ASPECTOS CONCEPTUALES Y DIDÁCTICOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

CONCEPTUAL AND TEACHING ASPECTS OF ALGEBRAIC THINKING

ANDRÉS GONZÁLEZ RONDELL
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay, Venezuela
agorondell@yahoo.es

Fecha de recepción: 21 noviembre 2016
Fecha de aceptación: 16 enero 2017

RESUMEN

En el campo de la Educación Matemática lo atinente al álgebra educativa ha ido ganando un espacio específico; desde finales de la década del 70, luego del Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 3) celebrado en Alemania, se han estado desarrollando investigaciones que consideran la didáctica del álgebra y el pensamiento algebraico como focos de interés lo cual ha quedado expresado en una diversidad de constructos, enfoques, autores de referencia, líneas de investigación, además de libros y reuniones en las que se divulgan los hallazgos en este ámbito. Teniendo esto en mente, en este artículo presentamos el análisis de algunos aspectos conceptuales y didácticos relacionados con el álgebra escolar con el propósito de mostrar, discutir y dilucidar algunos de sus rasgos más relevantes. La información se obtuvo a partir de la revisión de distintas fuentes, impresas (artículos, libros y trabajos de investigación de maestría y tesis doctorales) y electrónicas (artículos, revistas y libros en línea), de autores venezolanos y extranjeros; también se tomaron en cuenta los trabajos presentados en algunos eventos de divulgación propios de la Educación Matemática, nacionales y extranjeros, tales como, RELME, CERME, CIBEM, ICME, CIAEM y COVEM.

PALABRAS CLAVE: Educación Matemática; álgebra educativa; pensamiento algebraico.

ABSTRACT

In the field of mathematics education it pertains to educational algebra has been gaining a specific space; since the late 70s, after the Third International Congress on Mathematics Education (ICME 3) held in Germany, have been developing research that considers the teaching of algebra and algebraic thinking as foci of interest which it has been expressed in a variety of constructs, approaches, authors reference, research, as well as books and meetings in which the findings are reported in this area. With this in mind, in this article we present the analysis of some conceptual and didactic aspects related to school algebra in order to show, discuss and clarify some of its most important features. The information was obtained from a review of different sources, printed (articles, books and research master's and doctoral theses) and electronic (articles, online magazines and books), Venezuelan and

González Rondell, A. (2017). Aspectos conceptuales y didácticos del pensamiento algebraico. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*. 3 (5), 7 – 38.

foreign authors; also they took into account the papers presented at some events own foreign disclosure of Mathematics Education, national and, such as, RELME, CERME, CIBEM, ICME, CIAEM and COVEM.

KEYWORDS: Mathematics Education; educational algebra; algebraic thinking.

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico ha sido considerado como una potente forma de pensar (Agudelo, 2013) a través del cual es posible elaborar abstracciones de la realidad así como también realizar concreciones de lo abstracto. Por esta razón, dicha forma de pensar “es útil para el análisis de situaciones de la vida real y la toma de decisiones; y, por consiguiente, cada ciudadano la necesita para poder participar activamente como miembro de una sociedad democrática” (p. 3). Por eso es necesario que las personas lo adquieran y desarrollen, durante su período de escolaridad. Sin embargo, en la investigación desarrollada por González (2016) se hizo evidente la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos algebraicos en todos los niveles del sistema educativo; además se reveló un contraste entre el pregonar de la importancia que tiene para los ciudadanos la adquisición de un sólido pensamiento algebraico durante su educación formal y la realidad observada. Esta caracterización logramos concentrarla en el terreno de la didáctica venezolana del álgebra en la que constatamos importantes insuficiencias teóricas y prácticas, ante lo cual emergió la necesidad de hacer una revisión de este ámbito específico de la Educación Matemática tomando en cuenta los aspectos didáctico e investigativo con el propósito de coadyuvar en la tarea que se han propuesto otros autores venezolanos y extranjeros como lo es la visibilización del álgebra escolar.

1.1. *OBJETIVO PROPUESTO*

Analizar algunos aspectos conceptuales y didácticos relacionados con el pensamiento algebraico.

1.2. *ÁMBITO METODOLÓGICO*

Esta investigación forma parte de una más amplia en la cual se indagó sobre algunos elementos del pensamiento algebraico de profesores de matemáticas en formación inicial en un contexto de enseñanza y aprendizaje del álgebra universitaria (González, 2016). Es un estudio desarrollado en el campo de la Educación Matemática entendida ésta como una disciplina científica emergente, con múltiples perspectivas teóricas y metodológicas para investigar sobre la complejidad de los asuntos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Por su naturaleza es una indagación de tipo documental consistente en la búsqueda y análisis de múltiples documentos en distintos formatos, por lo que la información se obtuvo a partir de la revisión de diferentes fuentes, impresas (artículos, libros y trabajos de investigación de maestría y tesis doctorales) y electrónicas (artículos, revistas y libros en línea), de autores venezolanos y extranjeros; también se tomaron en cuenta los trabajos presentados en algunos eventos de divulgación propios de la Educación

Matemática, nacionales y extranjeros, tales como, RELME, CERME, CIBEM, ICME, CIAEM y COVEM. Dicha información se organizó atendiendo a distintos criterios relacionados con la temática específica (epistemológico, didáctico, investigativo, entre otros) y con la naturaleza de la fuente consultada dando un resultado parcial como el que se presenta en este artículo.

2. Elementos Conceptuales

2.1. *Abstracción, generalización y formalización*

González (2005) señala que los procesos cognitivos son actividades específicas del ser humano mediante las cuales organiza e interrelaciona los datos que le aporta la experiencia (es decir la información que le provee el entorno) mediante otras acciones como adquisición, retención y transformación. Ligado a estas acciones están los procesos cognitivos los cuales se manifiestan de tres maneras: a través de la abstracción, la discriminación y la generalización. Entre los dos primeros procesos no es muy clara la diferencia. Consideremos, por ejemplo, las definiciones dadas por Lovell (1986): “Abstracción: acción y efecto de abstraer (abstrahere, sacar de, retirar), que significa ‘aislar mentalmente o considerar por separado’ (las cualidades o una cualidad de un objeto. Discriminación, de discriminar, que significa ‘separar, distinguir, diferenciar (una cosa de otra)” (p. 25). En todo caso, señala este autor, tanto en la abstracción como en la discriminación se hace presente la generalización.

En relación con la abstracción puede decirse que es una facultad de los seres humanos que, mediante complejos procesos mentales, les permite hacerse una imagen simplificada del entorno o la realidad aislando detalles. Por ejemplo, desde un punto de vista matemático, señala Bell (2002), “el círculo matemático de Euclides es el producto de una simplificación deliberada y de la abstracción de los discos observados entonces, como el de la luna llena, que a simple vista parece circular” (p. 18), de tal manera que con la simplificación y abstracción de las observaciones de los sentidos “las matemáticas enfocan los campos de las ciencias y de la vida diaria con nuestro corto entendimiento y hacen posible una descripción racional de nuestras experiencias, que concuerdan perfectamente con las observaciones hechas” (Bell, 2002, p. 19).

Por su parte, la generalización es un mecanismo de abstracción que permite la captación y selección de características comunes en un conjunto de ocurrencias o instancias para crear una categoría de mayor nivel que las contenga a todas, ésta viene a ser la clase de dichos eventos, es la representante de todos. El mecanismo contrario, es decir, el proceso de construir una instancia que reúna todas las características de la clase representante se denomina particularización.

Un ejemplo de actividad orientada a la generalización en el nivel escolar es aquel mediante el cual, a partir de unos casos particulares en una secuencia (numérica, geométrica, pictórica, figurativa o ideográfica) el estudiante debe construir un término particular o general. A manera de ilustración, en la siguiente sucesión 1, 4, 9, 16, 25… ¿cuál es el término que ocupa la posición enésima? En la construcción de la respuesta puede observarse la regularidad de que hay alternancia entre números impares y pares; sin embargo, dado que no es una característica que los englobe a todos se debe continuar la búsqueda. Una característica globalizadora es que todos son cuadrados perfectos, pero aún este dato está incompleto pues no son cualesquiera cuadrados perfectos, sino que lo son del respectivo ordinal. De tal forma que la respuesta (generalización buscada) es que en la posición n estará el número n^2. Este número general constituye la categoría de mayor nivel del que se habla en el párrafo precedente.

En el ejemplo anterior vale la pena hacer dos comentarios: (1) Obsérvese como se hace presente un efecto polisémico del símbolo ya que la letra n sirve para denotar tanto el ordinal como el respectivo cardinal de la sucesión, y (2) constituye un caso de generalización considerando el análisis de unos casos particulares, esto es, no involucra la deducción, proceso al cual debe orientarse la enseñanza en segunda instancia.

Desde el punto de vista del álgebra universitaria, en el estudio de las estructuras de grupo y espacio vectorial el estudiante debe comprender que éstas pueden interpretarse como categorías que subsumen las propiedades de conjuntos junto a operaciones conocidas desde el nivel medio de la escolaridad. Por ejemplo, el concepto de grupo engloba las estructuras de los números enteros y de los polinomios junto con las operaciones de adición en cada caso; mientras que el de espacio vectorial lo hace con el de matrices, entre otros.

En torno a lo planteado sobre abstracción y generalización pueden presentarse discrepancias sobre cómo se relacionan. Por ejemplo, para Esquinas (2009), la abstracción propicia la generalización, por lo que para esta autora es posible mencionar una diferencia entre ambos procesos. Según su punto de vista, la abstracción es una característica fundamental (natural) del ser humano, mientras que la generalización no lo es, en el sentido de que debe fomentarse su desarrollo mediante actividades específicas y adecuadas.

Por otra parte, lo formal está relacionado con el buen uso de los símbolos. En este sentido la lógica ha hecho una contribución enorme; pues desde esta perspectiva es claramente diferenciable lo sintáctico y lo semántico. En este contexto la formalización tiene que ver con el manejo correcto del simbolismo con independencia de los significados. Así, se dice que un razonamiento[1] formal es el proceso de establecer uno válido sin importar el contenido semántico de los símbolos involucrados. La pregunta de trabajo es: ¿Se sigue la conclusión de las premisas? Por ejemplo, la figura 1 es un esquema para identificar un tipo de razonamiento general. En éste, a partir de una implicación lógica se llega a concluir el consecuente con solamente afirmar el antecedente. Dicho esquema es conocido como regla de inferencia del *Modus Ponendo Ponens* (modo de afirmar afirmando). Se dice que esta regla representa un razonamiento válido ya que la forma proposicional $[(p \to q) \wedge p] \to q$ es una tautología, con lo cual la conjunción de las premisas implica lógicamente la conclusión. En consecuencia, para cualesquiera significados proposicionales de las letras p y q se tendrá un razonamiento válido.

