# La imaginación y el conocimiento matemático. La perspectiva kantiana y la discusión contemporánea

María Carolina Álvarez

Universidad Central de Venezuela

Resumen

En el presente trabajo se aborda la relación entre imaginación y conocimiento matemático en la filosofía kantiana. Se pretende mostrar que la imaginación solventa los problemas de interpretación concernientes a la relación entre intuición y conocimiento matemático en el marco de este texto. El aporte de este trabajo es, en este sentido, tratar de conciliar, a través de la noción de imaginación, las distintas líneas de interpretación que sobre el conocimiento matemático se hacen presentes en la discusión contemporánea; debate que se inicia con J. Hintikka y su interpretación de la intuición como la asunción de un representante o individuo, es decir, como la aplicación de la regla de instanciación existencial.

*Palabras clave*: Kant, matemáticas, imaginación.

Abstract

Imagination and mathematical knowledge. Kant's perspective and contemporary discussion

The following article presents a study of the relation between imagination and mathematical knowledge in Kant's philosophy. We seek to show that imagination solves interpretation problems relating to the relation between intuition and mathematical knowledge within the framework of this text. In this regard, the contribution of this work is an attempt to reconcile, by means of the notion of imagination, the different lines of interpretation of mathematical knowledge which are present in the contemporary discussion. This debate is initiated by J. Hintikka and his interpretation of the intuition as the assumption of a representative or a person, that is, as the application of the rule of existential instantiation.

*Key words*: Kant, mathematics, imagination.

Résumé

L'imagination et la connaissance mathematique. La perspective kantienne et la discussion contemporaine

Dans ce travail, on étudie la relation entre l'imagination et la connaissance mathématique dans la philosophie de Kant. On prétend montrer que l'imagination résout les problèmes d'interprétation qui concernent la relation entre l'intuition et la connaissance mathématique dans le cadre de ce texte. À cet égard, la contribution de ce travail est de chercher à concilier, à travers la notion d'imagination, les différentes lignes d'interprétation sur la connaissance mathématique que sont présentes dans la discussion contemporaine. Ce débat a commencé avec J. Hintikka et son interprétation de l'intuition comme l'assomption d'un représentant o d'une personne, c'est-à-dire l'application de la règle d'instanciation existentielle.

*Mots-clé:* Kant, mathématique, imagination.

Resumo

A imaginação e o conhecimento matemático. a perspectiva kantiana e a discussão contemporânea

No presente trabalho aborda-se a relação entre imaginação e conhecimento matemático na filosofia kantiana. Pretende-se mostrar que a imaginação pode solucionar os problemas de interpretação concernentes à relação entre intuição e conhecimento matemático no marco deste texto. O contribua deste trabalho é, neste sentido, tratar de conciliar, através da noção de imaginação, as diferentes linhas de interpretação que sobre o conhecimento matemático se fazem presentes na discussão contemporânea; debate que se inicia com J. Hintikka y sua interpretação de lá intuição como lá assunção de um representante o indivíduo, ou seja, como lá aplicação de lá régua de instanciação existencial.

*Palavras chave*: Kant, matemáticas, imaginação.

## 1. Introducción

La intención del presente trabajo es explorar y establecer una problemática en torno a la filosofía kantiana que aún hoy causa polémica entre los estudiosos. Se trata de las concepciones de Kant sobre el conocimiento matemático y su relación con la sensibilidad. Sobre este problema las posiciones que asumen los intérpretes son aparentemente irreconciliables y, en consecuencia, se propone una posible conciliación por medio de la noción de imaginación.

En una vía de interpretación se postula que no existe ninguna relación entre el conocimiento matemático y la sensibilidad o, más concretamente, la intuición y, de esta manera, esta posición afirma que el conocimiento matemático es analítico. Esta vía interpretativa, que se denominará perspectiva "logicista", no toma en cuenta una posible relación entre imaginación y conocimiento matemático. Está representada por Hintikka (1992), quien en 1967 abre el debate cuando combate la interpretación tradicional de intuición. Una segunda vía considera que existe una relación entre matemática e intuición, afirmando así el conocimiento matemático como sintético *a priori* aunque no ahonda en la relación entre matemáticas e imaginación. Esta perspectiva recibirá el nombre de intuicionista y está representada por el trabajo de Butts (1981) titulado "Rules, Examples and Constructions Kant's Theory of Mathematics". Por último, algunos intérpretes proponen una vía intermedia aceptando la analiticidad, pero también la sinteticidad de las matemáticas, y con ello le otorgan un importante papel a la facultad imaginativa dentro de este conocimiento. Perspectiva que se considerará bajo el nombre de "sintética" y que desarrolla las tesis de Shabel (1998), Torretti (2004) y Young (1988). Trataremos estas perspectivas en el orden establecido.

## 2. Perspectiva logicista: el conocimiento matemático en la doctrina kantiana a la luz de la reconstrucción de Hintikka

Hintikka considera que la "Deducción trascendental" incluye la búsqueda del papel que cumplen los conceptos en el esfuerzo que significan las actividades humanas de adquisición del conocimiento. Así afirma que los principios que gobiernan las actividades humanas del conocer pueden ser reglas objetivas "hasta el punto de que estas reglas pueden llegar a ser condiciones trascendentales de la experiencia" (Hintikka, 1998, p. 189) y no condiciones contingentes producto de la naturaleza de los agentes humanos involucrados en el conocer.

En su opinión, la intuición tal como es usada por Kant no se debe entender de forma tradicional, es decir, como productora de imágenes mentales, sino más bien como aquello que en la mente representa a un individuo. Para sustentar esta interpretación se remite a las lecciones de lógica kantianas, a la individualidad espacio temporal y a las tesis, presentadas en el ensayo premiado del año 1764, que caracterizan el método matemático por el uso de representantes particulares de conceptos generales. Así, su reconstrucción considera que las concepciones kantianas de la "Doctrina del método" no son concepciones posteriores, como se interpretan tradicionalmente, sino concepciones anteriores a la elaboración de la "Estética trascendental". Concluye entonces que el conocimiento sintético *a priori* en las matemáticas se da, no de forma intuitiva o imaginativa, sino por medio de la regla de instanciación; en otras palabras, mediante la asunción de representantes particulares o individuos. Y de esta manera el problema real que inspira a Kant en su Crítica es: "por qué algunas intuiciones (a saber los términos de instanciación empleados en la lógica y en la matemática) pueden dar conocimiento sintético a priori aún cuando sus objetos están ausentes" (Hintikka, 1998, p. 194). El hecho de que nosotros asignemos ciertas propiedades y relaciones a los objetos, por medio de los procesos por los cuales llegamos a conocer individuos, explica la aplicabilidad universal del conocimiento adquirido vía intuición, entendido como instanciación, este conocimiento reflejará la estructura de los procesos del conocimiento en general y será aplicable a objetos en la medida de que estos sean objetos de tales procesos. Sin embargo, la tradición aristotélica hace caer en el error a Kant quien afirma que es por medio de la sensibilidad que son dados los objetos particulares y sólo ella provee intuiciones. Para Hintikka, se solventa este error cuando se privilegia la búsqueda y encuentro en el conocimiento como procesos activos, al contrario de la pasividad de la percepción sensible y, aunque el conocimiento al que se refiere Kant es el matemático, puede aplicarse, en su opinión, al conocimiento lógico especialmente a la lógica de primer orden. Según esta lectura, el sistema de verdades lógicas estará determinado por la estructura de las actividades de búsqueda de conocimiento, algún cambio en las reglas o precondiciones de estos juegos se reflejará en la estructura del sistema lógico.

