Algunas notas introductorias sobre la Teoría de Conjuntos

Franklin Galindo

Resumen: El objetivo de este documento es presentar tres notas introductorias sobre la Teoría de conjuntos: En la primera nota se presenta una panorámica general sobre dicha disciplina desde sus orígenes hasta la actualidad, en la segunda nota se hacen algunas consideraciones sobre la evaluación de razonamientos aplicando la Lógica de primer orden y los teoremas de Löwenheim, Indecidibilidad de Church, Completitud e Incompletitud de Gödel, es conocido que las teorías axiomáticas de conjuntos más usadas en la actualidad se escriben en un lenguaje de primer orden específico, es decir, se desarrollan en el marco de la Lógica de primer orden, por eso es relevante esta nota; y la tercera nota se refiere a la presencia del platonismo matemático en los axiomas de ZFC y en los axiomas de "cuerpo ordenado completo", se sabe que los últimos axiomas mencionados caracterizan (salvo isomorfismo) al sistema de los números reales y que se utilizan actualmente para desarrollar el Análisis real en el contexto de la teoría de conjuntos. Se aspira que este artículo sea de utilidad pedagógica para estudiantes interesados en la teoría de conjuntos y en la filosofía de la matemática (que se estén iniciando en el tema).

Palabras clave: Teoría De Conjuntos, Lógica De Primer Orden, Cuerpo Ordenado Completo, Análisis Real, Platonismo Matemático, Constructivismo.

Abstract: The objective of this document is to present three introductory notes on set theory: The first note presents an overview of this discipline from its origins to the present, in the second note some considerations are made about the evaluation of reasoning applying the first-order Logic and Löwenheim's theorems, Church Indecidibility, Completeness and Incompleteness of Gödel, it is known that the axiomatic theories of most commonly used sets are written in a specific first-order language, that is, they are developed within the framework of first-order logic, so this note is relevant; and the third note refers to the presence of mathematical platonism in the axioms of ZFC and in the axioms of "complete ordered field", it is known that the last axioms mentioned characterize (except isomorphism) the real number system and are currently used to develop the real Analysis in the context of set theory. It is hoped that this article will be of pedagogical utility for students interested in set theory and in the philosophy of mathematics (that are beginning in the subject).

Keywords: Set Theory, First Order Logic, Complete Ordered Field, Real Analysis, Mathematical Platonism, Constructivism.

1. Introducción

La finalidad de este documento es presentar tres notas introductorias sobre la Teoría de conjuntos: En la primera nota se presenta una panorámica general sobre dicha disciplina desde sus orígenes hasta la actualidad, en la segunda nota se hacen algunas consideraciones sobre la evaluación de razonamientos aplicando la Lógica de primer orden y los teoremas de Löwenheim, Indecidibilidad de Church, Completitud e Incompletitud de Gödel. Es conocido que las teorías axiomáticas de conjuntos más usadas en la actualidad se escriben en un lenguaje de primer orden específico, es decir, se desarrollan en el marco de la Lógica de primer orden, por eso es relevante esta nota; y la tercera nota se refiere a la presencia del platonismo matemático en los axiomas de ZFC y en los axiomas de "cuerpo ordenado completo". Se sabe que los últimos axiomas mencionados caracterizan (salvo isomorfismo) al sistema de los números reales y que se utilizan actualmente para desarrollar el Análisis real en el contexto de la teoría de conjuntos. Se aspira que este artículo sea de utilidad pedagógica para estudiantes interesados en la teoría de conjuntos y en la filosofía de la matemática (que se estén iniciando en el tema). A continuación se empieza con la exposición de dichas notas siguiendo el orden mencionado.

2. Cantor y la Teoría de Conjuntos contemporánea

A continuación se presenta una panorámica general sobre la Teoría de conjuntos desde sus orígenes hasta la actualidad.

Sobre la Teoría de conjuntos, Bagaría dice lo siguiente:

> La teoría de conjuntos es una disciplina matemática relativamente reciente. Tiene sus orígenes en la teoría de Cantor sobre los ordinales y cardinales transfinitos, desarrollándose a lo largo del siglo XX hasta convertirse en un área de investigación matemática de gran complejidad técnica y conceptual. La teoría de conjuntos es, por una parte, la teoría matemática del infinito, y como tal es una teoría matemática más. Pero, por otra parte, la teoría de conjuntos es también el fundamento sobre el que descansan todas las demás teorías matemáticas, en el sentido de que prácticamente toda la matemática puede, en principio, reducirse formalmente a la teoría de conjuntos. Este papel fundacional hace que la teoría de conjuntos ocupe un lugar muy especial entre las diferentes aéreas de la matemática y que tenga un interés también filosófico.[1]

Sobre los orígenes de la Teoría de conjuntos vale la pena agregar el siguiente comentario de Peneloe Maddy, a la cita anterior de Bagaría:

[1] BAGARÍA, J. *La teoría de conjuntos*. La Gaceta de la RSME, Vol. 15 (2012), Núm. 2, p. 369.

> La teoría de conjuntos, tal como la conocemos ahora, es resultado de la confluencia de dos acontecimientos históricos bien diferenciados: por un lado, la obra de Gottlob Frege, realizada entre la década de 1870 y los primeros años del siglo XX; y por otro, la de Georg Cantor, aproximadamente en el mismo período. El hecho de que las motivaciones originales de Frege eran al menos parcialmente filosóficas, mientras que las de Cantor eran en un principio mayormente matemáticas, sólo confirma la riqueza de las raíces conceptuales de la teoría.[2]

Georg Cantor (1845-1918) es considerado el padre de la Teoría de conjuntos. La primera investigación sobre los conjuntos infinitos se atribuye a Bernard Bolzano (1782-1848), quien introdujo el término *Menge* (conjunto). Sin embargo, fue Cantor quien se dio cuenta de la importancia de las funciones uno a uno entre conjuntos e introdujo el concepto de cardinalidad de un conjunto. Con Cantor se originó la teoría de los números cardinales (infinitos) y ordinales (infinitos), así como las investigaciones de la topología de la recta real. Cantor comenzó a publicar sus investigaciones en un artículo de 1874, donde demostró que el conjunto de los números reales no es numerable, mientras que el conjunto de todos los números reales algebraicos es numerable. En otro artículo de 1878 dio la primera formulación de su famosa Hipótesis del continuo[3].

En el primer párrafo del primer capítulo de una de sus obras, "Fundamentos para una teoría general de conjuntos" de 1883, Cantor dice:

> La precedente exposición de mis investigaciones en Teoría de Conjuntos ha llegado a un punto en el que su continuación depende de una extensión del verdadero concepto de número más allá de los límites conocidos, y esta extensión va en una dirección que hasta donde yo sé no había sido explorada antes por nadie.[4]

¿Y cuáles son esos nuevos números a los cuales se refiere Cantor? Es conocido que son los números transfinitos: Los números ordinales (infinitos) y los números cardinales (infinitos).

Una presentación intuitiva y contemporánea de la secuencia infinita de los números ordinales de Cantor (*Ord*) – ordinales finitos y ordinales infinitos (transfinitos) – es la siguiente:

---

[2] MADDY, P. *Naturalism in Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1997, p. 3. (Traducción propia)
[3] Cfr. JECH, T. *Set Theory*. Springer. 2000.
[4] CANTOR, C. "Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos. Una investigación matemático-filosófica sobre la Teoría del infinito" (1882) en Cantor, G., *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos*. *Escritos y correspondencia selecta*. Edición de José Ferreirós, Barcelona, Editorial Crítica, 2005, p. 85.

$0 = \varnothing$

$1 = \{0\}$

$\vdots$

$n = \{0, \ldots, n - 1\}$

$\vdots$

$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$

$\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1\}$

$\omega + 3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$

$\vdots$

$\omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$

$(\omega + \omega) + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega + \omega\}$

$\vdots$

Se aprecia claramente que cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden (Esta idea es original de Zermelo y von Neumann[5]), y además que la secuencia es infinita. Es conocido que se pueden definir operaciones aritméticas para los números ordinales, por ejemplo *suma*, *multiplicación* y *potenciación* y que dichas operaciones satisfacen algunas propiedades de la aritmética usual de los números naturales y otras no[6].

Un teorema clásico relevante sobre los ordinales que se debe a Cantor es el siguiente:

Teorema 2.1 (Teorema de la Forma Normal de Cantor). *Cualquier número ordinal* $\alpha > 0$ *puede ser representado de manera única de la forma:*

$$\alpha = \omega^{\beta_1} . k_1 + \ldots + \omega^{\beta_n} . k_n,$$

donde $n \geq 1$, $\alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$, *y* $k_1, \ldots, k_n$ *son naturales distintos de cero.*

---

[5] Cfr. JECH, T., *Ob. Cit.*

[6] Cfr. DI PRISCO, C., *Teoría de Conjuntos*. Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009; HRBACEK, K. y JECH, T., *Introduction to set theory*. Marcel Dekker, Inc. 1999; Enderton, H., *Elements Set Theory*. Academic Press. 1977.

