Fragmentos decidibles e indecidibles en la *Lógica de primer orden*

Ricardo Da Silva[*] y *Franklin Galindo*[**].

Resumen

El siguiente artículo tiene tres objetivos: (1) Presentar una actualización de una prueba de la decidibilidad de la *Lógica de predicados monádicos* en el contexto de la teoría de modelos contemporánea; (2) Mostrar ejemplos de fragmentos decidibles e indecidibles dentro de la *Lógica de primer orden*, ofreciendo una prueba original del siguiente teorema: Son decidibles todas las fórmulas de la *Lógica de primer orden* tal que su forma normal prenexa quede de la siguiente manera: $\forall x_1,\ldots,\forall x_n\exists y_1,\ldots,\exists y_m\ \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$; (3) Presentar un teorema que caracteriza la validez de la *Lógica de Primer orden* mediante la tautologicidad de la *Lógica proposicional*, dicho resultado es de interés, pues inmediatamente surge la duda de cómo conciliar tal caracterización con el *Teorema de indecidibilidad de la Lógica de Primer orden* de Alonzo Church (1936).

Palabras Claves: Lógica de primer orden, Forma Normal Prenexa, Fragmentos decidibles, Fragmentos indecidibles.

Decidable and undecidable fragments in First order logic

Abstract

The present paper has three objectives: (1) Presenting an actualization of a proof of the decidability of monadic predicates logic in the contemporary model theory context; (2) Show examples of decidable and undecidable fragments inside First order logic, offering an original proof of the following theorem: Any formula of First of order logic is decidable if its prenex normal form is in the following form: ∀x1,…,∀xn∃y1,…,∃ymφ(x1,…,xn,y1,…,ym); (3) Presenting a theorem that characterizes the validity of First order logic by the tautologicity of Propositional logic, said result is interesting since immediately arises the doubt of how to conciliate said characterization with Alonzo Church's Undecidability Theorem for First Order Logic (1936).

Keywords: First order logic, Prenex normal form, Decidable fragments, Undecidable fragments.

[*] Universidad Central de Venezuela.
[**] Universidad Central de Venezuela.
Articulo recibido 15 de octubre de 2016 – Arbitrado 15 de noviembre de 2016

Apuntes Filosóficos. Vol. 26. Nº 50 (2017): 90-113.

0. Introducción

Aunque la *Lógica de primer orden* ($\mathscr{L}_1$) como un todo es indecidible[1], se tiene conocimiento de fragmentos dentro de la misma que son decidibles. La noticia de un primer fragmento decidible llega en el año de 1915 de la mano del lógico Leopold Löwenheim, probando así la decidibilidad del cálculo de predicados monádicos ($\mathscr{L}_{PM}$). Mientras que en 1921 el lógico y matemático Emil Post prueba la decidibilidad de un fragmento deductivo del sistema de *Principia Mathematica*, se trata pues de la decidibilidad de la *Lógica proposicional* ($\mathscr{L}_p$)[2].

Durante la tercera década de 1900, antes y después del descubrimiento del *Teorema de indecidibilidad de Church*, muchos lógicos y matemáticos trataban de buscar respuestas parciales (positivas o negativas) al *Entscheidungsproblem.* Estos intentos implicaban utilizar técnicas de normalización de fórmulas, como es el caso de la *Forma normal prenexa* o la *skolemización*, que hacen más fácil el análisis sobre las fórmulas y, en consecuencia, facilitan el estudio de la decidibilidad.

En el presente artículo presentamos una actualización de una prueba de la decidibilidad de la *Lógica de predicados monádicos* al lenguaje de la teoría de modelos contemporánea. Mostraremos ejemplos de fragmentos decidibles e indecidibles dentro de $\mathscr{L}_1$, ofreciendo una prueba original del siguiente teorema: Son decidibles todas las fórmulas de la *Lógica de primer orden* tal que su forma normal prenexa quede de la siguiente manera:

$$\forall x_1,\ldots,\forall x_n \exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$$

Por último, presentaremos un teorema que caracteriza la validez de $\mathscr{L}_1$ mediante la tautologicidad de $\mathscr{L}_p$, dicho resultado es de interés, pues inmediatamente surge la duda de cómo conciliar tal caracterización con el resultado limitativo de Church.

---

[1] Church, A. "An unsolvable problem of elementary number theory" (1936) en Davis, M. (editor), *The undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions.* Raven Press, Nueva York, 1965 . En 1936 el lógico americano Alonzo Church prueba que la *Lógica de primer orden* es indecidible, esto es, no existe un método efectivamente calculable que determine cuando una fórmula es un teorema del sistema o no lo es. Con ayuda de la noción de *función recursiva* y la técnica de aritmetización de la sintaxis, *la numeración de Gödel*, podemos enunciar del Teorema de indecidibilidad de Church de la siguiente forma: El conjunto de los números de Gödel de los teoremas de la *Lógica de primer orden* no es recursivo, es decir, su función característica no es recursiva.

[2] Torretti, R. *El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía de la matemática.* Universitaria. Santiago de Chile. 1998. Pág. 253

1. La *Lógica de predicados monádicos* es decidible

En contextos finitos es posible re-expresar una fórmula de la *Lógica de predicados monádicos* en términos de la *Lógica proposicional*, expondremos dicho método mediante una serie de ejemplos[3]:

Si consideramos la existencia de un individuo, a_1, la re-escritura de los cuantificadores quedaría de la siguiente manera:

$$\forall x\, Px \leftrightarrow Pa_1 \quad y \quad \exists x\, Px \leftrightarrow Pa_1$$

Si consideramos un universo con dos individuos, a_1 y a_2, la re-escritura de los cuantificadores quedaría de la siguiente manera:

$$\forall x\, Px \leftrightarrow Pa_1 \wedge Pa_2 \quad y \quad \exists x\, Px \leftrightarrow Pa_1 \vee Pa_2$$

En el caso de un universo con k individuos, la re-escritura de los cuantificadores sería la siguiente:

$$\forall x\, Px \leftrightarrow Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3 \wedge \ldots \wedge Pa_k$$

$$\exists x\, Px \leftrightarrow Pa_1 \vee Pa_2 \vee Pa_3 \vee \ldots \vee Pa_k$$

Ahora bien, consideremos la siguiente fórmula de la *Lógica de predicados monádicos*: $[(\forall x\, Px \rightarrow Qx) \wedge (\forall x\, Sx \rightarrow Qx)] \rightarrow (\forall x\, Px \rightarrow Sx)$ y evaluémosla en un modelo que contiene exactamente un individuo, a_1, su re-escritura proposicional sería:

$$[(Pa_1 \rightarrow Qa_1) \wedge (Sa_1 \rightarrow Qa_1)] \rightarrow (Pa_1 \rightarrow Sa_1)$$

Si hacemos la tabla de verdad de la fórmula anterior, nos daremos cuenta que hay una fila en donde se le asigna verdad a "Pa_1" y "Qa_1", y falso a "Sa_1", esta asignación de valores de verdad hace falsa a toda la fórmula. Dicha fila va permitir definir (de manera natural) un universo con un individuo en la cual la proposición sea falsa. Por lo tanto la fórmula original no es válida.

