Ricardo Da Silva[*]

Un acercamiento al *platonismo absoluto* de Cantor.

Resumen

Hacia finales del siglo XIX se llevó a cabo una gran revolución conceptual y metodológica en la matemática. En tal revolución se empezaron a emplear conceptos, métodos y técnicas que dejaban de lado la antigua forma de hacer matemática, propia del siglo XVIII y principios del siglo XIX, y a su vez proponían un *Hacer abstracto*, es decir, una forma abstracta de ocuparse del ente matemático. Pero no sólo se trataba de un cambio metodológico, sino que la pregunta por los fundamentos se vuelve cada vez más importante y trae consigo interrogantes de carácter filosófico, como es el caso de la inquietud por la naturaleza del objeto matemático (la interrogante ontológica), y la posibilidad de conocimiento de dicho objeto (la interrogante epistemológica). Nuestro interés en este artículo es mostrar cómo la filosofía que respalda las investigaciones matemáticas de Cantor trata de dar respuestas a las interrogantes ontológicas y epistemológicas. Para ello hemos tratado de ofrecer un contexto histórico-conceptual que gira en torno a la pregunta por los fundamentos, y dentro de dicho contexto hemos señalado como se presenta el *Platonismo absoluto* de Cantor.

Palabras Clave: Fundamentos de la matemática, Realismo matemático, Platonismo absoluto, Infinito actual.

An approach to Cantor´s absolute Platonism

Abstract

A great conceptual and methodological revolution in mathematics was carried out by the end of nineteen century. In that revolution people began to use concepts, methods and techniques which set aside the old way of doing mathematics, typical of the eighteenth and early nineteenth century, and in turn they proposed an *Abstract Make*, i.e., an abstract form of dealing with the mathematical entity. But it was not only a methodological change, but the question of the foundations is becoming increasingly important which arises more philosophical questions, such as the concern about the nature of the mathematical object -the ontological question- and the

[*]Universidad Central de Venezuela

possibility of knowledge of this object -the epistemological question. Our interest in this article is to show how the philosophy behind Cantor's mathematical research is intended to answer the ontological and epistemological questions. For it, this paper tries to provide a conceptual and historical context, which is revolving around the question of the foundations, and within this context, it is noted as the *Absolute Platonism* of Cantor.

Keywords: Foundations of Mathematics, Mathematical Realism, Absolute Platonism, Current Infinity.

1. La pregunta por los fundamentos de la matemática.

Como es bien sabido, el siglo XIX fue un siglo de grandes revoluciones en el terreno de las ciencias, ejemplos claros son Darwin y su teoría de la evolución, las ecuaciones de Maxwell sobre la teoría clásica del campo electromagnético y los inicios de la teoría atómica por parte de John Dalton, por sólo mencionar algunos casos famosos[25]. Pero sobre todo fue un siglo de grandes descubrimientos y progresos para la que se conocía como la "más confiable de todas las ciencias"[26], es decir, la matemática.

Ahora bien, que el siglo XIX sea un siglo de logros y adelantos para la matemática se debe a tres aspectos fundamentales, los cuales hacen que la matemática de ese momento se diferencie de todo el *Hacer* matemático precedente, *Hacer* matemático que venía siendo liderado por las investigaciones de Euler, Lagrange, d'Alembert y Fourier, por sólo nombrar algunos matemáticos importantes de la época. Dichos aspectos fundamentales que se encuentran en la nueva forma de hacer matemática[27] son los siguientes:

a) Una exigencia de rigor en las definiciones y conceptos de las diversas ramas de la matemática. Esto permite a su vez dos cosas, por un lado que las definiciones fuesen claras y sencillas, facilitando su empleo, y por otro lado se buscaba conocer el campo de aplicabilidad de los conceptos.

b) Una determinación explícita de los procedimientos deductivos y fundacionales que son usados en las demostraciones matemáticas, es decir, se buscaba hacer evidente todas aquellas leyes y estrategias lógicas que el matemático usaba cuando quería demostrar un teorema.

c) La eliminación de la *evidencia empírica* como requisito necesario para la aceptación de resultados matemáticos, dicho de otra manera, la certeza de los

[25]Cfr. G.Realey D.Antiseri.,*Historia del pensamiento filosófico y científico,* Barcelona, Editorial Herder, 1988, t. III, p. 322

[26]Carnap, R., "The logicist foundations of mathematics", 1931 en , P. Benacerrafy H. Putnam,*Philosophy of mathematics,* Cambridge, Cambridge University Press, 1983, p. 41 (traducción personal)

[27]Cfr. Reale, G. y Antiseri, D.,Ob.cit., p. 324

resultados matemáticos no se veía reducida a la verificación de dichos resultados en el mundo.