[1] El razonamiento es un proceso que puede ser estudiado desde los puntos de vista psicológico y lógico. En ambos casos tiene que ver con los procesos mediante los cuales a partir de una o varias premisas se obtiene una conclusión, es una clase especial de pensamiento llamada inferencia. En el caso de la lógica se interesa sólo por el estudio del razonamiento sin atender al contenido del mismo.

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

Figura 1. Regla del Modus Ponendo Ponens

Freudenthal (1983) señala que "un lenguaje es puramente formal si sus expresiones se pueden manejar, imitar y comprobar si son correctas (esto es, si exhiben la regularidad requerida) sin prestar atención a su significado, que quizá sea incluso absurdo" (p. 3). Esto sólo es posible mediante el manejo del significado de los elementos lingüísticos significativos y dominar el funcionamiento de los elementos estructurantes (Freudenthal, 1983, p. 3).

En el caso de las prácticas relacionadas con el álgebra es más frecuente el uso de un sistema matemático de signos (SMS) que un sistema lingüístico formal como la lógica, pues en el primero la formalización está basada en el buen manejo de ese sistema mixto que surge al combinar el lenguaje natural con el lenguaje simbólico; además, la formalización también se asocia con la sistematización del proceso de demostrar.

2.2. Concepto y conceptualización

El conocido *mito de la caverna* de Platón es una metáfora según la cual, dado que estamos atrapados por nuestros sentidos, el mundo que conocemos sólo es la sombra proyectada en la pared de la *caverna de la realidad* por ideas puras que al nacer nos son incubadas en nuestra alma. Platón demuestra así como el conocimiento siempre es una proyección de nuestras ideas innatas. Este mito permite ilustrar como el conocimiento y la construcción de conceptos han sido motivos de gran interés desde la antigüedad con los aportes de Platón, Sócrates y Aristóteles, aproximadamente en el siglo IV antes de Cristo, suscitando grandes polémicas científicas y filosóficas que van desde la interpretación del conocimiento como una asociación entre estímulo y respuesta pregonado por el conductismo y sus diversas corrientes hasta desembocar en su comprensión desde el pensamiento complejo (Morín, 2007).

En el siglo XX el estudio de los conceptos adquirió un papel notorio luego de la segunda Guerra Mundial con el auge de las Ciencias Cognitivas; a partir de entonces tuvieron un impulso considerable a través del desarrollo de las teorías cognoscitivistas del aprendizaje; particularmente emergieron aquellas que establecen una metáfora del funcionamiento de la mente humana con la actividad electrónica que despliegan las computadoras en lo relativo a la producción, almacenamiento, recuperación, etc., de la información, surgiendo así las teorías vinculadas con el procesamiento de la información. Algunas de ellas son las denominadas teorías Computacionales (Pozo, 1994), entre las que destacan la Teorías ACT (Control Adaptativo del Pensamiento) de Anderson (1982) y la Teoría de los Esquemas de Rumelhart y Norman (1978). En este contexto los conceptos se manejan a través de redes semánticas, entre otros términos. Pero, y ¿qué es un concepto? Tal noción es un asunto complejo del cual mostraremos algunos puntos de vista. Para Lovell (1986):

> Un concepto puede ser definido como una generalización a partir de datos relacionados, y posibilita responder a, o pensar en, estímulos

> específicos o perceptos[2] de una manera determinada. Por esto, un concepto, equivale a un juicio y se utiliza como un criterio. (p. 25)

El anterior autor hace su señalamiento tomando en cuenta lo que ocurre con los niños. El criterio que menciona tiene que ver con el carácter potencial de la generalización para convertirse en concepto, ya que desde su punto de vista una generalización queda ahora como una "hipótesis (por ejemplo, esto es un triángulo, esto es un invertebrado) que tiene que ser comprobada ensayándola sobre nuevos especímenes" (Lovell, 1986, p. 25). Por lo tanto, el concepto se considera formado cuando la generalización, puesta a prueba en una circunstancia particular, logra identificarla como integrante o no de la generalización.

Desde otro punto de vista, para González (2005) un concepto es la representación lingüística de una idea abstracta que capacita a quien la posee para clasificar objetos o eventos y para decidir si son ejemplos o no de la idea abstracta en cuestión.

Ahora bien, desde la teoría de los campos conceptuales se hace más compleja esta noción ya que se afirma que un concepto es una tripleta formada por "el conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere" (Godino, 2003, p. 36).

También, es posible comprender mejor un concepto mediante el conjunto de las relaciones dinámicas que lo ligan con otros conceptos, en los problemas en que se aplica, y en los procedimientos y estrategias que se elaboran para resolver esos problemas (Radford, 1995).

Para D´Amore (2009), no es fácil separar el "concepto" de su proceso de construcción, ya que un concepto se halla en una fase continua de construcción, y es en esta misma actividad de edificación que se halla la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado. Reconociendo la extraordinaria complejidad de este constructo este autor indica dos aspectos que lo caracterizan en el caso de las matemáticas: (a) todo concepto matemático remite a "no-objetos", en el sentido de que la conceptualización no puede basarse sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras en matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos; y, (b) es obligatorio servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar; por lo que la conceptuación debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos.

La conceptualización se sustenta sobre los objetos a los que son referidos y las relaciones que se establecen con otros objetos de su misma naturaleza (González, 2005). En este proceso, el lenguaje y los símbolos matemáticos intervienen ciertamente en la

[2] Este término fue acuñado por Gilles Deleuze (filósofo francés, 1925-1995) con el cual establece una diferencia con respeto a las nociones más conocidas de concepto y percepción. Alude a los paquetes de sensaciones que se relacionan entre sí y que se mantienen en aquel que las experimenta. En el contexto expuesto hace referencia al paquete de sensaciones que tienen los niños de su entorno. Se trata entonces que el niño transite del percepto al concepto.

conceptuación "porque capacitan al individuo para captar y aclarar los conceptos o actúan como un marco de referencia" (ob. Cit. p. 26).

Para cerrar este breve apartado, es importante considerar la posición de Freudenthal (1983) quien contrapone la idea de objeto mental a la de concepto, lo cual no es algo trivial pues como señala Puig (1997) el objetivo de la acción educativa ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales, y solo en segundo lugar la adquisición de conceptos. Para entender esta posición debe considerarse el punto de vista fenomenológico de Freudenthal (1983), es consecuencia de considerar cómo las personas conciben o usan las Matemáticas frente a las Matemáticas como disciplina o como conjunto de saberes.

Para resumir, en la siguiente tabla podemos contrastar los puntos de vista en relación con los conceptos, en ella podemos identificar ideas disímiles que ameritarían un análisis más detallado que el que exponemos en este artículo.

Tabla 1. Comparación de la noción de concepto

Autor	Atributos del concepto
Lovell (1986)	Carácter potencial de una generalización
González (2005)	Representación lingüística
Godino (2003)	Tripleta formada por el conjunto: (1) De situaciones que hacen significativo el concepto. (2) De invariantes que constituyen el concepto. (3) De representaciones simbólicas usadas para representarlo junto a sus propiedades y las situaciones relacionadas.
Radford (1995)	Interactivo: En conexión con otros conceptos, en los problemas en que se aplica, y en los procedimientos y estrategias que se elaboran para resolver esos problemas.
D´Amore (2009)	Indisolublemente ligado a su construcción (concepto y conceptualización).
Freudenthal (1983)	Contrapuesto a la noción de objeto mental.

2.3. Índice, símbolo e ícono

En el análisis que realizamos es frecuente el empleo de los términos signos, símbolos y significante. A pesar de su naturaleza diferente, en la enseñanza de la Matemática, es usual hacer equivalentes el signo y el símbolo. Sin embargo, es conveniente tener claro su diferenciación conceptual.

El signo en la perspectiva de Charles Sanders Peirce (1839-1914) posee tres características definitorias: (1) es una entidad triádica, significado, significante y cognición interpretante (para F. Saussure, 1857-1913, la noción de signo es diádica, significante/significado); (2) no es estático; y, (3) no es arbitrario (la relación triádica no es arbitraria). Además los signos pueden ser de tres tipos: íconos (del griego e*ikon)*, índices (etimológicamente, *dedo que señala*) y símbolos. "Los íconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar, incluso si el objeto no existiera" (Puig, 2003, p. 177). Mientras que "los índices no se parecen a los objetos, sino que los señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen" (ob.cit, p. 177).

Podemos decir entonces que una diferencia entre estos dos signos estriba en las sensaciones que activan en el interpretante, por un lado el ícono induce a la reflexión; y, por otra parte, el índice hacia la acción. En el caso del símbolo éste tiene que ver con lo convencional, es decir con lo acordado del signo, el ejemplo más emblemático lo constituye la bandera de un país. Los símbolos no siempre son intuitivos o sobrentendidos para todas las personas, sino que se requiere una preparación previa para su dominio (Mora, 2006).

En la enseñanza de las Matemáticas cabe destacar que Puig (2003) cataloga las expresiones algebraicas como íconos pues en ellas convergen letras (índices) y los signos +, =, etc. (símbolos); y, tomando en cuenta, según este autor, que suscitan una interpretación global.

En todo caso, lo referido al signo y a su aprehensión está fuertemente ligado a la cultura, vale decir al contexto en que son propuestos. Desde el punto de vista de la teoría vygotskyana, señala Papini (2003), que resulta importante la apropiación de los signos de la cultura y el impacto que ellos provocan en el desarrollo de las personas, por lo que coloca esta teoría en un lugar sumamente interesante para tratar de explicar la apropiación de los signos propios del álgebra.