[3] Cf. Copi, I. *Lógica simbólica*, CECSA, México D.F., 2000, Pág. 103.

Consideremos ahora esta otra fórmula: $[(\forall x\ Px \rightarrow Qx) \wedge (\exists x\ Sx \wedge Qx)] \rightarrow (\forall x\ Px \rightarrow Sx)$. Para un modelo con un sólo individuo, a_1, dicha fórmula sería equivalente a la siguiente:

$$[(Pa_1 \rightarrow Qa_1) \wedge (Sa_1 \wedge Qa_1)] \rightarrow (Pa_1 \rightarrow Sa_1)$$

Si hacemos su tabla de verdad nos daremos cuenta que toda asignación de valores de verdad la hace verdadera, por lo tanto se trata de una fórmula tautológica. Sin embargo, evaluándola bajo un modelo que conste de dos individuos la cuestión cambia, veamos primero como quedaría re-escrita la fórmula en términos proposicionales considerando dos individuos a_1 y a_2:

$$\{[(Pa_1 \rightarrow Qa_1) \wedge (Pa_2 \rightarrow Qa_2)] \wedge [(Sa_1 \wedge Qa_1) \text{ v } (Sa_2 \wedge Qa_2)]\} \rightarrow [(Pa_1 \rightarrow Sa_1) \wedge (Pa2 \rightarrow Sa_2)]$$

Cuando elaboremos la tabla de verdad de la fórmula anterior tendremos que cuando se le asigna verdad a "Pa_1", "Qa_1", "Pa_2", "Qa_2" y "Sa_2", y falso a "Sa_1" la fórmula resulta falsa. En consecuencia, la fórmula original no es válida. Por lo ocurrido cuando evaluamos la fórmula anterior, cabe preguntarse cuántos individuos hay que considerar para responder a la pregunta de si una fórmula cualquiera de la *Lógica de predicados monádicos* es válida o no. Se ha encontrado una respuesta satisfactoria a esta pregunta, la cual expresaremos en forma de teorema de la siguiente manera:

<u>Teorema de decidibilidad de la *Lógica de predicados monádicos* (primera versión):</u> Sea φ una fórmula de la *Lógica de predicados monádicos* que tiene n predicados distintos. Sea U un universo de 2^n individuos, y sea φ' la re-escritura proposicional de φ a esos 2^n individuos. Se cumple lo siguiente:

I) Si φ' es tautología, entonces φ es válida.

II) Si φ' no es tautología, entonces φ no es válida.

Una prueba de este resultado puede encontrarse en *Introduction to mathematical logic* de A. Church[4].

Un ejemplo sería el siguiente: Sea φ la fórmula $\forall x\, Px \rightarrow \exists x\, Px$. Sea U un universo con dos individuos a_1 y a_2. La re-escritura de φ con esos dos individuos sería: $(Pa_1 \wedge Pa_2) \rightarrow (Pa_1 \vee Pa_2)$. Procedamos ahora a realizar la tabla de verdad de la fórmula re-escrita:

Pa_1	Pa_2	$(Pa_1 \wedge Pa_2)$	$\rightarrow$	$(Pa_1 \vee Pa_2)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

Como la fórmula es una tautología podemos concluir que la fórmula original ($\forall x\, Px \rightarrow \exists x\, Px$) es válida.

A continuación, ofreceremos una prueba actualizada del teorema anterior siguiendo al profesor Manuel Garrido[5], previamente ofreceremos las siguientes definiciones y hechos, necesarios para la ejecución de la prueba.

Definiciones:

Una fórmula φ es *válida* en un universo no vacío U, si para toda estructura $\mathfrak{A}$ para el lenguaje φ, cuyo dominio es U, se cumple que

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

Si una fórmula φ es válida en un universo no-vacío U lo denotaremos así:

$$\models_U \varphi$$

Si $|U| = n$, entonces se dice que φ es n-*válida relativa* a U, y se denota por:

$$\models_{U_n} \varphi$$

[4] Cf. Church, A. *Introduction to mathematical logic*, Volumen I. Princeton University Press. New Jersy. 1956 Pág. 253.

[5] Cf. Garrido, M. *Lógica simbólica*. Tecnos. Madrid. 2001 (4ta edición)., Págs. 365-366.

Una fórmula φ es *satisfacible en un universo no-vacío* U, si existe una estructura $\mathfrak{A}$ para el lenguaje de φ, cuyo universo es U, y existe una función s: *Var*⟶U, tal que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[s]$.

Hechos sobre satisfacibilidad y validez en relación con los conceptos anteriormente formulados:

(1) Sea φ una fórmula cuantificacional y U un universo no-vacío. Si φ es satisfacible en U, entonces es satisfacible en cualquier universo de igual o mayor cardinalidad, U'.

Demostración de (1): Consideremos la cardinalidad de U'. En caso de que sea igual a U se puede establecer entre los individuos de ambos una biyección. En el caso de que U tenga menor cardinalidad que U' se puede establecer una biyección entre los individuos de U y los individuos de un subconjunto de U'. En cualquiera de los dos casos podemos definir un sistema de predicaciones en U' que sean equivalentes a los de U y que satisfagan a φ. En el caso de que U' tenga cardinalidad igual a U se considera que el isomorfismo entre estructuras preserva la verdad. En el caso en que U' tenga cardinalidad mayor que U, la prueba usa inducción en la complejidad de la fórmula φ de la siguiente manera:

Sea $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ satisfacible en U. Es decir, existen $P_1^U,\ldots, P_n^U$ y $a_1,\ldots,a_n \in U$ tal que $<U, P_1^U,\ldots, P_n^U> \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n]$ donde $P_i^U \subseteq U$ es una interpretación de P_i en U, y P_i son los predicados monádicos de φ, $1\leq i \leq n$. Sea U' un conjunto tal que $|U| < |U'|$, y sea h: U ⇾ U' una función inyectiva. Definimos, con la ayuda de la función *h*, una estructura con universo U', así: $k \in P_i^{U'} \Leftrightarrow h^{-1}(k) \in P_i^U$, $1\leq i \leq n$. Sea la estructura $<U', P_1^{U'},\ldots, P_n^{U'}>$. Probaremos inductivamente en la complejidad de φ que: $<U', P_1^{U'},\ldots, P_n^{U'}> \vDash \varphi[h(a_1),\ldots,h(a_n)]$.