Hintikka se pregunta cuál es el rasgo común de los usos de la intuición como instancias de introducción de los particulares en la geometría, el álgebra y la aritmética que hizo que Kant pensará que las intuiciones matemáticas son sensibles. Según Hintikka, la parte de la proposición euclidiana que es intuitiva en el sentido kantiano es la *ecthesis*, esta parte no sólo aparece en la geometría griega sino también en la lógica aristotélica. La diferencia entre razonamiento intuitivo y lógico se centra en la distinción, en la geometría, entre "postulados" y "axiomas": los "postulados" son los principios de construcciones, mientras los "axiomas" son principios de prueba. Los primeros son considerados, desde Aristóteles, como suposiciones de existencia y, de esta manera, Kant al justificar las construcciones, justifica también el uso de suposiciones existenciales en matemáticas. Y esto tiene consecuencias: al aplicar a la realidad un argumento matemático que contiene un postulado, la existencia del objeto precede al encuentro con la realidad, la introducción del representante se hace *a priori*. Esta es la razón por la que Kant afirmará que sólo hay una forma en la que podemos estar seguros de que los individuos que hemos supuesto existen y es cuando nosotros mismos los hemos creado y hemos puesto en ellos las propiedades y relaciones adecuadas, cosa que se hace solamente mediante la percepción sensible, ya que gracias a ella "un objeto individual puede 'abrirse paso' hacia nuestra conciencia" (Hintikka, 1998, p. 179). Si sólo mediante el sentido externo –espacio–, somos conscientes de los objetos y podemos atribuirle relaciones espaciales a estos, entonces la geometría debe provenir del sentido externo, vinculando así conocimiento matemático y sensibilidad o, si se quiere, las tesis de la "Doctrina del método" y los argumentos del espacio de la "Estética trascendental".

Finalmente Hintikka (1998) ofrece el siguiente esquema de reconstrucción desde la perspectiva de la "Estética trascendental":

(1). El razonamiento matemático se ocupa principalmente de la existencia de individuos.

(2). Los resultados del razonamiento matemático son aplicables a toda experiencia a priori.

(3.) La existencia de los individuos de los que se ocupa el razonamiento matemático se debe al proceso mediante el cual llegamos a conocer la existencia de individuos en general.

(4). Las relaciones que mantienen entre sí los individuos de los que se ocupa el razonamiento matemático se deben al proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos.

(5) El proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos en general es la percepción (sensación).

(6.) La estructura del razonamiento matemático se debe a la estructura de nuestro aparato perceptivo.

Sin embargo, aunque este recorrido no deja de ser plausible, Hintikka se pregunta cómo sería su aplicación a la lógica simbólica. Los pasos (1)-(4) serían aplicables, pero es en el paso (5) donde Kant yerra. Así se permite sustituir (5) y (6) en estos términos:

(5*) El proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos es su búsqueda.

(6*) La estructura de un argumento lógico se debe a la estructura de los procesos de búsqueda y encuentro.

Reconstrucción que deja de lado la pasividad de la percepción sensible, privilegiando las actividades de búsqueda y encuentro presentes en la actividad cognoscitiva humana y que presenta a la lógica de la cuantificación como la lógica de esa búsqueda y descubrimiento

## 3. Perspectiva intuicionista: Butts y la construcción como presentación de ejemplos individuales

En su artículo "Rules, Examples and Constructions Kant´s Theory of Mathematics", Robert Butts (1981) pretende una reconstrucción de la noción de intuición[1] que separará este concepto de la sensación, principal argumento de los planteamientos de Hintikka. Con este propósito en mente, Butts afirma que la intuición para Hintikka es: "entendida teniendo sólo la particularidad e inmediatez de los objetos construidos y no significativamente, del todo, con su contenido sensorial directo, si es que hay alguno" (Butts, 1981, p. 257)[2]. Sin embargo, Butts considera que una reconstrucción de la noción de intuición puede ser dada, pero no por el camino propuesto por Hintikka, pues eso falsearía los textos de la "Estética trascendental". Para Butts el enlace entre los juicios matemáticos y la sensación es sólo un recorrido kantiano para llegar al enlace fundamental entre matemáticas y experiencia.

Butts no está de acuerdo con la sustitución de (5*) y (6*), es por ello que propone más bien la sustitución de sensación (percepción) por "intuición" en

[1] Sobre este tema, ver también Rosales (1981).

[2] Las traducciones del inglés al español son responsabilidad de la autora de este trabajo.

(5), además de la consideración atenta de la noción kantiana de esquema a la luz de las clases de instanciaciones ofrecidas por la construcción. Distinguirá entonces: "intuición", entendida como la representación no mediada en la que hay conocimiento de individuos; "receptividad", designación técnica que marca el rasgo de lo dado y que no denota o conlleva rasgos especiales de la experiencia sensible; "sensación", como la modificación de algún estado de la conciencia que, aunque subjetiva, da señales de la existencia de los objetos, es neutral con respecto a si su objeto es sentido o también conocido y es explicada por la psicología y la fisiología; "intuición empírica", aquella que siempre está acompañada por cambios sensibles en los estados de conciencia; "apariencia", como la designación técnica para el objeto indeterminado de una intuición empírica; los "representantes intuidos", que son determinados por medio de la conceptualización, un procedimiento que desmitifica los contenidos aparienciales de la intuición; y por último, las "formas del espacio y del tiempo", junto con las "categorías" organizan sólo aquello que puede ser considerado como un objeto de una experiencia posible. De lo anterior deriva las siguientes consecuencias:

(a) Hay más clases de intuición que la empírica: las intuiciones puras de espacio y tiempo, y las construcciones (que exhiben individuos en la intuición *a priori*) son sobre posibles objetos de experiencia.

(b) Aunque la sensación introduce nuevos individuos debido a un cambio en los estados de conciencia, estos últimos no cuentan como el único medio para asegurar la existencia de individuos, tampoco es el camino expedito hacia la ciencia o las matemáticas.

(c) Como nosotros usamos la visión que da Kant de que los contenidos que aparecen son indeterminados (apariencias) se abre una libre elección (esta "neutralidad epistémica" de las apariencias es discutida en A90/B123 de la primera Crítica) y su visión de que las apariencias son únicamente ajustables para uso cognitivo por la aplicación de las categorías; de estos individuos, dados en la intuición empírica, no se puede literalmente decir que sean objetos del conocimiento (incluyendo las matemáticas), pero pueden jugar, en el mejor de los casos, el rol de demarcar los límites del conocimiento (humano) posible.