Estos tres aspectos se ven desarrollados en un primer momento por los resultados del matemático francés Louis Augustin Cauchy quien define los conceptos del análisis infinitesimal através de los números reales, y por ende deriva de éstos las nociones de la teoría infinitesimal, como lo son las de *límite*, *derivada*, *integral*, etc.[28] Un segundo momento en donde se siguen desarrollando los tres aspectos antes mencionados es en la construcción de la teoría de los números reales a partir de la teoría de los números naturales, donde los números naturales son la "materia prima" de la aritmética y es por ello que a esta fase se le conoce como "aritmetización del análisis".

En la "aritmetización del análisis" se ven relacionados grandes matemáticos como Karl Weierstrass, Georg Cantor y Richard Dedekind, quienes demostraron que toda la teoría de los números reales y los entes matemáticos que se pueden construir a partir de ellos, se construyen rigurosamente a partir del concepto de número natural y las propiedades de dicho concepto. Usando una metáfora arquitectónica, es posible ver a los números naturales como el cimiento o los bloques que soportan todo el edificio de la matemática[29].

Ahora bien, muchos matemáticos y lógicos no aceptaron la idea de que los números naturales fuesen la base del edificio de la matemática, más bien, postulaban la tesis de que había algo mucho más primigenio a partir de lo cual se podía derivar la noción de número natural. Es justamente de esta tesis, de que los números naturales se derivan de nociones mucho más básicas y primigenias, que surgen dos líneas de investigación para la fundamentación de la aritmética, por un lado encontramos el proyecto logicista de Frege y por otro lado encontramos el proyecto conjuntista de Cantor.

El proyecto logicista de Frege tenía como premisa fundamental la tesis de que la aritmética es una rama de la lógica, en palabras de Jesús Mosterín:

---

[28]Cfr. Ibídem

[29] Cfr. Javier De Lorenzo, *La matemática: de sus fundamentos y crisis*, Madrid, Editorial Tecnos, 1998. Para un estudio del uso de las metáforas arquitectónicas empleadas al momento de hablar de los fundamentos de la matemática, revísese el Capítulo 1 titulado: "De crisis y fundamentos".

> El objetivo final de Frege consistía en reducir la aritmética (y el análisis matemático) a la lógica, definiendo las nociones aritméticas a partir de nociones puramente lógicas, y deduciendo los teoremas de la aritmética a partir de principios lógicos[30]

Así pues, mientras Frege pasaba de la "aritmetización del análisis" a la "logización de la aritmética", Georg Cantor buscaba fundamentar la aritmética en la Teoría de conjuntos, es decir,buscaba definir el concepto de número natural desde la noción más básica de conjunto. De esta manera mientras la investigación de Frege tenía una meta más filosófica, la de Cantor era mucho más matemática[31], sin embargo ambas fundamentaciones se ven amenazadas por el surgimiento de varias paradojas que implicaban grandes contradicciones a la base del edificio matemático, en especial podemos mencionar la *paradoja de Cantor* y la *paradoja de Russell.*

Hacia el año de 1899[32] Cantor le había escrito una carta a Dedekind comentándole que había encontrado una inconsistenciaen la teoría que el mismo había ayudado a crear. El matemático alemán ya había demostrado hacia 1891 que "el conjunto potencia de un conjunto dado siempre tiene una cardinalidad mayor que ese conjunto dado. Para cada conjunto A, $|A| < |P\ (A)| = 2^{|A|}$"[33]. Es decir, para todo conjunto, sea finito o infinito, el conjunto potencia de dicho conjunto necesariamente tiene más elementos. Ahora bien ¿Qué pasa cuando consideramos el anterior teorema sobre el conjunto universal U (el conjunto de todos los conjuntos)? Por lo dicho anteriormente, el *número cardinal* de U debería ser menor que el *número cardinal* deP(U), pero resulta que U es el conjunto de todos los

---

[30]J. Mosterín, *Los lógicos*, Madrid, Editorial España Calpe, 2000, p. 38

[31] No debemos olvidar, como veremos en la sección 1.2 del presente artículo, que Cantor respalda su matemática y en especial su Teoría de conjuntos en una filosofía de corte realista platónico.