2.4. Lenguaje matemático

Establecer relaciones entre las nociones lenguaje, Matemáticas y pensamiento es una tarea extremadamente compleja. Sólo al tratar de definir cada uno de estos términos se empiezan a percibir las complicaciones. Además de los signos, el lenguaje también es considerado por Vygotsky (1979) como una herramienta fundamental en el desarrollo de la inteligencia. Por otra parte, el papel del lenguaje en la Matemática es un asunto de interés indagatorio que ha sido revisado desde distintos ángulos (Pimm, 2002; Beyer, 2006; Freudenthal, 1983; Rojano, 1994). Existen varios acercamientos en este sentido tales como, Matemáticas y lenguaje, el lenguaje de las Matemáticas, y las Matemáticas como lenguaje. Esta última manera de plantear la relación ha estado sobre el tapete desde los años noventa luego de un giro experimentado con relación al foco en las investigaciones de lo cognitivo a lo lingüístico.

Interpretar las Matemáticas como lenguaje (Pimm, 2002; Rojano, 1994; Freudenthal, 1983) tiene implicaciones en su didáctica, pues una hipótesis fundamental es que, continuando con esta metáfora (Lakoff y Núñez, 2000), su enseñanza debe asumirse como el de una lengua extranjera, esto significa que el centro de atención no debe ser el idioma como tal mismo sino su potencial comunicativo (Pimm, 2002). Para este autor el propósito principal de su obra es construir las Matemáticas en términos lingüísticos, pues con este acercamiento se pueden formular cuestiones que de otro modo no se podrían considerar importantes. En Beyer (2006) este autor claramente se distancia de la postura que considera la Matemática como lenguaje. En su lugar, asume que "la Matemática es un producto socio-cultural el cual tiene asociado un lenguaje" (p. 70).

Beyer (2002) define el lenguaje como un "sistema de signos sujetos a una serie de reglas sintácticas dentro de un campo significativo que permiten la comunicación entre un emisor y un receptor en el ámbito de un sistema comunicacional" (p. 147). De acuerdo con esta definición, es posible considerar metafóricamente, en el sentido de Lakoff y Núñez

(2000)[3] el lenguaje como un sistema axiomático. En efecto, los términos no definidos lo constituyen estos signos, así éstos pueden interpretarse como unidades de símbolos elementales o atómicos, y constituyen el alfabeto de ese lenguaje. Mediante reglas de sintaxis preestablecidas es posible hacer combinaciones de estos signos para formar nuevos símbolos de mayor complejidad, los cuales son llamados palabras (Beyer, 2002, p. 148).

Desde el punto de vista de la didáctica, Beyer (2002) define el lenguaje matemático como el que emplea una persona para trasmitir ideas matemáticas a otra persona. Por ejemplo obsérvese como el español funciona como un metalenguaje pues es un lenguaje que se usa para enseñar otro lenguaje.

Por otra parte, algunos autores, como Martí (1997), lo definen enfatizando el rol de los símbolos y la sintaxis. En consecuencia, este autor establece una diferenciación con el lenguaje natural dado el doble papel que debe jugar el lenguaje matemático. Por un lado, están sus reglas de composición y corrección; y, por otro, sus herramientas de notación precisas, explícitas, abstractas, de alcance general, y fundadas en significados matemáticos previamente adquiridos, en palabras de este autor:

> Al igual que el lenguaje natural, el lenguaje matemático se refiere a entidades Matemáticas (números y sus relaciones, transformaciones y operaciones) y es empleado para pensar y hablar de dichas entidades. Pero en un mayor grado que el lenguaje natural, el lenguaje matemático tiene una vida propia, regida por reglas precisas de composición que garantizan la corrección de sus expresiones. (p. 233)

Duval (2015) señala cuatro funciones discursivas de la lengua con las cuales es posible responder al para qué de un lenguaje: designar los objetos, con lo cual se puede decir algo sobre ellos, de tal manera que tome un valor epistémico (por ejemplo, enunciar una proposición), generar otras proposiciones a partir de una proposición dada y, finalmente, integrar a la proposición enunciada su valor de toma de responsabilidad epistémica por parte de quien la enuncia.

Esta organización tiene implicaciones en lo concerniente a la enseñanza de las matemáticas, pues como lo indica Duval (2015), en este contexto, en algunos casos se reduce el lenguaje a la función discursiva de designar objetos.

Por su parte, Freudenthal (1983) establece la distinción de tres niveles de lenguaje en matemáticas: nivel ostensivo, nivel funcional, y nivel de las convenciones simbólicas que permiten tomar en cuenta variables.

2.4.1. Lenguaje algebraico

Freudenthal (1983) es una referencia obligada al hablar de lenguaje algebraico, en su libro estudia su caracterización. Para este autor la modelización y la generalización son partes explícitas de un proceso más general que él describe como sustitución formal.

[3] Para estos autores una metáfora se la puede interpretar como la comprensión de un dominio en términos de otro dominio.

En la antigüedad las Matemáticas se expresaban a través del lenguaje natural y geométrico, sin embargo en la actualidad el lenguaje algebraico ha sido un sustituto extraordinario; en efecto, el álgebra simbólica es el lenguaje básico de la Matemática. Para Rojano (1994), una de sus principales características es la "de ser un lenguaje que se autoexplica, esto es, en él no sólo es factible expresar los teoremas sino también demostrarlos" (p. 45).

El lenguaje algebraico se caracteriza por tener un alfabeto complejo en el que se emplean: letras de los alfabetos griego y latino para denotar los objetos matemáticos, símbolos numerales con distintos significados (exponente, subíndice, coeficientes, etc.), signos de agrupación como los paréntesis, signos de mayor y menor, signo de igualdad, entre otros.

Además, este lenguaje puede considerase como "el medio a través del cual se expresa matemáticamente una generalización" (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005, p. 123); mientras que Papini (2003) se vale del sentido metafórico, pero manteniéndose en un nivel operatorio al expresar que este lenguaje "funciona como una memoria que conserva la huella o la traza de las operaciones efectuadas" (p. 54).

En este contexto es muy frecuente que se presenten los fenómenos lingüísticos conocidos como sinonimia y polisemia. El primer caso ocurre cuando un mismo objeto matemático es representado de formas diversas, esto es, distintas notaciones teniendo el mismo significado. Es lo que sucede, por ejemplo, en el ámbito de los números reales con los siguientes símbolos diferentes, pero que representan el mismo objeto: $\{x \in R | -3 < x \leq 1\}$ y $(-3,1]$. En torno a esto la teoría de Duval (1995, 2006) logra caracterizarlo con la introducción del concepto de registro de representación y la naturaleza de los cambios en tales registros.

La polisemia tiene que ver con el hecho de que una notación particular tenga asociados distintos conceptos. Por ejemplo, en Teoría de Números el símbolo (a,b) puede interpretarse como el máximo común divisor entre los enteros a y b; mientras que en álgebra lineal representa el producto interno entre los vectores a y $\boldsymbol{b}$; en Análisis simboliza el segmento de recta (o intervalo) comprendido entre los reales a y b; y en Geometría Analítica se refiere a un punto del plano cartesiano. Como un caso significativo (por las reiteradas confusiones de las que es objeto) destacamos el signo "$-$". Este puede significar el símbolo de una operación monaria como en el caso de $-x$, ó el símbolo de una operación binaria como en el caso de la sustracción. Es bastante frecuente que en la enseñanza coexistan los dos significados, un ejemplo de esto se tiene cuando se plantean operaciones del tipo 5-(-2). Beyer (2006) analiza con amplios detalles los casos de sinonimia y polisemia del lenguaje matemático.

El símbolo de igualdad es un caso interesante de la polisemia, pues éste tiene varias connotaciones, algunas de las cuales se describen en González y González (2014) con las cuales se consiguen variadas interpretaciones de este símbolo. Una de estas que es conveniente destacar son identidad y ecuación. Por ejemplo, las siguientes igualdades no tienen la misma naturaleza: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $2a+1=0$, la primera es una identidad pues siempre es cierta sin importar los valores de las letras *a* y *b*; mientras que la segunda es una ecuación ya que solo es válida cuando el valor de *a* es $^{-1}\!/_{2}$.

2.4.2. Simbolismo y sistema matemático de signos (SMS)

Charbonneau (1996) considera el simbolismo como elemento central del álgebra, pero "no la totalidad del álgebra" (p. 35), lo concibe como un idioma que puede condensar la presentación de un argumento y como un medio para resolver problemas.

Ahora bien, desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas existe una relación paradójica entre símbolo y objeto significado, ello obedece a que para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él, tal como nos lo señala Pimm (2002): "en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo" (p. 222); de manera que la práctica es la de manipular y efectuar transformaciones en el signo que representa al objeto como una manera de acercarse a él. Sin embargo, es menester tener claro que el símbolo jamás sustituye al objeto, el cual existe en la abstracción del pensamiento con entidad propia y con independencia de su imagen concreta representada por su significante. Un ejemplo emblemático de lo que exponemos ocurre con la idea de número (que es una abstracción) y el numeral correspondiente; en la práctica (como ocurre en algunas partes de este artículo) es habitual que se fundan y se confundan hasta el punto de hablar de números binarios, romanos, etc., y hasta es común que se definan algunas propiedades aritméticas en función de las características del símbolo.

Lo anterior puede suponer una dificultad para el estudiante si no logra aprehender el objeto matemático que subyace en la simbolización. Todo esto ocurre a pesar de que en matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos, sino para sustituirlos por otros (Radford, 2012; Duval, 1995), es lo que se conoce como cambio de representación.

Esta situación, entre otras consideraciones, justifica que actualmente la semiótica[4] haya generado un interés para algunos investigadores en el ámbito de la Educación Matemática debido también a dos razones fundamentales que toman en cuenta: la actividad matemática se ha considerado esencialmente simbólica; y, porque los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que la hacen un campo apropiado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos (Radford, 2014).

En este contexto, es importante también tener claro lo relacionado con el papel desempeñado por las representaciones (Radford, 2014; Duvald, 2006), las cuales pueden ser pictóricas, geométricas, numéricas, tabulares, algebraicas y verbales. Se considera clave que los docentes hagamos conscientes a los estudiantes de ellas y promover el control sobre los cambios de un registro a otro. Además, también son importantes, siguiendo a Britt e Irwin

[4] Para Radford (2014) hay, por lo menos, tres tradiciones semióticas claramente diferenciadas: (1) La del suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913), quien emplea el término semiología; (2) la de Charles Sanders Peirce (1839-1914), quien acuñó el término semiótica; y, (3) la del psicólogo ruso Lev S. Vygotsky (1896-1934).