(d) Las sensaciones proveen un criterio de existencia de individuos: cada nuevo estado de conciencia provee un individuo que aparece en alguna forma u otra. De esto no se sigue que la sensación sea el único medio para introducir nuevos individuos. [Aunque cree que la sensación provee un criterio ontológico –el sujeto está o no en un cierto estado de conciencia. Este es el papel decisivo de las sensaciones; la forma humana básica de hacer la existencia (esta operación) nos insta a no adoptar un nuevo criterio de existencia que no nos permita cualquier decisión: algo está presente o ausente, los juicios son verdaderos o falsos, y así por el estilo].

De esta última consecuencia (d), Butts afirmará que Kant no entiende que el conocimiento provenga de los objetos de la sensación, más bien él observa el papel que la sensación juega en el conocimiento, incluyendo el conocimiento matemático, de lo cual la conclusión kantiana será que la intuición empírica dada por la sensación provee un criterio de realidad (actualidad) pues permite el contacto directo con el mundo real.

En la *Crítica de la razón pura* (1988), con la afirmación de que la construcción de un concepto es la exhibición del mismo en una intuición, Kant no introduce una nueva clase de intuición: una que proponga a los ojos de la mente una pintura que sugiera alguna clase de acceso intuitivo a individuos especiales. En opinión de Butts, el concepto de construcción requiere una intuición en parte "exótica" pero no de clase distinta, ésta es simplemente la producción de un ejemplar en la intuición empírica acorde con las reglas de construcción, tal como son dadas por el sistema conceptual, en el caso de las matemáticas. Así afirma:

> En el caso de la construcción matemática los ejemplos son usados como representantes de conceptos universales cuyo significado está dado por el sistema matemático que se tiene a mano y así hay un sentido directo y en el cual los juicios matemáticos de ese sistema sean *acerca de* ejemplares o representantes cuya construcción puede ser en sí misma posible. (Butts, 1981, p. 269)

Y concluye expresando que bajo el punto de vista kantiano sólo las restricciones sobre estas construcciones son lógicas. Así, desde su óptica, existen muchos rasgos metodológicos de la instanciación existencial en los planteamientos kantianos, pero el análisis le sugiere algunas dudas cuando se pregunta por las características de los individuos que son introducidos por medio de la instanciación existencial en las pruebas. Una instanciación existencial (IE) es un movimiento de una sentencia con cuantificador existencial $(\exists x)$ p hacia una sentencia que la instancia $p(a/x)$, donde $a$ es un símbolo individual libre que surge de la sustitución de $a$ por $x$ en la sentencia con cuantificador existencial. Esta regla de inferencia no produce contradicciones en los argumentos sólo si el símbolo $a$ no aparece libre en alguna de las líneas de la prueba, es decir, no ha sido mencionado en alguna de las hipótesis previas. La restricción en la aplicación de IE es necesaria ya que el individuo no puede ser escogido arbitrariamente, pues debe poseer la propiedad $p$. Para Butts, la IE sólo representa el caso en que un individuo tenga tal propiedad y en esa medida se asemeja a la introducción de nuevos individuos que se hace por medio de la construcción kantiana. Sin embargo, la IE no describe ni reporta el caso, sólo lo representa. En este sentido afirmará: "La regla no introduce las cosas, no puede la regla, como *regla de la lógica*, introducir un ejemplo de las cosas." (Butts, 1981, p. 272). Esta limitación del sistema analítico de proposiciones matemáticas es precisamente la razón, en su opinión, de que para Kant los objetos matemáticos sean construidos y por ello haya invertido esfuerzos en exponer a la matemática como sintética. No obstante, aclarará que si bien las construcciones matemáticas suministran individuos, su restricción no es lógica, como en el caso de la IE, sino más bien es semántica. Dibujar un triángulo implica movimientos consistentes con el concepto de triángulo, movimientos que envuelven o que se sostienen sobre las reglas de producción de un triángulo ejemplar. Sobre este dibujo se pueden aprender rasgos nuevos de la figura –nuevas propiedades–, se pueden aprender cosas nuevas (sintéticamente) que no se aprenden sólo con la lógica. Butts entiende los conceptos o las reglas como colecciones de condicionales a los cuales siempre se les puede adicionar uno más sin llegar a agotar jamás, por ejemplo, el significado de "triángulo". Así escribe:

> Atendiendo al "acto" de construcción (por el cual, pienso, que Kant quería decir no el evento mental de construcción, sino la *transacción* involucrada en la producción del ejemplo) soy capaz de generar las reglas para la construcción de triángulos. Ya que para Kant los conceptos son reglas, aprender el concepto es al mismo tiempo listar las reglas de construcción. Construir un concepto es aprender por ejemplos. (Butts, 1981, pp. 272-273)

Concluye afirmando que como la idea de construcción kantiana depende de consideraciones extra lógicas es inapropiado identificar esta noción con la regla deductiva de instanciación existencial (IE). Después de lo cual señala que en la exposición kantiana sobre los conceptos empíricos y los conceptos dados *a priori*, se asevera que éstos no pueden hacerse explícitos por vía analítica, pues bajo tales conceptos hay una síntesis arbitraria. Sin embargo, la arbitrariedad de la síntesis en la matemática, aunque ésta se fundamente en la libre creación de conceptos, no es tal, pues Kant es enfático al afirmar que esta disciplina requiere la aplicación del principio de no-contradicción, otorgándole consistencia formal. Por otro lado, Butts expresa que la intuición *a priori*, en la cual se presentan los conceptos matemáticos, no toma nada de la experiencia ya que no existe acuerdo, arreglo o comunicación entre los objetos construidos (matemáticos) y los objetos sensibles, por lo cual, la exhibición *a priori* es un criterio epistemológico y no un estado de la conciencia. Se deriva así una nueva arista del problema: la aplicación de los conceptos matemáticos en el mundo. Si la primera *Crítica* ofrece las herramientas para entender el programa epistemológico kantiano, la segunda, gracias a la noción de esquema, resuelve, en opinión de Butts, el problema de la aplicación de los conceptos matemáticos. Hace entrar en el juego a la noción de experiencia kantiana, que se distingue de sensación y de intuición. Básicamente su argumento se puede resumir con las siguientes frases:

(1) Los objetos matemáticos son construidos.

(2) La construcción de un triángulo o de (5), es dada por medio de una operación de construcción acorde a reglas (Esquematismo)[3].

(3) La triangularidad o el (5) en sí mismos satisfacen una semántica interna del concepto triangularidad y (5), que no es materia de la sensación, ésta sólo afecta a los ejemplos particulares construidos de forma sensible. Triángulos o colecciones de puntos percibidos son estrictamente un sin sentido. Ellos sólo tienen sentido cuando vemos la representación del sentido del concepto de triángulo o número, sentido dado en la actividad de construirlos con el propósito de ejemplificar reglas.