Una prueba de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en *Introduction to set theory* de Hrbacek-Jech y *Set Theory* de Jech, ella usa inducción transfinita, un método de prueba introducido por Cantor[7]. Vale la pena resaltar que con este teorema se demuestra el Teorema de Goodstien (*"Toda sucesión de Goodstien que comience en el número natural que sea –distinto de cero–, termina en cero"*). Una formulación y demostración rigurosa de dicho teorema puede encontrarse (entre otros) en *Introduction to set theory* de Hrbacek-Jech. Y más todavía, la prueba de que el Teorema de Goodstien no es demostrable con la Aritmética de Peano fue realizada por Kirby y Paris en 1982[8], esto proporciona un ejemplo concreto del Teorema de Incompletitud de Gödel (1931), el cual se enuncia más adelante en este trabajo (en la siguiente sección 3). Otro ejemplo de una proposición aritmética (concreta) verdadera que no es demostrable en la Aritmética de Peano es *"una modificación del Teorema de Ramsey finito"* que descubrieron Paris y Harrington en 1977[9], ellos demostraron que tal proposición no es demostrable en la Aritmética de Peano. Una definición y demostración rigurosa de dicha proposición ("la modificación del Teorema de Ramsey finito") se puede encontrar (entre otros) en *Teoría de Conjuntos* de Carlos Di Prisco.

Una presentación intuitiva de la secuencia infinita de los números cardinales (transfinitos) de Cantor es la siguiente:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \aleph_{\omega+3}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ \ldots$$

Toda la secuencia de los números cardinales transfinitos (*Card*) se puede definir por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente forma:

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+ = \{\beta \in Ord : \beta \text{ es equipotente a algún subconjunto de } \aleph_\alpha\}$$

$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta \text{ , si } \gamma \text{ es límite.}$$

---

7 Cfr. JECH, T., *Ob. Cit.*
8 Cfr. PIZA, E., "Hércules contra la Hidra y la muerte del internet". *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 2004 **11**(1): 1-16.
9 Cfr. CARLOS, D., *Ob. Cit.*

Es conocido que se pueden definir operaciones aritméticas para los números cardinales, por ejemplo *suma*, *multiplicación* y *potenciación* y que dichas operaciones satisfacen algunas propiedades de la aritmética usual de los números naturales y otras no[10].

Tres teoremas clásicos de Cantor sobre los números reales y la topología de la recta real (que involucran números transfinitos) son los siguientes:

Teorema 2.2.

1. *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *no es numerable, es decir,* $\mathbb{R}$ *no es equipotente al conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$.
2. *Para todo conjunto A se cumple que:* $|A| < |\wp(A)|$. *Es decir, ningún conjunto es equipotente a su conjunto de partes.*

Una prueba de este teorema puede encontrarse *Set Theory* de Jech, *Introduction to set theory* de Hrbacek - Jech y *Elements Set Theory* de Enderton. Es famosa la prueba del mismo usando el "Método de la diagonal de Cantor".

Teorema 2.3. *Cualesquiera dos órdenes lineales densos, numerables y no acotados son isomorfos.*

Una prueba de este resultado puede encontrarse (entre otros) en *Set Theory* de Jech. Un método usado en la prueba para construir el isomorfismo es conocido como "zig-zag".

Teorema 2.4 (Cantor-Bendixson). *Si C es un subconjunto cerrado no numerable de números reales, entonces* $C = P \cup S$, *donde P es un conjunto perfecto y S es a lo sumo numerable.*

Una prueba de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en *Set Theory* de Jech y *Una Introducción a la teoría descriptiva de conjuntos* de Di prisco – Uzcátegui. Ella usa inducción transfinita en los ordinales.

Con respecto a la teoría de conjuntos de Cantor, David Hilbert (1862-1943) dice lo siguiente:

[10] Cfr. CARLOS, D. *Ob. Cit.*; HRBACEK, K. y JECH, T., *Ob. Cit.*; ENDERTON, H., *Ob. Cit.*

> Sin embargo, por sí solo el análisis resulta insuficiente para proporcionarnos una visión de la más profunda esencia del infinito. Esta visión la encontramos más bien en la teoría de conjuntos de Georg Cantor, una disciplina más cercana a un enfoque filosófico general que ubica todo el complejo de problemas relativo al infinito en una nueva perspectiva. Lo que aquí nos importa de ella es precisamente aquello que en verdad constituye su núcleo fundamental, esto es, *la teoría de los números transfinitos*. En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.[11]

Con respecto a los principios de la Teoría de conjuntos cantoriana a continuación se cita un comentario de Cantor sobre el "Principio del Buen Orden" que aparece en su texto de 1883 mencionado anteriormente y después se citan unas palabras sobre dicho comentario escritas por Ferreirós en el 2006 que se encuentran en el mismo libro en una sección llamada "Notas del editor" (Es la nota número siete y Ferreirós es el editor del texto).

Georg Cantor (1883):

> El concepto de *conjunto bien ordenado* resulta ser fundamental para la teoría entera de conjuntos. Siempre resulta posible poner cualquier conjunto *bien definido* en la *forma* de un conjunto *bien ordenado*; a esta ley del pensamiento, que en mi opinión es fundamental y rica en consecuencias, y especialmente notable en razón de su validez general, retornaré en un artículo posterior[12].

El comentario de Ferreirós (2006) sobre la cita anterior de Cantor es el siguiente:

> Esta frase resulta sumamente significativa, ya que en ella Cantor formula el Teorema del Buen Orden, si bien lo considera como un principio lógico o "ley del pensamiento" [Denkgesetz]. Años más tarde intentaría ofrecer una demostración, como sabemos por las cartas de Hilbert y Dedekind: en 1897-1899 planeaba escribir una tercera parte de Beiträge dedicada a este asunto. Sin embargo, ese artículo no llegó a publicarse, de modo que el Teorema del Buen Orden no volvió´ a ser mencionado por Cantor después de 1883. Lo planteó nuevamente David Hilbert (1862-1943) en el primero de sus celebres "Mathematische Probleme" de 1900. Ernst Zermelo (1871-1953) ofreció dos demostraciones en 1904 y 1908, sobre la base del Axioma de Elección, con lo que suscitó un intenso debate en torno a la teoría de conjuntos y los métodos abstracto**s**.[13]

Considerando el párrafo anterior de Ferreirós vale la pena destacar dos cosas:

[11] HILBERT, D., "Acerca del Infinito" en *Fundamentos de las Matemáticas*, México, Mathema, 1993, p. 89.
[12] CANTOR, C., *Ob. Cit.*, p. 91.
[13] FERREIRÓS, J., "Anotaciones", Nota 7en Cantor, G., *Ob. Cit.*, p.146.

(1) Quizá, como dicen algunos conjuntistas, el Axioma de elección (*Todo conjunto tiene una función selectora*) es el axioma más discutido de las matemáticas después del axioma euclidiano de las paralelas. Dicho axioma tiene argumentos a favor (por ejemplo, que es rico en consecuencias matemáticas interesantes) y argumentos en contra (por ejemplo, que no es constructivo). También es conocido que el Axioma de elección es equivalente al Principio del Buen Orden cantoriano, al Lema de Zorn y al Teorema de Tychonoff (de la topología)[14], y que es independiente del resto de los axiomas estándar de la Teoría de conjuntos (ZF), la demostración de la independencia se debe a Gödel (1938-1940), usando la técnica de los conjuntos constructibles[15], y a Cohen (1963-64) usando el método de forcing y automorfismos[16]. Según el texto *Consequences of the Axiom of Choice* de Howard - Rubin, el Axioma de elección tiene al menos 383 formas, donde cada una de las formas tiene al menos un enunciado equivalente o consecuencia estricta del Axioma de elección, existen algunas formas que tienen varios enunciados equivalentes o consecuencias estrictas de dicho axioma. Estas 383 formas (los anunciados que las constituyen) se pueden clasificar a su vez según las distintas áreas de las matemáticas a los cuales pertenecen: formas algebraicas, formas de análisis, formas de números cardinales, formas de elección, Teoremas de punto fijo, formas de Teoría de Grafos, formas lógicas, Principios maximales, formas que involucran medidas sobre conjuntos, formas diversas, Principios ordenadores que incluyen propiedades de órdenes parciales, y formas topológicas (incluyendo propiedades del conjunto de los números reales). Es decir, el Axioma de elección es un tema bastante interesante y es un importante foco de investigación de la teoría de conjuntos contemporánea[17].

[14] Cfr. DI PRISCO, C., *Ob. Cit*.
[15] Cfr. GÖDEL, K., *Obras Completas*. Madrid, Alianza. 1981; Kunen, K., *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. College Publications. 2011; Jech, T., *Ob. Cit*.
[16] Cfr. COHEN, P., *Set Theory and The Continuum Hypothesis*. Dover Publications, 2008; Kunen, K., *Ob. Cit*.; Jech, T., *Ob. Cit*.
[17] Cfr. MOORE, G., *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. Dover Publications. 2013; Jech, T., *The Axiom of Choice*. North-Holland Publishing Company, 1973; Herrlich, H., *Axiom of Choice*. Berlín, Springer, 2006.

(2) Hoy en día (después de la axiomática para la Teoría de conjuntos ofrecida por Zermelo en 1908[18] para "salvar" a la teoría de conjuntos de las paradojas de Russell, Cantor, Burali-forti, etc.[19], la teoría de conjuntos se estudia de manera axiomática, y se han propuesto varias teorías axiomáticas alternativas, por ejemplo la de Zermelo-Fraenkel (ZFC), la de Neumann-Gödel-Bernays (NBG), la de Morse-Kelly (MK), la de Teoría de Tipos (ST), dos axiomáticas de Quine (NF y ML), la Teoría axiomática de conjuntos con átomos (ZFA), etc. Un resumen de las axiomatices mencionadas puede encontrarse en *Introduction to Mathematical Logic* de Mendelson. Una exposición detallada de NBG puede encontrarse (entre otros) en *Introduction to Mathematical Logic* de Mendelson. Una exposición detallada de ZFC puede encontrarse (entre otros) en los textos *Teoría de conjuntos* de Di Prisco, *Introduction to set theory* de Hrbacek – Jech, *Elements Set Theory* de Enderton, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs* de *Kunen* y *Set Theory* de Jech. Tal vez la axiomática más usada actualmente sea ZFC, la misma es una teoría en primer orden con los siguientes axiomas propios (sus axiomas lógicos son los axiomas del Cálculo de predicados de primer orden, ver una presentación de los mismos en *Una Introducción Matemática a la Lógica* de Enderton, *Introducción a la Lógica Matemática* de Di Prisco, *Introduction to Mathematical Logic* de Mendelson y *Model Theory* de Chang - Keisler, entre otros):

1. *Axioma de Extensionalidad:* Si X y Y son dos conjuntos que tienen los mismos elementos, entonces ellos son iguales.