(2008), reconocer la articulación con sistemas semióticos tales como, palabras, gestos, imágenes, gráficos y símbolos.

Además, Radford (2012), quien ha investigado sobre los procesos de generalización, señala que el estudio de los medios semióticos de objetivación utilizados por los alumnos para lograr el dominio de tales procesos puede ayudar a comprender cómo ellos dotan de sentido los símbolos algebraicos.

En el proceso de emergencia y consolidación del simbolismo, además del lenguaje natural, se pueden destacar los componentes geométrico y algebraico. El lenguaje geométrico fue durante mucho tiempo el modo en que se expresaba la Matemática, el cual fue cayendo en desuso con el devenir del lenguaje algebraico, a través del cual se expresa toda la Matemática en la actualidad. Con respecto a este último se han establecido tres períodos, retórico, sincopado y simbólico[5]. Sin embargo Puig (1998) y Sessa (2005) cuestionan esta organización por el énfasis que hace del aspecto escritural en detrimento de la naturaleza de los problemas y los mecanismos de solución empleados.

Ahora bien, desde el punto de vista histórico la introducción y adopción del simbolismo matemático no respondió a una planificación sistemáticamente organizada; contrariamente su implementación, acogida e implantación se produjo lentamente y luego de una cadena de eventos en los que se muestra el componente profundamente humano del desarrollo de la Matemática a través del tiempo.

Como ejemplos ilustrativos referiremos los casos del símbolo de igualdad (=) y pi (π); el primero, como símbolo ya había sido usado, pero sin el significado tan universal que tiene hoy en día; por ejemplo, el francés F. Viete (1540-1603) lo utilizaba para expresar la diferencia entre dos cantidades, así escribía *7 = 2 aequale 5*. Fue el inglés Robert Recorde (1510-1558) quien lo propuso formalmente en su obra *The Whetstone of Witte* (La Piedra de afilar el ingenio, 1557) con la idea de que *no puede haber dos cosas más iguales que dos rectas paralelas*. Sin embargo, no fue sino luego de cien años después de haberse formulado que esta propuesta se expandió y masificó su uso de una forma que hoy en día resulta imprescindible. En González y González (2014) se exponen con mayor detalle otros aspectos relacionados con su evolución como símbolo matemático.

Con respecto a π, se trata de una letra correspondiente a la inicial de las palabras griegas *περιφέρεια, περίμετρος* y *περίμετρον* equivalentes en español a periferia, perímetro y circunferencia, respectivamente. Actualmente, en la escolaridad, de forma preponderante se emplea para representar la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (existen evidencias de que las civilizaciones egipcia, griega, china, india y mesopotámica conocían y manipularon esta relación mediante diversas aproximaciones). Como símbolo matemático π fue empleado por primera vez por el inglés William Oughtred (1574-1660) en sus obras *Clavis Mathematicae* (1631), *Circles of Proportion and the Horizontal Instrument* (1632) y *Trigonometria with Canones Sinuum* (1657). Luego, el matemático galés William Jones (1675-1749) es quien lo propone formalmente; sin embargo, hubo que esperar el año 1748 para que Leonhard Euler lo popularizara en su obra *Introducción al cálculo*

[5] Tal periodización la propuso en 1842 G. H. F.Nesselmann en un libro intitulado *Die Algebra der Griechen* (El álgebra de los griegos)

infinitesimal a través de la extraordinaria igualdad que lleva su nombre: $e^{\pi i}+1=0$, en la que ingeniosamente aparece involucrada con la unidad imaginaria, el número *e* y los neutros multiplicativos y aditivos. Hoy en día son conocidas algunas de sus propiedades matemáticas tales como que representa un número irracional, trascendente y en consecuencia no algebraico.

El establecimiento del simbolismo ha significado una transformación extraordinaria en la manera de hacer, enseñar y aprender Matemáticas pues se trató de una revolución en el lenguaje matemático, particularmente en el algebraico, que durante mucho tiempo estuvo basado en el lenguaje natural, permitiendo con ello el tránsito hacia el álgebra simbólica; la trascendencia de este hecho es analizado por Gómez-Granell (1997) de la siguiente manera: "El uso de la notación mediante letras posibilita la independencia con respecto al objeto que se representa, el símbolo cobra entonces un significado que va más allá del objeto simbolizado" (p. 208).

Sin embargo, es importante revelar algunas limitaciones que tiene tal uso metafórico de los objetos matemáticos. En efecto, este sistema de símbolos rápidamente se extendió y popularizó haciendo olvidar, como advierte Pimm (2002), que el Álgebra "en el sentido de la formulación y manipulación de expresiones de generalidad, puede construirse sin necesidad de emplear letras, utilizando, por ejemplo, palabras o símbolos no alfabéticos" (p. 193); es decir, a pesar de que en la práctica de manipulación el símbolo sustituye al objeto, es necesario tener conciencia de la ambigüedad que los une y/o separa. Lo particular aquí no es que el símbolo no sea un buen representante del objeto, pues el problema no se presenta en la representación como tal, sino que el concepto matemático que aspira representar es probable que se desnaturalice, se pierda en el nivel de las operaciones que ejecuta el estudiante, y esto es posible pues se opera sobre el símbolo sin intentar ver si las operaciones que se desarrollan son significativas en términos del objeto que éste representa (Artigue, 2003).

En consecuencia, como se ha dicho, la dificultad queda expresada en la posible confusión del alumno al interpretar el objeto matemático a través del signo, lo que a su vez no es algo trivial tomando en cuenta que "en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo" (Pimm 2002, p. 222), de tal manera que es posible creer que se opera sobre el objeto cuando se efectúan transformaciones en el signo que lo identifica.

Lo referido al papel que ha jugado el simbolismo resulta de enorme importancia para la Matemática al punto que Devlin (2003) afirma que una gran parte de ella sería imposible sin el empleo de símbolos. En relación con su estudio Pimm (2002) ha establecido una categorización que comprende cuatro tipos: logogramas, pictogramas, símbolos de puntuación y símbolos alfabéticos. En la tabla 1 presentamos un resumen de la caracterización que propone este autor.

Tabla 2. Clasificación de los símbolos matemáticos

Tipo	Definición	Ejemplos y comentarios
Logogramas	Formas inventadas para referirse a conceptos totales, sustituyen palabras completas, no se utilizan fuera de contextos matemáticos.	Dígitos del cero al nueve. +, -, ÷, %, ∧,∨,˚, √, ∩, ∫, =, <, > El símbolo para señalar la igualdad pudo haber tenido un origen icónico y pictográfico. Según Pimm (2002) los logogramas < y > aun cuando sugieren su significado no son pictográficos en un sentido estricto (pues no tienen un origen geométrico)
Pictogramas	Íconos geométricos Los pictogramas son símbolos cuyo exterior delata lo que significan (Freudenthal, 1983)	□, ○, Δ, < (ángulo), Z (ángulos alternos), F (ángulos correspondientes)
Signos de puntuación	: ¡ [({ * / ‘ . ,	No siempre tienen el mismo uso que en la ortografía convencional. En algunos casos actúan como modificadores de otros símbolos. Por ejemplo el apóstrofo, como en f', permite distinguir una función de su derivada. Llama la atención que el signo de interrogación es muy poco usado.
Símbolos alfabéticos	Alfabeto romano Alfabeto griego (con sus correspondientes mayúsculas y minúsculas)	Sujetos a una serie de convenciones. Aceptación del sistema Descartes (1637): las letras iniciales se usan para los parámetros y las finales para las variables, contra la propuesta de F. Viete (1540-1603) en la que las vocales fuesen variables mientras que las consonantes representasen los parámetros. Otros ejemplos de convenciones son: Conjunto: mayúscula (y en minúscula sus elementos). F: Campo (field en inglés). K: cuerpo (körper en alemán). Letras consecutivas para denotar objetos semejantes. Letra inicial del objeto para denotarlo. Combinación de alfabetos diferentes para establecer categorías; como en m, s para la media y desviación típica de una muestra; mientras que σ y μ para los parámetros de la respectiva población. Inicial de alfabeto diferente para indicar el objeto; por ejemplo, Δ (delta mayúscula) denota el discriminante de una ecuación cuadrática.

En torno al desarrollo de la simbología matemática existen algunos relatos fascinantes (y en algunos casos curiosos) que han despertado el interés en algunos historiadores de la Matemática y que han escrito libros sobre ello, por ejemplo es de destacar el clásico libro sobre la historia de las notaciones Matemáticas de Cajori (1993).

Sin embargo, también es importante tomar en cuenta que según Puig (2003) los símbolos matemáticos adquieren importancia a la luz de sus relaciones con el lenguaje natural, lo que significa que no debieran constituir un fin en sí mismos. Para caracterizar mejor su planteamiento relacional emplea el concepto de Sistema Matemático de Signos (SMS) con el cual alude a la conjunción o combinación de los signos matemáticos propiamente dichos y el lenguaje natural, pues a fin de cuentas es esta sinergia sígnica la que propicia la generación de significados; y por ello enfatiza que no se trata de un sistema de signos matemáticos ya que en palabras de este autor, "lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos" (p. 181).

3. Pensamiento Algebraico

Lovell (1986), siguiendo la perspectiva psicogenética de Piaget, en la cual son importantes las acciones, define el pensamiento como una fluencia conexa de ideas dirigidas hacia cierto fin o propósito" (p. 30). De acuerdo con esta definición "todo pensamiento depende de actos" (p. 30).

Dewey (1989) define el pensamiento como "una imagen mental de alguna realidad, siendo el hecho de pensar una sucesión de tales ideas" (p. 23). Su punto de vista es pragmático razón por la que debe entenderse la complejidad de este proceso pues "el material de pensar no son los pensamientos, sino las acciones, los hechos, los sucesos y las relaciones de las cosas" (Dewey, 2002, p. 138). En consecuencia, de acuerdo con la perspectiva de este autor, "pensar eficazmente supone haber tenido, o tener ahora, experiencias que nos ofrezcan recursos para vencer la dificultad que se presenta" (p. 138). Aún más, en este proceso un asunto clave lo constituyen las dificultades siendo éstas las condiciones indispensables para pensar, siempre que con tales no se oprima ni se abrume al estudiante pues con ello se allana el camino para el desánimo.