(4) La ejemplificación es relativa: algunas líneas son clases o algunos números lo son, si eso sirve a algún propósito. Aquí Butts le asigna la

3 La introducción del esquema, la referencia al sentido interno y su relación con el esquema de número es, en opinión de Butts, la estrategia kantiana para pasar de la sensación a lo mensurable, en otras palabras, pasar de observación a la matematización de la experiencia (Programa de Galileo), fundamentando de esa manera la ciencia natural. En consecuencia, la introducción del esquema no tiene rasgos ontológicos sino epistemológicos y así no duda de calificar a Kant como formalista epistémico. (Ver Butts, 1981, pp. 280 y ss.).

aceptación por parte de Kant de las clases de Berkeley: el estatus en el que los universales son verdaderamente problemáticos. Las clases son resultados de operaciones de construcción y esas operaciones son el significado de triángulo o 5. Kant no tiene problemas con los universales, para él las reglas y su conexión con los ejemplos resuelven el problema.

(5) Los ejemplos proporcionan algo a las matemáticas que la lógica no puede, proveen la aplicabilidad de las matemáticas a un mundo posible, a objetos de la experiencia posible. La experiencia no es la sensación, es más el bien entendimiento. Sin embargo, es la observación lo que objetivamente determina la verdad o la falsedad de los juicios matemáticos aplicados.

Hintikka (1998) afirma que, según Kant, la introducción matemática de individuos se justifica sólo a causa de que su introducción se adecúa a la estructura de la sensación humana; encontrando esta afirmación insatisfactoria, Hintikka propone que la introducción se debe más bien a la lógica asociada a las actividades de búsqueda y encuentro implicadas en el conocimiento. A lo cual responde Butts que, sin "tensar" los textos kantianos, si puede entenderse la estructura categorial como una estructura de reglas (reglas semánticas, de construcción, de proyectar, de hacer), y si puede pensarse en las construcciones de objetos matemáticos como idealizaciones, como son todos los objetos de la ciencia, entonces la corrección de la aplicación de la regla en la idealización no es predeterminada en el camino de creer, mirar, entender y esperar. La idealización kantiana de la sensación es una estructura de búsqueda y con un poco de suerte encuentro.

## 4. Perspectiva sintética

En su artículo "Kant on the 'Symbolic Construction' of the Mathematical Concepts", Shabel (1998) afirma que la noción de construcción incluye dos pasajes oscuros (A 717/B 745 y A 734/B 762), los únicos en los Kant hace referencia al álgebra. En su opinión, las interpretaciones que se hacen sobre estos textos, realizadas desde las concepciones recientes de la matemática, fallan. Entonces su objetivo es presentar un acercamiento conceptual que permita elucidar las tesis kantianas de la construcción simbólica y, con ello, la concepción del álgebra, teniendo presente las concepciones que sobre esta disciplina hacen los textos matemáticos de la decimoctava centuria, específicamente centrando su reflexión en la obra de Wolff.

Las mejores interpretaciones de estos pasajes oscuros, consideran que Kant, al hacer la estricta distinción entre la construcción simbólica y ostensiva, distingue también el método del álgebra y la aritmética del método de la geometría. Shabel es de la opinión que la reconstrucción realizada por Hintikka entiende al álgebra como una aritmética generalizada: mientras la aritmética es la que determina las cantidades numéricas, el álgebra es de cantidades numéricas indeterminadas (símbolos de las variables numéricas, tales como "x"), por esta razón el autor no da cuenta de la construcción simbólica.

Todas estas interpretaciones, entre las que también incluye las propuestas de Parsons, C. D. Broad y Friedman, acercan el método del álgebra a los procedimientos del cálculo numérico, aproximación que bajo la óptica de Shabel es, aunque posible, insatisfactoria por dos razones. En primer lugar, los argumentos y el fundamento de las matemáticas en la intuición pura del tiempo hacen natural la interpretación de que aritmética y álgebra poseen el mismo método –construcciones no ostensivas–, sin embargo, los ejemplos de construcciones aritméticas que ofrece Kant, en B15 y A 240/B299, son ejemplos de construcciones ostensivas. En segundo lugar, entender la construcción simbólica como la construcción de los símbolos algebraicos es inconsistente con el papel asignado a la noción de construcción como conocimiento matemático y esto no explica el nuevo conocimiento que surge de la construcción de conceptos matemáticos en la intuición y, por ende, a los juicios matemáticos como sintéticos. Después de lo cual afirma que un análisis de las concepciones del álgebra y de la aritmética del siglo XVIII servirá para ofrecer una lectura más acorde filosófica y textualmente.

Durante los treinta años previos a la publicación de la *Crítica de la razón pura*, Kant tomó varios cursos de matemáticas y física basados en los textos de Christian Wolff. Afirma Shabel que: "Hay que puntualizar que para Wolff el álgebra no era considerada como ciencia sino más bien como un arte o método que prestaba ayuda a la solución de ciertos problemas geométricos y aritméticos" (Shabel, 1998, pp. 599-600). Según este autor, los problemas de la aritmética y de la geometría versan sobre números, magnitudes y unidades, mientras que los métodos algebraicos son empleados para la solución de problemas elementales matemáticos. Así, considera que la matemática es la ciencia de todo lo que puede ser medido y, de esta manera, la aritmética es la ciencia de los números o del cálculo. Por otro lado, el número es "aquello que puede ser referido a la unidad" (Shabel, 1998, p. 600) y los enteros son caracterizados como discretas partes idénticas de una unidad seleccionada arbitrariamente, que pueden ser expresados o construidos como segmentos (unidades) concatenados. Wolff definirá los números racionales como conmensurables por medio de la unidad y los irracionales como inconmensurables, en consecuencia, un segmento de línea es mensurable si puede ser expresado por medio de un número racional. De esta manera, los objetos de la aritmética –números conmensurables o inconmensurables– dependen del tradicional concepto geométrico de línea extensa, relacionando así geometría y aritmética de acuerdo con el programa cartesiano. Para Wolff el "arte analítico" o "análisis" es el método general para resolver ciertas clases de problemas matemáticos y el análisis finito busca "desde algunas magnitudes finitas conocidas otras magnitudes finitas que son aún desconocidas" (Shabel, 1998, p. 601), dentro de esta clase de análisis Wolff menciona el álgebra. En definitiva, Wolff considera que el álgebra no es una generalización aritmética sino más bien un método general para la solución de particulares problemas aritméticos y geométricos. Shabel afirma que "se usa este método para resolver y 'construir' problemas matemáticos, primero expresando todas y cada una de las magnitudes geométricamente, por segmentos de líneas rectas, y luego razonando sobre ellas algebraicamente" (1998, p. 602). En consecuencia, el "álgebra es ejercida sobre problemas de magnitudes que han sido construidos geométricamente; y de manera correspondiente, las soluciones que nos aporta el álgebra también pueden ser en la forma de magnitudes construibles geométricamente" (Shabel, 1998, p. 602).