1. Caso base: φ es atómica. $\varphi = P_i(x)$. Por hipótesis, existe un $a \in U$, tal que $<U, P_1^U,\ldots, P_n^U> \vDash P_i[a] \overset{Def.\ Satisfacci\acute{o}n}{\Longleftrightarrow} a \in P_i^U$. Entonces, por definición, $h(a) \in P_i^{U'} \Leftrightarrow$ $<U', P_1^{U'},\ldots, P_n^{U'}> \vDash P_i[h(a)]$.

2. Caso inductivo: $\varphi = \neg\alpha$ y $\varphi = \alpha \wedge \beta$ se demuestran fácilmente por la definición de satisfacción. Probemos el caso de $\varphi = \exists x\, \psi(x_1,\ldots,x_n)$:

Si <U, P_1^U,…, P_n^U >⊧ ∃x ψ[a_1,…,a_n], entonces existe un a ∈ U tal que <U, P_1^U,…, P_n^U >⊧ ψ[a, a_1,…,a_n] $\xRightarrow[\text{inductiva}]{\text{Por Hip.}}$ <U', $P_1^{U'}$,…, $P_n^{U'}$> ⊧ ψ[*h(a)*,*h(a₁)*,…,*h(aₙ)*] $\xRightarrow[\text{Satisfacci ón}]{\text{Def.}}$ <U', $P_1^{U'}$,…, $P_n^{U'}$> ⊧ ∃x ψ[$h(a_1)$,…,$h(a_n)$]. □

Otra demostración de este hecho puede encontrarse en el texto *Introduction to mathematical logic* de Alonzo Church[6].

(2) Sea φ una fórmula cuantificacional y U un universo no-vacío. Si φ es válida en U, entonces φ es válida en cualquier universo no-vacío de igual o menor cardinalidad, U'.

<u>Demostración de (2):</u> Por la hipótesis del hecho tenemos que φ es válida en U, esto implica que ¬φ no es satisfacible en U, luego por contraposición del hecho anterior tenemos que ¬φ tampoco es satisfacible en U' y, por tanto, φ es válida en U'.□

<u>Teorema de decidibilidad de la *Lógica de predicados monádicos* (segunda versión)[7]:</u> Sea φ una fórmula de la *Lógica cuantificacional mónadica* que conste de n letras predicativas distintas. Si φ es válida en un universo de al menos 2^n individuos, entonces es válida en todo universo no-vacío de cualquier cardinalidad.

<u>Demostración:</u>

Sean P_1,…,P_n las letras predicativas distintas que aparecen en la fórmula φ.

Sea $\mathfrak{A}$ =<U,P_1^*,…, P_n^*> una estructura para el lenguaje de φ. Debemos probar que <U,P_1^*,…, P_n^*>⊧ φ.

A continuación clasificamos los elementos de U mediante la siguiente relación de equivalencia (~): x~y si, y sólo si, x e y cumplen las mismas propiedades en $\mathfrak{A}$ (P_1^*,…, P_n^*). Así pues, sean u_1 y u_2 dos elementos de U, tenemos que u_1 y u_2 pertenecerán a la clase α si las predicaciones $P_1(u_1)$,…,$P_n(u_1)$ tienen en dicho orden el mismo valor de verdad que las

---

[6] Cf. Church, A. *Introduction to mathematical logic*, Pág. 231.

[7] Cf. Garrido, M. *Lógica simbólica*. Pág. 365.

predicaciones $P_1(u_2),\ldots,P_n(u_2)$. A lo sumo el número resultante de clases de equivalencias es 2^n: $\alpha_1,\ldots, \alpha_k$ $(1\leq k \leq 2^n)$. El conjunto de las clases de equivalencia (conjunto cociente), lo denotaremos por U/~.

Definiremos ahora subconjuntos del conjunto cociente U/~, para interpretar los predicados $P_1,\ldots,P_n$ de φ. Diremos que $\alpha_j \epsilon Q_i$ si, y sólo si, para todo $u \in \alpha_j$ $(u \in P_i^*)$. Donde $1\leq j \leq 2^n$ y $1\leq i \leq n$.

Consideremos ahora la estructura $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>$ para el lenguaje de φ. Por la hipótesis del teorema y por el hecho (2) tenemos que $\vDash_{U/\sim} \varphi$, es decir, φ es válida en el conjunto U/~. En particular $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>\vDash \varphi$. Ahora bien, por la forma en que se definieron los conjuntos Q_i se cumple que φ es verdad en $<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>$. Por lo tanto φ es válida.

($<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>\vDash \varphi$ se puede demostrar, por inducción en la complejidad de φ, probando la siguiente proposición: $<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>\vDash \varphi[s]$ si, y sólo si, $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>\vDash \varphi[s']$, donde s': *Var*⟶ U/~, que se define de la siguiente manera $s'(x_i)=$ la clase de equivalencia de $s(x_i)$. La demostración procede de la siguiente manera:

1. <u>Caso base:</u> φ es atómica. $\varphi = P(x)$. $<U,P^*>\vDash P(x)[s] \overset{\substack{Def.\\ Satisfacci\acute{o}n}}{\Longleftrightarrow} s(x) \in P^* \overset{\substack{Def.\\ de\ los\ Qi}}{\Longleftrightarrow}$ **$[s(x)]$** $\in Q$ (Esto es, la clase de equivalencia de *s(x)* pertenece a Q) $\overset{\substack{Def.\\ Satisfacci\acute{o}n}}{\Longleftrightarrow}$ $<U/\sim, Q>\vDash P(x)[s']$.