Estas ideas adquieren una relevancia particular en el contexto de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en razón de algunos procesos básicos que le son propios como la resolución de problemas, la manipulación de signos y el uso de medios tecnológicos como recursos didácticos con los cuales se busca generar experiencias de aprendizaje efectivas.

Ahora bien, en lo que respecta al *pensamiento matemático* puede entenderse como las formas en que piensan las personas cuando se enfrentan a un contenido matemático específico (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, y Garza, 2003). De acuerdo con estos autores este constructo no está enraizado en los fundamentos de la Matemática ni su práctica le pertenece a los matemáticos puros, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, razón por la cual tiene muchos niveles y profundidades.

Sin embargo, adentrándose un poco más en la caracterización del pensamiento matemático es posible detectar sus complejidades; en este sentido, Giménez (1997) afirma que este tipo de pensamiento se orienta básicamente a: (a) Matematizar situaciones a partir del mundo real, (b) reflexionar sobre las situaciones presentadas, (c) alcanzar abstracciones y actuar según procesos deductivos, y (d) desarrollar aplicaciones que permitan volver a la realidad. Según este autor, este pensamiento, contiene una componente horizontal que lo impulsa a analizar una misma situación desde diversos puntos de vista y supone también una componente vertical de desarrollo cognitivo cada vez más abstracto. Esto último revela toda su complejidad pues tiene que ver con el uso de un lenguaje matemático de forma fluida, involucra tanto la resolución como el planteamiento de problemas, significa realizar argumentaciones críticas, la elaboración de demostraciones y el reconocimiento de conceptos matemáticos en distintas situaciones.

Por otra parte, el Pensamiento Algebraico es un tipo de pensamiento matemático el cual se caracteriza por la capacidad para revertir operaciones, deducir lo general en lo particular (e inversamente), reconocer patrones, hacer una buena interpretación del signo de igualdad, saber modelizar matemáticamente y comprender el uso de las letras.

Estudiando los procesos de generalización Radford (2010) propone una tipología del pensamiento algebraico determinada por los medios semióticos de objetivación movilizados. Tal tipología comprende, el Pensamiento Algebraico factual, El Pensamiento Algebraico Contextual y el Pensamiento Algebraico Simbólico.

Sostiene Palarea (1998) que el "conocimiento algebraico se construye a través de manipulaciones e investigaciones de expresiones formales y además de cambios en paralelo desde simbolismo a metamorfosis conceptuales" (p. 5). Es decir, se trata de ejercer control sobre el uso de los símbolos.

Por otra parte, el pensamiento algebraico también se emplea para identificar un área de investigación en Educación Matemática. Desde este punto de vista, según Socas (1999), se estudia e investiga acerca de "los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el sistema educativo y en el medio social" (p. 261).

Relacionado con lo anteriormente expuesto cabe destacar los trabajos presentados en el VI Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (CERME 6), en Lyon, Francia, entre el 28 de enero y el 01 de febrero de 2009. En dicho Congreso se organizaron quince grupos de trabajo, el grupo número 4 se tituló pensamiento algebraico y Educación Matemática en el cual se presentaron veinticinco trabajos cuyos asuntos de interés indagatorio se relacionan con este ámbito. También, se resaltan los estudios del grupo español de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

3.1. ALGUNOS PROCESOS PROPIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

3.1.1. Reconocimiento de regularidades y patrones

Un acontecimiento anecdótico de la historia de la Matemática relacionado con los patrones y la importancia de su reconocimiento puede servir de introducción para motivar esta parte del trabajo. Se trata del episodio ocurrido durante la infancia de Carl Friedrich Gauss. Se cuenta que su maestro como reprimenda por algún mal comportamiento, y buscando mantenerlo ocupado le ordenó sumar todos los números desde uno hasta cien[6], es decir, obtener el resultado de 1+2+3+4+…+97+98+99+100. Lo que hizo Gauss fue lo siguiente: obtuvo la suma de las siguientes parejas: (1,100), (2, 99), (3, 98), (4, 97),…, (50,51), es decir, la suma de los extremos de este arreglo. Al hacerlo reconoció el patrón el cual consiste en que todas estas parejas la suma es *ciento uno*, entonces como en total se trata de cincuenta parejas, la suma pedida viene dada por el producto 50(101)=5050.

[6] No sabemos si esta anécdota es cierta, pero en todo caso nos muestra que esta conducta, absolutamente reprochable, de usar la Matemática como instrumento de castigo no es nueva, esta actitud docente es causa segura de muchos odios infundados hacia el quehacer matemático escolar.

Salvo el mal uso escolar narrado anteriormente no es común en la enseñanza de la Matemática el empleo de los patrones para motivar, explorar y propiciar la comprensión del álgebra escolar, no obstante la afirmación de Zazkis y Liljedahl (2002) de que "los patrones son el corazón y el alma de las matemáticas" (p. 379); frase análoga a la de Halmos (1980), quien asigna este papel a los problemas. Plantean que "a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de los números enteros, la exploración de los patrones no siempre se destacan por sí misma como un tema o una actividad curricular" (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 1).

Un ejemplo de patrón, pero que no es reconocido como tal, se consigue en los libros de texto generalmente usados por los docentes a través de ejercicios para determinar si un número dado es o no es racional; por ejemplo, al considerar los números (a) 4,23485385385385...; y, (b) 3,010010001....

Luego de analizar el primer ejercicio, se detecta la presencia de un patrón consistente en la repetición infinita (en el sentido griego de posibilidad o proceso en desarrollo) del número 538; en el segundo, el patrón radica en que después de un uno la cantidad de ceros es una unidad mayor que la cantidad anterior. Como el primero contiene un período, se concluye que es un número racional (usando la propiedad de que un número real es racional si, y sólo si tiene expresión decimal periódica); mientras que en el segundo el mismo patrón indica que es imposible la existencia de un período por lo que no es racional. Se trata entonces, de una buena práctica para el reconocimiento de patrones, pero que usualmente pasa desapercibida en la enseñanza de la Matemática.

En este contexto cabe destacar el concepto de razonamiento matemático. Giménez (1997) lo considera como el "conjunto de enunciaciones y procesos asociados que se llevan a cabo para fundamentar una idea en función de unos datos o premisas y unas reglas de inferencia" (p. 70). En él convergen cuatro procesos: reconocimiento, inducción, iteración y recursión.

El reconocimiento es utilizado como sinónimo de descubrimiento y explicitación de patrones a partir de una situación dada. Esto supone otros subprocesos tales como: (a) Observar regularidades; (b) identificar descriptivamente situaciones; y, (c) interpretar situaciones similares, entre otros. A través de la inducción se busca la formulación de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Con la iteración se repite un cierto razonamiento o procedimiento. Finalmente, la recursión se ejecuta cuando se hace un procedimiento aparentemente circular para poner en práctica un proceso iterativo.

Con respecto al término patrón cabe destacar que no es propio del lenguaje matemático, ni apunta hacia un área específica dentro de su amplio universo ya que el mismo corresponde a una noción "meta-matemática" (Da Ponte, 2009); por ello es posible, según este autor, hablar de patrones en cualquier rama de la Matemática con configuraciones y propiedades propias en cada caso, por lo que no resulta sencillo identificar aspectos que sean comunes.

Desde el punto de vista matemático Andonegui (2009) define patrón como:

> Secuencias de números o de gráficos cuyos elementos se obtienen a partir de cierta regla estable que se va aplicando a cada elemento de

> la secuencia para obtener el siguiente, de tal modo que cada elemento guarda cierta relación con la posición que ocupa. (p. 30)

El término regularidad alude a la repetición de un fenómeno en diversas instancias que bien pueden ocurrir en un contexto informal como científico; es decir, dicha repetición puede estar asociada al tiempo, las experiencias de la vida cotidiana, entre otros; también puede emparentarse con los términos compás o ritmo. En el caso de las ciencias, y particularmente las matemáticas, estudiar las regularidades constituye un eje transversal.

Por su parte, Da Ponte (2009) observa la complementariedad entre los términos regularidad y patrón, en ese sentido afirma:

> El término patrón apunta a la unidad de base que se repite, de forma exactamente igual o de acuerdo con alguna ley de transformación, mientras que regularidad remite a la relación que existe entre los diversos objetos, aquello que es común a todos ellos o que de algún modo los une. Patrones y regularidades son, por tanto, dos puntos de vista complementarios. (p. 170)

De acuerdo con esta afirmación, es legítimo usar la conjunción de los términos patrón y regularidad, entendiendo que el primero alude a lo empírico, lo objetivo de la situación mientras que el segundo corresponde a lo conceptual, es decir lo abstracto de la misma. En todo caso, la regularidad subsume al patrón.

Steen (1998) concibe las matemáticas como lenguaje y ciencia de los patrones. En este sentido afirma que "ver y revelar patrones ocultos es lo que mejor hacen los matemáticos" (p. 7). Este interés por los patrones ha permitido que durante las dos últimas décadas del siglo XX se haya propuesto una nueva definición de la Matemática con la cual prácticamente la totalidad de los matemáticos está de acuerdo: "*mathematics is the science of patterns*" ("la Matemática es la ciencia de los patrones") (Devlin, 2003, p. 3).

Sin embargo, el estudio de patrones y regularidades no debe plantearse como un objetivo en sí mismo, pues como lo advierte Da Ponte (2009) esto puede dar origen a diversos malos entendidos e incomprensiones. El ejemplo anterior sirve para ilustrar como el patrón funciona como instrumento para estudiar el número racional.

Además, no todas las generalizaciones de patrones son algebraicas. Por esta razón, en el uso de patrones como recurso didáctico, se debe tener mucho cuidado en no confundir generalizaciones algebraicas con otras formas de generalización (Radford, 2010).

3.1.2. Modelación

Para este apartado también es importante el aporte de Freudenthal (1983) para quien el tratamiento de los contenidos en la enseñanza de las Matemáticas debe considerar los fenómenos sociales o naturales que son significativos para los estudiantes.

