Franklin Galindo*

Sobre una consecuencia del teorema de Lindström en teoría de conjuntos

RESUMEN

El método de *forcing* usado para probar la independencia de la hipótesis del continuo respecto de la axiomática de Zermelo-Fraenkel en los textos *Set Theory (An Introduction to Independence Proofs)*, de Kunen, y *Set Theory*, de Jech, tiene entre sus fundamentos lógicos principales las propiedades de completitud y de Löwenheim-Skolem (hacia abajo). Por otro lado, se sabe por Lindström que no hay una lógica de mayor capacidad expresiva que la lógica de primer orden, que satisfaga simultáneamente ambas propiedades. Esto sugiere que no existe una lógica de mayor capacidad expresiva que la lógica de primer orden con la cual se pueda aplicar tal método. En este artículo se pretende argumentar a favor de tal sugerencia.

Palabras clave: Lógica, expresabilidad, completitud, independencia, Löwenheim-Skolem, Lindström, *forcing*.

ABSTRACT

The method of *forcing* used to prove the independence of the continuum hypothesis from the Zermelo-Fraenkel axiomatic system, in Kunen's book *Set Theory (An Introduction to Independence Proofs)* and in Jech's *Set Theory*, is logically founded on the properties of completeness and Löwenheim-Skolem (downwards). On the other hand, Lindström has proved that there is no logic of greater expressive capability than the first order logic that is able to satisfy simultaneously both properties. This suggests that there is no logic of greater expressive capability than the first order logic with which this method can be used. To provide a ground for this assertion is the purport of this paper.

Key words: Logic, expressibility, completeness, independence, Löwenheim-Skolem, Lindström, *forcing*.

* Escuela de Filosofía, Universidad Central de Venezuela.

Introducción

Cuando hice mi tesis de licenciatura (en 1996) trabajé el teorema de Lindström a partir de un artículo del profesor Xavier Caicedo que salió publicado en 1986 en la revista *Interciencia* con el título «Cuantificadores generalizados y el teorema de Lindström». (Lindström publicó su resultado original en 1969 en un artículo de la revista *Theoria* titulado «On Extensions of Elementary Logic»). En esa tesis hice especial énfasis en la motivación y demostración del teorema, y no profundicé sobre sus consecuencias debido fundamentalmente a dos razones:

(1) Quería ahondar en algunos métodos de lógica matemática.

(2) No encontré suficiente bibliografía filosófica e histórica sobre el tema.

Después de marzo de 1997 abandoné el estudio de las consecuencias del teorema de Lindström por aproximadamente tres años, tiempo en el cual me dediqué a construir silogismos: *Barbaras, Celarents, Barocos, Datisis, Bocardos*, etc, y a sistematizar la silogística según Aristóteles, Corcoran y Lukasiewicz*.

Fue hace aproximadamente cuatro meses (escribo en junio de 2000) cuando he retomado el estudio del teorema de Lindström, pues me di cuenta, en un curso que impartí de teoría de conjuntos en el semestre 99-II, que el método usado (*forcing*) en los textos de teoría de conjuntos *Set Theory (An Introduction to Independence Proofs)*, de K. Kunen, y *Set Theory*, de T. Jech, para probar la independencia de la hipótesis del continuo (HC) respecto de la axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZFC), tiene entre sus fundamentos lógicos las propiedades de completitud y de Löwenheim-Skolem (hacia abajo), las cuales están estrechamente vinculadas con el teorema de Lindström, pues de éste se infiere que *no existe una lógica (clásica) de mayor capacidad expresiva que la lógica de primer orden que satisfaga simultáneamente ambas propiedades*. El objetivo de este trabajo es justificar (o tratar de justificar) la siguiente proposición que resume el resultado de mi investigación actual al respecto:

Proposición: La lógica (clásica) de mayor poder expresivo con la que se puede demostrar la independencia de HC respecto de ZFC, tal cual se hace en los textos de Kunen y de Jech, es la lógica de primer orden.

---

* F. Galindo: «Caracterizaciones de la relación de consecuencia lógica en la silogística según Cocoran y Lukasiewicz», no publicado.

En la primera parte presento el teorema de Lindström, básicamente su motivación. En la segunda los fundamentos lógicos del método de *forcing*; y en la tercera y última parte justifico la proposición referida.

(I) Motivación del teorema de Lindström

Entre las propiedades de la lógica de primer orden (lI) se encuentran compacidad y Löwenheim-Skolem (hacia abajo):

Compacidad: Para todo conjunto $\Sigma \subseteq SENT[\lambda_I]$[1] (Cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo $\Leftrightarrow$ Σ tiene un modelo).
Löwenheim-Skolem (hacia abajo): Para todo conjunto $\Sigma \subseteq SENT[\lambda_I]$ (Σ tiene un modelo fi S tiene un modelo de cardinal $\leq$ max {cardinal del lenguaje de Σ, $\aleph_0$}).