2. *Axioma de pares:* Si X e Y son dos conjuntos, entonces existe un conjunto $Y = \{X, Y\}$, cuyos elementos son exactamente X e Y.

3. *Axioma de comprensión:* Si $P(X)$ es una propiedad bien definida, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = \{Z \in X : P(Z)\}$

4. *Axioma de la unión:* Si X es un conjunto, entonces existe un conjunto $Y = \bigcup X$, la unión de todos los elementos de X.

[18] Cfr. Hijenoort, J., *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press. 1976.
[19] Véase en especifico Garrido, M., *Lógica Simbólica*. Madrid, Tecnos, 2003, p. 524.

5. *Axioma del conjunto potencia:* Para todo conjunto X, existe un conjunto $Y = \wp(X)$, el conjunto de los subconjuntos de X.

6. *Axioma del infinito:* Existe un conjunto infinito.

7. *Axioma de reemplazo: Si F* es una función definible, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = F(X) = \{F(x): x \in X\}$.

8. *Axioma de regularidad o fundamentación:* Cualquier conjunto no vacío tiene un elemento $\in$-minimal.

9. *Axioma de elección (AE):* Cualquier familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección (o una función selectora).

Una explicación histórica sobre la discusión que se dio dentro de la matemática para que se aceptara desarrollar la teoría de conjuntos en el marco de la Lógica de primer orden y no en el marco de otro sistema lógico -como por ejemplo la Lógica de segundo orden-puede encontrarse (entre otros) en *House divide against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics* de Gregory Moore.

¿Qué relación existe entre todas las teorías axiomáticas mencionadas anteriormente (ZFC, NBG, MK, ST, NF, ML y ZFA)? ¿Son equivalentes? Estas son preguntas que se han intentado responder en algunos aspectos[20]. Otro tema interesante con respecto a las teorías axiomáticas de conjuntos son los candidatos a nuevos axiomas para ampliar su capacidad deductiva, ya que se sabe que –por ser sistemas recursivos y contener a la aritmética de los números naturales– ellas son "esencialmente" incompletas por el Primer Teorema de Incompletitud de Gödel, y además la prueba de la consistencia absoluta de las mismas usando sus mismos métodos también es una tarea imposible de realizar, por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel[21], ejemplos muy conocidos de proposiciones matemáticas indecidibles de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos son la Hipótesis del continuo de Cantor y la Hipótesis de Suslin, y ejemplos muy conocidos de candidatos a nuevos axiomas son el Axioma de Forcing Propio y el Axioma de Martin Máximo, más ejemplos sobre proposiciones matemáticas indecidibles y candidatos a

[20] Cfr. MENDELSON, E., *Introduction to Mathematical Logic,* Chapman and Hall/CRL. 2009.
[21] Cfr. *Ibídem*.

nuevos axiomas pueden encontrarse en *Set Therory* de Jech, y en los artículos *Natural Axioms of set theory and the continuum problema* de J. Bagaria, *El Problema del Continuo después de Cohen* de J. Amor y *Are we closer to a solution of the continuum problem?* de C. Di Prisco. Las aplicaciones de la Teoría de conjuntos a la matemática, es decir, la utilización de la Teoría de conjuntos para resolver problemas matemáticos abiertos, de distintas áreas de la matemática (álgebra, análisis, topología, teoría de la medida, etc.), es uno de los aspectos más interesantes de la Teoría de conjuntos contemporánea, por ejemplo la aplicación de métodos de construcción de modelos de la teoría de conjuntos como ultraproductos, los constructibles de Gödel, forcing de Cohen, forcing iterado, $L(A)$, $HOD(A)$, $H(\alpha)$, Modelos simétricos, Modelos Fraenkel-Mostowski, etc., para demostrar teoremas matemáticos o para probar resultados de consistencia relativa o independencia en teorías matemáticas específicas, es un tema de gran interés actual. Se puede ver ejemplos de aplicaciones de la Teoría de conjuntos a la Matemática en *Set Theory* de T. Jech y en *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs* de K. Kunen, entre otros. Otros focos importantes de investigación de la teoría de conjuntos contemporánea son (por ejemplo) Cardinales grandes, Combinatoria infinita y Teoría descriptiva de conjuntos[22]. Un tema de carácter filosófico que puede ser interesante con respecto a las teorías axiomáticas de conjuntos es ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre ellas desde un punto de vista ontológico? En fin, son muchas las preguntas y temas de interés que existen actualmente en la teoría de conjuntos. Para finalizar esta primera sección del artículo se describirá un problema abierto concreto sobre el Axioma de Determinación (AD) y las propiedades de Partición de Ramsey y Polarizada que aparece referido en *Mathematics versus metamathematics in Ramsey Theory of the reals numebers* de C. Di Prisco. Es conocido que AD es incompatible con el Axioma de elección, y que (sin embargo) AD implica una versión débil del Axioma de elección: "Cualquier familia numerable de conjuntos no vacíos de números reales tiene una función de elección"[23]. También se conoce que AD implica que: (i) todo conjunto de reales es medible Lebesgue, (ii) cada conjunto de reales tiene la propiedad de Baire, y (iii) cada subconjunto de reales no numerable contiene un subconjunto perfecto[24]. También es conocido que si existen una cantidad

[22] Cfr. KANAMORI, K., *The Higler Infinite*. Springer. 2009; Di Prisco, C., *Combinatoria: Teoría de Ramsey*. (Notas para un curso dictado en la Universidad Simón Bolívar) Venezuela, 2005; Di Prisco, C. y Uzcátegui, C., *Una Introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Asociación Matemática Venezolana. 1991. Nueva versión corregida y expandida 2019; Kunen, K., *Ob. Cit.*; Jech, T., *Ob. Cit*.
[23] Cfr. JECH, T., *Ob. Cit*.
[24] Cfr. *Ibídem*.

infinita de cardinales de Woodin y un cardinal medible por encima de ellos, entonces AD vale en el Modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$, es decir, ZF + DC + AD es consistente (si se cumplen las hipótesis mencionadas), donde DC es el Principio de elección dependiente (Martin-Steel-Woodin, 1988,1989)[25]. Por otra parte se sabe que la Propiedad de Ramsey y la Propiedad de partición Polarizada son falsas si vale el Axioma de elección[26], pero ellas son consistentes con ZF si existe un cardinal inaccesible pues Mathias probó que la Propiedad de Ramsey (que implica a la Propiedad de Partición Polarizada) vale en el Modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$[27]; de esta forma demostró´ que si ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" es consistente, entonces también es consistente ZF + DC + Propiedad de Ramsey + Propiedad de Partición Polarizada.

Preguntas abiertas 2.5. *(a)¿AD implica a la Propiedad de Ramsey?*[28] *y (b)¿AD implica a la Propiedad de Partición Polarizada?*[29].

A continuación se enuncia AD, DC, la Propiedad de Ramsey y la Propiedad de Partición Polarizada siguiendo a *Set Theory* de T. Jech, *The Higler Infinite* de A. Kanamori, *Teoría Descriptiva de Conjuntos* de C. Ivorra, *Una Introducción a la teoría descriptiva de conjuntos* de C. Di Prisco y C. Uzcátegui y *Mathematics versus metamathematics in Ramsey theory of the real numbers, así como Temas Avanzados de Teoría de Conjuntos, de C. Di Prisco:*

El *Espacio topológico de Baire* es el par $(\mathbb{N}^{\infty}, t)$, donde $\mathbb{N}^{\infty} = \{f : f{:}\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\}$ y t es la topología generada por los abiertos básicos $U_S = \{f \in \mathbb{N}^{\infty} : s \subseteq f\}$, donde s es una sucesión finita de naturales. t es la topología producto de $\mathbb{N}^{\infty}$ que resulta de dotar a $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Es conocido que el Espacio de Baire es homeomorfo a los irracionales, considerados como un subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

---

[25] Cfr. Ibidem; SOLOVAY, R., *A model of set theory where every set of reals is Lebesgue measurable*. Annals of Mathematics 92 (1970), 1-56.
[26] Cfr. BERNSTEIN. F. *Zur Theorie der Trigonometrischen Reihe*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Mathematisch-Physiche Klasse. 60 (1908), 325-338.
[27] Cfr. MATHIAS, A., *Happy families*. Annals of Pure and Applied Logic 12 (1977) 59-111; KANAMORI, A., *Ob. Cit.*; DI PRISCO, C., *Temas Avanzados de Teoría de Conjuntos*. Notas para un curso dictado en el Postgrado de Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Septiembre 2000 - Febrero 2001.
[28] Cfr. DI PRISCO, C., *Mathematics versus metamathematics…*
[29] Cfr. *Ibídem*.

El Espacio topológico $(\mathbb{N}^{[\infty]}, t)$*:* Sea $\mathbb{N}^{[\infty]}$ la familia de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y t la topología generada por los conjuntos básicos de la forma $U_a = \{X \in \mathbb{N}^{[\infty]} : a \sqsubset X\}$, donde a es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $\sqsubset$ es la relación de segmento inicial. De esta manera queda definido el espacio topológico $(\mathbb{N}^{[\infty]}, t)$. Es conocido que los espacios $\mathbb{N}^{\infty}$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ son homeomorfos.