En relación con la enseñanza de las matemáticas basadas en las aplicaciones y en la modelación comenta Mora (2016):

> Ésta ha sido una de las tendencias más importantes en la educación matemática, ya que las mismas, desde tiempos muy remotos, se han venido desarrollando gracias a la diversidad de problemas prácticos cuyas soluciones requieren, casi siempre, la aplicación de conceptos matemáticos que van desde la matemática elemental hasta teorías matemáticas altamente complejas. (p. 202)

Como tendencia, son muchas las investigaciones que se han realizado considerándola como método de enseñanza con distintos contenidos y en diferentes niveles de escolarización, sin embargo, aún queda mucho camino por recorrer si se toma en cuenta, por ejemplo, el papel que juega la tecnología y lo relacionado con el tema de las representaciones. Además, de su implementación bajo las múltiples perspectivas que coexisten en la Educación Matemática.

Algunos autores establecen diferencias entre los términos modelización matemática y modelación matemática. En el primer caso se trata de las aplicaciones científicas para solucionar problemas de otras áreas con apoyo de la Matemática, mientras que en el segundo se hace un abordaje educativo pues trata de las aplicaciones de la modelización con fines didácticos, caso en el cual el término modelación es visto como una contracción de las palabras modelización y educación (Bassanezi y Biembengut, 1997). En la tabla 2 pueden apreciarse algunas diferencias entre ambos procesos establecidas por Villa (2007).

Este proceso es considerado como una potencial alternativa para mejorar lo que se ha denominado enseñanza tradicional de la matemática, además permite el desarrollo del pensamiento algebraico mediante la implementación de otros cuatro procesos, a saber: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (Villa, 2007).

En el contexto venezolano Ortiz (2000) ha impulsado el trabajo de modelación aprovechando las múltiples aplicaciones del álgebra lineal mediante el uso de calculadoras graficadoras específicamente en la formación inicial de profesores de matemática.

Tabla 3. Algunas diferencias entre los procesos de Modelización y de Modelación

Criterio	Como actividad científica	Como herramienta en el aula
Propósito del modelo	El modelo se construye para solucionar un problema de otras ciencias (Naturales, Sociales, Humanas) o para avanzar en una teoría o ciencia.	El modelo se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar motivación e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo.
Los conceptos matemáticos	Emergen de la situación a través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno.	Deben haber sido considerados a priori con base en la preparación y selección del contexto por parte del docente y de acuerdo con los propósitos de la clase.
Contextos	Obedecen a problemas que comúnmente no han sido abordados o se emprenden de una manera diferente al interior de la ciencia.	Deben obedecer a problemas abordados previamente por el docente de la clase con el objeto de evaluar su pertinencia con los propósitos educativos.
Otros factores	Se presenta generalmente en un ambiente propio de la ciencia en la cual se aplica y generalmente es externo a factores educativos.	Se presenta regularmente en el aula bajo una motivación propia de contextos cotidianos y de otras ciencias

3.1.3. Generalización

La generalización es el proceso de abstracción mediante el cual, a partir de la detección de regularidades en una serie de eventos, se construye una categoría que los contenga a todos. Es un aspecto muy importante en los procesos del pensamiento algebraico al punto que autores como Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) lo consideran definitorios; para estos autores uno de los rasgos distintivos del pensamiento algebraico es su manera de abordar el proceso de generalización matemática, es decir del proceso mediante el cual se logra el paso de lo concreto a lo abstracto. Sin embargo, para Kieran (1989), "la generalización no es equivalente al pensamiento algebraico, ni siquiera requiere el álgebra. Un componente necesario es el uso del simbolismo algebraico para razonar sobre y para expresar esa generalización" (p. 165).

Existen diferentes perspectivas acerca de la relación entre el razonamiento algebraico y la generalización. Kieran (1989) sugiere que para que la generalización sea algebraicamente significativa no es suficiente con ver lo general en lo particular, sino que también se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente.

Según Dörfler (1991), citado por Zazkis y Liljedahl (2002), dado que la generalización es a la vez un objeto y un medio de pensar y comunicar, en la actividad matemática es posible distinguir entre generalización empírica (GE) y la generalización teórica (GT).

La GE se basa en el reconocimiento de las características o las cualidades comunes de los objetos, según los autores citados puede considerarse "problemático" en la enseñanza de la matemática decidir en cuanto a la determinación de las cualidades que son relevantes para la generalización. Es decir, cuestionan la GE por su falta de un criterio para decidir lo que es esencial, sin posibilidad de generalizar más allá de la exhibición de ejemplos particulares.

La GT, por el contrario, es a la vez intensional y extensional (dos conceptos propios de la lingüística). Comienza con lo que Dörfler refiere como un "sistema de acción", en el que los invariantes esenciales se identifican y se sustituyen por prototipos. Esta generalización se construye a través de la abstracción de estos invariantes esenciales. Las cualidades abstractas son las relaciones entre los objetos, en lugar de los objetos en sí mismos.

Sobre lo dicho, podemos afirmar entonces, que la GE se basa sobre aspectos superficiales de los objetos y enfatiza diferencias aparentes, mientras que la GT se sustenta sobre fundamentos profundos y subyacentes. Por ejemplo, un estudiante cuya sustentación sea la GE tendrá dificultad para comprender que los conjuntos de los números racionales y los números enteros tienen la misma cardinalidad, similarmente para un estudiante de Álgebra con igual sustentación le será complicado asumir que existen estructuras *esencialmente iguales* en virtud de un isomorfismo, tal como ocurre, por ejemplo, entre (R, +) y $(\mathrm{R}^{+},\ .)$. En ambos casos se requiere de una generalización teórica. Obviamente, para que un estudiante alcance tal grado de GT tiene que ser entrenado.

Por su parte, Harel y Tall (1991, citados por Zazkis y Liljedahl (2002), utilizan el término generalización para significar "la aplicación de un argumento dado en un contexto más amplio" (p. 38). Distinguen entre tres diferentes tipos de generalización: (1) expansiva, donde se amplía la gama de aplicabilidad de un esquema existente, sin necesidad de reconstruirlo; (2) de reconstrucción, en el cual el esquema existente se rehace con el fin de ampliar su rango de aplicación; y, (3) disyuntiva, donde se construye un nuevo esquema mediante el cambio de contexto.

Debemos alertar con respecto a la tercera categoría anterior, dado que en ella el sujeto construye un nuevo esquema, para tratar con la nueva situación y lo incorpora en el pensamiento como un esquema nuevo. En este contexto, por ejemplo, no se reconocerá un cuadrado que repose sobre uno de sus vértices, ante esta posibilidad totalmente contextual el estudiante (en esta categoría) requerirá de un nuevo esquema (concepto) para ajustarlo a la nueva situación.

De acuerdo a la clasificación anterior, creemos que la generalización a la cual debe orientarse una clase de matemáticas es la generalización expansiva debido a que es ahí en que realmente se logra una generalización del esquema existente, aplicándolo sin recurrir al diseño de nuevos esquemas.

Además de los tipos de generalización presentados anteriormente es importante considerar el concepto de *generalización espontánea* propuesto por Panizza (2009) quien con esta expresión resume la actividad de generalización puesta en práctica por los estudiantes en el contexto de tareas que no requieren encontrar ninguna regularidad basándose en asociaciones locales de algunos ejemplos que no son representantes de los objetos de referencia. En el estudio que llevó a cabo esta autora concluye que "los estudiantes de pre-universitarios hacen diferentes tipos de generalizaciones espontáneas en contextos de la explicación, prueba o descubrimiento, sin tener conciencia de la necesidad de la justificación de las conclusiones, ni habilidades para el diseño de control" (p. 596).

Para destacar la importancia de este proceso en el desarrollo del pensamiento algebraico la revista UNO le dedica completamente su volumen de abril-junio del 2015.

4. Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra

4.1. *Interpretaciones del Álgebra*

El vocablo *álgebra* tiene un origen remoto relacionado con los procesos puestos en práctica al resolver ecuaciones lo que al fin de cuentas era una metáfora de una definición ya en desuso tal como el "Arte de restituir a su lugar los huesos dislocados" (RAE).También se ha relacionado con el nombre de Al-Jwarizmi a través de su libro *Alkitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa'l-muqâbala*, que Puig (1998) traduce como *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala.* Los términos *Al-jabr* y *muqâbala* son de difícil traducción literal, pero se han destacado. El primero significa, aproximadamente, restauración o completación (relacionado con la metáfora anterior), que en lenguaje actual consiste en la transposición de términos cuando se resuelve una ecuación. Mientras que el término *muqâbala* alude a la reducción o compensación, el cual no es más que la simplificación de términos semejantes.

Por otra parte, el Diccionario de la RAE (2016) la define así:

> Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita.

La anterior definición difícilmente logre satisfacer a cualquier lector que haya dedicado parte de su tiempo bien sea a su aprendizaje como a su enseñanza, pues dista mucho de su interpretación moderna. En realidad, definirla no es labor sencilla pues, como sostiene Kaput (1996) el Álgebra es compleja tanto en sus estructuras como en la multiplicidad de sus representaciones. Según este autor no existe una sola Álgebra, ya que puede entenderse ésta desde diversos puntos de vista: epistemológico, ontológico y metodológico. En consecuencia, para este investigador, puede ser interpretada como: (a) Generalización y formalización: Comprende el Álgebra como razonamiento aritmético generalizado y como razonamiento cuantitativo generalizado (punto de vista epistemológico); (b) Manipulación de formalismos, guiada por la sintaxis (Metodológico); (c) El estudio de las estructuras abstraídas de las relaciones y los cálculos (Ontológico); (d) El estudio de las funciones, relaciones y variaciones conjuntas (Ontológico); y; (e) Un conjunto de lenguajes de creación de modelos y lenguajes de control de fenómenos (Metodológico).

Como se puede ver, dadas las múltiples interpretaciones, definir álgebra es una tarea muy compleja. Según Da Ponte, Branco y Matos (2008), la categorización anterior va a tener un impacto sobre lo que se considera como característico del pensamiento algebraico, por ejemplo significa que no se puede reducir el trabajo algebraico a la manipulación del simbolismo formal, contrariamente "significa ser capaz de pensar algebraicamente en una diversidad de situaciones" (p. 90).