Después de este análisis, Shabel regresa a la *Crítica* analizando el concepto kantiano de "magnitud". Magnitud designa el objeto con un tamaño determinado pero también el tamaño de este objeto. El primer sentido refiere a objetos con tamaño y figura, es decir, a objetos geométricos, y el segundo, a objetos con tamaño pero sin figura. Este último sentido está relacionado con el concepto puro de la cantidad o la aplicación de la categoría de cantidad a una particular talla de objetos. La determinación entre magnitud (*quanta*) y magnitud (*quantitas*) queda sustentada sobre las partes dadas previamente que completan un particular objeto y que Kant designa con el término "magnitud en general" (A 242/B300), y ésta no se puede determinar sino pensando en cuántas veces está contenida una unidad en la cosa, unidades que pueden ser medidas o contadas. Si el geómetra construye objetos con magnitud respondiendo a la pregunta ¿cuán grande es?, la construcción del algebrista responde a cuántas unidades homogéneas conforman el tamaño del objeto en abstracción de la construcción del objeto en sí mismo. Para Wolf (y el programa cartesiano) las magnitudes –conocidas o desconocidas– pueden ser expresadas por segmentos de líneas, este procedimiento escoge las unidades y las letras seleccionadas designan las varias magnitudes del problema con las que se componen las expresiones algebraicas para las operaciones, estas últimas concuerdan con las reglas de la aritmética. La simbolización de una magnitud es un paso heurístico hacia la solución del problema y ésta nunca es parte de los datos del problema, tampoco es un intento de desnudar el problema en sus datos particulares, sino más bien especifica todas las magnitudes del problema y las relaciones entre ellas. Entonces, cuando Kant afirma que la ciencia del álgebra "representa en la intuición, de acuerdo con ciertas reglas universales, todas las operaciones producidas y modificadas mediante la magnitud" (Kant, 1988, p. 577), en A 717/ B 745, se refiere a las construcciones simbólicas mediante las cuales las magnitudes conocidas e ignoradas son aritméticamente manipuladas. De todo lo anterior, Shabel concluye que el álgebra es el método aplicado a la solución de problemas matemáticos, simbolizando la construcción de conceptos aritméticos y geométricos en la forma de figuras. Esta construcción simbólica no es una clase de construcción –construcción bajo la forma de símbolos o caracteres–, sino la simbolización de las construcciones ostensivas y geométricas. Kant distingue entre la construcción pura (esquemática) y la empírica. Las construcciones esquemáticas las realiza la imaginación en concordancia con el concepto *a priori* y las empíricas con alguna clase de material o instrumentos de trazado. Ambas construcciones son ostensivas ya que en ambas se exhibe el concepto producido por medio de la intuición. Sin embargo, la diferencia entre la demostración matemática y las razones filosóficas se sustenta, para Kant, en una construcción que es pura, esquemática y ostensiva. Para Shabel tal construcción es la simbólica pues la posibilidad de llevarla a cabo se debe a la imaginación en concordancia con los conceptos *a priori* (pura), ciertas reglas (esquemática) y además ostenta su referente (ostensiva).

En opinión de Torretti (2004), Hintikka (1992, 1998) privilegia la singularidad de la representación y de ella hace seguir la inmediatez, cuando es justamente al revés, ya que la inmediatez de la representación –refiere directamente a su objeto–, implica la singularidad de éste. Para Kant "el ser humano no crea los objetos que conoce sino que se encuentra con ellos en la medida en que afectan sus sentidos" (en Torretti, 2004, p. 116). Así, Torretti se pregunta cómo es posible entonces "intuir algo *a priori*", ya que parece una tarea imposible pues la intuición tendría que ocurrir sin la presencia del objeto al que se refiere y, en ese caso, dejaría de ser intuición. En este sentido, en los *Prolegómenos* Kant afirmará:

> Hay un solo modo cómo es posible que mi intuición preceda a la existencia actual del objeto y ocurra como cognición *a priori,* a saber, *si no contiene nada más que la forma de la sensibilidad, que en mi sujeto precede a todas las impresiones actualmente existentes mediante las cuales soy afectado por objetos*[4]. (Torretti, 2004, p. 116)

Introduce así Torretti sus planteamientos sobre la intuición pura. Ella no es la percepción de un objeto individual sino más bien la conciencia de las condiciones que tiene que cumplir cualquier representación de objetos de los cuales tengamos conocimiento. Bajo este postulado reformula su pregunta anterior por ésta: ¿cómo contribuye –o cómo piensa Kant que contribuye– a la constitución de las matemáticas esta supuesta conciencia de nuestra receptividad? Torretti abordará la cuestión desde la geometría y la aritmética.

El paradigma kantiano de la geometría se encuentra en los *Elementos de Euclides*, en él las “verdades” se dividen en dos grupos: "principios" que se presentan como: "definiciones", "postulados" y "nociones comunes", y los "problemas" y "teoremas". Torretti afirmará que las definiciones fijan el significado, pero no otorgan ningún conocimiento sobre los objetos a los que aplican y pueden ser consideradas como "proposiciones analíticas" en términos kantianos. Por el contrario, los teoremas o problemas son proposiciones sintéticas, ya que otorgan más información que los contenidos que en ellas se combinan y para probarlas hace falta salir de los conceptos, es decir, “apelar a una fuente de conocimiento no intelectual” (Torretti, 2004, p. 117). Dirá Torretti que los intérpretes están de acuerdo en que si los teoremas euclidianos son válidos para la experiencia posible, su fuente ha de ser la intuición pura *a priori* del espacio, pero el acuerdo no es el mismo cuando se trata de la fundamentación de la geometría en esa intuición. La tradición considera que los *Elementos de Euclides* se ajustan a la noción de ciencia aristotélica y, en este marco, se cree que los "teoremas" deben inferirse deductivamente de los "principios"; bajo esta óptica el aporte de la intuición debería estar contenido en los principios. Sin embargo, las "definiciones" son proposiciones analíticas, restan las "nociones comunes" y los "postulados", pero Kant nunca distingue a las primeras como proposiciones sintéticas, por lo tanto, el aporte de la intuición debe concentrarse en los

[4] Cursivas en el original.

postulados. Recordando que para Kant la intuición pura es la conciencia de la capacidad de intuición empírica y que esto implica la posibilidad de figuración, como trazar en la imaginación una recta interminable, Torretti pasa a analizar el quinto postulado de Euclides. Afirma que varias interpretaciones sobre este postulado exponen que implica una intuición, pues el postulado contiene una afirmación de existencia[5]. Escribe Torretti (2004): "… mientras la posibilidad se define como 'concordancia con las condiciones formales de la experiencia', la existencia solo puede establecerse mediante una conexión con 'las condiciones materiales de la experiencia (sensación)' " (p. 119). Así, para que este postulado sea considerado conocimiento *a priori* hay que leerlo no como un postulado de existencia, sino como una "aseveración de constructibilidad" (Torretti, 2004, p. 119). Afirma que reinterpretando[6] el V postulado expresaría la "conciencia de la propia capacidad de recibir representaciones (impresiones) de las cosas conforme a ciertas relaciones mutuas entre ellas" (Torretti, 2004, p.119). De lo anterior Torretti concluirá dos cosas: la posición kantiana sobre la analiticidad de los postulados y la oposición kantiana a la idea aristotélica de la ciencia.