Los espacios $\mathbb{N}^{\infty}$, $\mathbb{N}^{[\infty]}$ y $\mathbb{R}$ tienen la misma cardinalidad ($2^{\aleph_0}$), y son métricos, separables y completos (son espacios polacos). A los elementos de los espacios $\mathbb{N}^{\infty}$ y $\mathbb{N}^{[\infty]}$ también se les llama *números reales.*

Propiedad de Partición Polarizada (PPP): La expresión

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \omega \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Significa que para toda (partición) F: $\mathbb{N}^{\infty} \rightarrow 2$ existe una sucesión de conjuntos $\{H_i\}_{i\in\omega}$ tal que:

- $H_i \subseteq \omega$, $|H_i| = 2$, y

- F es constante en $\prod_{i\in\omega} H_i$.

Propiedad de Ramsey: Para toda (partición) $F : \mathbb{N}^{[\infty]} \rightarrow 2$ existe un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que F es constante en $H^{[\infty]}$, donde $H^{[\infty]}$ es la familia de todos los subconjuntos infinitos de H. La Propiedad de Ramsey se denota así:

$$\omega \rightarrow (\omega)^{\omega}.$$

Axioma de determinación (AD): Consideremos el siguiente juego infinito: A un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}^{\infty}$ se le asocia un juego G_A el cual está constituido por dos jugadores I y II que participan por turnos, con I jugando de primero. El jugador I escoge un número natural a_0, luego el jugador II escoge un número natural b_0, a continuación I escoge un número natural a_1, a continuación II escoge un número natural b_1, luego I escoge un número natural a_2, a continuación II escoge un número natural b_2, y así sucesivamente continúan procediendo. El juego termina después de $\aleph_0$ pasos, es decir, hasta "completar" una sucesión $x = \langle a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots \rangle \in \mathbb{N}^{\infty}$. Si $x \in A$, el jugador I gana el juego, y si $x \in \mathbb{N}^{\infty} \setminus A$, gana el jugador II. Se dice que el juego G_A está *determinado* si uno de los dos jugadores cuenta con una estrategia ganadora, es decir, si cuenta con un criterio para determinar cada jugada en función de las jugadas anteriores de manera que, sean cuales sean las jugadas del adversario, termina ganando el juego.

Axioma de determinación (AD) [Mycielski-Steinhaus, 1962]: Para todo $A \subseteq \mathbb{N}^{\infty}$ el juego G_A está determinado.

El Principio de elección dependiente (DC) es la versión débil del AE que afirma lo siguiente: Si E es una relación binaria sobre un conjunto no vacío A, y si para cualquier $a \in A$ existe un $b \in A$ tal que bEa, entonces existe una secuencia $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$ en A tal que: $a_{n+1}Ea_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. DC implica el Axioma de Elección Numerable.

3. Algunas consideraciones sobre la evaluación de razonamientos aplicando la Lógica de primer orden y los Teoremas de Löwenheim, Indecidibilidad de Churh, Completutud e Incompletitud de Gödel

A continuación se hacen algunas consideraciones sobre la evaluación de razonamientos aplicando la Lógica de primer orden y los teoremas de Löwenheim, Indecidibilidad de Church, Completitud e Incompletitud de Gödel, es conocido que las teorías axiomáticas de conjuntos más usadas en la actualidad se escriben en un lenguaje de primer orden específico, es decir, se desarrollan en el marco de la Lógica de primer orden, por eso es relevante esta sección en este artículo.

Sea $\overbrace{P_1, \dots, P_n, por\ lo\ tanto, C}^{\text{R}}$ un razonamiento en el lenguaje natural el cual admite una **buena modelación matemática** con el lenguaje de la Lógica de primer orden. Sea $\widetilde{P_1}, \dots, \widetilde{P_n} \vdash \widetilde{C}$ una formalización con el lenguaje de la Lógica de primer orden de R. Se quiere determinar si R es válido o no usando su modelo matemático teniendo presente que R es válido si, y sólo, $\widetilde{P_1}, \dots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$, es decir, si $\widetilde{C}$ es una consecuencia lógica de $\widetilde{P_1}, \dots, \widetilde{P_n}$, es decir, si se cumple que cualquier estructura (interpretación) $\mathfrak{A} = \langle A, \langle S_i^{\mathfrak{A}} \rangle_{i \in n}, \langle g_j^{\mathfrak{A}} \rangle_{j \in m}, \langle d_s^{\mathfrak{C}} \rangle_{s \in r} \rangle$ que sea modelo de $\widetilde{P_1}, \dots, \widetilde{P_n}$ es modelo de $\widetilde{C}$. Se considera el enunciado condicional asociado $(\widetilde{P_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ de $\widetilde{P_1}, \dots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$, y se debe demostrar que $(\widetilde{P_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ es una fórmula lógicamente válida, es decir, se debe demostrar que $(\widetilde{P_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ es verdadera en cualquier estructura $\mathfrak{A}$ adecuada para su lenguaje.

Se consideran tres casos:

Caso 1: $(\widetilde{P_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ es una instancia de sustitución de una fórmula de la lógica proposicional.

Por ejemplo, estamos en presencia de un enunciado condicional de un razonamiento del siguiente tipo[30] :

$x \neq y \rightarrow (x > y \vee y > x)$

$y \neq 2 \vee x = 2$

$(x > y \vee y > x) \rightarrow x \neq 2$

$\vdash y = 2 \rightarrow x = y$.

Entonces se trata a $(\widetilde{P_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ como una fórmula de la lógica proposicional y se utiliza un procedimiento de decisión (efectivo) de la Lógica proposicional como Tablas de

[30] Cfr. SUPPES, P. y HILL, S., *Introducción a la lógica matemática*. Barcelona, Reverté, S.A., 1988.

Verdad , Forma Normal Conjuntiva , Tablas (Árboles) semánticas, Resolución, etc., y en un número finito de pasos se obtiene un resultado sobre si es tautología o no, lo cual permite inferir inmediatamente si el condicional es una fórmula lógicamente válida o no[31]. Esto da una respuesta efectiva al problema planteado con respecto a la relación $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$, y por lo tanto sobre validez del razonamiento original R en lenguaje natural del cual se partió. También se puede utilizar un cálculo deductivo, como por ejemplo deducción natural[32], y derivar a dicho condicional como un teorema del sistema, si se logra hacer la deducción se puede concluir que tal fórmula es lógicamente válida recurriendo al Teorema de Completitud de Gödel para la lógica de primer orden (1930):

Teorema 3.1 (Teorema de completitud de Gödel). $\Gamma \vdash \theta$ si y sólo si $\Gamma \vDash \theta$.

Una prueba de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en *Introducción a la lógica matemática* de C. Di Prisco, *Introduction to Mathematical Logic* de E. Mendelson, *Una Introducción Matemática a la Lógica* de H. Enderton, *Mathematical Logic* de H. Ebbingahaus - J. Flum - W. Thomas, *Logic for applications* de Nerode – Shore, *Teoría de modelos* de M. Manzano y *Model Theory* de Chang – Keisler.

Caso 2: $(\widetilde{P_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ esta formalizado en el lenguaje de la lógica de predicados monádicos.

Por ejemplo estamos en presencia de un enunciado condicional de un razonamiento del siguiente tipo[33]:

$\forall x\, [Ux \rightarrow (V x \rightarrow W x)]$

$\forall x\, [V x \rightarrow (Ux \rightarrow \neg W x)]$

$\exists x\, (Ux \wedge W x)$

$\vdash \exists x (Ux \wedge V x)$

[31] Cfr. COPI, I., *Lógica Simbólica*. Compañía Editorial Continental, S. A. 1998; SUPPES, P. y HILL, S., *Ob. Cit*.; GARRIDO, M., *Ob. Cit*.; NERODE, A. y SHORE, R., *Logic for Applications*. Springer. 1997.
[32] Cfr. COPI, I., *Ob. Cit*. y Garrido, M., *Ob. Cit.*
[33] Cfr. COPI, I., *Ob. Cit*.

En tal caso se usa el Teorema de Löwenheim (1915) (Church[34] atribuye dicho teorema a Bernays y Schönfinkel, mientras que Garrido[35] lo atribuye a Löwenheim) y se re-escriben sus proposiciones (eliminando sus cuantificadores existenciales y universales) para transformarlas en fórmulas de la lógica proposicional, y se resuelve el problema según el Caso 1 (Ver ejemplo del procedimiento en *Lógica simbólica* de Manuel Garrido).

Teorema 3.2 (Teorema de Löwenheim). *Sea φ una fórmula del lenguaje de la Lógica de predicados monádicos que consta de n letras predicativas distintas. Si φ es válida en un universo de 2^n individuos, entonces φ es lógicamente válida.*

Una prueba de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en *Introduction to mathematical logic* de A. Church.

Entonces se puede dar efectivamente una respuesta afirmativa o negativa sobre la relación $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$, y por lo tanto sobre la validez del razonamiento original R. Notar que en este Caso 2 el problema más fuerte que se puede plantear para la decisión efectiva es que el número *n* sea muy grande, algo análogo ocurre con el Caso 1 (que la cantidad de letras proposicionales del enunciado condicional asociado sea muy grande), y en tal caso la decisión no es humanamente realizable en la práctica espacio-temporal, eso podría ocurrir, pero al menos en el terreno de la matemática pura se puede afirmar con total certeza que el procedimiento termina en algún natural *k*. También en este caso se puede usar un cálculo deductivo para la lógica de predicados monádicos, y si se logra deducir como teorema el enunciado $(\widetilde{P_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ se afirma la validez del razonamiento original por el Teorema de completitud de Gö*d*el.