4.2. Álgebra educativa

En 1976, se celebró en la ciudad de Karlsruhe, Alemania, el Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 3). La importancia de este evento es que a partir de él la Educación Matemática dio un giro extraordinario pues comenzó su desprendimiento de las teorías de aprendizaje neutrales con las cuales durante mucho tiempo se buscó encarar y estudiar los problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Matemática; desde entonces las investigaciones se focalizaron en el estudio de estos fenómenos a través de contenidos matemáticos específicos. Particularmente los contenidos de álgebra se consideraron en el seno del grupo Psicología de la educación Matemática (PME, son sus siglas en inglés), grupo surgido en el ICME 3. Desde entonces se impulsaron distintas investigaciones sobre el aprendizaje de los objetos algebraicos, el simbolismo, entre otros. Una de esas primeras investigaciones fue la realizada por Küchemann (1981) quien en 1976 trabajó con tres mil alumnos británicos entre trece y quince años en el marco del proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science). Buscaba analizar las interpretaciones que los estudiantes hacen de las letras que aparecen en las expresiones algebraicas, detectando seis usos que hoy en día se han validado con el desarrollo de múltiples investigaciones. Luego, al inicio de la década de los ochenta se acuñó el término *álgebra educativa* (Filloy, 1999) como una forma de concretar el espacio científico específico.

El álgebra educativa puede entenderse como método y como objeto. En el primer caso, Serres (2007) la define como "la rama de la matemática educativa que estudia el conocimiento algebraico, su aprendizaje y su didáctica (p. 5); como objeto puede considerarse como el conjunto de contenidos algebraicos propios de los niveles primario y medio de la escolaridad, desde este punto de vista es equivalente a los términos álgebra escolar y álgebra elemental. En este contexto señala Socas (2011) que, en general la investigación en Álgebra, se ha ocupado de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos y procedimientos algebraicos en el sistema educativo y en el medio social.

La investigación en álgebra educativa abarca dos conceptos distintos: el pensamiento algebraico y el simbolismo algebraico. Sin embargo, no hay consenso entre los investigadores en cuanto a la relación entre estos dos aspectos. Algunos ven los símbolos algebraicos como un componente necesario del pensamiento algebraico, mientras que otros los consideran como un resultado o como una herramienta de comunicación.

4.3. Metodologías para la enseñanza del álgebra

Bednarz, Kieran y Lee (1996) proponen cuatro enfoques como alternativas para la introducción del álgebra en la escolaridad: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, y el estudio de situaciones funcionales. También consideran importante no descuidar el aspecto histórico.

Por otra parte, según Papini (2003) hay una transición de la aritmética al álgebra que supone una ruptura cognitiva para la cual la psicología puede aportar explicaciones a fin de abordar los problemas didácticos. Distintas investigaciones señalan una ruptura cognitiva que genera el tránsito del pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico (Chevallard, 1985, 1986), esto es, "la entrada en el mundo del álgebra supone para los alumnos que vienen de prácticas aritméticas una ruptura cognitiva esencial, un cambio fundamental en su racionalidad matemática[7]" (Papini, 2003, p. 43).

Sin embargo, para Ursini (1996) tal ruptura conlleva la suposición de que en educación primaria priman los objetos aritméticos y en la secundaria los algebraicos, lo cual desde su punto de vista es discutible. Según esta autora, una implicación de las ideas de Vygotsky en el campo del aprendizaje es que no necesariamente es cierto que los conceptos se aprenden de manera gradual, desde lo más simple a lo más complejo, por el contrario es posible acceder con acompañamiento a ideas complejas las cuales ayudan a tomar conciencia de aquellas más simples, reconsiderándolas desde una perspectiva diferente y transformando su significado.

[7] La autora considera con esta expresión "los modos de validación, las formas de abordar los problemas, las estrategias de control y las creencias que pone en juego un sujeto en su actividad matemática" (Papini, 2003, p. 43)

Por ejemplo, el aprendizaje del álgebra "amplía la comprensión de la aritmética y permite reconsiderar esta disciplina desde una perspectiva más amplia" (Ursini, 1996, p. 48).

Para desarrollar el comentario anterior Ursini (1996) dice:

> Mientras uno está inmerso en las operaciones aritméticas no tiene conciencia del sistema, más bien está limitado por él. Para tomar conciencia del sistema y volverlo un objeto de estudio es necesario mirarlo desde una perspectiva más amplia, que lo contenga. Así, desde el álgebra podemos mirar la aritmética como un objeto de estudio y es en ese momento que se puede realmente empezar a manejar la aritmética a un nivel consciente…por ello la conveniencia de un re-ordenamiento del currículum en el cual se enseñen conceptos más complejos antes de los más simples. (p. 49)

Este es uno de los supuestos del movimiento por el álgebra temprana (Sessa, 2005, Kaput 1996, Schlieman, Carraer y Brizuela, 2011), entre sus principios están: (1) la Aritmética es de naturaleza algebraica porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones; (2) está "comprobado que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y parece oportuno llegar a ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años), aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos de la primaria" (Butto y Rojano (2004, p. 114); y, (3) es posible desarrollar algunos aspectos propios del álgebra en los primeros niveles de la escolaridad. Dicho movimiento surge con motivo de los trabajos realizados por algunos investigadores en Educación Matemática de Estados Unidos y apoyada por las recomendaciones del NCTM[8] (Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos).

Su punto de partida es la crítica acerca de la forma tradicional en que aparece el álgebra consistente en el énfasis en el buen manejo de la sintaxis y el aspecto manipulativo; como afirman Butto y Rojano (2004) lo común es comenzar por la enseñanza de las expresiones, ecuaciones y toda la manipulación alrededor de ellas, y se termina con la resolución de problemas mediante la aplicación del contenido sintáctico aprendido.

En Barrio, Lalanne y Petich (2010) se muestra una aplicación de estas ideas específicamente en la enseñanza del tema de ecuaciones diofanticas en el nivel primario argentino. También Butto y Rojano (2004) muestran tal posibilidad trabajando con el razonamiento proporcional (aritmético y geométrico), aspectos de la variación funcional y los procesos de generalización.

Desde otra perspectiva Palarea (1998) afirma que se debe "aprender el Álgebra como un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático" (p.6).

[8] National Council Teacher of Mathematics

4.4. El álgebra universitaria

El álgebra universitaria es aquella que se imparte en las universidades mediante sus facultades de ingeniería, ciencias y en aquellas que forman educadores matemáticos. A pesar de que sus contenidos están cercanos a la Matemática formal, presenta algunos matices que la diferencian. Por ejemplo, por una parte están las diferencias naturales surgidas del alcance de sus contenidos programáticos, sus objetivos, su extensión y profundidad; pero también se consiguen diferencias en virtud, bien sea si se considera el papel que le dan a las aplicaciones (por ejemplo a través de la modelización) o el rol que le otorgan a las demostraciones.

En este ámbito, se han realizado investigaciones que buscan explicar cómo el discente, en su proceso de aprendizaje, construye algunos conceptos algebraicos; en este sentido destacamos los estudios relacionados con la aplicación de la teoría APOE[9] para el análisis del aprendizaje de contenidos del álgebra lineal y del álgebra abstracta (Dubinsky, 1996; Parraguez, 2009; Roa-Fuentes y Oktaç, 2012).

Las investigaciones en este contexto, según afirma Artigue (2003), reportan un fenómeno particular con respecto al aprendizaje de los conceptos de límite y espacio vectorial en los primeros años del nivel universitario; se trata de la discrepancia entre la capacidad de estos conceptos para resolver problemas nuevos y su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador; es decir, una cantidad importante de estudiantes no sienten la necesidad de recurrir a la construcción abstracta de espacio vectorial para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de álgebra lineal, obviando así el valor epistemológico esencial del Álgebra Lineal (Artigue, 2003). De acuerdo con su perspectiva para superar esta anomalía es necesario desarrollar conexiones complejas entre los modos de razonamiento, los puntos de vista, lenguajes y sistemas de representaciones simbólicas.

En el contexto del Álgebra Lineal, Miranda (2012) cree que entre las dificultades que conlleva están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto, y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto, además está la variedad de lenguajes y representaciones semióticas con los que se estudian. En este sentido, Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) llaman obstáculo del formalismo al hecho de que los estudiantes puedan ser capaces de manipular las representaciones formales simbólicas sin tener las suficientes aptitudes para comprenderlas.

Sierpinska (1996) analizando el aprendizaje del Álgebra Lineal ha desarrollado trabajos de investigación acerca de la evolución del razonamiento matemático en los estudiantes. Distingue tres modos diferentes de razonar que denomina sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. El primero está basado en el uso de figuras geométricas, los objetos matemáticos son dados "directamente a la mente" (Artigue, 2003) la cual intenta asimilarlos y describirlos.

En términos generales, en el modo analítico-aritmético, los objetos son dados indirectamente, se construyen a través de definiciones y propiedades de sus elementos. En

[9] Es el acrónimo de las cuatro palabras *acción, proceso, objeto* y *esquema*; en inglés es APOS. Es una teoría inscrita en la corriente cognitiva de la Educación Matemática fundamentada en los conceptos de Piaget (1952), en particular el de abstracción reflexiva.

ese sentido, los objetos se identifican a través de una fórmula, bien sea una ecuación o desigualdad, que hace posible su cálculo.

En el modo analítico-estructural los objetos se definen a partir de un conjunto de propiedades, tales como la axiomática de grupo y espacio vectorial.

5. Conclusiones

Esta investigación documental tuvo como objetivo estudiar algunos conceptos específicos del pensamiento algebraico, y para lograrlo se analizaron algunos procesos y aspectos teóricos que conlleva tal pensamiento, en el abordaje no se tuvo una pretensión de exhaustividad. Los hallazgos muestran la complejidad teórica de algunos constructos como los de *concepto* y *generalización* en los cuales existen posturas diferentes al momento de caracterizarlos y consecuentemente definirlos. La misma situación ocurre cuando se considera el rol que ocupan los sistemas de representación en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en función de la perspectiva teórica que se asuma. Desde nuestro punto de vista, no debemos encasillarnos con la supremacía de algún enfoque particular, creemos que la complejidad de la matemática y su enseñanza, así como el devenir histórico de las distintas corrientes científicas nos han demostrado los beneficios del multiperspectivismo.

Por otro lado, en lo que respecta a Venezuela, algunos elementos discutidos permiten identificar el campo de la didáctica del álgebra como inexplorado por lo menos en lo que atañe al nivel primario de la escolaridad en donde se mantiene oculta la presencia del álgebra escolar. Como consecuencia, entre otras, se tiene la aparición abrupta de las letras para identificar objetos y propiedades matemáticas además de las escasas referencias al uso de patrones y regularidades lo que a su vez es un reflejo del descuido existente en torno al proceso de generalización.