[32]Cfr. A. Garciadiego, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, Madrid, Alianza Editorial, 1992, pp. 66-67. Garciadiego comenta en las páginas antes citada lo siguiente: "Algunos colegas aseguran que Cantor describió esta inconsistencia a Dedekind en una carta fechada el 28 de julio de 1899, sólo que ahora incluso la fecha de la carta está en duda. Grattan-Guinness ha mostrado que Zermelo realizó un trabajo poco escrupuloso al editar las obras completas de Cantor y exhibió que no únicamente había una carta de Cantor a Dedekind, como se deducía de la publicación alemana original, sino dos. Unos han establecido la fecha de descubrimiento de la "paradoja" tan pronto como 1883, otros en 1895, y algunos más en 1896. Así, al menos, la fecha del descubrimiento se encuentra en disputa". A pesar de esta disputa, que sigue en pie sobre la fecha del descubrimiento de la paradoja de Cantor, hemos querido seguir a autores como Jesús Mosterín en *Los lógicos*, Jesús Mosterín y Roberto Torretti en el *Diccionario de Lógica y filosofía de la ciencia* y van Heinenoort en *From Frege to Gödel*, para quienes la fecha de 1899 es la correcta.

[33]J. Mosteríny R. Torretti, *Diccionario de Lógica y filosofía de la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial, 2002, p. 546, *Entrada:* Teorema de Cantor.

conjuntos, y como P(U) es un conjunto de conjuntos, tenemos entonces queP(U)es un subconjunto de U, indicando esto que la cardinalidad de P(U) es menor o igual que la de U, lo cual es una contradicción.[34]

Dos años más tarde del resultado paradójico de Cantor, hacia la primavera de 1901, el filósofo y lógico británico Bertrand Russell estaba tratando de estudiar los principios de la matemática mediante el método logicista. En el transcurso de sus investigaciones, la *paradoja de Cantor* tuvo un peso fundamental ya que fue ésta la que lo llevó a la paradoja de las clases que no pertenecen a sí mismas[35], en palabras del mismo Russell:

> Cantor tenía una demostración de que no existe un número máximo, y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo tenía que ser el máximo posible. De acuerdo a ello, examiné su demostración con cierta minuciosidad, e hice un esfuerzo por aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me condujo a considerar a las clases que no son miembros de sí mismas, y a preguntar si la clase de tales clases es o no es un miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica su contraria [36]

Hacia finales de 1901 Russell no le dedica gran importancia a la paradoja descubierta por él y la trata como una mera "curiosidad lógica". Hacia 1902 es cuando se da cuenta, luego de no poder resolver tal "curiosidad lógica", que la paradoja amenazaba con derrumbar la confianza que giraba en torno de la consistencia de la matemática.Luego, en Junio de 1902, Bertrand Russell le escribe una carta a Frege indicándole que la contradicción, que había descubierto meses atrás, se podía derivar como teorema del sistema expuesto en su obra *Las leyes de la aritmética*. Esta antinomia surge en el sistema de Frege gracias al axioma V[37] que supone al *Principio de Comprensión Intuitiva* que también manejaba Cantor en su teoría ingenua de conjuntos y que asegura que "toda propiedad determina un conjunto"[38]. Por lo tanto, la *paradoja de Russell* afecta el programa logicista de Frege ytambién ataca a la teoría ingenua de conjuntos de Cantor.

---

[34]Cfr. A. Garciadiego, Ob.cit., pp. 66-67

[35] Cfr. J. Mosterín,Ob.cit., p. 152

[36]B. Russell, *La autobiografía de Bertrand Russell*, Madrid, Aguilar, 1968, p. 232 (citado en A. Garciadiego,Ob.cit., p. 150)

[37] El Axioma V de Frege dice: "Para todo concepto F y G, la extensión de F es igual a la extensión de G si y sólo si las mismas cosas caen bajo F y bajo G". Dicha cita fue tomada de P. Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1997, p. 6

[38]Jane, I., "¿De qué trata la teoría de conjuntos?" En R. Orayeny A. Moretti, [Ed], *Filosofía de la lógica*, Madrid, Editorial Trotta, 2004, p. 252

Siguiendo a autores como Manuel Garrido[39] y a Jesús Mosterín[40], la *paradoja de Russell* puede explicarse de la siguiente manera:

Existen clases que pertenecen a sí mismas, mientras que existen clases que no pertenecen a sí mismas, por ejemplo: la clase de todas las clases es ella misma una clase y por ende pertenece a sí misma, mientras que la clase de los océanos no es un océano, teniendo entonces que la clase de los océanos no pertenece a sí misma.

Estas clases que no pertenecen a sí mismas caen bajo la propiedad P de ser una clase que no pertenece a sí misma. Siguiendo los pasos de Frege y Cantor, la propiedad P genera una extensión R (bajo la cual caen los objetos que cumplen con la propiedad), que se define de la siguiente manera:

$$R= \{X \mid X \notin X\}$$

Surge ahora la pregunta ¿R pertenece a sí misma?[41] Por un lado tenemos que si $R \in R$ entonces R debe cumplir con la propiedad que determina a los elementos del mismo conjunto R, de tal manera que $R \notin R$. Por otro lado tenemos que si R no es un elemento de R, entonces R está cumpliendo con la propiedad que se exige para ser un elemento de R y por lo tanto ocurre que $R \in R$, así pues,$R\notin R \leftrightarrow R \in R$, lo cual genera una contradicción.