Caso 3: $(\widetilde{P_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ esta formalizado en el lenguaje de la lógica de predicados poliádicos (es decir, el condicional tiene predicados poliádicos).

Por ejemplo estamos en presencia de un enunciado condicional de un razonamiento del siguiente tipo[36]:

$\forall x \forall y\ [Lx \wedge Ly \wedge \exists z(Lz \wedge Rxz \wedge Ryz) \rightarrow P\ xy]$

---

[34] Cfr. CHURCH, A., *Introduction to mathematical logic*. Princeton: Princeton University Press. 1996.
[35] Cfr. GARRIDO, M., *Ob. Cit.*
[36] Cfr. *Ibídem*.

$\forall x \forall y\, [(Lx \wedge Ly \wedge Rxy) \rightarrow Ryx]$

$\vdash \forall x \forall y\, [(Lx \wedge Ly \wedge \neg P\, xy) \rightarrow \neg \exists z(Lz \wedge Rzx \wedge Rzy)]$

En este caso para decidir que $(\widetilde{P_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{P_n}) \rightarrow \widetilde{C}$ es lógicamente válida se puede proceder al menos de dos maneras: (a) Usar un cálculo deductivo para la Lógica de primer orden con predicados poliádicos y demostrarlo como teorema y luego aplicar el Teorema de completitud de Gö*d*el como se ha comentado en los casos anteriores. (b) También puede probarse directamente que ocurre $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$ en el contexto de la Teoría de Modelos. Pero puede pasar que no se logre hacer ninguna de las dos cosas ((a) y (b)) pues en el caso de la opción (a) ocurre que la Lógica de primer orden con predicados poliádicos es indecidible como lo demostró Churh en 1936:

Teorema 3.3 (Teorema de Indecibilidad de Church). *La Lógica de primer orden es indecidible (es decir, para cualquier sistema axiomático de la Lógica de primer orden no existe un procedimiento efectivo que permita decidir de un modo mecánico si una fórmula es o no deducible en dicho sistema).*

Una prueba de tal teorema puede encontrarse en *Introduction to mathematical logic* de Mendelson. Ejemplos de proposiciones de primer orden indecidibles y de problemas abiertos sobre el tema pueden conseguirse (entre otros) en el artículo *El Problema de la decisión en la lógica de predicados* de J. Mosterín. Ejemplos de fragmentos decidibles de la lógica de primer orden pueden encontrarse (entre otros) en el artículo ya citado de Mosterín, así como en *Elementos de lógica teórica* de Hilbert y Ackermann, *Introduction to mathematical logic* de A. Church, y *Logic for applications* de Nerode-Shore.

Entonces puede pasar que no logremos derivar la conclusión $\widetilde{C}$ de las premisas $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n}$.

Y en la opción (b) puede pasar que no logremos demostrar directamente $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$ en el contexto de la Teoría de Modelos pues la Teoría de Modelos se hace en el contexto de la Teoría de conjuntos, es decir, la Teoría de Modelos usa como metateoría a la Teoría de conjuntos, y la Teoría de conjuntos es una teoría incompleta tal como lo probó Gödel, es decir, la Teoría de conjuntos tiene proposiciones indecidibles, es decir, proposiciones σ tal que ni σ, ni $\neg\sigma$ son teoremas de la teoría de conjuntos, y la proposición $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$ puede ser una de tales proposiciones indecidibles.

Teorema 3.4 (Primer Teorema de Incompletitud de Gödel). *Sea S un sistema axiomático recursivo y suficientemente fuerte como para deducir en él la Aritmética de Peano. Entonces:*

Si S es consistente, entonces S es incompleto (es decir, S tiene proposiciones indecidibles, es decir, existe al menos una proposición σ tal que $S \nvdash \sigma$ *y* $S \nvdash \neg\sigma$*).*

Una prueba de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en *Introduction to Mathematical logic* de E. Mendelson, *Una introducción matemática a la lógica* de H. Enderon y en *Las Obras completas* de Kurt Gödel.

Entonces puede ser que en este Caso 3 no se consiga una "respuesta efectiva" a la pregunta sobre si el razonamiento original R es válido o no, tal vez se necesite usar métodos no conocidos (inventar nuevos métodos) para decidir $\widetilde{P_1},\ldots, \widetilde{P_n} \vDash \widetilde{C}$.

Este hecho de la Lógica de primer orden con predicados poliádicos me parece realmente maravilloso pues revela, entre otras cosas, la necesidad de "la creatividad humana" a la hora de hacer lógica o matemática. Como dice Garrido: *"La operación deductiva de la razón no es totalmente mecanizable"*[37].

Y von Neumann también se refiere a la indecibilidad, pero años antes (1927) de las pruebas de los teoremas de Church y Gödel, dice unas palabras bastante interesantes:

> Parece, pues, que no hay ninguna vía para descubrir el criterio universal de decisión (allgemeine Entscheidungskriterium) sobre si una dada fórmula normal a es demostrable. Por cierto, actualmente no podemos probar nada a este respecto. No hay tampoco ninguna indicación de cómo podría probarse dicha indecibilidad. Pero esta incertidumbre no nos impide constatar que hoy en día no es posible decidir si una fórmula normal cualquiera a es demostrable o no (relativamente a la regla de construcción de axiomas que se describiría luego). Y que ello sea indecidible es incluso la ***conditio sine qua non*** para que tenga sentido hacer matemáticas con los métodos heurísticos de hoy. El día mismo que la indecibilidad cese, también dejará de existir la matemática en el sentido actual; en su lugar habría una

[37] GARRIDO, M., *Ob. Cit.*, 371.

receta completamente mecánica con ayuda de la cual cualquiera podría decidir acerca de cualquier aseveración si se la puede o no demostrar.[38]

4. Sobre la presencia del platonismo matemático en ZFC y en los axiomas de "cuerpo ordenado completo"

Esta nota se refiere a la presencia del platonismo matemático en ZFC y en los axiomas de "cuerpo ordenado completo", es conocido que los últimos axiomas caracterizan (salvo isomorfismo) al sistema de los números reales y que se utilizan actualmente para desarrollar el Análisis real en el contexto de la teoría de conjuntos. A continuación se inicia con la exposición.

En el estudio de los fundamentos de la matemática dos concepciones "antagónicas" de la misma que se estudian son el platonismo y el constructivismo (o intuicionismo), en sus diversas modalidades[39]. Es muy conocido que no son las únicas concepciones de las matemáticas, hay otras muy importantes, como por ejemplo "empirismo", "formalismo", "naturalismo", "kantianas", "convencionalismo", etc.[40] Pero ellas son necesarias para tratar de entender cabalmente el "quehacer matemático" y siempre son referencia. En mi opinión los textos *¿Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas?* y *The Keys to Advaned Mathematics: Recurrent Themes in Abstract Reasoning* de D, Solow, entre otros libros, describen algunas de las ideas básicas del "quehacer matemático", pero no todas sus ideas básicas.

¿En qué consiste el Platonismo matemático? y ¿Cómo se relaciona el Platonismo matemático con los Fundamentos de la matemática y con ZFC?

Según la bibliografía consultada Bernays fue el primero en usar (1934) el término "platonismo" en las matemáticas en su breve obra *El Platonismo en Matemática*. En dicho ensayo Bernays dice: *"Dado que esta tendencia se basó especialmente en la filosofía de Platón*,

[38] VON NEUMANN, J. "Zur Hilbertschen Beweistheorie". *Mathematische Zeitschrift.* 26: 1–46 (1927) (Citado y traducido en Torretti, R., *El Paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática*. Chile, Universidad Nacional Andr´es Bello. 1998., pp. 234-235).

[39] Cfr. BERNAYS, P., *El Platonismo en Matemáticas* (1934). Caracas, Universidad Central de Venezuela. 1982; FERREIRÓS, J. *Matemáticas y platonismo(s)*. La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas 2 (1999), 446-473; HEYTING, A., *Introducción al Intuicionismo*. Tecnos. 1955; HEYTING, A., "Los fundamentos intuicionistas de la matemática" (1930). En *Philosophy of Mathematics*, Editores: Benacerraf, P. y Putnan, H., Cambridge University Press, 1998; ALEMÁN, A., *Lógica, matemáticas y realidad*. Madrid, Tecnos. 2011; KNEALE, W. y KNEALE, M., *El Desarrollo de la lógica*. Madrid, Tecnos.1980; BENACERRAF, P. y PUTNAN, H. (Ed), *Ob. Cit.*

[40] Cfr. BENACERRAF, P. y PUTNAN, H. (Ed), Ob. Cit.; HORSTEN, L., *Philosophy of Mathematics*. Enciclopedia de Filosofía de la Universidad de Stanford. https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/. 2012.

me permito llamarla "platonismo""[41]. A continuación se intentará describir el platonismo en matemáticas con el apoyo de autores como Bernays, Ferreirós, Alemán Pardo, Mosterín, Torretti y los Knelae, entre otros. También se intentará responder el resto de las preguntas planteadas anteriormente.