Esto trae como consecuencia que algunas clases de estructuras matemáticas no se puedan axiomatizar[2] en λ_I. Por ejemplo, la clase de las estructuras finitas, la clase de los grupos de torsión y la clase de estructuras a lo sumo numerables no se pueden axiomatizar en λ_I por compacidad. Y la clase de los órdenes no numerables donde cualquier elemento tiene una cantidad a lo sumo numerable de predecesores (por ejemplo $\aleph_1$) no se puede axiomatizar en λ_I por Löwenheim-Skolem (hacia abajo). Las pruebas de lo que se afirma se pueden encontrar en Ebbinghaus-Flum-Thomas: *Mathematical Logic* (Springer-Verlag, 1983). Así, por ejemplo, para el caso de las estructuras finitas el argumento es el siguiente:

Teorema 1: La clase K de las estructuras finitas no es axiomatizable en λ_I.

Demostración: (Por reducción al absurdo.) Supóngase que existe un conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq SENT[\lambda_I]$ tal que $Mod(\Sigma) = K$ y constrúyase el conjunto de sentencias

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \{\varphi_n : n \geq 1\}$$

donde para cada $n \geq 1$, φ_n afirma: «existen al menos n individuos».

1 $SENT[\lambda_I]$ = El conjunto de las sentencias de λ_I.

2 *Definición:* Una clase de estructuras K es axiomatizable en λ_I si existe un conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq SENT[\lambda_I]$ tal que $K = M(\Sigma)$. $M(\Sigma)$ es el conjunto de los modelos de Σ.

Sea $\Sigma_0 = \{\psi 1, \ldots, \psi m\}$ un subconjunto finito de Σ^*. Si $\Sigma_0 \cap \{\varphi_n : n \geq 1\} \neq \emptyset$, entonces un modelo de Σ_0 es la estructura $< \{1, \ldots, p\}>$ donde p es el mayor número natural tal que $\psi p \in \Sigma_0 \cap \{\varphi_n : n \geq 1\}$. Si Σ_0 « $\{\varphi_n : n \geq 1\} = \emptyset$, entonces la estructura $< \{1\}>$ es un modelo de Σ_0.

De modo que cada subconjunto finito de Σ_0 tiene un modelo. En consecuencia, usando compacidad, se tiene que existe un modelo M de Σ^*. Entonces M es finito y M es infinito. La contradicción buscada. μ

Ante esta limitación expresiva de λ_I como consecuencia de las propiedades de compacidad y Löwenheim-Skolem (hacia abajo), se proponen algunas extensiones de ella a mediados del siglo pasado, no ya al estilo de Russell, cuantificando sobre propiedades y relaciones, sino más bien admitiendo sentencias de longitud infinita (Tarski, Henkin, Karp, Scott, López Escobar, Hanf y Keysler)[3]. O incluyendo nuevos cuantificadores, como por ejemplo los cuantificadores generalizados de Mostowski. A continuación se describen someramente algunas de estas lógicas, así como también la lógica de segundo orden, pues el teorema de Lindström se refiere a toda extensión clásica de λ_I,

Teorema de Lindström: No existe una lógica (clásica) de mayor capacidad expresiva que λ_I que satisfaga simultáneamente compacidad y Löwenheim-Skolem (hacia abajo)[4].

(De cada una de las extensiones siguientes, la idea fundamental es notar que es más expresiva que λ_I y que pierde alguna de las propiedades de compacidad y Löwenheim-Skolem (hacia abajo)).

Algunas extensiones (clásicas) de λ_I

(1) La lógica de segundo orden (λ_{II})

λ_{II} se obtiene a partir de λ_I admitiendo la cuantificación sobre propiedades y relaciones. Por ejemplo, la expresión[5] $\forall x \forall y\, [x = y \leftrightarrow \forall P\, (Px \leftrightarrow Py)]$ es una sentencia de λ_{II}.

---

3 En la bibliografía se resalta que los lenguajes infinitarios se habían estudiado antes de los cincuenta por Zermelo (1931), Novikoff (1939-43) y Bochwar (1940).

4 Una demostración de este teorema se puede encontrar en Ebbinghaus-Flum-Thomas (1983), y en Xavier Caicedo (1986).

5 El principio de identidad de Leibniz.

La clase de estructuras finitas que no se puede axiomatizar en λ_I se puede axiomatizar en λ_{II}; una sentencia adecuada para ello es

$$\varphi_{fin} = \forall X\, ((\forall x \exists! y\, Xxy \wedge \forall x \forall y \forall z\, ((Xxz \wedge Xyz) \rightarrow x \equiv y)) \rightarrow \forall x \exists y\, Xyx)$$

la cual se construye teniendo presente que un conjunto es infinito si y sólo si es equipotente con un subconjunto propio.