Es así como el final del siglo XIX y el principio del siglo XX pasan a ser reconocidos como los siglos en el que el edificio matemático se vio estremecido y la pregunta acerca de los fundamentos cobró más importancia que nunca. Ya no sólo se trataba de otorgar rigor a las definiciones y volver explicito los procesos deductivos y lógicos que se encontraban atrás de las demostraciones matemáticas, sino que se empezaron a gestar inquietudes sobre la naturaleza y existencia del objetos matemático, y por otro lado, se empezaron a tratar de establecer enfoques que explicaran cómo es posible el conocimiento matemático.

[39]Cfr. M.Garrido, *Lógica Simbólica*, Madrid, Tecnos, 2001 (1ra. Ed. 1974), pp. 520-522
[40]Cfr. J. Mosterín, Ob.cit., pp. 152-153
[41] Esta pregunta tiene sentido, pues en la Teoría de conjuntos vale el *Principio de Tercero Excluido*, es decir, dado cualquier conjunto A y un elemento x, se cumple que $x \in A$ o $x \notin A$, en especial es licito preguntar si A pertenece o no pertenece a sí mismo.

2. La postura realista en la matemática: El *platonismo absoluto* de Cantor.

Como dijimos anteriormente, hacia mediados del siglo XIX se presentó una revolución en la ciencia matemática que la llevó a obtener grandes resultados y en donde se introdujeron reformas en la praxis matemática, que tuvieron como consecuencia un nuevo tipo de *Hacer*, el cual muchos califican de *Hacer global* o *Hacer abstracto* ante el *Hacer figural* propio de la matemática del siglo XVIII yprincipios del siglo XIX[42]. Este nuevo *Hacer*trae consigo toda una carga conceptual que sitúa como conceptos bases a los de *conjunto* y *función*, pero a su vez plantea una serie de inquietudes, como la metodológica, en la cual se presenta el problema de la validez de los nuevos mecanismos de definición y demostración; y otras inquietudes más filosóficas, como la ontológica, donde el peso recae en cómo debe entenderse el carácter existencial de los elementos de la matemática; y la epistemológica, que se plantea la pregunta acerca de cómo es posible el conocimiento de esos elementos[43].

Los trabajos de G. Cantor y los de G. Frege, aunque con propósitos y metas distintas, se posicionan en este nuevo *Hacer* con sus nuevos conceptos y nuevos métodos. La filosofía de la matemática que Cantor adopta y que Frege considera vinculada a su proyecto logicista para solventar las inquietudes antes nombradas, es una de corte realista en donde el objeto matemático es tomado como existente con independencia del sujeto. Paul Bernays fue el primero en introducir el nombre "platonismo", hacia el año de 1934[44], para calificar a tal postura filosófica, pues esa consideración de "los objetos libres de cualquier vinculación con las reflexiones del sujeto"[45] rememora a la doctrina expuesta por Platón en *La Republica*[46]. La siguiente cita de dos grandes estudiosos de la lógica, como lo son Ernest Nagel y James Newman, nos ayudará a entender cuáles son estas propiedades que posee el realismo platónico presente en el trabajo de matemáticos como Frege y Cantor:

> El realismo platónico sostiene la idea de que las matemáticas no crean ni inventan sus "objetos", sino que los descubren como Colón descubrió América. Ahora bien: si esto es cierto, los objetos deben tener en cierto sentido una "existencia" anterior a su descubrimiento. Conforme a la doctrina platónica, los objetos de estudio matemático

---

[42]Cfr. Javier De Lorenzo, Ob.cit.,pp. 9
[43] Cfr. Ibídem.
[44]P. Bernays, *El platonismo en matemática*, Caracas, UCV-Ediciones de la Biblioteca, 1982
[45] Ibíd., p. 16
[46] Platón, *La República*, Madrid, Alianza Editorial, 2003

> no se encuentran en el orden espacio-temporal. Son formas eternas incorpóreas o arquetipos, que moran en un mundo distinto, accesible solamente al intelecto. De acuerdo con este punto de vista, las formas triangulares o circulares de los cuerpos físicos perceptibles por los sentidos no constituyen los objetos verdaderos de las matemáticas. Esas formas son, simplemente, encarnaciones imperfectas de un indivisible triangulo "perfecto", o circulo "perfecto", que es increado, no se halla jamás plenamente manifestado por las cosas materiales y únicamente puede ser captado por la mente exploradora del matemático.[47]