Se puede afirmar que para Bernays y Ferreirós, entre otros, el platonismo matemático es el método peculiar ("el modo de razonar") que se usa para la investigación matemática en el Análisis matemático, en la Teoría de conjuntos, en el Algebra moderna y en la Topología, entre otras disciplinas matemáticas. Existen varias modalidades de platonismo matemático que se pueden encontrar descritas en la bibliógrafa. Por ejemplo para Bernays hay "Platonismo absoluto", "Platonismo moderado" y "Platonismo constructivo"[42], más adelante se describirá brevemente a los mismos. Y para Ferreirós hay "Platonismo interno" y "Platonismo externo", dicho autor explica en qué consisten ambos tipos de platonismo en las siguientes citas:

> Platonismo interno o propiamente matemático: es característico de las teorías de la matemática abstracta o moderna, donde se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada, se podría hablar de existencia ideal.[43]

Y luego añade:

> Platonismo externo, ontológico, o propiamente filosófico (una de las posibles interpretaciones filosóficas de la matemática, en particular de la característica antes señalada de la matemática abstracta): consiste en la afirmación de que los objetos matemáticos gozan de una existencia real, análoga en algún sentido (aunque diferente) a la existencia de los objetos físico.[44]

Para complementar la descripción de Ferreirós, se coloca una cita de Alemán Pardo quien describe al platonismo matemático de una manera que hace explícito un importante aspecto epistemológico del mismo, es decir, "la necesidad de la intuición intelectual" para conocer las entidades matemáticas[45], algo que se considera fundamental y no está presente en el párrafo anterior de Ferreirós:

---

[41] BERNAYS, P., *Ob. Cit.*, p. 16.
[42] *Ibíd*, pp. 9 y ss.
[43] FERREIRÓS, J., Matemáticas y Platonismo(s). Versión presentada en https://www.academia.edu/18694207/Matem%C3%A1ticas_y_platonismo_s_ p. 2.
[44] *Ibídem*.
[45] Como por ejemplo lo planteaba Gödel en sus artículos: *"¿Qué es el problema del cardinal del continuo de Cantor?" (1947) y "*La lógica matemática de Russell*"* (1944) en GODEL, K., *Obras Completas*; También es un

> Para el platonismo, la realidad que describen (verdadera o falsamente) los enunciados lógicos y matemáticos no es la realidad empírica que percibimos a través de nuestros órganos sensoriales. Se trata de una realidad ideal, abstracta, no perceptible por los sentidos, sino mediante una facultad especial de la razón llamada comúnmente "intuición intelectual". La naturaleza especial de los objetos lógico-matemáticos como entidades no espacio-temporales requiere postular correlativamente (al menos en algunas versiones del platonismo) un tipo especial de vía de acceso cognoscitivo a tal tipo de objetos; de ahí la apelación a la intuición.[46]

Bernays describe al platonismo matemático de la siguiente manera:

> Tales modos de razonar (peculiares al análisis y a la teoría de conjuntos) se aplicaron por primera vez sistemáticamente para dar una forma rigurosa a los métodos del cálculo. [De acuerdo con éstos], los objetos de una teoría se tratan como elementos de una totalidad tal que permite razonar como sigue: Para cada propiedad expresable usando las nociones de la teoría, es un hecho objetivamente determinado si hay o no un elemento de la totalidad que posea tal propiedad. Así mismo, se sigue de este punto de vista que o bien todos los elementos de un conjunto poseen una determinada propiedad, o bien hay al menos un elemento que no la posee[47]

Y unas páginas más arriba afirma lo siguiente: "No resulta exagerado afirmar que el platonismo reina actualmente en la matemática"[48].

Con respecto a la segunda cita de Bernays anteriormente presentada se puede decir que aunque fue escrita en 1934 tal vez lo afirmado por el autor siga siendo cierto en la actualidad. Más adelante volveremos a dicha cita.

Siguiendo a Bernays y a Ferreirós, se puede afirmar que ZFC es una teoría platonista matemática, con un grado fuerte de platonismo pues : "no sólo consiste en admitir el infinito actual en su forma más elemental, **la totalidad de los números naturales**" [49], si no que "asume un supuesto más fuerte que consiste en la admisión de las nociones de conjunto y función tal como se usan en la matemática moderna: lo que suele llamarse las nociones **abstractas**, o la idea de conjunto y funciones arbitrarios"[50] . Sin embargo, ZFC se podría considerar como una teoría platonista moderada en comparación con la llamada "Teoría de conjuntos ingenua" usada en sus

---

tema trabajado en GÖDEL, K., *Ensayos inéditos*. Madird, Biblioteca Mondadori. 1994. Editor: Francisco Consuegra. Prólogo: W. V. Quine. Recomendamos leer la entrada de Horsten citada en el pie de página número 40.

[46] ALEMÁN, A., Ob. Cit., p. 16.

[47] BERNAYS, P., Ob. Cit., pp. 15-16.

[48] *Ibíd*, p. 20.

[49] FERREIRÓS, *Ob. Cit*., p. 9.

[50] *Ibídem*.

investigaciones matemáticas o de fundamentos de la matemática por Cantor, Dedekind y Frege (entre otros) hacia finales del siglo XIX[51]. La Teoría de conjuntos ingenua se considera una teoría platonista absoluta, pues en la misma se usaba (entre otros) el Principio de comprensión intuitivo, "Toda propiedad determina un conjunto", el cual permitió derivar paradojas como la de Russell, Cantor y Burali-Forti (entre otras) descubiertas hacia finales del siglo XIX e inicios del siglo XX[52]. A este Platonismo absoluto tal vez Bernays lo entiende de una manera parecida a como Ferreirós entiende su Platonismo externo[53] , pues se corresponde con la concepción de la matemática de Cantor, Dedekind y Frege, según la bibliografía consultada[54].

Zermelo, en su axiomática original de 1908 para la teoría de conjuntos, mencionada anteriormente en la primera sección de este artículo, **restringió** el Principio de comprensión intuitivo (entre otros), y por tal restricción se puede considerar a ZFC como platonista moderada. La restricción del Principio de comprensión intuitivo en la axiomática original de Zermelo se llama "Axioma III: Axioma de separación"[55]. La diferencia entre ambos principios matemáticos es descomunal, pues el Axioma de separación afirma: *Si A es un conjunto y $P(x)$ es una propiedad, entonces existe el conjunto* $\{x \in A: P(x)$ *es cierta*$\}$. (Para cualquier conjunto A y para cualquier propiedad P). El Axioma de separación no afirma que existe el conjunto $\{x: P(x)$ es cierta$\}$, lo cual sí es afirmado por el Principio de comprensión intuitivo. Y afirmar que existe el conjunto $\{x: P(x)$ es cierta$\}$ (para cualquier propiedad P) podría producir "colecciones **demasiado** grandes" ("clases propias", "totalidades inconsistentes" según Cantor) como por ejemplo "el conjunto de todos los conjuntos", "el conjunto de todos los números ordinales", "el conjunto de todos los números cardinales", "el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos", etc., que pueden implicar contradicciones.

Cuando Zermelo publicó su axiomática original en 1908 escribió al inicio de su artículo:

---

[51] Cfr. CANTOR, G., *Contributions to the founding of the theory of transinite numbers* (1895-97). Dover Publications, Inc. 1955; CANTOR, G., *Fundamentos para una…*; FREGE, G., *Conceptografía (Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritm´etica, para el pensamiento puro) (1879). Los Fundamentos de la Aritmética (Una investigación lógico -matemática sobre el concepto de número) (1884). Otros estudios filosóficos* (1891, 1892, 1904). Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filosóficas. México. 1972; MOSTERÍN, J., *Los Lógicos*. Espasa. Madrid. 2000; ENDERTON, H., *Elements Set Theory*; DI PRSICO, C., *Teoría de conjuntos*…

[52] Cfr. TORRETTI, R., *Ob. Cit.*

[53] Bernays, P., *Ob. Cit.*, p. 20.

[54] Por ejemplo en Mosterín, J. *Los Lógicos*…; FERREIRÓS, J., Ob. Cit. y CANTOR, G., *Fundamentos para una*…

[55] Hijenoort, J., *Ob. Cit.*, p. 202.

> La Teoría de conjuntos es la rama de la matemática que se ocupa de investigar las nociones de "número", "orden" y "función" y de desarrollar los fundamentos lógicos de toda la aritmética y el análisis, por lo tanto constituye un componente indispensable de la ciencia matemática.[56]

Con esta cita de Zermelo, más todo lo anteriormente dicho en esta sección y en las dos primeras secciones, ya se puede apreciar la conexión entre el platonismo matemático, los fundamentos de la matemática y ZFC. Simplificando bastante se puede decir que: El platonismo matemático es la metodóloga de la Teoría de conjuntos, del Análisis matemático, del Álgebra abstracta, la Topología, etc. ¿Y en qué consiste tal metodología? Ya han dado una respuesta casi completa a esta pregunta Bernays y Ferreirós en citas anteriores. La Teoría de conjuntos ingenua (Platonismo absoluto) de Cantor, Dedekind, Frege, etc., se usó en el siglo XIX para establecer los fundamentos lógico- matemáticos del Cálculo diferencial y del Cálculo integral de Newton y Leibniz de segunda mitad del siglo XVII[57], por ejemplo se dieron definiciones rigurosas del concepto de "número real" como *clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales* (Cantor) y como *cortaduras de racionales* (Dedekind)[58]. Luego, a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX esta fundamentación conjuntista (absoluta) entró en contradicción con el surgimiento de las paradojas de Russell, Cantor, Burali-Forti, etc., motivado por uno de sus métodos: El Principio de comprensión intuitivo. Este acontecimiento se suele llamar en la bibliografía "crisis de los fundamentos de las matemáticas". Luego se reparó la Teoría de conjuntos ingenua (el Platonismo absoluto) restringiendo sus métodos, por ejemplo el Principio de comprensión de intuitivo, mediante una axiomática ofrecida por Zermelo en 1908, tal axiomática se perfeccionó y se convirtió en ZFC, donde se puede desarrollar toda la matemática conocida hasta los momentos y con la cual se puede realizar investigación matemática y de los fundamentos de la matemática de gran nivel[59]. (Como se dijo en la primera sección, vale la pena resaltar que existen otras axiomáticas de la teoría de conjuntos posteriores y distintas a ZFC y que son muy interesantes[60]).