También la clase de las estructuras a lo sumo numerables se puede axiomatizar en λ_{II} mediante la sentencia

$\varphi \leq \aleph_0 = \exists Y\, (\forall x\, \neg Yxx \wedge \forall x \forall y \forall z\, ((Yxy \wedge Yxz) \rightarrow Yxz) \wedge \forall x \forall y\, (Yxy \vee x \equiv y \vee Yyx) \wedge \forall x\, \exists X\, (\varphi_{fin}(X) \wedge \forall y\, (Xy \leftrightarrow Yyx)))$

Esta sentencia se construye considerando que un orden total, donde cada elemento tiene una cantidad finita de predecesores, es a lo sumo numerable. Por lo tanto, la clase de las estructuras no numerables también se puede axiomatizar en lII con la sentencia

$\varphi_{nonum} = \neg\varphi \leq \aleph_0$.

Teorema 2: λ_{II} no satisface compacidad.

Demostración: El siguiente conjunto de sentencias es un contraejemplo:

$\{\varphi_{fin}\} \cup \{\varphi_n : n \geq 2\}$, jn afirma «existen al menos n individuos».

Cada uno de sus subconjuntos finitos tiene un modelo y, sin embargo, él no tiene modelo. µ

Teorema 3: λ_{II} no satisface Löwenheim-Skolem (hacia abajo).

Demostración: La sentencia φ_{nonum} es un contraejemplo, ya que tiene modelos no numerables y, sin embargo, no tiene modelo a lo sumo numerable. µ

(2) Las lógicas infinitarias (λ_k , *k* un cardinal)

Las lógicas infinitarias se obtienen a partir de λ_I admitiendo disyunciones y conjunciones infinitas. Por ejemplo, para $k = \aleph_1$, la lógica $\lambda_{\aleph_1}$ es una extensión de λ_I que se obtiene agregando los símbolos lógicos $\vee_{\aleph_1}$ y $\wedge_{\aleph_1}$ para construir conjunciones y disyunciones numerables. Es decir, si $\Sigma = \{\varphi_n : n \in N\}$ es un conjunto de sentencias de $\lambda_{\aleph 1}$,entonces la conjunción y la disyunción infinitas de elementos de Σ son sentencias de $\lambda_{\aleph 1}$:

$$\wedge_{\aleph 1} \Sigma = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \varphi_{n+1} \wedge \ldots$$
$$\vee_{\aleph 1} \Sigma = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \vee \varphi_{n+1} \vee \ldots$$

En $\lambda_{\aleph 1}$ se puede axiomatizar la clase de los grupos de torsión mediante la siguiente sentencia:

$$\forall x \vee_{\aleph 1} \Sigma \wedge \text{axiomas de grupo}$$

donde $\Sigma = \{\varphi_n : n \in N\}$ y $\varphi_n = x \,.\, x \ldots x \equiv e$ (x está repetida n veces).

También se puede axiomatizar en $\lambda_{\aleph 1}$ la clase de las estructuras finitas mediante la sentencia:

$\psi_{fin} = \vee_{\aleph 1} \{\neg\varphi_n : n \geq 2\}$, donde φ_n afirma «existen al menos n individuos».

Teorema 4: $\lambda_{\aleph 1}$ no satisface compacidad.

Demostración: Como en el caso de λ_{II}, el siguiente conjunto es un contraejemplo:

$$\{\psi_{fin}\} \cup \{\varphi_n : n \geq 2\} \,\mu$$

Teorema 5: $\lambda_{\aleph 1}$ satisface Löwenheim-Skolem (hacia abajo).

Una prueba de este resultado se puede encontrar en Ebbinghaus-Flum-Thomas: *Mathematical Logic* (Springer-Verlag, 1983).

(3) *Lógicas con cuantificadores generalizados (λ_{Qk}, k un cardinal)*

Estas lógicas se obtienen a partir de λ_I introduciendo un nuevo cuantificador Q_k y admitiendo sentencias como $Q_k x\, Px$ que afirman «Existen al menos $\aleph_k$ individuos con la propiedad P». Considerando al cardinal $k = \aleph_1$, en la lógica $\lambda_{Q\aleph 1}$ se pueden axiomatizar clases de estructuras no axiomatizables en λ_I. Por ejemplo, la clase de las estructuras a lo sumo numerables se puede axiomatizar mediante la siguiente sentencia:

$\neg Q_{\aleph 1}\, x\, (x = x)$

También la clase de los órdenes no numerables donde cualquier elemento tiene una cantidad a lo sumo numerable de predecesores se puede axiomatizar en $\lambda_{Q\aleph 1}$ mediante la sentencia:

axiomas de orden total estricto $\wedge\, Q_{\aleph 1}\, (x = x) \wedge \forall x\, \neg Q_{\aleph 1}\, y\, (y < x)$

Teorema 6: $\lambda_{Q\aleph 1}$ satisface compacidad para conjuntos numerables de sentencias, pero no la satisface para conjuntos no numerables de sentencias.