2. <u>Caso inductivo:</u> $\varphi = \neg\alpha$ y $\varphi = \alpha \wedge \beta$ se demuestran fácilmente por la definición de satisfacción:

$<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>\vDash \neg\alpha[s]$ si, y sólo si, $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>\vDash \neg\alpha[s']$

$<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>\vDash \alpha \wedge \beta[s]$ si, y sólo si, $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>\vDash \alpha \wedge \beta[s']$

Probemos el caso de $\varphi = \exists x\, \psi$:

$<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>\vDash \exists x\, \psi[s] \overset{\substack{Def.\\ satisfacci\acute{o}n}}{\Longleftrightarrow}$ existe una asignación $\underline{s}$ tal que $<U,P_1^*,\ldots, P_n^*>\vDash \psi[\underline{s}]$ (donde $\underline{s}$ = s en todas las variables distintas de x) $\overset{\substack{Hip.\\ inductiva}}{\Longleftrightarrow}$ $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>\vDash \psi[\underline{s}']$[8] $\overset{\substack{Def.\\ satisfacci\acute{o}n}}{\Longleftrightarrow}$ $<U/\sim, Q_1,..,Q_n>\vDash \exists x\, \psi[s']$).

Con esto concluye la prueba del teorema.□

[8] La función $\underline{s}'$ se define de la siguiente manera $\underline{s}'(x)=$ **[**$\underline{s}$(x)**]**.

2. Forma normal prenexa: Algunos ejemplos de casos decidibles e indecidibles

Para toda fórmula φ de la *Lógica de primer orden* existe otra fórmula φ' equivalente a φ (es decir, $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ o por completitud $\vDash \varphi \leftrightarrow \varphi'$) que se caracteriza por poseer todos los cuantificadores al inicio de la misma, sobre esta última fórmula decimos que se encuentra en *Forma normal prenexa* (FNP). Esta re-distribución de los cuantificadores de una fórmula al inicio de la misma facilita tanto las transformaciones sintácticas como las decisiones de interés en el análisis de las fórmulas; es por ello que "una manera cómoda de estudiar el problema de la decisión es el restringir nuestra atención a las fórmulas en forma normal prenexa"[9]. Motivados a mostrar como hallar la FNP de una fórmula de $\mathbf{L}_1$ para luego poder mostrar ejemplos de casos decidibles e indecidibles según el prefijo de las fórmulas, listaremos a continuación un conjunto de leyes sobre los cuantificadores que deben entenderse como los fundamentos del procedimiento de obtención de una FNP.

<u>Leyes de descenso cuantificacional y de mutación de variables ligadas:</u>

<u>Ley de descenso cuantificacional</u>[10]: Esta ley permite el paso de lo general a lo particular, es decir, autoriza el paso de la cuantificación universal a la cuantificación particular (siempre y cuando el universo no sea vacío):

Desc: $\forall x\, Px \rightarrow \exists x\, Px$

<u>Leyes de mutación de variables</u>[11]: Permiten realizar cambios en las variables ligadas en el interior de una fórmula:

MVG: $\forall x\, Px \leftrightarrow \forall y\, Py$

MVP: $\exists x\, Px \leftrightarrow \exists y\, Py$

---

[9] Mosterín, J. "El problema de la decisión en la lógica de predicados" en *Convivium*, Núm. 39, 1973., Pág. 9.
[10] Cf. Garrido, M. *Lógica simbólica*, Pág. 206.
[11] Cf. Ibíd., Pág. 206-207.

Leyes de distribución de cuantificadores[12]:

La idea general que subyace a las leyes de distribución cuantificacional, es que los cuantificadores pueden ser trasladados desde el exterior hacia el interior, así como del interior hacia el exterior de una fórmula, sin que este cambio afecte (lógicamente) su significado.

El esquema general de una ley de distribución cuantificacional es el de una implicación, o en ciertos casos una complicación, que vincula, de uno y otro sentido, un enunciado complejo compacto (donde el prefijo cuantificacional se encuentra fuera del paréntesis) con un enunciado distribuido del mismo (donde los cuantificadores se encuentran adosados a los componentes de las fórmula).

Bajo las leyes de distribución cuantificacional encontramos los siguientes grupos de leyes:

Distribución de cuantificadores en conjunción.

DGC: $\forall x\, (Px \wedge Qx) \leftrightarrow \forall x\, Px \wedge \forall x\, Qx$

DPC$_1$: $\exists x\, (Px \wedge Qx) \rightarrow \exists x\, Px \wedge \exists x\, Qx$

DPC$_2$: $\exists x\, Px \wedge \forall x\, Qx \rightarrow \exists x\, (Px \wedge Qx)$

Distribución de cuantificadores en disyunción.

DPD: $\exists x\, (Px \vee Qx) \leftrightarrow \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$

DGD$_1$: $\forall x\, Px \vee \forall x\, Qx \rightarrow \forall x\, (Px \vee Qx)$

DGD$_2$: $\forall x\, (Px \vee Qx) \rightarrow \forall x\, Px \vee \exists x\, Qx$

Distribución de cuantificadores en implicación.

DGI$_1$: $\forall x\, (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x\, Px \rightarrow \forall x\, Qx)$

DGI$_2$: $\forall x\, (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\exists x\, Px \rightarrow \exists x\, Qx)$

DPI$_1$: $\exists x\, (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x\, Px \rightarrow \exists x\, Qx)$

DPI$_2$: $(\exists x\, Px \rightarrow \exists x\, Qx) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$

[12] Cf. Ibíd., Pág. 207-215.

Distribución de cuantificadores en Coimplicación.

DGCo$_1$: $\forall x\,(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\forall x\, Px \leftrightarrow \forall x\, Qx)$

DGCo$_2$: $\forall x\,(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\exists x\, Px \leftrightarrow \exists x\, Qx)$

Leyes condicionales de Distribución cuantificacional[13]:

Existen otras leyes de Distribución cuantificacional para cada conectiva a las que podemos llamar o calificar de *condicionales* pues han de sujetarse a la condición de que la variable x no esté libre en A.

Para la conjunción tenemos:

Dist.Cond.G-∧: $A \wedge \forall x\, Px \leftrightarrow \forall x\,(A \wedge Px)$

Dist.Cond.P-∧: $A \wedge \exists x\, Px \leftrightarrow \exists x\,(A \wedge Px)$

Para la disyunción tenemos:

Dist.Cond.G-v: $A \vee \forall x\, Px \leftrightarrow \forall x\,(A \vee Px)$

Dist.Cond.P-v: $A \vee \exists x\, Px \leftrightarrow \exists x\,(A \vee Px)$

Para la implicación tenemos:

Dist.Cond.G$\rightarrow_1$: $\forall x\,(A \rightarrow Px) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x\, Px)$

Dist.Cond.G$\rightarrow_2$: $(\exists x\, Px \rightarrow A) \leftrightarrow \forall x\,(Px \rightarrow A)$

Dist.Cond.P$\rightarrow_1$: $(A \rightarrow \exists x\, Px) \leftrightarrow \exists x\,(A \rightarrow Px)$

Dist.Cond.P$\rightarrow_2$: $(\forall x\, Px \rightarrow A) \leftrightarrow \exists x\,(Px \rightarrow A)$

[13] Cf. Ibíd., Pág. 215-220.