Desde el punto de vista didáctico destacamos el enfoque de la iniciación temprana al álgebra puesto que hace posible la convergencia de contenidos aritméticos, geométricos y algebraicos entrelazados hacia el desarrollo del pensamiento algebraico. Sin embargo, tal como hemos dicho, esta perspectiva no tiene una preeminencia particular, pues solo mediante el desarrollo y visibilidad del álgebra educativa, y con investigaciones desarrolladas en este ámbito, con cualquier tendencia en la Educación Matemática, pueden alcanzarse logros de largo aliento en este sentido.

En el caso de la transición hacia el pensamiento algebraico, la percepción global del objeto permite el establecimiento de relaciones entre los números, entre las operaciones, y entre los números y las operaciones (Andonegui, 2009). El tipo de pensamiento matemático puesto en práctica a través de estas conexiones y en el contexto de la aritmética se denomina *pensamiento relacional*. Por ejemplo, la entidad matemática dada por el producto de 5 y 102, expresada 5x102 puede ser concebida como un objeto en sí misma. Así, podría escribirse 102+102+102+102+102, o también 5(100+2), etc., debe quedar claro que el tipo de relación que se establezca debe servir para facilitar el trabajo. Para el citado autor, el interés expresado por este tipo de pensamiento radica en el hecho de que su desarrollo puede servir de entrada a la idea de algebra temprana en la escolaridad.

Tomando en cuenta nuestros programas y considerando nuestra idiosincrasia venezolana debemos considerar las interrogantes, entre otras: ¿es posible tal enfoque?, ¿Cómo introducirlo en los primeros niveles de escolaridad venezolanos?

Finalmente, también creemos importante tomar en cuenta las consecuencias que pudiera tener considerar la matemática escolar como un lenguaje, entre otras muchas propuestas que hemos descrito en esta investigación.

Referencias

Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. *Psychological Review*, 89 (4), 369-406.

Andonegui, M. (2009). *La Matemática de primer año de bachillerato.* Mérida, Venezuela: XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

Agudelo, C. (2013). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de Matemáticas sobre el Álgebra Escolar y el propósito de su enseñanza. *REICE*. [Revista en línea], 5(1). Disponible: http://www.rinace.net/arts/vol5num1/art3_htm.htm [Consulta: 11 Enero 2015].

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 117-134.

Barrio, E.; Lalanne, L.; Petich, A. (2010). *Entre y aritmética y álgebra: Un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: Investigaciones y aportes*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13-25.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching*. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Bell, E. T. (2002). *Historia de las matemáticas* (R. Ortiz, Trad.) (6ª Edición). México: Fondo de Cultura Económica.

Beyer, W. (2002). *Elementos de didáctica de las Matemáticas*. Mérida, Venezuela: VI Escuela de Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

Beyer, W. (2006). El laberinto del significado: La Comunicación en el aula de Matemáticas. En D. Mora y W. Serrano (Eds.), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre Matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica* (pp. 61- 157). La Paz, Bolivia: Campo Iris.

Britt, M. and Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM Mathematics Education*, 40, 39–53.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16 (1), 113-148.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications.

Cantoral, R.; Farfán, R; Cordero, F; Alanís, J; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: Trillas.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, (pp. 15–37). Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique á l algébre dans l'enseignement des mathématiques au college. Premiére partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petix x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1986). Le passage de l'arithmétique á l algébre dans l'enseignement des mathématiques au college. Deuximie partie. *Petix x*, 19, 43-72.

Da Ponte, J., Branco, N., y Matos, A. (2008, Nov/Dez). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamiento algébrico dos alunos. *Revista da Associacao de Professores de Matemática*, 100, 89-96.

Da Ponte, J. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. En I. Vale y A.Barbosa (Org.), *Padrões*: *Múltiplas Perspectivas e contextos em Educação Matemática*, (pp. 169-175). Brasil: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Enseñanza de las Matemáticas. *Revista Científica / enero –diciembre de 2009 / no. 11 / Bogotá, D.C.* pp.150-164.

Devlin, K. (2003): *Mathematics: The Science of Patterns.* New York:Owl Books.

Dewey, J. (2002). *Democracia y Educación*. Ediciones, Madrid: Morata.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: Nueva Exposición de la Relación entre Pensamiento Reflexivo y Proceso Educativo*. Barcelona: Paidós.

Diccionario de la RAE. (2016). Disponible en: http://dle.rae.es/?id=1nMBfgm

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 24-41.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang. Translation into Spanish (1999). Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, 9 (1), 143–168.

Duval, R. (2015). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación*. [Artículo en línea]. Disponible: http://www.lettredelapreuve.org/oldpreuve/newsletter/991112theme/9911themees.html [Consulta: 2015, Abril 12].

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis, S.A.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática* (Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Didáctica de la Matemática), Universidad de Granada, España.

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. [Libro en línea]. Disponible: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf. [Consulta: 2014, enero, 28]

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema,* 26 (42B), 483-511.

Gómez-Granell, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la Educación Matemática. En M. J. Rodrigo y J. Arnay (Compiladores), *La construcción del conocimiento escolar* (pp. 195- 215). España: Paidos

González, A. (2016). *Procesos del pensamiento algebraico en entornos de aprendizaje mediados tecnológicamente* (Tesis doctoral). Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en humanidades*, Año VI, 1 (11), 37-80.

González, A y González, F. (2014). Consideraciones históricas y didácticas relacionadas con el símbolo algebraico de igualdad. *Revista UNIÓN*, 37. Marzo de 2014. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/37/archivo15.pdf

González, F. y Diez, M., (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. *Revista Complutense de Educación*, 13(1), 281-302.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 85-97.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163–171). July 9–13, Paris, France.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3).

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Coord), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). London: John Murray.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* EE.UU.: Basic Books.

Lovell, K. (1986). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Morata

Martí, E. (1997). Constructivismo y Pensamiento Matemático. En M. J. Rodrigo y J. Arnay (Compiladores), *La construcción del conocimiento escolar* (pp. 217- 242). España: Paidos.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. (Monográfico: El futuro del álgebra y la aritmética), *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 7-21.

Miranda, E. (2012).*Generación de modelos de enseñanza–aprendizaje en el álgebra lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales*. Recuperado de http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/30_eduardo_miranda_montoya.doc

Mora D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 24 (70), 181-272.

Mora, D. (2006). Relación entre lenguaje, pensamiento, matemáticas y realidad. En D. Mora y W. Serrano (Eds.), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre Matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica* (pp. 61-157). La Paz, Bolivia: Campo Iris.

Morín, E. (2007). *Introducción al pensamiento complejo*. España: Gedisa

Ortiz, J. (2000). Modelización y calculadora grafica en la formación inicial de los Profesores de Matemáticas. Granada, España: Universidad de Granada.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna, España.

Panizza, M. (2009). Generalization and Control in Algebra. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 6), January 28th-February 1st 2009, Lyon (France) [Versión electrónica] obtenido el 22 de enero de 2014 en http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-4

Papini, M. (2003) Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Relime*, 6,41-71.

Parraguez, G. (2009). *Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria), México.

Piaget, J. (1952). *The child´s conception of number*. London: Routledge and Kegan Paul.

Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Pozo, J. (1994). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. España: Ediciones Morata, S. L.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwârizmî restaurado. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México: Fondo de Cultura Económica

Radford, L. (1995): Before the Other Unknowns were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 28-37.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6 (4), 117-133.

Radford, L. (2014).Semiótica y Educación Matemática. *Relime* (Número especial), 7-21.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Relime*, 15 (2), 199–232.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (l), 45-56.

Rumelhart, D. y Norman, D. (1978). Accretion, tuning, restructuring: three modes of learnig. En J. Cotton y R. Klatzky (Eds.), *Semanctis factors in cognition*. Hillsdale, N.J: Erlbaum.

Schlieman, A.; Carraer, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidos.

Serres, Y. (2007). *El rol de las prácticas en la formación de docentes de Matemática* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada), México.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education? Plenary address. En C. Alsina, J. Alvarez, M. Niss, A. Pérez y A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematics Education* (pp. 21–46).

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). *Evaluación de un diseño de la enseñanza del álgebra lineal: El caso de transformaciones lineales*. Recuperado de: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=2011497.

Socas, M. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 261-282). Valladolid, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Socas M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Aportaciones de la investigación.* (Universidad de La Laguna), 77, 5–34.

Steen, L. (1998). *Enseñanza agradable de las matemáticas.* México: Limusa

Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky, *Educación Matemática,* 8 (3), 42-49.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas, S.A.

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*, 63-85.

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379–402.

Andrés González Rondell. Profesor Asociado a Dedicación Exclusiva de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL-IPMAR). Egresó de esta Institución en el año 1994 como Profesor en la Especialidad de Matemática, obteniendo el primer lugar de la promoción con mención Magna Cum Laude; Magister en Enseñanza de las Matemática (UPEL-IPMAR, 2002); Especialista en Informática Educativa (USB, 2005) y Doctor en Educación (UCV, 2016). Fue Coordinador del Centro de Investigación en Enseñanza de las Matemática Usando Nuevas Tecnologías (CEINEM-NT); además, Jefe de las áreas de Álgebra y Matemática Aplicada. Desde Octubre del 2012 es Jefe encargado del Departamento de Matemática. Coordinador de la *Línea de Investigación en Didáctica del Álgebra y Pensamiento Algebraico* (*LIDALGEBRA*) adscrita al Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM). Investigador PEI, acreditado en las convocatorias 2012 y 2014. Participante como ponente en reuniones científicas tales como Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) y Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM). Autor de varios artículos entre los que se destacan: (a) Exploración del Pensamiento algebraico de profesores de matemática en formación. La Prueba EVAPAL; (b) Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal a través de sus relaciones intra e inter matemáticas; (c) Mediación contemplativa y resolución de problemas algebraicos en entornos virtuales; y (d) Consideraciones Históricas y Didácticas Relacionadas con el Símbolo Algebraico de Igualdad. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT) y de la Asociación Venezolana de Educación a Distancia (AVED). Ha dirigido Trabajos de Grado de Maestría y de Especialización tanto en el IPMAR como en la UC.