---

[56] Citado en Hijenoort, J., *Ob. Cit*., p. 200.

[57] Cfr. TORRETTI, R., Ob. Cit.; MOSTERÌN, J., Ob. Cit.; Pastor y Babini. *Historia de la matemática*. Dos Volúmenes. Gedisa. Barcelona. 2000; ROBLES, J., *Los escritos matemáticos de George Berkeley y la polémica sobre El Analista*. Universidad Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filosóficas. 2006; ROYDEN, H., *Real Analysis*. Pearson.2010; AHLFORS, L., *Complex Analysis. An introduction to the of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill Book Company. New York, 1966.

[58] Cfr. ENDERTON, H., *Elements set Theory*, pp. 111-113.

[59] Cfr. BAGARÍA, J., *La teoría de…*

[60] Cfr., MENDELSON, E., *Ob. Cit*., pp. 225-304.

Sin embargo, con respecto a ZFC y los fundamentos de la matemática es pertinente la siguiente pregunta ¿El problema de los fundamentos de la matemática está resuelto con ZFC? Para responder esta interrogante puede ser útil (entre otras opciones) conocer la respuesta a otra pregunta ¿Es completa y consistente ZFC? Por los Teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931[61] se conoce que ZFC es esencialmente incompleta y además que no se puede probar la consistencia de ZFC con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ZFC es un problema abierto en la actualidad (como se dijo en la primera sección de este trabajo). Tal vez esto significa que ZFC no se pueda considerar como un fundamento de las matemáticas en el sentido estricto del término. No obstante, en la actualidad ZFC se considera un fundamento razonable para las matemáticas en la mayoría de la comunidad matemática mundial, por varias razones[62].

A pesar de las valiosas conclusiones parciales obtenidas hasta ahora vale la pena continuar profundizando en las preguntas ¿En qué consiste el platonismo matemático? y ¿Cómo se relaciona el platonismo matemático con los fundamentos de la matemática y con ZFC?

Anteriormente se habló del platonismo moderado desde el punto de vista de la restricción del platonismo absoluto, en especial de la restricción del Principio de comprensión intuitivo. Sin embargo vale la pena resaltar que por platonismo moderado Bernays entiende lo siguiente:

> … al platonista moderado no le interesa en lo más mínimo saber "donde" existen las entidades matemáticas: en la mente de los hombres, en un paraíso platónico o en la mente de Dios. De lo que se trata es más bien de conocer qué relaciones formales mantienen las entidades abstractas entre sí y respecto de los individuos que subsumen, y si es de alguna utilidad asumir la existencia de entidades caracterizadas por tales relaciones. En este sentido Russell de la segunda edición de los **Principia** y el propio Gödel sostendrían un platonismo moderado.[63]

Quizá vale la pena resaltar dos cosas con respecto a la cita anterior: (a) Para el autor de este trabajo no necesariamente Gödel sostendría *totalmente* un platonismo moderado en el sentido de Bernays, según la bibliografía consultada[64], el platonismo sofisticado y no ingenuo propio de Gödel podría ser más fuerte que el platonismo matemático moderado descrito por Bernays. (b) Para el autor de este trabajo el platonismo moderado que describe Bernays en su cita, ampliado

[61] Cfr. GÖDEL, K., *Obras completas*, pp. 45-89.
[62] Cfr. MOSTERÍN, J., *Ob. Cit.*; Bagaría, J., *Ob. Cit.*
[63] BERNAYS, P., *Ob. Cit.*, p. 42.
[64] Las obras citadas de Gödel en el píe de página 45, entre otras.

con los nuevos métodos de la metamatemática contemporánea (Hilbert, Tarski, Gö*d*el, Cohen, Solovay, Thennenbaum, Shelah, Chang, Keisler, Jech, Todorčević, Woodin, etc.), nuevos métodos que se desarrollan en el contexto del platonismo moderado, modela la manera de trabajar de la mayoría de los matemáticos profesionales en la actualidad, modela "el quehacer matemático", en este sentido lo que dijo Bernays en 1934, *"No resulta exagerado afirmar que el platonismo reina actualmente en la matemática"*, sigue siendo vigente en la actualidad.

¿Cuáles son los rasgos más platonistas de ZFC? Respuesta: Tal vez se pueda decir que son tres de sus axiomas: (1) El Principio del tercero excluido, que es uno de los axiomas lógicos de ZFC ("Para cualquier proposición φ se cumple que (φ es verdadera o φ es falsa), (2) el Axioma del infinito ("Existe un conjunto inductivo", es decir, "Existe un conjunto A tal que $\emptyset \in A$ y para cada conjunto X, si $X \in A$, entonces $S(X) = X \cup \{X\} \in A$. Notar que como consecuencia de la propiedad de A que postula el axioma del infinito se cumple que A es infinito. Con este axioma (principalmente) se puede demostrar que en dicha teoría existe el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con sus operaciones y relación de orden usual, el conjuntos de los números racionales $\mathbb{Q}$ con sus operaciones y relación de orden usual, el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con sus operaciones y su relación de orden usual, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con sus operaciones y relación de orden usual, y el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ con sus operaciones usuales), y (3) el Axioma de elección ("Todo conjunto tiene una función selectora").

Los tres axiomas antes mencionados son necesarios para desarrollar en ZFC la Teoría de los números transfinitos ordinales y cardinales de Cantor, teoría que llamó Hilbert el "núcleo fundamental"[65] de la Teoría de conjuntos ingenua de Cantor, en el caso del desarrollo de la aritmética transfinita cardinal es estrictamente necesario usar el Axioma del elección. Desde sus orígenes los números transfinitos ordinales y cardinales de Cantor fueron fuertemente cuestionados (entre otros) por los matemáticos que sostienen la Filosofía de la matemática intuicionista (o constructivista), como por ejemplo Kronecker (1823-1891), Brouwer (1881-1966), Heyting (1898-1980), etc. Alemán Pardo describe al Inticionismo de la siguiente manera:

> Frente al descriptivismo, compartido por platonismo y empirismo, aparece el constructivismo negando directamente la tesis común a ambos: los enunciados lógico matemáticos no describen ningún tipo de realidad (ni ideal ni natural) preexistente a la

[65] HILBERT, D., Ob. Cit., p.90.

> propia actividad constructiva del matemático. La función propia de los enunciados lógico - matemáticos no es describir, sino **construir formas** que pueden ser empleadas en la descripción de la realidad. Pero la realidad que se alude aquí no es la realidad ideal que pretende describir el platónico. En este punto el constructivismo coincide con el empirismo: no hay necesidad de postular dos tipos de realidad habitadas por dos tipos de objetos de naturaleza ontológica heterogénea: objetos empíricos espacio-temporales y objetos abstractos fuera del espacio-tiempo. Para el constructivismo no es necesario postular la existencia de objetos fuera del espaciotiempo a fin de dar cuenta de la naturaleza de la lógica y la matemática, pues si los enunciados lógico -matemáticos no funcionan como descripciones, entonces no hace falta postular ninguna clase de objetos que describir.[66]

¿Cómo entender en la cita anterior la expresión "**construir formas**"? siguiendo a Heyting (entre otros) se puede afirmar que tales "formas" se deben construir usando un **procedimiento efectivo**, es decir, se deben construir en un número finito de pasos usando la secuencia infinita potencial de los números naturales.

Esto implica que el contructivismo rechace el "Principio del tercero excluido" precisamente porque no existe un procedimiento efectivo tal que dada una proposición cualquiera φ se pueda determinar en un número finito de pasos si efectivamente φ es verdadera o falsa. También rechazan los constructivistas la existencia de los números transfinitos de Cantor (ordinales y cardinales) porque no se pueden construir según el criterio mencionado. También rechazan la prueba de la existencia de un objeto usando reducción al absurdo (sin una construcción del mismo de manera efectiva).

Para finalizar con el tema de la presencia del platonismo matemático en ZFC vale la pena destacar que el intuicionismo también puede ser interpretado como platonismo matemático según Bernays[67], específicamente como una modalidad del platonismo moderado, como un tipo de platonismo moderado constructivo, pues es conocido que los "procedimientos finitos y efectivamente computables" pueden parar en un número natural n **muy grande** que el ser humano no puede construir en la práctica con el pensamiento. Un ejemplo en la actualidad se puede encontrar en la computación con las diferencias que existen entre "computable teóricamente" y "computable en la práctica", la primera no implica a la segunda, y ocurre que el intuicionista está en el ámbito de "computable teóricamente", por lo tanto el intuicionista es un platonista. Lo Monaco y Sánchez, en su introducción al texto *Platonismo matematico* de Bernays, expresan esto de la siguiente manera:

---

[66] ALEMÁN, A., Ob. Cit., pp. 17-18.
[67] Cfr. BERNAYS, P., Ob. Cit., p. 11.

> Como quiera que sea, lo más importante del análisis de Bernays es que la escuela **intuicionista** puede ahora pasar a interpretarse como una especie de platonismo moderado constructivo. En efecto, en el sentido en que Bernays usa el término, los intuicionistas serían platonistas que aceptan la existencia de sólo algunas entidades abstractas, incluso aquellas entidades que no han sido siquiera mentalmente construidas. Por ejemplo, es inverosímil que alguien tenga tiempo y bríos para construir el número $10^{10^{10}}$. Pues bien, los intuicionistas aceptarían la existencia de tal número, pues admiten la existencia de cualesquiera entidades para las que pueda establecerse un método por medio del cual "en principio" podrían ser efectivamente construidas.[68]

Para Ferreirós[69] el platonismo matemático según Bernays tiene dos extremos: El platonismo moderado constructivo (instuicionista) y el platonismo absoluto (de la Teoría de conjuntos ingenua). El primero se puede defender a pesar de que limita enormemente las posibilidades teóricas, la segunda no se puede sostener por el problema de las paradojas. Entre tales extremos caben múltiples posibilidades de grados de platonismo. El autor de este artículo llama a esta gradación: **La escala de Bernays del platonismo matemático moderado**.