Con todas las leyes de distribución de los cuantificadores, podemos definir el concepto de *Forma normal prenexa*.

Forma Normal Prenexa (FNP) [14]:

Una fórmula se encuentra en *Forma Normal Prenexa* (FNP) cuando todos los cuantificadores presentes en dicha fórmula están situados al inicio de la misma. Una fórmula α está en FNP si, y sólo si, α tiene la siguiente forma:

$$Q_1x_1,\ldots,Q_nx_n\ \beta$$

Donde $Q_1,\ldots,Q_n$ son cuantificadores (universales o existenciales), $x_1,\ldots,x_n$ son variables y β es una fórmula libre de cuantificadores. De tal manera que a la reunión de los cuantificadores ($Q_1,\ldots,Q_n$) se le llama prefijo, mientras que a β se le llama matriz. Dentro de una FNP los cuantificadores no se encuentran negados y el alcance de los mismos llega hasta el final de la fórmula.

Teorema: Para cualquier fórmula cuantificacional α existe una fórmula θ en FNP que es equivalente a α.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en *Introduction to mathematical logic de* Mendelson, en dicha obra el teorema aparece como la proposición 2.30[15], y la prueba corre por inducción sobre el número de ocurrencias de cuantificadores y conectivas en α, es decir, en la complejidad de α.

Un procedimiento para poder transformar una fórmula de la *Lógica de primer orden* a FNP es el siguiente[16]:

Paso 1: Se deben eliminar todos los coimplicadores e implicadores que aparecen en la fórmula. Esta tarea se lleva a cabo mediante la eliminación del coimplicador y las leyes de definición de implicador mediante otras conectivas ({∧, ¬}, {v, ¬}).

---

[14] Cf. Mosterín, J. y Torretti, R. *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*. Alianza. Madrid. 2002. pág. 247 (Entrada: *Forma Normal Prenexa*)

[15] Cf. Mendelson, E. *Introduction to the Mathematical Logical*, Chapman and Hall, London, 1997 (4ta Ed.), Pág. 108.

[16] Existen varios procedimientos para hallar la FNP de una fórmula de la Lógica de primer orden, nosotros seguiremos el método ofrecido por Garrido, M., *Lógica simbólica*, Págs. 362-363.

(R1) $A \leftrightarrow B \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$

(R2) $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

(R3) $A \rightarrow B \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Paso 2: Se deben interiorizar las negaciones que afectan directamente a los cuantificadores; esta tarea se lleva a cabo mediante las leyes de negación de cuantificadores.

(R4) $\neg\forall x\ Px \leftrightarrow \exists x\ \neg Px$

(R5) $\neg\ \exists x\ Px \leftrightarrow \forall x\ \neg Px$

Paso 3: Se deben exteriorizar los cuantificadores existentes respecto a toda conjunción y disyunción. Esta tarea se realiza mediante las cuatro reglas de distribución condicionada del cuantificador en conjunción y disyunción:

(R6)= Dist.Cond.G-∧: $A \wedge \forall x\ Px \leftrightarrow \forall x\ (A \wedge Px)$

(R7) = Dist.Cond.P-∧: $A \wedge \exists x\ Px \leftrightarrow \exists x\ (A \wedge Px)$

(R8)=Dist.Cond.G-v: $A \vee \forall x\ Px \leftrightarrow \forall x\ (A \vee Px)$

(R9)=Dist.Cond.P-v: $A \vee \exists x\ Px \leftrightarrow \exists x\ (A \vee Px)$

Paso 4: Con el fin de no ligar alguna otra variable que originalmente no estaba ligada tras la aplicación de las reglas condicionadas de las distribución del cuantificador, es menester aplicar, obviamente cuando sea el caso, las reglas de mutación de variables ligadas que ya expusimos anteriormente:

(R10)=MVG: $\forall x\ Px \leftrightarrow \forall y\ Py$

(R11)=MVP: $\exists x\ Px \leftrightarrow \exists y\ Py$

Paso 5: También se utilizarán las reglas de eliminación de la doble negación y la ley conmutativa, tanto de la conjunción como de la disyunción, con el fin de llevar a cabo la máxima reducción posible en la fórmula.

(R12) $\neg\neg A \leftrightarrow A$

(R13) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

(R14) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

(Importante es notar que aquí pudiesen agregarse leyes como las de De Morgan que permiten una mayor reducción y elegancia en la fórmula obtenida).

Paso 6 (alternativo): Existe la posibilidad de mantener una absoluta simpleza en el lenguaje de las fórmulas a normalizar a cambio de aumentar el número de reglas de transformación, es decir, se puede omitir el primer paso en pro de la introducción de las siguientes reglas condicionadas:

(R15)= Dist.Cond.G$\to_1$: $\forall x\ (A \to Px) \leftrightarrow (A \to \forall x\ Px)$

(R16)= Dist.Cond.P$\to_1$: $(A \to \exists x\ Px) \leftrightarrow \exists x\ (A \to Px)$

(R17)= Dist.Cond.P$\to_2$: $(\forall x\ Px \to A) \leftrightarrow \exists x\ (Px \to A)$

(R18)= Dist.Cond.G$\to_2$: $(\exists x\ Px \to A) \leftrightarrow \forall x\ (Px \to A)$

(R19)= DGC: $\forall x\ (Px \land Qx) \leftrightarrow \forall x\ Px \land \forall x\ Qx$

(R20)= DPD: $\exists x\ (Px \lor Qx) \leftrightarrow \exists x\ Px \lor \exists x\ Qx$

(R21)= DPI$_1$: $\exists x\ (Px \to Qx) \to (\forall x\ Px \to \exists x\ Qx)$

Es importante señalar que el procedimiento de buscar la FNP de una cierta fórmula α es efectivamente calculable, puesto que este procedimiento termina tras un número finito de pasos, y esto se debe a que la fórmula inicial es de una longitud finita y que el número de reglas es finito (y la aplicación de las mismas se lleva en un numero finito de pasos).