Una prueba de este resultado se puede encontrar en Bell y Slomson: *Models and Ultraproducts: An Introduction* (North Holland, Amsterdam, cap. 13, 1969).

Teorema 7: $\lambda_{Q\aleph 1}$ no satisface Löwenheim-Skolem (hacia abajo).

Demostración: La sentencia $Q_{\aleph 1}\, x\, (x = x)$ es un contraejemplo, ya que tiene modelos no numerables y, sin embargo, no tiene ningún modelo a lo sumo numerable. µ

(II) Algunos fundamentos lógicos del método de *forcing*

El método de *forcing* que se usa en los textos de Kunen y de Jech para demostrar que la HC es independiente[6] de ZFC, se resume desde el punto de vista lógico en los siguientes pasos:

(i) Se supone que ZFC es consistente.

(Por el segundo teorema de incompletitud de Gödel (1931) se sabe que una sentencia que afirme «ZFC es consistente» no se puede demostrar dentro de ZFC si ZFC es consistente.)

(ii) Se usa la propiedad de completitud de la lógica de primer orden (Gödel, 1930) y se infiere que ZFC tiene un modelo.

Completitud: Para todo conjunto $\Sigma \subseteq SENT[\lambda_1]$ (Σ es consistente $\Leftrightarrow \Sigma$ tiene un modelo).

[6] *Definición*: Una sentencia es independiente de un conjunto de sentencias si ni ella ni su negación se pueden demostrar de tal conjunto.

(iii) Se usa la propiedad de Löwenheim-Skolem (hacia abajo) de la lógica de primer orden y se infiere que existe un modelo a lo sumo numerable para ZFC.

(iv) Se usa un resultado de Mostowski (*Mostowski Collasing Theorem*) y se infiere que hay un modelo isomorfo al anterior, que es transitivo. Por lo tanto, ZFC tiene un modelo transitivo y a lo sumo numerable.

(v) El modelo transitivo y a lo sumo numerable de ZFC se extiende en dos ocasiones, de tal manera que en una de ellas se satisfaga HC y en otra ¬HC. Por último, usando la propiedad de corrección de la lógica de primer orden, se concluye que
«no ZFC $\vdash$ HC», y «no ZFC $\vdash$ ¬HC».
Corrección: Para todo conjunto $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathrm{SENT}[\lambda_1]$ $(\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \models \alpha)$

(III) Justificación de la proposición

Proposición: La lógica (clásica) de mayor poder expresivo con la que se puede demostrar la independencia de HC respecto de ZFC, tal cual se hace en los textos de Kunen y de Jech, es la lógica de primer orden.

Justificación: Sea λ una lógica (clásica) de mayor poder expresivo que la lógica de primer orden tal que ZFC está escrita con su lenguaje. Entonces, por el teorema de Lindström se sabe que λ o bien no satisface compacidad o bien no satisface Löwenheim-Skolem (hacia abajo). Si λ no satisface compacidad, entonces, como esta propiedad es una consecuencia de completitud, dicha lógica no puede satisfacer completitud; y, como la prueba de independencia de HC que hacen tanto Kunen como Jeck usa en el paso (ii) completitud, entonces con λ no se puede hacer la prueba de independencia al estilo Kunen y Jeck. Si, por otra parte, *λ no satisface* Löwenheim-Skolem (hacia abajo), entonces el paso (iii) de la prueba de Kunen y de Jech no se puede realizar y, por lo tanto, con λ no se puede hacer la prueba de independencia al estilo Kunen y Jeck.

Bibliografía principal

BELL y SLOMSON: *Models and Ultraproducts: An Introduction*, Amsterdam, North Holland, cap. 13, 1969.

CAICEDO, X.: «Cuantificadores generalizados y el teorema de Lindström», *Interciencia*, 37: 243-250, 1986.

DI PRISCO, C.: *Una Introducción a la teoría de conjuntos y a los fundamentos de las matemáticas*, IVIC-UCV, 1995.

EBBINGHAUS-FLUM-THOMAS: *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1983.

JECH, T.: *Set Theory*, New York, Academic Press, 1978.

KUNEN, K.: *Set Theory (An Introduction to Independence Proofs)*, Amsterdam, North-Holland, 1980.

NERODE, A. y SHORE, R.: *Logic for Applications*, Springer-Verlag, 1996.

DOCUMENTOS