Con respecto al platonismo y al intucionismo (constructivismo) Bernays afirma que ambos son necesarios para la ciencia matemática:

> Lo anterior es suficiente para mostrar que las dos tendencias, intuicionismo y platonismo, son ambas necesarias; se complementan mutuamente con lo cual no tiene sentido renunciar a ninguna de ellas.[70]

La relación entre el platonismo matemático y el intuicionismo (constructivismo) es presentada por Mosterín y Torretti desde un punto de vista interesante en la siguiente cita que aporta a esta investigación, pues se refieren a un resultado metamatemático (lógico- matemático) de Gödel que relaciona ambas concepciones filosóficas de la matemática (*"la aritmética intuicionista no es más segura que la aritmética platonista"*) y también hablan del problema de los fundamentos de la matemática en el pasado reciente y en el presente:

> El programa intuicionista requiere abandonar el análisis matemático habitual y sustituirlo por una nueva matemática intuicionista, que emplea nuevas nociones, como la de secuencia de elecciones. El problema de las paradojas desaparece, pues son meras combinaciones de palabras a las que no corresponde construcción mental alguna. Durante cierto tiempo, el exigente intuicionismo parecía ofrecer la opción más segura para el desarrollo consistente de las matemáticas. Sin embargo, en 1932 Gödel probó que hay una manera de traducir la lógica y la aritmética clásica a la intuicionista, de tal manera que cualquier fórmula clásica

---

[68] *Ibídem.*
[69] Cfr. FERREIRÓS, *Ob Cit.*, p. 9.
[70] BERNAYS, P., *Ob. Cit.*, p. 35.

válida es también intuicionistamente válida y a cualquier posible contradicción en la teoría clásica correspondería otra contradicción en la intuicionista. En otras palabras, Gödel probó la consistencia relativa de la lógica y la aritmética clásica respecto a la intuicionista. Por lo tanto la segunda no es más segura que la primera. Esto redujo considerablemente el atractivo del programa intuicionista. Además, la matemática intuicionista tiene que renunciar a gran parte de la riqueza, potencia y elegancia de la matemática clásica, así como a muchos de sus resultados y métodos. Además, en los casos en que los teoremas clásicos coinciden con los intuicionistas, las pruebas de los mismos resultados se vuelven mucho más complicadas. Por todo ello el intuicionismo no ha logrado gran aceptación en la comunidad científica y sigue siendo cultivado por una fracción minoritaria de los matemáticos, sobre todo en Holanda. De todos modos, la prueba de que un resultado clásico puede también obtenerse con los austeros medios intuicionistas es interesante por sí misma, con independencia de lo que uno pueda pensar de esta peculiar filosofía de la matemática.[71]

Ahora bien, con esto finaliza el tratamiento del tema de la presencia del platonismo matemático en ZFC, pasaremos ahora a examinar la presencia del platonismo matemático en los "axiomas de cuerpo ordenado completo", es conocido que tales axiomas caracterizan (salvo isomorfismo) al sistema de los números reales y que se utilizan actualmente para desarrollar el Análisis real en el marco de la teoría de conjuntos, como por ejemplo se hace en los textos *Real analysis* de Royden, *Calculus* de T. Apostol y *Cálculo Infinitesimal* de Spivak.

Los axiomas de "cuerpo ordenado completo" se formulan en el contexto del la Teoría conjuntos de la siguiente manera siguiendo específicamente a Royden[72]: Se asume que existe un conjunto $\mathbb{R}$ (los números reales), un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}$ (los números reales positivos), y las funciones binarias "+" y "•" cerradas sobre $\mathbb{R}$, es decir, $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bullet: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que se satisfacen los siguientes axiomas, los cuales se listan en tres grupos: Axiomas de cuerpo, Axiomas de orden y Axioma de completitud:

(Vale la pena resaltar que esta manera de trabajar axiomáticamente en el contexto de la Teoría de conjuntos la llama Suppes "fundamentación sinforematica del método axiomático" en su texto *Introducción a la lógica simbólica*, Capítulo 12)

Axiomas de cuerpo: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple que:

A1 $x + y = y + x$

A2 $(x + y) + z = x + (y + z)$

71 MOSTERÍN, J. y TORRETTI, R., Diccionario de Filosofía, Madrid, Alianza, pp. 307-308.
72 ROYDEN,H., *Ob. Cit*., pp. 5, 31-33.

A3 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists 0 \in \mathbb{R}\ (x + 0 = x)$

A4 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ w \in \mathbb{R}\ (x + w = 0)$

A5 $x \bullet y = y \bullet x$

A6 $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

A7 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists 1 \in \mathbb{R}\ (1 \neq 0 \wedge x \bullet 1 = x)$

A8 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\ w \in \mathbb{R}\ (x \bullet w = 1)$

A9 $x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$

(El w de A4 es único y se denota por $-x$. Y el w de A8 es único y se denota por x^{-1})

Axiomas de orden: El subconjunto P de reales positivos satisface lo siguiente:

B1 $(x, y \in P) \rightarrow x + y \in P$

B2 $(x, y \in P) \rightarrow x \bullet y \in P$

B3 $(x \in P) \rightarrow -x \notin P$

B4 $x \in \mathbb{R}\ [(x = 0) \vee (x \in P) \vee (-x \in P)]$

Cualquier sistema $(K,\oplus,\odot)$ que satisfaga los axiomas A1-A9 y B1-B4 es llamado un **cuerpo ordenado**. Por ejemplo los racionales $(\mathbb{Q},+,\bullet)$ son un cuerpo ordenado. Y el sistema de los reales $(\mathbb{R},+,\bullet)$ construido en la Teoría de conjuntos usando cortaduras de Dedekind o sucesiones de Cauchy (por ejemplo) es también un cuerpo ordenado. En un cuerpo ordenado se define $x < y$ si y solo si $y - x \in P$. Y se escribe $x \leq y$ si y sólo si $(x < y \vee x = y)$.

Un teorema de todo cuerpo ordenado es el siguiente:

Teorema 4.1. *Cualquier cuerpo ordenado contiene conjuntos isomorficos al conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), al conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) y al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).*

Una formulación y demostración de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en la obra ya citada de Royden.

Para formular el Axioma de completitud se requiere de una definición previa: Sea S un conjunto de números reales ($S \subseteq \mathbb{R}$) y $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una *cota superior* de S si y sólo si $\forall x \in S\ (x \leq b)$. Un número $c \in \mathbb{R}$ es llamado una *menor cota superior* para S si y sólo si c es una cota superior de S y para cada cota superior b de S se cumple que $c \leq b$. Es claro que la menor cota superior de un conjunto S es única si ella existe.

Axioma de completitud: Cualquier subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ no vacío que tenga una cota superior tiene una menor cota superior.

Cuatro teoremas **fundamentales** del Análisis real cuya demostración no se puede realizar sin el Axioma de completitud son los siguientes:

Teorema 4.2 (Principio de Arquímedes). *Para cualquier número real x existe un entero positivo n tal que $x < n$.*

Una demostración de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en las obras ya referidas de Royden y Apostol.

Teorema 4.3. *Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Una demostración de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en la obra ya citada de Spivak.

Teorema 4.4. *Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo $x \in [a, b]$.*

Una demostración de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en la obra referida anteriormente de Spivak.

Teorema 4.5. *Si f es una función continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$, *entonces existe un* $y \in [a, b]$ *tal que* $f(y) > f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$.

Una demostración de tal teorema puede encontrarse (entre otros) en la obra refeida anteriormente de Spivak.

Ahora bien, en los axiomas de "cuerpo ordenado completo" (presentados anteriormente) que se usan en la actualidad en el desarrollo del Análisis real en el marco de la teoría de conjuntos se puede apreciar que un ejemplo de axioma platonista es el Axioma de completitud, pues no se ofrece un procedimiento efectivo para construir la menor cota superior que el enunciado afirma que existe. El Principio del tercero excluido en el desarrollo de tal axiomática (es un axioma lógico implícito en la misma) también es otro ejemplo de axioma platonista. Y suponer el conjunto $\mathbb{R}$ cerrado bajo las operaciones + y •, siendo $\mathbb{R}$ un infinito actual (no constructivo efectivamente), también es una postura platonista a mi entender (supone el Axioma del infinito), con el conjunto P infinito actual (no constructivo efectivamente) pasa algo análogo que con el conjunto $\mathbb{R}$.

Según Ivorra *"todo el análisis y toda la topología básica y toda la teoría descriptiva de conjuntos clásica"*[73] se puede desarrollar con la teoría $ZF + DC$ ($ZF = ZFC - AE$). Desde esta perspectiva también se puede apreciar la presencia del platonismo matemático en el Análisis real. Los axiomas tal vez más platonistas del Análisis real serían: El Principio del Tercero excluido, el Axioma del Infinito y DC (DC es una versión débil del AE que no es efectivamente constructiva y que implica "elección numerable", como se dijo en la primera sección).

En conclusión, por todo lo dicho anteriormente se puede apreciar mediante ejemplos por qué el Análisis real (tal cual es referido en esta sección) es una teoría matemática platonista (en alguna versión de platonismo).

[73] IVORRA, C., *Ob. Cit.*, p. XXVI.