Después de Pasch y Hilbert el papel de la intuición, tal como lo presenta Kant, pierde su valor y, no obstante, mucho después la lógica predicativa de Frege propone otra lectura sobre la filosofía kantiana: "La deducción lógica evidentemente no basta para demostrar los teoremas de la geometría si, como pensaba Kant, la lógica deductiva alcanzó su perfección con Aristóteles" (Torretti, 2004, p.121). De esta manera, la insuficiencia de las premisas y la debilidad de la reglas de inferencia obligaron a Kant a introducir la intuición para justificar la certeza evidente de las demostraciones geométricas. La intuición, al ser una noción oscura, es susceptible de cualquier interpretación; por ello, Hintikka (1992, 1998) puede decir que se corresponde a la instanciación de existencias (IE). Torretti discrepará sobre este particular, ya que la IE de la forma $\exists x\Phi(x)=\Phi(u)$ presenta el caso en que toda la información contenida está presente en la pro-

[5] El postulado dice: "Si dos rectas *a* y *b*, situadas en un mismo plano Θ, cortan una transversal *c* formando con ella un par de ángulos internos α y β que suman menos de dos rectos, entonces en Θ, al mismo lado de *c* en que están los ángulos α y β, existe un punto de intersección de *a* y *b*" (Torretti, 2004, p. 119).

[6] La reinterpretación propuesta por Torretti (2004) es: "dadas tres rectas *a*, *b* y *c* como las descritas, tales que *c* forma con *a* y *b* un par de ángulos internos α y β que suman menos de dos rectos, es *posible construir*, al mismo lado de *c* en que están los ángulos internos α y β, un triángulo comprendido entre *a*, *b* y *c*" (p. 119).

piedad Φ, mientras la construcción kantiana de un concepto es caracterizada porque puede ir más allá de la propiedad que el concepto contiene.

Según el autor, los textos que muestran mejor el desempeño de la intuición pura son aquellos en que se describe el proceso de construcción como el ejemplo de la línea (B 137 o A 162/B203). Estos textos le sugieren una operación imaginativa que describe con las siguientes frases:

> Cuando la imaginación regulada por el concepto produce una figura geométrica mediante la progresiva determinación de las partes que la componen, la naturaleza misma de nuestra sensibilidad externa, que provee la materia que la imaginación actualiza, constriñe a la figura resultante de tal modo que ella necesariamente exhibe las propiedades topológicas, afines y métricas características de la geometría euclidiana. (Torretti, 2004, pp. 125-126)

Después de lo cual presenta la interpretación de Willian Harper, para quien las construcciones geométricas proporcionan conocimiento *a priori* de las exigencias estructurales que se aplican a los objetos de la experiencia externa. Y aunque las cosas del mundo se nos presenten bajo distintos perfiles, podemos identificar su figura y reconocerlas como semejantes a cubos, esferas, cuadrados, triángulos, etc. Sin embargo, un empirista argumentará que este reconocimiento se debe a que hemos sido educados de una cierta manera que nos hace identificar los objetos del mundo con ciertas figuras geométricas, pero Kant no lo creía así, para él las restricciones *a priori* impiden que las apariencias colapsen reduciéndose a la mera subjetividad de la experiencia.

Con respecto a la aritmética dirá que si nos basamos en los ejemplos matemáticos que propone Kant en la *Crítica de la razón pura* deberíamos afirmar que la matemática comprende sólo a la geometría y a la aritmética[7]. Así dividida la matemática se corresponde a las dos formas de la sensibilidad: espacio y tiempo. Generalmente se vincula la geometría al espacio y no queda más que vincular la aritmética al tiempo. El gran problema es que las propiedades del número y sus relaciones no son temporales. Kant ignora los axiomas de Peano

[7] Sobre esto afirma: "Los ejemplos aritméticos que propone sólo conciernen a números naturales, pero Kant se refiere una vez a 'los números racionales e irracionales' (A 480/B508). En la *Crítica del juicio* (§ 26) y en la correspondencia y las reflexiones menciona también 'el álgebra', que en una ocasión equipara a 'la aritmética general' (Ak. X, 555). Del cálculo diferencial e integral, ni una palabra, aunque Kant seguramente los conocía y estaba familiarizado con su empleo en la mecánica por Euler y sus contemporáneos. De la expansión y reorganización de la matemáticas iniciada poco después de su muerte no tuvo, al parecer, ni siquiera un barrunto" (Torretti, 2004, p. 127).

y rechaza la incipiente axiomatización de la matemática, evidencia de esto es la respuesta dada a Schultz: "la aritmética no tiene axiomas" (Torretti, 2004, pp. 129-130). Para Kant la aritmética consiste en expresiones tales como 7+2=9, que denomina "fórmulas númericas" en la *Crítica de la razón pura*, y "postulados o juicios prácticos inmediatamente ciertos" en la carta a Schultz[8]. En opinión de Torretti es oportuno e instructivo comparar este tipo de operaciones con las construcciones geométricas, pues en ambas se busca producir una "realización particular de un concepto general": una figura, una recta por ejemplo, en las construcciones geométricas y un número, tres seguido de cinco por ejemplo, en las construcciones aritméticas. Si bien la presentación de lo construido, sea ante los ojos o en la imaginación, es una presentación empírica, el aporte de la construcción matemática, en su opinión, se debe al modo de operar de la mente constructora, haciéndolo de la misma forma al contar puntos, ovejas, manzanas, etc., o trazando una línea. Finaliza su propuesta afirmando que aunque es fácil ver que las restricciones que la construcción geométrica impone a sus productos están prescritas por las condiciones de la sensibilidad, las restricciones que operan, en el caso de las construcciones aritméticas, no son tan evidentes.

Según John Michael Young (1988), existe una distinción que se debe hacer al intentar entender la imaginación kantiana: puede ser entendida como la capacidad de realizar o hacer imágenes mentales, como la entiende Hume por ejemplo, o como la capacidad para hacer construcciones de algo otro no dado en el objeto de la representación o, por lo menos, no presente en sí mismo en la representación. En otras palabras, la imaginación puede ser *imago* o *phantasía*. Según Young, esta distinción aclararía la situación sobre los juicios matemáticos en cuya fundamentación la imaginación cumple un rol principal, por ser la función que le compete realizar la esquematización. Los juicios matemáticos son juicios que no se basan en meros análisis de conceptos, sino más bien se deben construir estos conceptos y esto requiere su esquematización. Esto sería imposible si se concibiera a la imaginación sólo como la capacidad de realizar imágenes mentales. Este autor, sustenta sus afirmaciones en la noción de percepción. Para Kant, la imaginación cumple un rol fundamental en el acto de percibir. Si se entiende a la imaginación como la capacidad para tener imágenes mentales, entonces la percepción necesariamente requiere de éstas. Para el autor, las percepciones implican el acto de construir e interpretar afecciones sensibles

