símbolos y lenguaje formal.

Respecto al dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se reconocen evidencias e indicios en el subdominio del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), y sus categorías de Actividades, tareas, ejemplos y ayudas (ya que la profesora conoce estrategias para la aplicación del cálculo de la desviación estándar, además de conocer ejemplos y aplicaciones para facilitar el aprendizaje de medidas de dispersión).

En el subdominio de Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) se identifican evidencias e indicios sobre formas de interacción con el contenido estadístico, en relación con la forma en que los estudiantes trabajan aspectos de la desviación estándar, en el Conocimiento de fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje (ya que la profesora conoce posibles errores de los estudiantes cuando se trabaja con distintas unidades de medida (por ejemplo dejar la misma unidad de medida en la desviación estándar derivada de aplicar la raíz cuadrada positiva a la varianza). Esto, además, se evidencia a través de la entrevista realizada a la profesora, reafirmando que conoce las dificultades de los estudiantes sobre el vocabulario matemático y uso de simbología estadística.

Estos conocimientos se relacionan con las competencias a investigar (leer, interpretar gráficos y tablas) propuestas en Estrella et al. (2015), quienes plantean que la estadística tiene como motivación indagar en las competencias de docentes sobre análisis exploratorio de datos, estadística descriptiva, elementos de probabilidad e inferencia. Estas competencias se ven identificadas en la profesora cuando moviliza un conocimiento categorizado por Registro de representaciones (KoT), utilizando gráficos comparativos de muestra y los emplea para la enseñanza del concepto de dispersión de datos.

Así mismo, los conocimientos de la profesora se relacionan con los conceptos estadísticos fundamentales (Variable Estadística, información estadística y la interpretación de datos), tal como lo han propuesto Vidal y Estrella (2021) y Sánchez-Acevedo & Ruiz-Hernández (2020). Los conceptos fundamentales mencionados por Vidal y Estrella (2021) son consistentes con los hallazgos de evidencias de conocimiento de esta investigación, y que son movilizados por la profesora por medio del uso de la información estadística y la interpretación de datos, las que sirvieron como base para proponer actividades (KMT) para los estudiantes y facilitar la comprensión de contenido de desviación estándar.

5. CONCLUSIONES

En conclusión, este estudio se orienta en identificar los conocimientos especializados relacionados con la desviación estándar por parte de una profesora. También abre la posibilidad de expandir esta línea de investigación, indagando en la diversidad de



conocimientos movilizados por los docentes en enseñanza media en el área de la estadística. Dejamos abierta la posibilidad de indagar en las relaciones de conocimiento y el ciclo investigativo del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Además, aportamos a una posible matización del marco MTSK, considerando indicadores y categorizaciones de conocimientos en relación con la enseñanza de la desviación estándar sobre las posibilidades de extender y lograr una especificidad teórica y práctica de este modelo (MTSK) para el profesorado de Matemática en la enseñanza de la estadística. Esto incluye, tanto el dominio del Conocimiento Matemático del Contenido (KoT y KSM) como el Conocimiento Didáctico del Contenido (KMT y KFLM). Asimismo, se observa la necesidad de instar a futuros investigadores a realizar investigaciones que exploren en el conocimiento del profesor de matemáticas que enseña estadística en contexto escolar, considerando, otros subdominios del conocimiento especializado, como aquellos no evidenciados en esta investigación (KPM y KMLS).

REFERENCIAS

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.
- Brymann, A. (2016). *Social research methods* (Fifth Edition). Oxford University Press
- Burgess, T. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Mathematics Enthusiast*, 6(1), 3–24. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1130>
- Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICM/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., González, L. C. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, C. M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Sage Crites, T. y St. Laurent, R. (2015). Putting essential understanding of statistics into practice in grades, 9–12. National Council of Teachers of Mathematics.
- De Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R., Oers, B. (2017). *Informal statistical inference and pre-service primary school teachers: The development of their content knowledge and pedagogical content knowledge during a teacher college intervention*. <https://hal.science/hal-01927861>



- Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *Investigación en educación médica*, 2(7), 162-167. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S2007-50572013000300009&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Escudero, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas* [Contribución a Actas de Congreso]. <http://redcimates.org/test/>
- Estrella, S., Olfos, R., & Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*, 41(2), 477-493. <https://doi.org/10.1590/s1517-97022015041858>
- Flick, U. (2009). *An introduction to qualitative research (4th ed.)*. Sage Publications Ltd.
- Flores Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mtsk)*. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: ASA.
- González, M. T., Leiria, A. C., & Pinto, J. E. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. *PNA*, 10(1), 25-51.
- Groth, R. E. (2017). Developing Statistical Knowledge for Teaching during Design-Based Research. *Statistic Education Research Journal*, 16(2), 376-396. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i2.197>
- Harradine, A., Batanero, C., & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education (A Joint ICMI/IASE Study)* (pp. 235–246). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_24
- Jiménez Espinosa, A., Limas Berrío, L. J. & Alarcón González, J. E. (2016). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis & Saber*, 7(13), 127 - 152. <https://doi.org/10.19053/22160159.4169>
- Liñán García, M. M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5o de Primaria*. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/14230>
- Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Ponte y L. Serrazina (Orgs.). *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália—Atas da Escola de verão* (pp. 109-132). Lisboa: SEM/SPCE.
- Lougrhan, J., Mulhall, P. y Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education*, 30(10), 1301-1320. <https://doi.org/10.1080/09500690802187009>



- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. <http://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17719>
- MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación, República de Chile.
- MINEDUC (2020). *Programa FG: Matemática 3° medio*. Santiago de Chile: Mineduc. Recuperado de <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/140137:Programa-FG-Matematica-3-medio>
- Monteiro, R., Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática* 22, 123–138. <https://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/4106>
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. 3rd ed. Thousand Oaks: Sage.
- Peñaherrera, C., Segovia, V., Vasco, D., & Climent, N. (2021). Conocimiento especializado de un profesor universitario sobre medidas de centralización y de dispersión, aplicando el modelo MTSK. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 108, pp. 99-117.
- Pinto, J. (2009). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudio de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.
- Pinto Sosa, J. E. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación* [Universidad de Salamanca]. <https://doi.org/10.14201/gredos.76546>
- Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). *Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (Mkt) y las creencias del profesor* [Contribución a Actas de Congreso]. <http://funes.uniandes.edu.co/1835/>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4. <https://doi.org/10.2307/1175860>
- Sánchez Acevedo, N. A., & Ruiz Hernández, B. R. (2020). Análisis de las actividades propuestas en dos programas de estudio chilenos en el eje de Estadística y Probabilidad. *IE Revista De Investigación Educativa De La REDIECH*, 11, e776. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.776
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 33(2), 173-189. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522>
- Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Vidal-Szabó, P., & Estrella, S. (2021). Conocimiento estadístico especializado en profesores de educación básica, basado en la taxonomía SOLO. *Revista chilena de educación matemática*, 13(4), 134-148. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.81>



Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223 – 265.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105–123.

Nefthalí Reyes Yáñez. Licenciado en Educación (Universidad Central de Chile, Chile). Profesor de Matemática y Estadística (Universidad Central de Chile, Chile).

Nicolás Sánchez Acevedo. Ingeniero Estadística y Profesor de Matemática (Universidad de Playa Ancha/Universidad Andrés Bello). Magíster en enseñanza de las ciencias y matemáticas (Universidad de Playa Ancha) y Magíster en educación matemática (Universidad de la Frontera). Doctor (c) en matemática educativa (CICATA-IPN). Académico de la Facultad de educación, Universidad Central de Chile. Línea de Investigación: Conocimiento especializado y Didáctica de la Estadística.

Daniela Araya Bastías. Profesora de estado en matemática y computación (Universidad de Santiago de Chile). Magíster en Ciencias con especialidad en Matemática (Universidad de Santiago de Chile). Doctora en Educación Matemática (Universidad de los Lagos). Académica de la carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística (Universidad Central de Chile). Línea de Investigación: didáctica del cálculo y formación de profesores.

Felipe Huerta Molina. Licenciado en Educación (Universidad Central de Chile, Chile). Profesor de Matemática y Estadística (Universidad Central de Chile, Chile).

Yarod Bustamante. Licenciado en Educación (Universidad Central de Chile, Chile). Profesor de Matemática y Estadística (Universidad Central de Chile, Chile).



Todos los contenidos de esta revista se distribuyen bajo una licencia de uso y distribución “**Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional**”. Puede consultar desde aquí la [versión informativa](#) y el [texto legal](#) de la licencia. Esta circunstancia ha de hacerse constar expresamente de esta forma cuando sea necesario.