Ejemplos:

1) Encuentre la FNP de la siguiente fórmula: $\exists x\ Qxa \to \exists x\ Px$

Solución n° 1:

1.	$\exists x\ Qxa \to \exists x\ Px$	**(Fórmula inicial)**
2.	$\neg\exists x\ Qxa \lor \exists x\ Px$	**(R3)**
3.	$\forall x \neg Qxa \lor \exists x\ Px$	**(R5)**
4.	$\exists x(\forall x \neg Qxa \lor Px)$	**(R9)**

5.	∃x(∀y ¬ Qya v Px)	**(R10) (se cambio *x* por *y*)**
6.	∃x∀y (¬ Qya v Px)	**(R8) (FNP de 1)**

<u>*Solución n° 2:*</u>

1.	∃x Qxa → ∃x Px	**(Fórmula inicial)**
2.	∃x(∃x Qxa → Px)	**(R16)**
3.	∃x(∃y Qya → Px)	**(R11) (se cambio *x* por *y*)**
4.	∃x∀y (Qya → Px)	**(R18) (FNP de 1)**

2) Encuentre la FNP de la siguiente fórmula:

∀x∃y Pxy v ¬∃x∀y Qxy

<u>*Solución n°1:*</u>

1.	∀x∃y Pxy v ¬∃x∀y Qxy	**(Fórmula inicial)**
2.	∀u∃y Puy v ¬∃x∀y Qxy	**(R10) (se cambio x por u)**
3.	∀u (∃y Puy v ¬∃x∀y Qxy)	**(R8)**
4.	∀u (∃w Puw v ¬∃x∀y Qxy)	**(R11) (se cambio y por w)**
5.	∀u ∃w (Puw v ¬∃x∀y Qxy)	**(R9)**
6.	∀u ∃w (Puw v ∀x¬∀y Qxy)	**(R5)**
7.	∀u ∃w (Puw v ∀x∃y¬ Qxy)	**(R4)**
8.	∀u ∃w (Puw v ∀z∃y¬ Qzy)	**(R10) (se cambio x por z)**
9.	∀u ∃w∀z (Puw v ∃y¬ Qzy)	**(R8)**
10.	∀u ∃w∀z (Puw v ∃*v*¬ Qz*v*)	**(R11) (se cambio y por *v*)**
11.	∀u∃w∀z∃*v* (Puw v ¬ Qz*v*)	**(R9) (FNP de 1)**

<u>*Solución n°2:*</u>

1.	∀x∃y Pxy v ¬∃x∀y Qxy	**(Fórmula inicial)**
2.	∀u∃y Puy v ¬∃x∀y Qxy	**(R10) (se cambio x por u)**
3.	∀u (∃y Puy v ¬∃x∀y Qxy)	**(R8)**
4.	∀u (∃y Puy v ∀x¬∀y Qxy)	**(R5)**
5.	∀u (∃y Puy v ∀w¬∀y Qwy)	**(R10) (se cambio x por w)**

6.	$\forall u \forall w (\exists y\ Puy \vee \neg\forall y\ Qwy)$	**(R8)**
7.	$\forall u \forall w (\exists z\ Puz \vee \neg\forall y\ Qwy)$	**(R11) (se cambio y por z)**
8.	$\forall u \forall w \exists z (Puz \vee \neg\forall y\ Qwy)$	**(R9)**
9.	$\forall u \forall w \exists z (Puz \vee \exists y \neg Qwy)$	**(R4)**
10.	$\forall u \forall w \exists z (Puz \vee \exists v \neg Qwv)$	**(R11) (se cambio y por *v*)**
11.	$\forall u \forall w \exists z \exists v (Puz \vee \neg Qwv)$	**(R9) (FNP de 1)**

Gracias a esta técnica de normalización de fórmulas de la *Lógica de primer orden* el problema de la decisión ha sido profundamente investigado durante la segunda mitad del siglo pasado, dando una rica gama de resultados y, en especial, ofreciendo una demarcación entre conjuntos de fórmulas que son decidibles y las que no lo son de acuerdo a su prefijo. Con respecto a los resultados positivos tenemos que los lógicos P. Bernays y M. Schönfinkel demostraron en 1928 que la clase de fórmulas cuyo prefijo está constituido sólo por cuantificadores universales ($\forall^m$) o sólo por cuantificadores existencias ($\exists^m$) son clases de fórmulas decidibles[17]. También demostraron que las fórmulas cuyo prefijo tenga una cantidad n de cuantificadores universales seguida de una cantidad m de cuantificadores existenciales ($\forall^n \exists^m$) son decidibles[18], una demostración original de este resultado lo ofrecemos más adelante. En 1933 Gödel en un artículo titulado “Sobre el problema de la decisión de la Lógica de primer orden”[19] demuestra que cualquier fórmula en FNP que tenga dos cuantificadores universales seguidos, e.g. ($\exists^n \forall^2 \exists^m$), es decidible. Una lista más detallada y con demostraciones de casos positivos del problema de la decisión para la *Lógica de primer orden* puede encontrarse en *Introduction to mathematical logic* de Alonzo Church y en *Solvable cases of the decisión problem* de W. Ackermann. Ahora bien, para poder listar algunos casos negativos de decidibilidad debemos primero definir el siguiente concepto.

[17] Una demostración puede encontrarse en Hilbert y Ackermann, *Elementos de la lógica teórica*, Editorial Tecnos, Madrid, 1975 (2da. Edición en castellano que corresponde a la séptima edición de la versión alemana)., Págs. 147-148.

[18] Una demostración puede encontrarse en Ibíd., Pág. 148.

[19] Gödel, K. “Sobre el problema de la decisión de la Lógica de primer orden” en Kurt Gödel, *Obras completetas,* Jesús Mosterín (Ed.). Alianza Editorial. Madrid. 1989 (2da edición).

Clase de reducción[20]: Una clase de fórmulas de la *Lógica de primer orden* es una *clase de reducción*, si el problema general de la decisión de la *Lógica de primer orden* es reducible al problema de decisión de esa clase. Dicho de otra forma, una clase A es una *clase de reducción*, si A ⊂ LP (donde LP debe entenderse como el conjunto de todas las fórmulas de $\mathscr{L}_1$) y existe una función recursiva f que a cada fórmula φ Є LP le asigna una, y sólo una, fórmula de A (f(φ)), tal que φ es satisfacible si, y sólo si, f(φ) es satisfacible.

Ahora bien, como la *Lógica de primer orden* es indecidible, entonces cada clase de reducción es indecidible. Con la ayuda de esta noción podemos mencionar los casos negativos del problema de la decisión. El primero fue obtenido en 1920 gracias a Skolem; éste probó que la unión de las clases $\forall^n \exists^m$ es una clase de reducción[21]. En el artículo antes mencionado de Gödel de 1933 el autor probó que la unión de las clases $\forall^3 \exists^m$ es una clase de reducción. Otro resultado negativo fue obtenido por Kalmar 1950; probó que la unión de las clases $\forall^2 \exists^m \forall$ es una clase de reducción. En 1962 los lógicos A. Kahr, E. Moore y H. Wang probaron que $\forall \exists \forall$ es una clase de reducción[22].