8 Para la discusión epistolar entre Schultz y Kant ver Torretti (2004, pp. 127-131).

en la conciencia de algo que para nosotros puede ser de otra manera en otra ocasión, no agotado en nuestra inmediata conciencia de ese algo, que puede, de esta manera, ser dicho como estando "presente en" las conciencias sensibles inmediatas o puede ser oportunamente construido como conciencia de ese algo. Así afirma que la principal característica de la imaginación es la construcción y la interpretación de las afecciones sensibles como conciencia de algo otro no presente en la representación. La construcción o interpretación sería la posibilidad de entender algún estado sensible de otra manera (como la conciencia de otra cosa no presente) y esto no significa la unión de estados sensibles según una conexión externa, como en la filosofía de Hume, sino una conexión interna según ciertas reglas de afinidad. Después de analizar los problemas de coherencia en los textos, afirma que la lectura correcta concibe a la imaginación como una capacidad de construcción o interpretación de estados sensibles, mientras que el entendimiento debe ser entendido como la capacidad para juzgar. Lo anterior no es obvio, pues cuando se tiene una representación, es decir, una construcción o interpretación de afecciones sensibles, no es fácil distinguirla de su representación discursiva, pero al representarme la casa que veo la situó dentro de cierta clase de objetos que tomo por casas, ahora cuando me digo "estoy viendo una casa" o "tal cosa con tales características es una casa" doy un concepto, es decir, lo que hago es una representación discursiva por medio del entendimiento de mi representación efectuada por la imaginación sobre lo múltiple sensorial.

Esta distinción entre imaginación y entendimiento aclara varios puntos, entre ellos la relación entre juicio e imaginación: el juicio es la facultad de incluir a un particular bajo un concepto o una regla, pero para identificar un particular se hace necesario que dispongamos de la capacidad para construir e interpretar los datos sensibles como la conciencia de algo otro de éste o de aquel tipo, por lo cual, se requiere de la capacidad imaginativa para el juicio. Según Young, esto aclara el que la imaginación sea vista como receptiva desde un punto de vista y activa o espontánea desde otro.

Pero, la capacidad constructiva de la imaginación no solo se limita a realizar construcciones sobre los datos sensibles sino que ella es también responsable de la realización de construcciones matemáticas. La cantidad puede ser entendida de forma general como concepto puro o de forma específica como una cantidad de tantos elementos, es decir, como la respuesta a la pregunta por cuántos miembros hay en esa totalidad y esa respuesta es dada por la intuición.

Cuando nos representamos la colección de *n* cosas, ella puede ser tomada como representativa de todas las colecciones con *n* elementos o con *n* cantidad y esto es lo que entiende Kant como construcción del concepto en la intuición. Sin embargo, Kant afirma que se puede encontrar sentido a la cantidad en general y a las cantidades determinadas o específicas sin necesidad de la intuición. Efectivamente, se puede "pensar" una cantidad $n+m$ sin ayuda de la intuición, pero no se la puede conocer sin construcciones de conceptos en la intuición, es decir, sin representarnos dicha cantidad $n+m$. Por otro lado, para identificar una colección de particulares de n miembros es necesario recorrer toda la serie de miembros para determinar su cantidad y esto es lo que significa la noción kantiana de número, pues no es propiamente cantidad, sino cantidad numerable. Cuando se usa una colección particular de cosas sensibles se construye el concepto de cierta cantidad o magnitud, construcción que Kant llama imagen del concepto en cuestión. La identificación de esta u otra colección como la plantilla del concepto en cuestión la llama el "esquema" de ese concepto. El concepto de número es semejante al concepto del color, ya que es imposible explicarlo por medio de un concepto puro del entendimiento, para que tenga sentido debe estar en relación con alguna cosa. El número, que necesita para ser entendido una colección de cosas para recorrer, está referido a la temporalidad que pertenece a la sensibilidad no al entendimiento. Según esto, el conocimiento aritmético depende de la imaginación, en particular de la imaginación productiva, pues la identificación no se hace por comparación de colecciones de n cosas pertenecientes a los datos sensibles, sino por la construcción productiva imaginaria, no entendida como la capacidad para tener imágenes mentales, sino como la disposición para construir conciencias sensibles como conciencias de algo más, que en este caso, son conciencias de colecciones de particulares que poseen y exhiben n cantidad de miembros (Young, 1988, pp. 161-162).

Y aunque Hannah Ginsborg (1997), en su artículo "Lawfulness without a Law: Kant on the Free Play of Imagination and Understanding", no se opone directamente a Hintikka (1992, 1998), ni se ocupa de las matemáticas, nos ofrece una explicación de la actividad imaginativa en la síntesis trascendental. Su primer interés es resolver el problema de la libertad de la imaginación en conformidad con las leyes del entendimiento o con las facultades del conocer, que se presenta en el juicio estético en la *Crítica del juicio*. Su preocupación es la característica contradictoria del juicio estético: el libre juego de imaginación en concordancia con el entendimiento, en otras palabras, la libertad legal de la imaginación. Este juego es similar a la actividad de la imaginación en el conocimiento empírico, donde la imaginación es gobernada por los conceptos del entendimiento. ¿Cómo se debe entender la “legalidad sin ley”? en otras palabras, cómo entender la imaginación relacionada con el entendimiento sin llegar a un concepto en particular, en el ámbito estético. En el transcurso de la argumentación esta pregunta se transforma en: ¿cómo se originan los conceptos empíricos?

En el marco de la filosofía kantiana los conceptos parecen ser reglas del entendimiento para la actividad de síntesis y así podríamos creer que los conceptos empíricos preceden a esta actividad, pero si la síntesis es fundamental para la experiencia de lo percibido, como afirma Kant, entonces la síntesis debe preceder a los conceptos empíricos o éstos deben depender de ella. Para dar respuesta a su interrogante ella debe dilucidar el papel de la imaginación en la percepción y para ello se sustentará en la tesis de Strawson para quien la percepción es "influida", "animada" o "irradiada" por el concepto y bajo este influjo la imaginación dirige la intuición hacia un camino más bien que hacia otro, así el concepto vive en la percepción (Ginsborg, 1997, p.50).

La identificación de conceptos con reglas tiene que ver con la dualidad de las imágenes o representaciones: son universales, pues están construidas en función de un concepto válido para cualquier imagen particular de objetos de su clase, y son particulares, pues es esta imagen particular de un objeto de cierta clase X. Otra parte en la respuesta de por qué Kant identifica conceptos con reglas, se sustenta en cómo debe ser mi percepción de tal cosa, es decir tiene un carácter normativo, que corresponde al “deber ser” (Ginsborg, 1997, p. 51). En conclusión, Ginsborg afirma que la tensión existente entre síntesis y conceptos empíricos posee dos aristas: por un lado, si las representaciones tienen unidad objetiva, la síntesis de éstas debe ser gobernada por reglas o conceptos empíricos; por otro lado, si la intuición sensible no puede dar conceptos empíricos por sí sola ellos deben provenir de, o les debe preceder, una síntesis imaginativa sobre nuestras representaciones. Por esta razón, Ginsborg propone entender la imaginación como una capacidad para la ejemplificación de reglas. Así, por ejemplo, hablar una lengua es una actividad gobernada por reglas que es necesario comprender a la hora de adquirir tal habilidad, es decir, se aprende a hablar la lengua nativa de forma natural o por un proceso natural. En este tipo de actividades las reglas se actualizan en el proceso y sólo se puede hablar sobre la corrección del uso de la reglas si se reflexiona sobre la actividad misma.