Lo primero que nos plantean los autores es que los objetos matemáticos ni son creaciones ni son invenciones del sujeto matemático y por lo tanto, el matemático actuará como alguien que descubre y no como inventor, haciendo uso de otra metáfora distinta a la de la cita, se puede ver al matemático como un arqueólogo, éste no inventa los huesos ni los crea, sino que los consigue en la tierra bajo capas de sedimento. Llevando lo anterior a palabras menos metafóricas, tenemos que la posición realista platónica presupone por una parte la objetividad del ente matemático, es decir, los números, conjuntos y funciones no son creaciones de la mente humana; por otra parte, y derivándose de lo anteriormente dicho, existe una separación entre el sujeto y el objeto, de lo que se concluye que el objeto matemático no necesita del sujeto para existir, al contrario la "existencia" del ente matemático es anterior a su relación con el sujeto, sus medios de definición y su teoría formal.

Lo segundo que plantean los autores es el hecho de que los entes matemáticos a pesar de ser objetivos no poseen una ubicación en el espacio y el tiempo, sino que habitan en una realidad distinta a la física, esto tiene como consecuencia que las cualidades ontológicas de los entes matemáticos sean distintas a la de los entes físicos, y por tanto los objetos de la matemática son incorpóreos, atemporales e inmutables. Estos cambios ontológicos producen también un cambio en la forma en que el sujeto se relaciona con el objeto, pues al no poseer las cualidades de los objetos físicos, los entes matemáticos no pueden ser aprehendidos por los sentidos y son como dice los autores "accesibles solamente por el intelecto".

Ahora bien, el mismo Bernays hizo una distinción entre *Platonismo absoluto* y *Platonismo moderado*[48], el primer tipo de platonismo es el que aparece en la obra de Cantor

[47]E. Nagely J. Newman, *El teorema de Gödel*, Madrid, Tecnos, 1994, pp. 118-119
[48]Cf. P. Bernays, Ob.cit., pp. 20-21

e inclusive en la deFrege, mientras que el segundo tipo, se puede evidenciar en la teoría axiomática de conjuntos presentada por Zermerlo en 1908. A continuación lo que haremos es describir de forma general las características del *Platonismo absoluto* y luego mostraremos como se entiende este tipo de realismo en la obra de un autor como Cantor.

2.1. Características del *platonismo absoluto.*

La primera característica que presenta el *Platonismo absoluto* es que todos los objetos matemáticos forman una totalidad bajo la cual actúa el *principio de tercero excluido*[49], es decir, dada una propiedad sobre un conjunto de elementos se tiene que existen elementos que cumplen con la propiedad o elementos que no cumplen con tal propiedad, pero se tiene la certeza de que ocurrirá una de las dos posibilidades, inclusive si no se tiene los medios para probarlo, en palabras del mismo Bernays:

> Los objetos de una teoría se tratan como elementos de una totalidad tal que permite razonar como sigue: Para cada propiedad expresable usando las nociones de la teoría, es un hecho objetivamente determinado si hay o no un elemento de la totalidadque posea tal propiedad. Asimismo, se sigue de este punto de vista que o bien todos los elementos de un conjunto poseen una determinada propiedad, o bien hay al menos un elemento que no la posee.[50]

La segunda característica del *Platonismo absoluto* viene dada por la aplicación de métodos de demostración no-constructivistas, un ejemplo de ello es la obra de Cantor en donde abundan las pruebas de existencia por reducción al absurdo, un caso concreto sería el *teorema fundamental de la teoría de conjuntos*, dicho teorema prueba que el conjunto de los números naturales tiene menor cardinal que el conjunto de los números reales, la prueba corre por absurdo suponiendo que efectivamente el conjunto de los números naturales tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números reales, pero esto implica una contradicción que niega la hipótesis del absurdo concluyendo que “el conjunto de números reales no es enumerable”[51].

[49]Cf. Ibíd., p. 9
[50] Ibíd., p. 16
[51] Manuel Garrido, Ob.cit., p. 518

La tercera característica del *Platonismo absoluto* es la introducción del infinito actual en matemáticas. Como nos comenta Thomas Jech en su artículo “El infinito”[52], sólo los filósofos y teólogos se habían ocupado a lo largo de la historia del infinito actual, los matemáticos sólo consideraban el infinito de forma potencial, es decir, dada una sucesión de números siempre es posible añadirle un número más a dicha sucesión[53]. Pero fue Cantor, como veremos más adelante, quien introdujo el infinito como un todo acabado que puede ser tomado como sujeto de predicación y así pues el infinito actual podía ser considerado ahora matemáticamente definiendo para el mismo una suma, una multiplicación y una potencia. Debemos advertir que esta característica del *Platonismo absoluto* no se agota en la introducción del infinito actual dentro del mundo de la matemática, sino que da paso al descubrimiento de varios infinitos, así pues:

> Entre lo finito y lo infinito hay un abismo insalvable. Partiendo de conjuntos finitos, y mediante un número finito de operaciones conjuntistas como la unión, la intersección, el producto cartesiano y el conjunto de partes, sólo obtenemos de nuevo conjuntos finitos. Lo infinito es inalcanzable desde lo finito. Para alcanzarlo hay que dar un salto mortal, que la teoría de conjuntos avala mediante un axioma específico[54]. Una vez dado el salto, Cantor se puso a explorar lo infinito. Lo primero que descubrió fue que no hay un solo tipo de infinito, una sola cardinalidad infinita, sino muchos infinitos distintos.[55]

La cuarta y última característica del *Platonismo absoluto*es la del *Principio de comprensión intuitiva*. Como vimos en la primera sección del presente artículo, tal principio consiste en considerar que dada una propiedad existe el conjunto de elementos que cumple con la propiedad en cuestión[56].Este principio aparece tanto en la teoría ingenua de conjuntos liderada por Cantor y Dedekind como en los trabajos logicistas de Frege. Para muchos autores, es la presencia de este principio el que permite dividir el *Platonismo* en absoluto y *moderado*, así por ejemplo la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel evita este principio lo que la vuelve un tipo de *Platonismo moderado*.

---

[52] Jech, T., “El infinito”, en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 8, número 2, Real sociedad matemática española,mayo –agosto 2005.
[53]Cfr. Ibíd., p. 369
[54] Este axioma es el axioma de infinitud que trataremos con detalle en el siguiente capítulo cuando abordemos el *Platonismo moderado* de Zermelo.
[55]J. Mosterín, Ob.cit., p. 105
[56]Cfr.Jane, I.,Ob.cit., p. 252

Ya teniendo en cuenta las características fundamentales del *Platonismo absoluto*, pasaremos en el siguiente apartado a mostrar cómo se desarrolla tal filosofía de la matemática en el pensamiento de Cantor.

2.2.El paraíso conjuntista de Cantor.

El *Platonismo absoluto* que aparece en la obra conjuntista de Cantor, no surgió como una medida de solución al problema de las paradojas encontradas dentro de la Teoría de conjunto y los sistemas lógicos, sino que ya existía desde antes de tal problema, como una forma de llevar a cabo el *Hacer* matemático, y de dar respuesta a los problemas ontológicos, epistémicos y metodológicos que se planteaban en el seno de la matemática. Pero el *Platonismo absoluto* de Cantor, sí toma una postura frente al problema de las paradojas, postura que estudiaremos más adelante.

Georg Cantor es un matemático proveniente de la ciudad de San Petersburgo que cursó sus estudios de matemática tanto en la Universidad de Zürich como en la Universidad de Berlín. Luego de doctorarse en el año de 1867 con una tesis sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado[57], Cantor se traslada a la Universidad de Halle en donde tres años más tarde empieza su interés por series trigonométricas infinitas. Pero su estudio en series trigonométricas se va generalizando cada vez más llegando de esta manera a la noción de conjunto y desarrollando así lo que se conoce hoy día como la teoría ingenua de conjuntos (entre 1879 y 1884).

Para Cantor un conjunto es "cualquier reunión en un todo *M* de determinados objetos bien distinguidos *m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento (llamados "elementos" de *M*)"[58]. Nótese que de esta definición se desprende que el conjunto es "un objeto por sí mismo", es decir, los elementos al formar un todo forman también una unidad de la cual se puede predicar. Así pues, Cantor cree haber encontrado en esta definición de

[57]Cfr. J. Mosterín, Ob.cit. pp. 89-94
[58]Cantor, G. "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers", Chicago, Open Court, 1915, p.85 (citado en Roberto Torretti, *El paraíso de Cantor.La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática*, Santiago de Chile, Editorial Universitaria, 1998, p. 8)

conjunto un paralelo de la noción de *idea* en Platón[59], púes esta última también es la unidad objetiva de una multiplicidad de elementos[60]. Pero el paralelismo no se agota sólo en el carácter lógico-predicativo que poseen los *conjuntos* en Cantor y las *ideas* en Platón, sino que el primero también defiende que los objetos matemáticos tienen una existencia superior a la de los objetos físicos, tesis que mantuvo Platón en su obra *La República* y que luego rechazó. Citamos a continuación un fragmento de una carta que el matemático de San Petersburgo le escribe a Charles Hermite, se evidencia en palabras del primero como los números enteros gozan de una realidad ontológica superior a la del mundo material, las palabras de Cantor se refieren a los números enteros, pero su reflexión vale para todos los entes de la matemática, sobre todo los *conjuntos*:

> …en mi opinión la realidad y absoluta legalidad de los números enteros es *mucho mayor* que la del mundo sensorial. Y el que así sea, tiene una única y muy simple razón, a saber, que los números enteros existen en el grado sumo de realidad, tanto separados como en su totalidad actualmente infinita, en la forma de ideas eternas in intellectu Divino.[61]

Como vemos en la cita, los entes matemáticos existen de forma eterna y atemporal en el intelecto divino, lo que sugiere que los entes matemáticos no pueden ser construcciones mentales del sujeto, sino que existen con independencia de quien los piensa, es decir,dichas entidades tienen una realidad ontológica que no las hace dependiente del pensamiento (o de los constructos teóricos)[62]. Muchos se preguntaran cómo es posible el conocimiento de estas entidades matemáticas tras haber descrito su estatus ontológico en la forma en que lo hizo Cantor, pues bien el autor estaba consciente del problema y como todo buen platonista asegura que el conocimiento que pueda tener el humano sobre dichos objetos es limitado y esto se debe a que la matemática es completamente libre del desarrollo de las teorías matemáticas elaboradas por los hombres, es decir, la matemática no se ve reducida ni afectada por las teorías humanas, sino que

[59] Cfr. Cantor, G., "Fundamentos para una teoría general de conjuntos", 1882 en José Ferreirós (comp.), *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, Barcelona, Editorial Crítica, año 2006, p. 137

[60] Cfr. Nicola Abbagnano, *Diccionario de Filosofía* (Idioma: Portugués), SãoPaulo, Editorial Martins Fontes, 2007, p. 216, Entrada: Conjunto

[61]Carta de Cantor a Hermite, 30 Nov. 1895, enFerreiros, J., "Matemáticas y platonismo(s)" en *La Gaceta de la Real Sociedad española de Matemáticas*, N° 2, 1999

[62]Cfr. J. Mosterín, Ob.cit., p. 114

estas se ven afectadas por la matemática, y tratan de describirla y definirla (a pesar de que la teoría que el sujeto construye no agota, ni puede agotar, la realidad matemática). Es por esta razón que Cantor ofrece tres directrices para que el matemático mediante su teoría se acerque más al mundo platónico de la matemática:

1) Los conceptos, elaborados por los matemáticos, deben "estar libres de contradicciones internas"[63], es decir, los conceptos de nuestras teorías deben responder a nuestras intuiciones y no deben introducir contradicciones al interior de nuestras construcciones teóricas.

2) Los nuevos conceptos que introducen los matemáticos deben estar relacionados con los antiguos conceptos matemáticos, y si es posible dar cuenta de ellos. El mismo Cantor cumplió con esta condición muy exitosamente, pues la gama de conceptos que se introdujo mediante la Teoría de conjuntos tiene relación explícita con la teoría de los números enteros, de los números reales, del análisis, del algebra, etc.

3) Por último, el concepto para Cantor debe impulsar la ciencia hacia un nuevo nivel, es decir, debe ser enriquecedor para la teoría y no una mera entelequia abstracta que no haga evolucionar la ciencia, en palabras de Mosterín: "mientras uno no se contradiga y mientras lo que uno haga sirva para algo, todo está permitido en la matemática"[64], si por el contrario el concepto resulta estéril e inútil será abandonado por falta de éxito, esto significa que nuestro aparataje conceptual sólo es útil cuando da cuenta de los objetos que tienen lugar en el mundo platónico de la matemática.

Pero Cantor no se contentaba únicamente con hacer un tratamiento de los conjuntos finitos o los objetos finitos en matemática y de hecho sus preocupaciones trascendían a la matemática de su época, siendo así él quien introduce el infinito actual a la matemática y

---

[63]Ibíd., p. 116
[64] Ibídem.

quien funda una aritmética transfinita para abordar tal objeto. Quizás hoy en día no parece tan asombroso el hecho que los matemáticos trabajen con conjuntos infinitos, pero hacia mediados del siglo XIX el infinito actual seguía estando en el monopolio de los metafísicos y los teólogos[65] mientras que la "más confiable de todas las ciencias" debía conformarse con el estudio del infinito en potencia. Tres parecen ser las causas de tal rechazo al infinito actual. En primer lugar tenemos que desde Zenón, con su tesis de la imposibilidad de dividir el espacio, se tiene que el infinito es paradójico y que cualquier tratamiento matemático del mismo desemboca en contradicción[66]. En segundo lugar tenemos que aunque Aristóteles haya defendido la existencia necesaria del infinito en el libro III de la *Física*, tal existencia sólo la defendió de forma potencial negando enfáticamenteel infinito actual. En tercer y último lugar los medievales y los filósofos modernos defendían la tesis de que como el intelecto humano es finito entonces no puede conocer otra cosa que no sea finita, en el ámbito de lo matemático "se entiende tácitamente por *finitud del entendimiento* que su capacidad para la formación de números está limitada a los números finitos"[67]