Para demostrar el caso anterior que resulta ser decidible (no referimos a las fórmulas cuyo prefijo tienen la forma $\forall^n \exists^m$), necesitamos primero listar las reglas del método de las tablas semánticas siguiendo la presentación que hacen Nerode y Shore en *Logic for applications*[23]. Las reglas son las siguientes:

[20] Cf. Mosterín, J. "El problema de la decisión en la lógica de predicados", Pág. 8

[21] Cf. Ibíd. Pág. 9.

[22] Cf. Ibídem.

[23] Nerode, A. y Shore, R., *Logic for applications*. Springer, 1997. Pág. 98.

1a V A	1b F A	2a V $(\alpha \wedge \beta)$ | V α | V β	2b F $(\alpha \wedge \beta)$ F α F β
3a V $(\neg\alpha)$ | F α	3b F $(\neg\alpha)$ | V α	4a V $(\alpha \vee \beta)$ V α V β	4b F $(\alpha \wedge \beta)$ | F α | F β
5a V $(\alpha \rightarrow \beta)$ F α V β	5b F $(\alpha \rightarrow \beta)$ | V α | F β	6a V $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ F α V α | | F β V β	6b F $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ V α F α | | F β V β
7a V $\forall x\, \varphi(x)$ | V $\varphi(t)$ Para cualquier término t del lenguaje.	7b F $\forall x\, \varphi(x)$ | F $\varphi(c)$ Para una nueva constante c.	8a V $\exists x\, \phi(x)$ | V $\varphi(c)$ Para una nueva constante c.	8b F $\exists x\, \phi(x)$ | F $\varphi(t)$ Para cualquier término t del lenguaje.

Ya presentadas las reglas podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema[24]: Toda fórmula de la *Lógica de primer orden* (sin identidad) tal que su forma normal prenexa quede de la siguiente manera:

$$\forall x_1,\ldots,\forall x_n \exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$$

Es decidible.

Demostración (Sugerida por Nerode y Shore[25]):

Es conocido que la validez de $\forall x_1,\ldots,\forall x_n \exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ se puede reducir a la validez de la fórmula $\exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$, donde $c_1,..,c_n$ son nuevos símbolos constantes (una demostración de este hecho puede encontrarse en *Elementos de lógica teórica* de Hilbert y Ackermann).

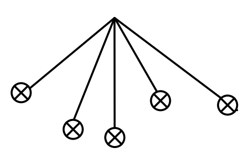
Ahora consideramos todas las fórmulas de la forma $\varphi(c_1,\ldots,c_n,d_1,\ldots,d_m)$, donde $d_i \in \{ c_1,..,c_n \}$. Debemos notar que la cantidad de dichas sentencias es n^m, pues $n^m = |\{ c_1,..,c_n \}^m|$. Luego, como cada una de estas sentencias se puede considerar una fórmula de la *Lógica proposicional*, se le puede aplicar algún procedimiento de decisión para decidir su validez, por ejemplo tablas de verdad, forma normal conjuntiva o tablas semánticas.

Caso 1: Si alguna de las n^m sentencias consideradas es válida, entonces con alguna de dichas sentencias válidas construimos la tabla semántica de la fórmula original $\exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$ y dicha tabla tendrá todos sus caminos contradictorios, por lo tanto, tal fórmula es válida. El siguiente gráfico sugiere lo que se hace en el caso 1:

$$F \quad \exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$$

$$|$$

$$F \quad \varphi(c_1,\ldots,c_n,di_1,\ldots,di_m)$$



Caso 2: Si ninguna de las n^m sentencias consideradas es válida, entonces construimos (considerando las reglas de las tablas semánticas, más el hecho de que cada sentencia tiene al

[24] Cf. Ibid. Pág. 114.

[25] Cf. Ibídem.

menos un camino no contradictorio), un camino no contradictorio (de n^m trozos, uno por cada sentencia) para la tabla semántica de la sentencia:

$$\exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$$

Con dicho camino no contradictorio construimos un modelo de la manera usual ($R^A(ti_1,\ldots,ti_p)$ □ V $R(ti_1,\ldots,ti_p)$), que hará falsa a la sentencia $\exists y_1,\ldots,\exists y_m \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$, por lo tanto, $\exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$ no es válida. El siguiente gráfico sugiere lo que se hace en el caso 2:

F $\exists y_1,\ldots,\exists y_m\, \varphi(c_1,\ldots,c_n,y_1,\ldots,y_m)$

|

F $\varphi(c_1,\ldots,c_n,di_1,\ldots,di_m)$

F $\varphi(c_1,\ldots,c_n,di_1',\ldots,di_m')$

F $\varphi(c_1,\ldots,c_n,di_1'',\ldots,di_m'')$

(n^m) -3 veces.

Con esto termina la demostración del teorema.□

Un ejemplo del teorema anterior es el siguiente: Decidiremos la validez de la siguiente fórmula:

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 (R(y_2,x_2) \rightarrow S(x_1,y_1))$$

Por el teorema antes mencionado es suficiente con decidir la validez de la siguiente fórmula $\exists y_1 \exists y_2 (R(y_2,c_2) \rightarrow S(c_1, y_1))$, donde c_1 y c_2 son nuevos símbolos constantes. Ahora construimos el siguiente producto cartesiano $\{c_1,c_2\}\times\{c_1,c_2\} = \{(c_1,c_1),(c_1,c_2),(c_2,c_1),(c_2,c_2)\}$ y sustituimos a y_1 e y_2 en $\exists y_1 \exists y_2 (R(y_2,c_2) \rightarrow S(c_1, y_1))$. El resultado de tal sustitución son las siguientes sentencias:

1) $R(c_1,c_2) \rightarrow S(c_1, c_1)$

2) $R(c_2,c_2) \rightarrow S(c_1, c_1)$

3) $R(c_1,c_2) \rightarrow S(c_1, c_2)$

4) $R(c_2,c_2) \rightarrow S(c_1, c_2)$

Como ninguna de las cuatro sentencias anteriores es válida, estamos en presencia del caso 2 del teorema y procedemos a construir el camino no-contradictorio de la fórmula $\exists y_1 \exists y_2(R(y_2,c_2) \rightarrow S(c_1, y_1))$:

$$
\begin{array}{c}
F \ \ \exists y_1 \exists y_2(R(y_2,c_2) \rightarrow S(c_1, y_1)) \\
| \\
F \ \ R(c_1,c_2) \rightarrow S(c_1, c_1) \\
| \\
V \ \ R(c_1,c_2) \\
| \\
F \ \ S(c_1, c_1) \\
| \\
F \ \ R(c_2,c_2) \rightarrow S(c_1, c_1) \\
| \\
V \ \ R(c_2,c_2) \\
| \\
F \ \ S(c_1, c_1) \\
| \\
F \ \ R(c_1,c_2) \rightarrow S(c_1, c_2) \\
| \\
V \ \ R(c_1,c_2) \\
| \\
F \ \ S(c_1, c_2) \\
| \\
F \ \ R(c_2,c_2) \rightarrow S(c_1, c_2) \\
| \\
V \ \ R(c_2,c_2) \\
| \\
F \ \ S(c_1, c_2)
\end{array}
$$

Ahora con el camino no-contradictorio construimos la estructura que falseará la sentencia $\exists y_1 \exists y_2(R(y_2,c_2) \rightarrow S(c_1, y_1))$:

$$\mathfrak{A} = <\{c_1,c_2\}, R^{\mathfrak{A}} = \{(c_1,c_2),(c_2,c_2)\}, S^{\mathfrak{A}} = \emptyset, c_1, c_2>$$

Por la construcción de la estructura se tiene que:

$$\mathfrak{A} \not\models \exists y_1 \exists y_2(R(y_2,c_2) \rightarrow S(c_1, y_1))$$

Por lo tanto $\exists y_1 \exists y_2(R(y_2,c_2)\rightarrow S(c_1, y_1))$ no es válida y en consecuencia $\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2(R(y_2,x_2) \rightarrow S(x_1, y_1))$ no es válida.

3. Una relación entre skolemización, validez en la *Lógica de primer orden*, tautologicidad en la *Lógica proposicional* y *El Teorema de indecidibilidad de Church*.

Existe dentro de la lógica formal un teorema que permite caracterizar la validez en la *Lógica de primer orden* mediante la tautologicidad en la *Lógica proposicional*, para enunciar dicho teorema debemos previamente ofrecer una definición y unos teoremas que están íntimamente relacionados con su enunciación.

Definición de equisatisfacibilidad[26]:

Decimos que φ y ψ son *equisatisfacibles*, si ambas son satisfacibles o si ninguna lo es.

Teorema **(**skolemización)[27]:

Por cada sentencia φ en un lenguaje dado $\mathscr{L}$ existe una fórmula universal φ' en un lenguaje ampliado $\mathscr{L}'$ (que se obtiene por la introducción de nuevos símbolos de función al lenguaje $\mathscr{L}$), tal que φ y φ' son equisatisfacibles.

[26] Cf. Ibíd., Pág. 116.
[27] Cf. Ibíd., Pág. 118.

Lema[28]:

Para cualquier sentencia φ de la siguiente forma $\forall x_1,\ldots,\forall x_n \exists y\psi$ de un lenguaje $\mathscr{L}$, existe una sentencia φ' de la forma $\forall x_1,\ldots,\forall x_n\, \psi(y/f(x_1,\ldots,x_n))$[29], en donde f es un símbolo de función que no estaba en $\mathscr{L}$, tal que φ y φ' son equisatisfacibles.

Una demostración, tanto del teorema como del lema, puede encontrarse en *Logic for applications* de Nerode y Shore[30]. A continuación ofrecemos algunos ejemplos de skolemización.

Consideremos la siguiente fórmula en su FNP y obtengamos su skolemización:

1. $\forall u\exists w\forall z\exists v\ (P(u,w) \lor \neg Q(z,v))$ **(Fórmula en FNP)**
2. $\forall u\forall z\exists v\ (P(u,f_1(u)) \lor \neg Q(z,v))$
3. $\forall u\forall z\ (P(u,f_1(u)) \lor \neg Q(z,f_2(u,z)))$ **(Skolemización de 1)**

Consideremos otro ejemplo para hallar la skolemización correspondiente:

1. $\forall x\forall y\exists u\forall z\ (\neg(P(x,y) \land P(y,z)) \lor Q(x,y,u))$ **(Fórmula en FNP)**
2. $\forall x\forall y\forall z\ (\neg(P(x,y) \land P(y,z)) \lor Q(x,y,f(x,y)))$ **(Skolemización de 1)**

Con base en lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema, que relaciona la técnica de skolemización, la validez en $\mathscr{L}_1$ y la tautologicidad en $\mathscr{L}_p$. Una demostración puede encontrar en *Logic for applications* de Nerode y Shore[31].

Teorema:

Sea φ una sentencia en FNP en un lenguaje $\mathscr{L}$, sea ψ la equivalente prenexa de ¬ φ y sea $\theta(\vec{x})$[32] una skolemización abierta de ψ en un lenguaje $\mathscr{L}'$. Tenemos que φ es *válida* si, y sólo si, existen términos $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$[33], de $\mathscr{L}'$ tal que $\theta(\vec{x}_1),\ldots, \theta(\vec{x}_n)$ es una tautología.

---

[28] Cf. Ibídem.
[29] Se sustituye *y* por $f(x_1,\ldots,x_n)$
[30] Cf. Ibidem.
[31] Cf. Ibid., Pág. 123.
[32] $\vec{x}$ es una sucesión finita de variables.

Del teorema anterior se puede inferir que es posible caracterizar la validez en la *Lógica de primer orden* mediante la noción de tautologicidad de la *Lógica proposicional*. Ahora bien, ya que para la *Lógica proposicional* sí existen mecanismos efectivamente calculables que determinen cuándo una fórmula es una tautología o no, surgen inmediatamente las siguientes inquietudes ¿El resultado anterior no contradice el *Teorema de indecidibilidad de Church*? ¿Nos está diciendo el teorema que se puede reducir el problema de la decidibilidad de $\mathscr{L}_1$ al caso de $\mathscr{L}_p$? La respuesta a ambas inquietudes es negativa, el resultado no contradice el *Teorema de indecidibilidad de Church*, ya que sólo nos dice que existen unos n términos, pero no dice cómo podemos elegirlos de manera efectiva, esto es, no se ofrece un algoritmo para la elección de los términos mencionados (no hay un procedimiento mecánico efectivo para determinar los n términos).

[33] $\vec{t}$ es una sucesión finita de términos.