En otras palabras: "Una actividad ejemplifica reglas si su ejecución determina las reglas según las cuales debe ejecutarse." (Ginsborg, 1997, p. 61). Otros ejemplos de este tipo de actividad gobernada por reglas con cánones internos de corrección serían: la creación artística (el genio) o la conformación de los organismos naturales: caracoles o cristales, por ejemplo. La reflexión sobre este tipo de actividades gobernadas por cánones internos de corrección produce un juicio que dice como "debe ser" la actividad. Ginsborg dividirá entonces los juicios en "derivados" o aquellos que dicen como algo debe ser basado en algo anterior (un concepto o una representación) y "primitivos", aquellos a los que no les antecede ningún concepto, representación o canon, ya que ellos ejemplifican la regla o constituyen el canon. Ellos establecen como la cosa debe ser en primer lugar. Ginsborg conectará esta idea con el concepto de síntesis kantiano: los conceptos empíricos no son poseídos con anterioridad para realizar la síntesis imaginativa que expone las reglas o cánones de cómo algo debe ser y, por lo tanto, la imaginación procede ciegamente pero en correspondencia a un proceso natural. De esta manera, la imaginación estaría gobernada por reglas, aunque implícitas en su propia actividad, y entonces el resultado de la síntesis imaginativa gozaría de la objetividad que Kant reclama para el conocimiento. Consideramos que ocurre lo mismo en el caso de las construcciones matemáticas, allí la imaginación, por medio de una síntesis gobernada por estándares internos de corrección, elabora representaciones que dan cuenta de las propiedades desconocidas de los objetos matemáticos, fundamentando de esta manera los juicios sintéticos *a priori*.

## 5. Conclusiones

La explicación ofrecida por Ginsborg (1997) del papel de la imaginación en la síntesis trascendental y los argumentos contra Hintikka (1992, 1998) otorgados por Butts (1981), Torretti (2004), Shabel (1998) y Young (1988), nos permiten reformular la reconstrucción de Hintikka en los siguientes términos:

(1) El razonamiento matemático se ocupa principalmente de la existencia de individuos.

(2) Los resultados del razonamiento matemático son aplicables a toda experiencia *a priori*.

(3) La existencia de los individuos, de los que se ocupa el razonamiento matemático, se debe al proceso mediante el cual llegamos a conocer la existencia de individuos en general.

(4) Las relaciones que mantienen entre sí los individuos, de los que se ocupa el razonamiento matemático, se deben al proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos.

(5) El proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos en general es la síntesis.

(6) La estructura del razonamiento matemático se debe a la estructura de nuestro aparato sintético (Imaginación).

De (6) se desprende que el razonamiento matemático puede ser activo o pasivo: activo si la síntesis es trascendental y pasivo si la síntesis es gobernada por conceptos. En concordancia con esto, Kant afirma, en A 837/ B 865, que el razonamiento matemático es activo de forma originaria la primera vez que se descubre alguna propiedad matemática o la primera vez que se entiende algún concepto matemático. Una vez que se tiene el concepto, sea por su descubrimiento o por su aprendizaje, sólo queda su aplicación en futuras ocasiones y en esa medida el razonamiento matemático, al igual que la síntesis gobernada por reglas, es realizado pasivamente. Sólo después de esto se puede, siguiendo a Leibniz, desarrollar la contraparte del *ars inviniendi*, es decir, el *ars indicando* o arte de juzgar (análisis de los conceptos en sus elementos simples), esta es la parte del razonamiento matemático que lo hace ver como conocimiento analítico. Con esto en mente, ahora podemos incluir las sustituciones (5*) y (6*) hechas por Hintikka (1992,1998) pero en franca continuación de nuestra reconstrucción anterior:

(7) El proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos es su búsqueda.

(8) La estructura de un argumento lógico se debe a la estructura de los procesos de búsqueda y encuentro.

## Referencias bibliográficas

Álvarez, M. C. (2006). *La imaginación en Kant: el juego entre lo cognoscitivo y los estético,* Tesis de grado para optar a la Licenciatura de Filosofía, Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Butts, R. (1981). Rules, Examples and Constructions Kant's Theory of Mathematics. *Synthese,* 47, 257-288.

Couturat, L. (1960) *La filosofía de las matemáticas en Kant.* México, DF: Universidad Autónoma de México.

Ginsborg, H. (1997). Lawfulness without a Law: Kant on the Free Play of Imagination and Understanding. *Philosophical Topics*, *25* (1), 37-81.

Hintikka, J. (1962). *Saber y Creer. Una introducción a la lógica de las dos nociones*. Madrid: Tecnos.

Hintikka, J. (1992). Kant's Transcendental Method and his Theory of Mathematics. En C. Posy, *Kant´s Philosophy of Mathematics* (pp. 341-359). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hintikka, J. (1998). *El viaje filosófico más largo: De Aristóteles a Virginia Wolf.* Barcelona, España: Gedisa.

Kant, I. (1975). *Prolegómenos*. Buenos Aires: Aguilar.

Kant, I. (1988). *Crítica de la razón pura.* Madrid: Alfaguara

Kant, I. (2003). *Crítica del juicio*. México, DF: Porrúa.

Parsons, C. (1992). Arithmetic and the Categories, C. Posy, Kant´s Philosophy of Mathematics (135-158). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rosales, A. (1981). El concepto de construcción en la filosofía kantiana de la matemática: Jaako Hintikka vs. Robert Butts, Apuntes filosóficos, 13, 121-129.

Shabel, L. (1998). Kant´s on the "Symbolic Construction" of Mathematical Concepts. Studies in History and Philosophy of Science, *29* (4), 589-621.

Shabel, L. (1992). Kant´s Philosophy of Mathematics. En P. Guyer, The Cambridge Companion to Kant (pp. 195-215). Cambridge: Cambridge University Press.

Torretti, R. (1980). Manuel Kant. Estudio sobre los fundamentos de la filosofía crítica, 2ª ed. Buenos Aires: Charcas.

Torretti, R. (2004). Intuición pura. En C. Ojeda y A. Ramírez, El sentimiento de lo humano en la ciencia, la filosofía y las artes: Homenaje al Profesor Félix Schwartzmann Turkenich (pp. 111-134). Santiago: Universitaria.

Young, J. M. (1988). Kant´s View of Imagination. Kant-Studien, *79* (2), 140-164.

Young, J. M. (1992). Construction, Schematism, and Imagination. En C. J. Posy, Kant´s Philosophy of Mathematics (pp. 159-217). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.