Podríamos decir que a las primeras dos replicas al infinito actual subyace la idea de que "los únicos números concebidos como reales son los verdaderos números enteros finitos…"[68], pero esta idea encierra una petición de principio para Cantor, pues se trata de fundamentar que sólo existen números (conjuntos finitos) en el hecho de que sólo se conocen los cardinales finitos[69], y como él bien ha demostrado matemáticamente existe una cantidad infinita de cardinales infinitos. Con respecto a la idea de la tercera réplica, que se podría resumir diciendo que la finitud de nuestro entendimiento no nos permite conocer lo infinito, tenemos que tras la demostración de Cantor de una sucesión infinita de cardinales transfinitos quedó claro que el entendimiento es capaz de definir y distinguir los conjuntos infinitos, esto nos lleva a reevaluar la definición de "entendimiento finito" de tal forma que se dé cuenta de lo infinito[70].

---

[65] Cfr. Jech, T., Ob.cit., p. 369
[66] Cfr.Álvarez, C., "De la determinación del infinito a la inaccesibilidad de los cardinales transfinitos", en *CRITICA-Revista Hispanoamericana de Filosofía*, Vol. XXVI, número 78,Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, México, Diciembre 1994, p. 27
[67] G. Cantor, *Fundamentos para una…,cit.*, pp. 99-100
[68]Ibíd. , p. 91
[69]Cfr.Ibíd., p. 96
[70] Cfr. Ibídem.

Para finalizar mostraremos un caso en donde mejor puede apreciarse la filosofía de la matemática de Cantor, se trata de su postura ante el surgimiento de las paradojas de la Teoría de conjuntos, postura que termina de definirlo como un platonistaradical. Como recordaremos, Cantor y Frege partieron del *Principio de Comprensión intuitiva*, es decir, el principio según el cual una propiedad genera un conjunto, o dicho en otras palabras, toda entidad intensional genera una entidad extensional. Para Cantor, este principio era un fundamento sólido de la Teoría de conjunto, e implicaba que todas las extensiones de las propiedades y conceptos se encontraban en un mundo platónico. Pero como vimos anteriormente, considerar que toda propiedad genera un conjunto llevó a paradojas como la descubierta por Russell en 1902. La postura de Cantor ante el problema de la paradoja se basaba en una distinción que atendía a una coordenada epistemológica. Para nuestro autor existían colecciones a las cuales se les podía otorgar unidad, de tal forma que generaban *totalidades consistentes*o *conjuntos*[71], mientras que existían colecciones que no tenían una unidad, formando así a las*totalidades inconsistentes o absolutamente infinitas*[72][73], es decir, las primeras pueden ser tomadas como sujeto de predicación y manipuladas de manera matemática, mientras que la segunda (como el conjunto que da lugar a la paradoja de Russell, la colección de todos los ordinales o la colección de todos los*alefs*) no puede manipularse matemáticamente y cuando se toma como sujeto de predicación da lugar a contradicciones. Esta postura la presenta Cantor por primera vez en una carta dirigida a Dedekind el 3 de agosto de 1899[74]. El problema que parece sugerir Cantor en la carta es que cuando el sujeto trata de *captar*[75] la unidad dentro de dichas pluralidades, estas desembocan en contradicciones, mientras que si la pluralidad se deja *concebir*[76]como un todo es debido a que nuestro intelecto logra aprehender la unidad inherente a los elementos de esa pluralidad. Así pues, para el padre de la teoría ingenua de conjuntos no existían las paradojas, sino fallas epistemológicas, es decir, las paradojas se presentan en realidad como producto de nuestro conocimiento limitado.

[71]Cfr.Roberto Torretti, Ob.cit., p. 52
[72] Cfr. Ibíd., p. 51
[73] El nombre de totalidades absolutamente infinitas, responde a ciertas lecturas que Cantor sobre la *Ethica* de Spinoza. Al igual que Dios, estas totalidades que no poseen unidad sólo pueden ser reconocidas, pero nunca conocidas, es decir, el intelecto nunca puede llegar a determinar dichas totalidades.
[74]Cf. Roberto Torretti, Ob.cit., p. 51
[75] Cfr. Ibídem
[76]Cfr. Ibíd., p. 52